УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Стеван Д. Ђурђевић

ТРАНСПОРТНЕ ОСОБИНЕ ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИХ СПОЈЕВА d-wave СУПЕРПРОВОДНИКА СА ФЕРОМАГНЕТНИМ И АЛТЕРМАГНЕТНИМ МАТЕРИЈАЛИМА

Докторска дисертација

Београд, 2026.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF PHYSICS



Stevan D. Đurđević

TRANSPORT PROPERTIES OF TWO-DIMENSIONAL JUNCTIONS OF d-wave SUPERCONDUCTORS WITH FERROMAGNETIC AND ALTERMAGNETIC MATERIALS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026.

Ментор:

др Зорица Поповић,
ванредни професор
Универзитет у Београду - Физички факултет

Чланови Комисије за одбрану докторске дисертације:

др Ђорђе Спасојевић,
редовни професор
Универзитет у Београду - Физички факултет

др Славица Малетић,
ванредни професор
Универзитет у Београду - Физички факултет

др Радомир Жикић,
научни саветник
Универзитет у Београду - Институт за мултидисциплинарна истраживања

Датум одбране:_____

Захвалница

Ова докторска дисертација урађена је на Физичком факултету Универзитета у Београду. Овим путем желим да изразим своју искрену захвалност ментору, проф. др Зорици Поповић, на помоћи, мотивацији, корисним сугестијама и примједбама, као и на времену и пажњи које ми је посветила током израде и писања дисертације.

Велику захвалност дугујем и проф. др Милици Миловановић, са којом сам направио своје прве праве истраживачке кораке и од које сам много научио.

Посебно захваљујем проф. др Борку Вујичићу и проф. др Предрагу Мирановићу на указаном повјерењу, бројним савјетима, изузетним дискусијама и неизмјерној подршци током мог истраживања.

Захваљујем и свим професорима Физичког факултета који су ми предавали, колегама са студија, као и свим мојим пријатељима у Београду, Никшићу и Подгорици.

Најдубљу захвалност дугујем својој породици. Прије свега, својој жени Драгани и дјеци Максиму, Милици и Јовани, на огромном стрпљењу, љубави и подршци коју су ми пружали током рада на овој дисертацији. Велику захвалност дугујем мајци Оливери, оцу Драшку и брату Раду, који су увијек били уз мене и пружали ми подршку. Посебно мјесто у мом животу припада мојој покојној баби Блажи, са којом сам увијек имао посебан однос и са којом сам провео најљепше тренутке свог дјетињства, али и многе драгоцјене тренутке касније у животу. Хвала јој за љубав, доброту и мудрост које су дубоко обликовале моју личност и остале са мном кроз цијели живот.

У знак сјећања на моју
племениту бабу Блажу (1935-2020.)

ТРАНСПОРТНЕ ОСОБИНЕ ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИХ СПОЈЕВА d-wave СУПЕРПРОВОДНИКА СА ФЕРОМАГНЕТНИМ И АЛТЕРМАГНЕТНИМ МАТЕРИЈАЛИМА

Сажетак:

У овој дисертацији су истраживане транспортне особине дводимензионалних хетероструктура суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима, са посебном пажњом на Џозефсонове спојеве d-wave суперпроводника са феромагнетном баријером. У оквиру Богољубов–де Женовог формализма конструисане су Макмиланове Гринове функције из којих је изведена Фурусаки–Цукада формула за рачунање струјно-фазне карактеристике, генерализована за анизотропне суперпроводнике и спински активне материјале. Показана је могућност контроле стања Џозефсоновог споја релативном оријентацијом магнетизација у феромагнетном двослоју и кристалографских оса d-wave електрода, при чему су добијена стабилна 0, π и $\pi/2$ стања, као и коегзистенција 0 и π стања. Увођењем Рашба спин-орбитног спрезања на границама суперпроводник/феромагнет утврђени су услови за појаву аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта. Показано је да диодна ефикасност може прелазити 40% и да фазна разлика основног стања може имати било коју вриједност у интервалу $[0, 2\pi]$. Симетријском анализом хамилтонијана споја изведена је класификација у три класе спојева на основу услова за постизање аномалног и диодног транспорта, а резултати су потврђени систематским нумеричким прорачунима. Анализирана су Андрејевљева везана стања, чија енергијска структура одређује карактеристике Џозефсонове струје и повезује спектар са различитим типовима струјно-фазног одзива. За спојеве са алтермагнетом анализиране су диференцијалне кондуктансе у Блондер–Тинкхам–Клапвијк формализму, при чему је утврђен заједнички утицај алтермагнетног спинског цијепања, d-wave анизотропије и Рашба спреге на структуру Андрејевљевих стања. Резултати показују да магнетна конфигурација, симетрија параметра уређења и спин-орбитна спрега омогућавају контролу транспортних особина дводимензионалних суперпроводних хетероструктура.

Кључне речи: *d-wave суперпроводљивост, феромагнетизам, алтермагнетизам, Рашба спин-орбитно спрезање, Богољубов-де Женов формализам, Макмиланова Гринова функција, Џозефсонов спој, Андрејевљева рефлексија, Андрејевљева везана стања, аномални и диодни Џозефсонов ефекат.*

Научна област: Физика

Ужа научна област: Физика кондензоване материје

УДК број: 538.9

TRANSPORT PROPERTIES OF TWO-DIMENSIONAL JUNCTIONS OF d-wave SUPERCONDUCTORS WITH FERROMAGNETIC AND ALTERMAGNETIC MATERIALS

Abstract:

In this dissertation, the transport properties of two-dimensional heterostructures of superconductors with ferromagnetic and altermagnetic materials are investigated, with particular emphasis on Josephson junctions of d-wave superconductors with a ferromagnetic barrier. Within the Bogoliubov–de Gennes formalism, McMillan Green's functions are constructed, from which the Furusaki–Tsukada formula for calculating the current-phase relation is derived and generalized to anisotropic superconductors and spin-active materials. The possibility of controlling the state of a Josephson junction through the relative orientation of the magnetizations in a ferromagnetic bilayer and the crystallographic axes of the d-wave electrodes is demonstrated, yielding stable 0, π, and $\pi/2$ states, as well as the coexistence of 0 and π states. By introducing Rashba spin-orbit coupling at the superconductor/ferromagnet interfaces, the conditions for the occurrence of anomalous and diode Josephson effects are established. It is shown that the diode efficiency can exceed 40% and that the ground-state phase difference can take any value in the interval $[0, 2\pi]$. A symmetry analysis of the junction Hamiltonian yields a classification into three classes based on the conditions for achieving anomalous and diode transport, and the results are confirmed by systematic numerical calculations. Andreev bound states are analyzed, whose energy structure determines the characteristics of the Josephson current and connects the spectrum with different types of current-phase response. For junctions with an altermagnet, differential conductances are analyzed within the Blonder–Tinkham–Klapwijk formalism, revealing the combined influence of altermagnetic spin splitting, d-wave anisotropy, and Rashba coupling on the structure of Andreev states. The results demonstrate that the magnetic configuration, the symmetry of the order parameter, and spin-orbit coupling enable the control of the transport properties of two-dimensional superconducting heterostructures.

Keywords: *d-wave superconductivity, ferromagnetism, altermagnetism, Rashba spin-orbit coupling, Bogoliubov–de Gennes formalism, McMillan Green's function, Josephson junction, Andreev reflection, Andreev bound states, anomalous and diode Josephson effects.*

Research field: Physics

Research subfield: Condensed matter physics

UDC number: 538.9

Садржај

1 Увод **1**

2 Теоријски оквир суперпроводљивости **4**
2.1 Бардин-Купер-Шрифер-ова (BCS) теорија . . . 5
2.1.1 Куперови парови . . . 5
2.1.2 BCS хамилтонијан . . . 6
2.1.3 Метод средњег поља . . . 8
2.1.4 Симетрија суперпроводљивог процјепа . . . 10
2.2 Богољубов-де Женов формализам . . . 13
2.3 Ефекат близине и Андрејевљева рефлексија . . . 16
2.3.1 Ефекат близине . . . 16
2.3.2 Андрејевљева рефлексија . . . 18
2.3.3 Површинска Андрејевљева везана стања у d-wave суперпроводницима 21
2.4 Џозефсонов спој . . . 24
2.4.1 Џозефсонова струја . . . 25
2.4.2 Андрејевљева везана стања . . . 27

3 Макмиланова Гринова функција **28**
3.1 Конструкција Макмиланове Гринове функције . . . 28
3.2 Макмиланова Гринова функција у суперпроводним хетероструктурама са спински активним материјалима . . . 30
3.2.1 Ретардована Гринова функција . . . 32
3.2.2 Адвансирана Гринова функција . . . 42
3.3 Израчунавање Џозефсонове струје . . . 50

4 Џозефсонов ефекат у DFFD спојевима **55**
4.1 Модел . . . 56
4.2 Резултати: улога оријентације суперпроводног параметра уређења и оријентације магнетизација . . . 61
4.3 Закључак . . . 68

5 Диодни и аномални Џозефсонов ефекат у DFD спојевима са Рашба спин-орбитном спрегом на границама материјала **69**
5.1 Поријекло спин-орбитне спреге . . . 70
5.2 Модел . . . 72
5.3 Резултати . . . 74
5.3.1 Улога оријентација . . . 75
5.3.2 Улога баријере и параметара на граници . . . 79
5.3.3 Улога температуре . . . 83
5.4 Закључак . . . 85

6 Диодни и аномални Џозефсонов ефекат у спојевима са нехомогеном феромагнетном баријером 86
6.1 Модел . . . 87
6.2 Симетријска анализа . . . 88
6.3 Нумерички резултати . . . 91
6.4 Закључак . . . 101

7 Андрејевљева везана стања у SFFS и DFFD спојевима 103
7.1 Формализам у континуалном моделу . . . 104
7.2 Спојеви са *s*-wave суперпроводницима . . . 105
7.3 Спојеви са *d*-wave суперпроводницима . . . 108
7.4 Закључак . . . 115

8 Андрејевљева везана стања у спојевима алтермагнета и суперпроводника Рашба типа 116
8.1 Алтермагнетизам . . . 117
8.1.1 Минимални модел алтермагнетизма . . . 118
8.2 Модел N/AM/D споја и формализам . . . 119
8.3 Резултати . . . 124
8.4 Закључак . . . 127

9 Закључна разматрања 129

A Симетрије хамилтонијана 131

B Додатни нумерички резултати 134

Литература 136

Биографија 145

Глава 1

Увод

Хетероструктуре које комбинују суперпроводнике и материјале који поларизују спин електрона представљају важну платформу за проучавање међудјеловања суперпроводљивости и другачијих спинских уређења (нарочито феромагнетног), како са становишта фундаменталне физике [1, 2], тако и због могућих примјена у спинтроници [3–8] и квантној електроници [9–12]. Посебно мјесто међу овим системима заузимају Џозефсонови спојеви, у којима су два суперпроводљива кондензата слабо спрегнута преко баријере. Џозефсонова струја зависи од разлике фаза двије суперпроводне електроде, а у најједноставнијем случају описана је синусоидалном зависношћу од фазне разлике у тунелском споју [13, 14].

Један од најзначајнијих примјера Џозефсоновог споја представља онај са феромагнетном баријером. У таквим спојевима измјенско поље доводи до осцилаторног понашања суперпроводних корелација унутар феромагнетног слоја, па промјена дебљине баријере или јачине измјенског поља може изазвати прелазак споја између 0 и π-стања [1, 2, 14–19]. У 0-стању минимум Џозефсонове слободне енергије одговара фазној разлици $\varphi = 0$, док се у π-стању налази у $\varphi = \pi$. У феромагнетним спојевима струјно-фазна релација (CPR) није више синусоидна већ има и доприносе виших хармоника. У близини прелаза између ова два стања допринос виших хармоника CPR-у постаје посебно значајан [1, 20]. Због тога феромагнетна баријера не представља само елемент који слаби суперпроводну спрегу, већ омогућава активну контролу равнотежне фазе Џозефсоновог споја. У спојевима са два феромагнетна слоја додатни степен слободе представља релативна оријентација магнетизација, што омогућава промјену између различитих стања споја без промјене дебљине баријере [21–23].

Још комплекснија структура CPR појављује се када суперпроводне електроде имају d-wave симетрију параметра уређења. За разлику од изотропног s-wave случаја, знак и амплитуда d-wave параметра уређења зависе од правца кретања квазичестице на Фермијевој површи. Усљед тога својства Џозефсоновог споја постају осјетљива на кристалографску оријентацију електрода, а CPR може да садржи значајне више хармонике чак и када је баријера немагнетна [16, 24–29]. Промјена знака параметра уређења дуж различитих квазичестичних праваца омогућава појаву π-стања Џозефсоновог споја, као и сложенијих фазних стања. У комбинацији са феромагнетном баријером могуће је остварити више стабилних и метастабилних равнотежних стања. Посебно је показано да се, зависно од оријентације d-wave електрода и параметара феромагнетне баријере, могу појавити стабилна 0, π и $\pi/2$ стања, као и коегзистенција стабилних 0 и π-стања [30–33]. Ови резултати показују да комбинација анизотропије суперпроводног параметра уређења и магнетног уређења омогућава контролу особина CPR на више начина него у конвенционалним спојевима.

У Џозефсоновим спојевима са очуваном симетријом просторне и временске инверз-

ије CPR мора бити непарна функција фазне разлике, $I(\varphi) = -I(-\varphi)$. Због тога је Џозефсонова струја за нулту фазну разлику суперпроводних кондензата ($\varphi = 0$) једнака нули, а критичне струје у супротним смјеровима имају једнаке интензитете. Ситуација се битно мијења када су поменуте симетрије истовремено нарушене. Такво нарушавање може настати, на примјер, у присуству измјенског поља и спин-орбитног спрезања и тада може да се јави ненулта Џозефсонова струја при нултој фазној разлици, $I(\varphi = 0) \neq 0$, што представља појаву која се назива аномалним Џозефсоновим ефекатом (енг. anomalous Josephson effect, AJE). AJE је теоријски предвиђен и анализиран у различитим типовима Џозефсонових спојева комбиновањем магнетизма и спин-орбитног спрезања, гдје нарушавање релевантних симетрија доводи до аномалног фазног помака у CPR [34–52].

Исти скуп нарушених симетрија може довести и до нереципрочног Џозефсоновог транспорта, при којем критичне струје у супротним смјеровима нијесу једнаке по интензитету. Ова појава, позната као Џозефсонов диодни ефекат (енг. Josephson diode effect, JDE), представља још један облик нереципрочног одзива Џозефсоновог споја [53–62]. За њено квантитативно описивање може се увести тзв. диодна ефикасност, $Q = (I_c^+ - |I_c^-|)/(I_c^+ + |I_c^-|)$, гдје I_c^+ и I_c^- представљају максималну и минималну вриједност Џозефсонове струје у CPR, респективно. Експериментално откриће суперпроводног диодног ефекта у суперрешеткама, са неколико процената нереципрочности, подстакло је даља истраживања овог феномена у Џозефсоновим спојевима, гдје су остварене знатно веће вриједности диодне ефикасности [63, 64].

Са теоријског становишта, AJE и JDE нијесу независне појаве, већ су повезане са промјенама облика CPR које настају усљед нарушења симетрија система. Посебно је значајно присуство виших хармоника у CPR, који заједно са аномалним косинусним члановима могу произвести изразито нереципрочан одзив. Због тога су AJE и JDE постали предмет интензивних теоријских и експерименталних истраживања у различитим суперпроводљивим хетероструктурама [65–85]. Поред фундаменталног значаја, могућност контроле смјера Џозефсонове струје отвара перспективу за примјену ових спојева у недисипативним логичким колима, спинтроничким меморијским уређајима и квантним рачунарским архитектурама.

Микроскопско разумијевање ових појава уско је повезано са Андрејевљевим везаним стањима (енг. Andreev bound states, ABS). У кратким (енг. short junctions) и чистим Џозефсоновим спојевима транспорт је у великој мјери одређен дискретним стањима, са енергијама нижим него што је енергија суперпроводног гепа, која настају усљед вишеструких Андрејевљевих рефлексија између двије суперпроводне електроде [25, 27, 36, 44, 86–92]. Фазно зависни спектар ABS-а одређује допринос појединачних транспортних канала као и појединачних спинских бендова Џозефсоновој струји и зато директно дефинише квалитативне особине CPR-а. Када су временска и просторна инверзија истовремено нарушене, асиметрија ABS спектра у односу на промјену знака фазне разлике може довести до коначне аномалне струје и различитих критичних струја у супротним смјеровима [44, 74, 93–95]. Фазна асиметрија ABS спектра резултује појавом $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$ хармоника у различитим каналима транспорта [65, 81, 96], што доводи до AJE и JDE.

Посљедњих година посебну пажњу привукла је нова класа магнетних материјала, позната као алтермагнети [97–105]. Карактерише их импулсно зависно, анизотропно и нерелативистичко спинско цијепање електронских енергетских бендова, уз одсуство укупне магнетизације [102, 103]. Супротни спинови на чворовима решетке нијесу повезани транслационом или инверзионом симетријом, као код конвенционалних антиферомагнета, већ одговарајућим трансформацијама ротације или рефлексије кристала. Посљедица тога је импулсно зависно спинско цијепање са парним (even-parity) параметром уређења као што су d-wave, g-wave и друге [102, 103]. Међу материјалима у којима су експериментално

и теоријски проучаване алтермагнетне особине издвајају се RuO_2 [99, 100, 103] и MnTe [106–108].

Интеракција алтермагнетизма и суперпроводности отвара могућност остваривања транспортних појава које нијесу карактеристичне за суперпроводне хетероструктуре са конвенционалним магнетима. У спојевима алтермагнета и суперпроводника Андрејевљева рефлексија може јако да зависи од оријентације кристала [109–111] и да буде спински поларизована [112]. У Џозефсоновим спојевима са синглетним суперпроводницима и d-wave алтермагнетном баријером показано је да, упркос одсуству укупне магнетизације, може доћи до осцилација између 0 и π-стања споја при промјени дужине споја или јачине алтермагнетног поља спинског цијепања [113, 114]. Такође, могућа је и реализација φ-Џозефсонових спојева [115, 116]. Ово је и даље предмет интензивних истраживања.

Циљ дисертације је испитивање транспортних својстава дводимензионалних хетероструктура d-wave суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима и утврђивање њихове зависности од магнетног уређења, кристалне оријентације и спин-орбитног спрезања. С обзиром на то да разматрамо чисте, балистичке спојеве, транспортна својства система проучавамо у оквиру Богољубов–де Женовог (BdG) формализма. У Џозефсоновим спојевима са два феромагнетна слоја испитује се утицај релативне оријентације магнетизација, оријентације суперпроводних електрода и дебљине феромагнетне баријере на појаву различитих фазних стања споја, 0, π, $\pi/2$ и могућих коегзистенција стања [33]. Затим се анализира улога Рашба спин-орбитног спрезања на границама различитих материјала у спојевима са једним феромагнетним слојем, са посебним фокусом на појаву аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта [81]. На то се надовезује проучавање спојева са два феромагнетна слоја и Рашба спрезањем, гдје су, на основу симетрија система и услова потребних за појаву AJE и JDE, спојеви класификовани у три класе. Такође, истраживана је и структура фазно зависних ABS спектара, као и њихов допринос укупном транспорту наелектрисања [96]. Коначно, у хетероструктурама нормалног метала, алтермагнета и d-wave суперпроводника проучава се утицај алтермагнетне поларизације спина, анизотропије суперпроводног параметра уређења и Рашба спин-орбитног спрезања на структуру ABS и диференцијалне кондуктансе.

Глава 2

Теоријски оквир суперпроводљивости

Феномен суперпроводљивости представља једно од најзначајнијих открића у физици кондензоване материје. Први пут је уочен 1911. године, након што је Хеике Камерлинг Онес (Heike Kamerlingh Onnes) у Лајдену успио да утечни хелијум 1908. године [117], чиме је омогућено експериментално истраживање материјала на веома ниским температурама. Испитујући електричну отпорност живе при смањењу температуре, Камерлинг Онес је открио да она нагло нестаје испод критичне температуре од 4.2 K [118]. Ово откриће означило је почетак проучавања суперпроводног стања материје.

Даљи значајан напредак остварен је 1933. године, када су Мајснер (Walther Meissner) и Ошенфелд (Robert Ochsenfeld) открили да суперпроводници избацују магнетно поље из своје унутрашњости, што је данас познато као Мајснеров ефекат [119]. Ова особина показује да суперпроводници не представљају само идеалне проводнике без електричног отпора, већ и идеалне дијамагнетике.

Прво теоријско објашњење суперпроводности дали су браћа Лондон (Fritz London, Heinz London) 1935. године у оквиру класичне електродинамике. Њихова теорија успјешно описује основне електромагнетне особине суперпроводника, укључујући избацивање магнетног поља и одсуство отпора, али не даје микроскопски механизам настанка суперпроводног стања [120].

Велики корак остварен је 1950. године када су Виталиј Гинзбург (Vitaly L. Ginzburg) и Лев Ландау (Lev D. Landau) развили макроскопску теорију суперпроводности. Према Гинзбург–Ландауовој теорији, суперпроводно стање настаје као резултат фазног прелаза другог реда, а уводи се комплексни параметар уређења који описује стање система у близини критичне температуре [121].

Микроскопско објашњење суперпроводности дато је 1957. године у теорији Бардина, Купера и Шрифера (Bardeen–Cooper–Schrieffer) (у даљем тексту BCS) [122], која показује да и слаба привлачна интеракција између електрона у металу може довести до формирања везаних парова електрона, познатих као Куперови парови [123]. Ови парови кондензују у колективно квантно стање које омогућава проводност без електричног отпора. Касније је Богољубов (Nikolay N. Bogolyubov) развио дијагонализацију BCS хамилтонијана методом самоусаглашеног поља [124], док је Горков (Lev P. Gor'kov) показао везу између BCS теорије и Гинзбург–Ландауовог формализма кроз параметар уређења [125, 126].

Феномени на граници нормалног метала и суперпроводника, као и у сложеним хетероструктурама, додатно су проширили разумијевање овог стања материје. Тако је уочен ефекат продирања суперпроводних особина у нормални метал, познат као ефекат близине [127]. Теоријски допринос овом феномену дали су Купер (1961) [128] и де Жен (Pierre-Gilles de Gennes) (1964) [129]. Џозефсон (Brian Josephson) је 1962. године предвидио постојање суперструје која може да тече између два суперпроводника раздвојена танком изолаторском баријером, што је данас познато као Џозефсонов ефекат [13]. Андрејев

(Alexander F. Andreev) је 1964. године описао процес на граници нормалног метала и суперпроводника, познат као Андрејевљева рефлексија, при којем електрон из нормалног метала може да пређе у суперпроводник, формирајући Куперов пар, уз рефлексију шупљине у нормалној области [130].

У наредним деценијама истраживања су се фокусирала на комплексне суперпроводне хетероструктуре и њихову могућу примјену у технологији, посебно у области квантне електронике. Посебан подстицај развоју области представљало је откриће високотемпературне суперпроводности 1986. године у керамици LaBaCuO, за шта су Беднорц (Johannes Georg Bednorz) и Милер (Karl Alexander Müller) добили Нобелову награду [131]. Недуго затим откривен је материјал $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO), који показује суперпроводна својства на температури од 94 K [132]. Ова открића отворила су интензивна истраживања високотемпературних суперпроводника.

У новије вријеме пронађени су материјали који показују суперпроводност при још вишим температурама, али под екстремно високим притисцима, укључујући и системе који се приближавају собној температури [133, 134]. Упркос значајном напретку, механизми остваривања суперпроводности у овим материјалима и даље представљају активну област истраживања.

2.1 Бардин-Купер-Шрифер-ова (BCS) теорија

Прва микроскопска теорија суперпроводљивости, коју су 1957. године дали Бардин, Купер и Шрифер [122], базира се на претходном Куперовом резултату да је Ферми гас електрона на нултој температури, $T = 0$, нестабилан у односу на формирање парова електрона у везаном стању, без обзира на то колико је та веза слаба [123]. У овом поглављу навешћемо основе BCS теорије, о чему се више детаља може наћи у референцама [135–137].

2.1.1 Куперови парови

Ако се посматра прости модел Фермијевог мора електрона на $T = 0$ коме су додата два електрона који интерагују међусобно, али не и са онима у Фермијевом мору осим преко Паулијевог принципа искључења, очекује се да је стање ова два електрона које посједује најнижу енергију оно при коме електрони имају једнаке и супротно усмјерене импулсе. Таласна функција која описује овакво стање може се генерално написати у облику

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_2}, \tag{2.1}$$

гдје су $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ вектори положаја два електрона, а $a_{\mathbf{k}}$ су коефицијенти линеарне комбинације. Претпостављајући да је интеракција између електрона привлачна, и да постижу синглетно спинско уређење, $\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$, а водећи рачуна о антисиметричности укупне таласне функције, јасно је да њен орбитални дио треба да буде паран у односу на замјену координата $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, и може се написати у облику [135]

$$\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{k>k_F} a_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)). \tag{2.2}$$

Шредингерова једначина за овакав двочестични проблем даје

$$(E - 2\epsilon_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}} = \sum_{k'>k_F} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'}, \tag{2.3}$$

гдје је E енергија пара елктрона, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/(2m)$ је кинетички члан, а $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ је јачина потенцијала при коме се електронски пар са импулсима $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ расијава у пар са импулсима $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Купер је претпоставио да је овај потенцијал привлачан, константан и изотропан, $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -U$, и да дјелује само у уској области енергија изнад Фермијеве енергије [123], тј. између E_F и $E_F + \hbar\omega_D$, гдје је ω_D Дебајева фреквенција која се овђе уводи јер електрони интерагују размјеном фонона у већину конвенционалних суперпроводника. Одавде се налази да је [135]

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_D \exp(-2/(\rho(0)U)), \tag{2.4}$$

уз додатну претпоставку тзв. слабе везе, при којој важи $\rho(0)U \ll 1$, гдје је $\rho(0) = mk_F/(2\hbar^2\pi^2)$ густина стања на Фермијевом нивоу.

Из израза (2.4) се види да је $E < 2E_F$ и да се заиста ради о везаном стању два електрона који чине пар, који се назива Куперовим паром. Такође, овакав резултат се добија док год је интеракција међу електронима привлачна, без обзира на то колико је слаба. Фермијева статистика и постојање Фермијевог мора у позадини су разлог оваквог понашања, јер се везивање неће појавити уколико постоје само два електрона док год привлачна интеракција не пређе неки праг.

2.1.2 BCS хамилтонијан

Подстакнута Куперовом нестабилношћу, BCS теорија предлаже тзв. хамилтонијан спаривања који се у репрезентацији друге квантизације записује као [122, 135]

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}\, \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} U_{\mathbf{k}\mathbf{l}}\, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}\, \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}\, \hat{c}_{-\mathbf{l}\downarrow}\, \hat{c}_{\mathbf{l}\uparrow}, \tag{2.5}$$

гдје је $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/(2m) - E_F$, $U_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$ је матрични елемент спарујуће интеракције у импулсном простору, $\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}$ ($\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}$) је оператор анихилације (креације) електрона са импулсом $\mathbf{k}$ и оријентацијом спина $\sigma =\uparrow$ или $\sigma =\downarrow$. Оператори креације и анихилације задовољавају антикомутационе релације

$$\begin{aligned} \left\{\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}\right\} &= \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}\, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'} + \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}\, \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\, \delta_{\sigma\sigma'}, \\ \left\{\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{c}_{\mathbf{k}'\sigma'}\right\} &= \left\{\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Овај хамилтонијан садржи само чланове који су одлучујући за спаривање електрона у Куперов пар $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$, док су остали чланови изостављени.

BCS теорија предлаже функцију основног стања у облику

$$|\psi_{\mathrm{G}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}\, \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}\right) |\phi_0\rangle, \tag{2.7}$$

гдје је $|\phi_0\rangle$ стање вакуума, а коефицијенти $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ су амплитуде вјероватноће да стање пара $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ буде непопуњено или попуњено, респективно. Услов да функција стања буде нормирана даје везу међу овим коефицијентима

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1, \tag{2.8}$$

који се одређују примјеном варијационог принципа помоћу

$$\delta\langle\psi_{\mathrm{G}}|\hat{H}_{\mathrm{BCS}}|\psi_{\mathrm{G}}\rangle = 0. \tag{2.9}$$

На основу везе (2.8) може се увести смјена

$$u_{\mathbf{k}} = \sin\theta_{\mathbf{k}} \quad \text{и} \quad v_{\mathbf{k}} = \cos\theta_{\mathbf{k}}, \tag{2.10}$$

и варирајући по $\theta_{\mathbf{k}}$ након неколико корака извођења се налази

$$\tan 2\theta_{\mathbf{k}} = \frac{\sum_{\mathbf{l}} U_{\mathbf{kl}} \sin 2\theta_{\mathbf{l}}}{2\xi_{\mathbf{k}}}. \tag{2.11}$$

Ако се дефинишу нове величине

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{l}} U_{\mathbf{kl}}\, u_{\mathbf{l}}\, v_{\mathbf{l}} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{l}} U_{\mathbf{kl}} \sin 2\theta_{\mathbf{l}}, \tag{2.12}$$

и

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}, \tag{2.13}$$

за које ће се испоставити да представљају суперпроводни енергијски процјеп и енергију ексцитација квазичестица, респективно, које ћемо увести у наредном одјељку, добија се

$$\tan 2\theta_{\mathbf{k}} = -\frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\xi_{\mathbf{k}}}, \tag{2.14}$$

као и

$$2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = \sin 2\theta_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}, \quad \text{и} \quad v_{\mathbf{k}}^2 - u_{\mathbf{k}}^2 = \cos 2\theta_{\mathbf{k}} = -\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}. \tag{2.15}$$

Замјењујући (2.15) у (2.12) добијамо самоусаглашену једначину за $\Delta_{\mathbf{k}}$:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{l}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{l}}^2 + \Delta_{\mathbf{l}}^2}} U_{\mathbf{kl}}. \tag{2.16}$$

У BCS апроксимацији интеракција је ефективно привлачна и константна, $U_{\mathbf{kl}} = -U$, али само за електроне који се налазе унутар енергијског интервала ширине Дебајеве енергије, $\hbar\omega_D$, у околини Фермијевог нивоа. Тада се из (2.16) добија

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta \approx 2\hbar\omega_D \exp(-1/(\rho(0)U)), \tag{2.17}$$

опет узимајући у обзир апроксимацију слабе везе $\rho(0)U \ll 1$. Такође, користећи (2.8) и (2.15) налазе се коефицијенти $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$:

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}}\right), \tag{2.18}$$

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}}\right) = 1 - v_{\mathbf{k}}^2. \tag{2.19}$$

Може се показати да је енергија суперпроводног стања нижа од енергије нормалног стања. Разлика у енергијама назива се енергијом кондензације и на $T = 0$ она је [135, 138]

$$U_s(0) - U_n(0) = -\frac{1}{2}\rho(0)\Delta(0)^2, \tag{2.20}$$

гдје је $\Delta(0)$ вриједност суперпроводног енергијског процјепа на температури $T = 0$.

2.1.3 Метод средњег поља

Варијациона метода која је коришћена у претходном одјељку представља добар алат за тражење основног стања система. Међутим, за проучавање особина на коначним температурама и спектра квазичестица погоднија је метода самоусаглашеног поља коју су развили Богољубов [124] и Валатин (John George Valatin) [139] 1958. године, независно један од другог.

Пошто је основно стање BCS хамилтонијана спаривања кохерентна суперпозиција многочестичних стања која се састоје од Куперових парова, очекује се да је очекивана вриједност оператора типа $\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}\,\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}$ ненулта у основном стању. Апроксимација средњег поља генерално се састоји у замјени производа оператора AB са [140]

$$AB \approx \langle A\rangle B + A\langle B\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle, \tag{2.21}$$

при чему је грешка која се на овај начин прави другог реда по девијацијама оператора A и B у односу на њихове очекиване вриједности

$$(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle). \tag{2.22}$$

Ако се уведе да су $A = \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\,\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}$ и $B = \hat{c}_{-\mathbf{l}\downarrow}\,\hat{c}_{\mathbf{l}\uparrow}$ и примијени ова апроксимација на BCS хамилтонијан (2.5) добија се

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}}\,\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\,\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{kl}} U_{\mathbf{kl}} \left(\langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\rangle\,\hat{c}_{-\mathbf{l}\downarrow}\hat{c}_{\mathbf{l}\uparrow} + \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\langle \hat{c}_{-\mathbf{l}\downarrow}\hat{c}_{\mathbf{l}\uparrow}\rangle - \langle \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\rangle\langle \hat{c}_{-\mathbf{l}\downarrow}\hat{c}_{\mathbf{l}\uparrow}\rangle \right). \tag{2.23}$$

Ако се сада дефинишу величине

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{l}} U_{\mathbf{kl}}\langle c_{-\mathbf{l}\downarrow}c_{\mathbf{l}\uparrow}\rangle \quad \text{и} \quad \Delta^{*}_{\mathbf{k}} = -\sum_{\mathbf{l}} U_{\mathbf{kl}}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{l}\uparrow}c^{\dagger}_{-\mathbf{l}\downarrow}\rangle, \tag{2.24}$$

хамилтонијан постаје

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}}\,\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta^{*}_{\mathbf{k}}\,\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}\,\hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} + \mathrm{const.} \tag{2.25}$$

Да би се дијагонализовао овај хамилтонијан уводе се нови фермионски оператори који су линеарна комбинација електронских креационих и анихилационих оператора

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{*}_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v^{*}_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Ова трансформација назива се Богољубовљевом (или Богољубов-Валатиновом) трансформацијом. Пошто су γ-оператори фермионски они задовољавају фермионске антикомутационе релације и из њих се изводи веза

$$\left\{ \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}, \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} \right\} = |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \tag{2.27}$$

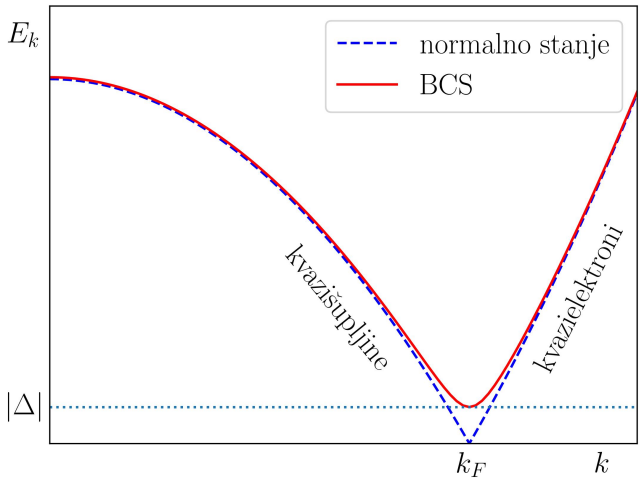
Користећи Богољубовљеве трансформације (2.26) за дијагонализацију хамилтанијана који у дијагоналном облику изгледа као

$$H_{\mathrm{BCS}} = \mathrm{const.} + \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}} + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2} \left(\gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + \gamma^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\gamma_{-\mathbf{k}\downarrow} \right), \tag{2.28}$$

налази се да функције $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ треба да задовоље релације (2.18) и (2.19) које су добијене и у претходном одјељку варијационом методом. Уколико се претпостави да важи $\xi_{-\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}}$ и $|\Delta_{-\mathbf{k}}| = |\Delta_{\mathbf{k}}|$ што је посљедица симетрије временске инверзије долази се до

$$H_{\mathrm{BCS}} = E_{\mathrm{BCS}} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}}\, \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\gamma_{\mathbf{k}\sigma}, \tag{2.29}$$

гдје је $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}} + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}$ енергија квазичестичних ексцитација. По аналогији са Ландауовом теоријом Ферми течности ове квазичестице називамо квазиелектронима и квазишупљинама. Дисперзиона релација нормалног и BCS стања приказана је на слици 2.1. Сада



Слика 2.1: Квазичестичне енергије у зависности од импулса k. BCS дисперзија (црвена пуна линија) показује енергијски процјеп једнак Δ, док га у нормалном стању (плава испрекидана линија) нема.

је константа која се појављује у хамилтонијану (2.25) замијењена са E_{BCS} што представља енергију система када у њему нема квазичестица. Чињеница да E_{BCS} зависи од температуре преко $\langle \hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}\hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle$ показује да кондензат генерално није BCS основно стање које је раније дискутовано. Међутим, може се показати да се у лимесу $T \to 0$ оно поклапа са основним стањем.

Користећи Богољубовљеве трансформације у дефиницији параметра уређења (2.24) налази се

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbf{k}} &= -\sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \left[1 - 2n_F(E_{\mathbf{k}'})\right] \\
&= -\sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}'} + |\Delta_{\mathbf{k}'}|^2}} \left[1 - 2n_F(E_{\mathbf{k}'})\right] \\
&= -\sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \left[1 - 2n_F(E_{\mathbf{k}'})\right],
\end{aligned} \tag{2.30}$$

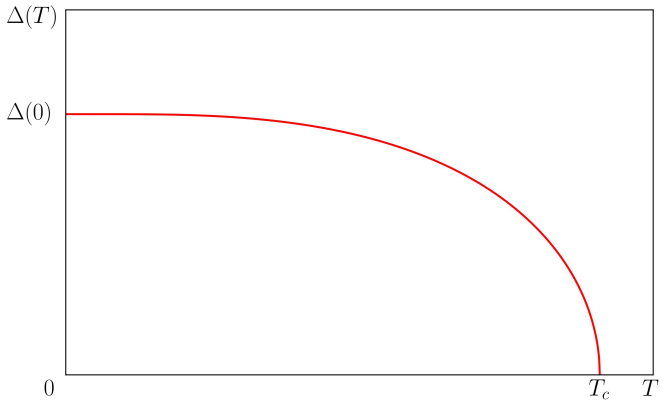
при чему је искоришћено да је $\langle \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}'\uparrow}\gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}\rangle = n_F(E_{\mathbf{k}'})$, $\langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}\gamma^{\dagger}_{-\mathbf{k}'\downarrow}\rangle = 1 - n_F(E_{\mathbf{k}'})$, $\langle \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}'\uparrow}\gamma^{\dagger}_{-\mathbf{k}'\downarrow}\rangle = 0$ и $\langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}\gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}\rangle = 0$. Овдје је $n_F(E_{\mathbf{k}})$ Фермијева функција расподјеле

$$n_F(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\exp(\beta E_{\mathbf{k}}) + 1}, \tag{2.31}$$

гдје је $\beta = 1/k_B T$, а k_B је Болцманова константа. Увођењем BCS апроксимације да је $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -U$ и $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}'} = \Delta$, након преласка са суме на интеграцију, претходна самоусаглашена једначина (2.30) постаје

$$\frac{1}{\rho(0)U} = \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}. \tag{2.32}$$

Рјешавањем ове једначине добија се зависност енергијског процјепа од температуре, $\Delta(T)$, која је приказана на слици 2.2.



Слика 2.2: Зависност вриједности енергијског процјепа суперпроводника од температуре.

Из једначине (2.32) може се одредити и критична температура, T_c, на којој нестаје особина суперпроводљивости и енергијски процјеп се затвара, $\Delta(T_c) \to 0$, па се може наћи и однос енергијског процјепа на нултој температури и критичне температуре [135, 140]

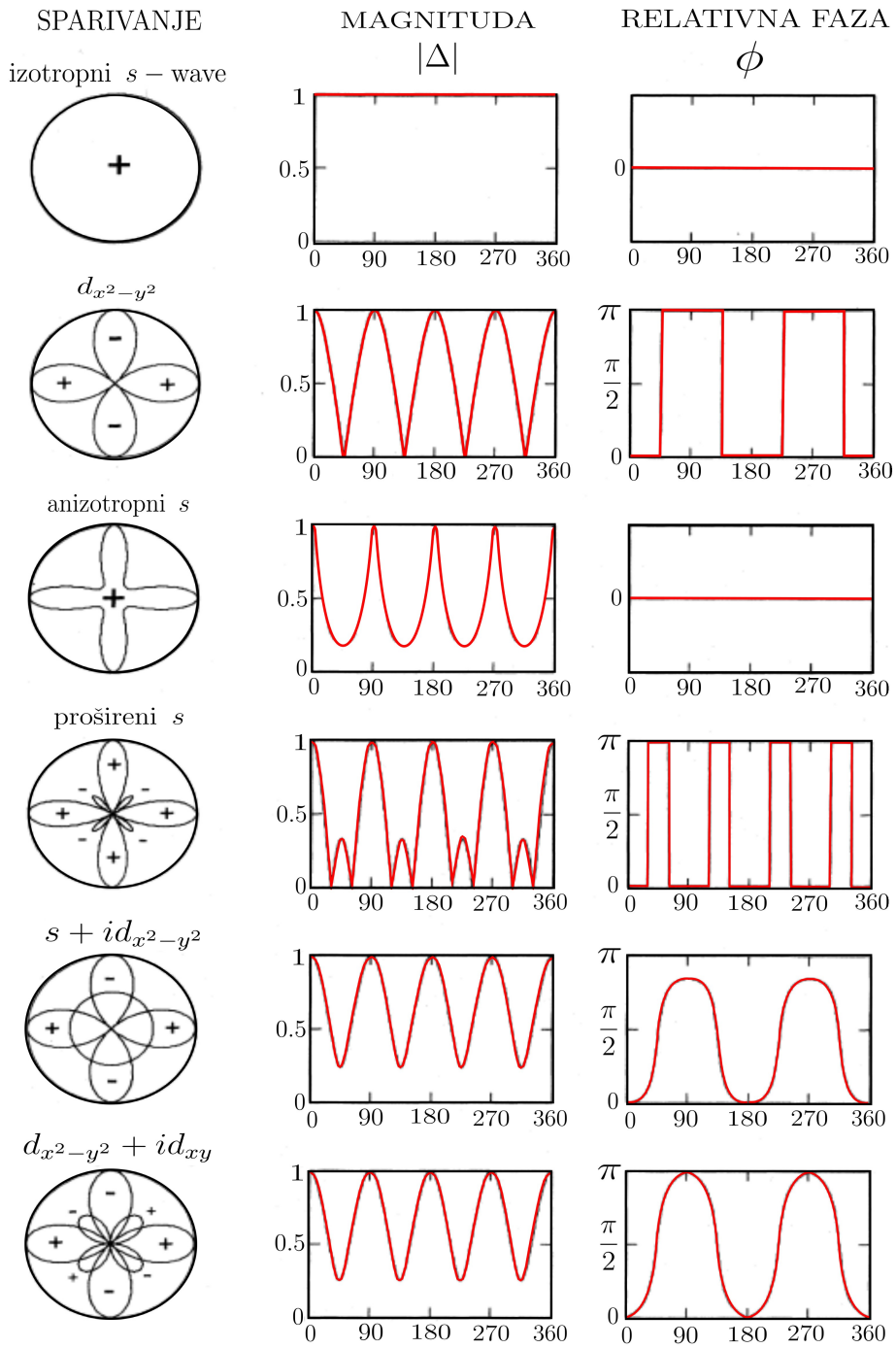
$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1.764. \tag{2.33}$$

Овај однос је близак вриједности измјереној за једноставне елементарне суперпроводнике. На примјер, за калај се добија $\Delta(0)/(k_B T_c) \approx 1{,}73$. Међутим, за суперпроводнике са јачим електронско-фононским спрезањем, као што је жива и неконвенционални суперпроводници, слагање с теоријским резултатом није задовољавајуће. То је дјелимично посљедица поједностављеног модела у коме интеракција не зависи од температуре, а не толико недостатка апроксимације средњег поља [140].

2.1.4 Симетрија суперпроводљивог процјепа

Многи експерименти и теоријска предвиђања везана за високотемпературне суперпроводнике указују на одступање од изотропне s-wave симетрије параметра уређења карактеристичне за конвенционалне BCS суперпроводнике. Такви материјали називају се неконвенционалним суперпроводницима [141, 142]. За разлику од конвенционалних суперпроводника, код којих је суперпроводни енергијски процјеп константан на читавој Фермијевој површи, у неконвенционалним суперпроводницима параметар уређења зависи од правца импулса електрона. Као посљедица ове анизотропије могу се јавити нодалне линије или тачке на Фермијевој површи, на којима енергијски процјеп нестаје. Присуство нодова доводи до појаве нискоенергетских квазичестичних ексцитација и значајно утиче на термодинамичка и транспортна својства система.

Симетрија параметра уређења одређена је симетријом кристалне решетке. У општем случају, параметар уређења се мора трансформисати према једној од иредуцибилних репрезентација тачкасте групе кристала. За купратне суперпроводнике релевантна је тачкаста група D_{4h}, при чему конвенционална s-wave симетрија припада репрезентацији A_{1g}, док је доминантна суперпроводна фаза описана $d_{x^2-y^2}$ симетријом, која припада репрезентацији B_{1g} [141]. Одговарајући параметар уређења мијења знак при ротацији за 90°. Управо ова промјена знака представља основно обиљежје d-wave суперпроводности.



Слика 2.3: Магнитуда и фаза суперпроводног параметра уређења за различите симетрије спаривања у купратима. Слика је прилагођена из [24].

Бројни експерименти потврђују овакву слику. Фазно-осјетљиви експерименти на Џозефсоновим спојевима показали су постојање фазног помака за π, што представља директан доказ промјене знака параметра уређења [142]. ARPES техника (енг. Angle-resolved photo-

emission spectroscopy) омогућила је директно одређивање зависности енергијског процјепа од положаја на Фермијевој површи [143]. Додатно, мјерења магнетне дубине пенетрације и специфичне топлоте показују линеарно или степенасто температурно понашање карактеристично за постојање нодалних квазичестичних ексцитација [144]. Иако већина експеримената потврђује доминантну d-wave симетрију у купратима, у појединим материјалима уочена је и s-wave компонента. Таква мијешана стања, попут $d + s$ или $d + is$, могу настати усљед присуства спољашњег магнетног поља, нечистоћа, површинских ефеката или нарушене кристалне симетрије.

На слици 2.3 приказане су неке од могућих симетрија параметра уређења у купратним суперпроводницима. За s-wave симетрију амплитуда и фаза параметра уређења су константне на читавој Фермијевој површи. Насупрот томе, код d-wave симетрије амплитуда нестаје дуж нодалних праваца, док параметар уређења при њиховом преласку мијења знак, што одговара фазном помјерају за π. Због тога експерименти који испитују само амплитуду енергијског процјепа нијесу довољни за једнозначно одређивање симетрије спаривања, већ је неопходно користити фазно-осјетљиве методе [24].

У оквиру BCS теорије, параметар уређења дефинише се као [135, 136]

$$\Delta(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} U(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \left\langle c_{-\mathbf{p}\downarrow} c_{\mathbf{p}\uparrow} \right\rangle , \tag{2.34}$$

гдје $U(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ представља ефективни потенцијал спаривања. Овај израз показује да анизотропија параметра уређења произлази директно из анизотропије ефективне електронске интеракције.

За системе са симетријом просторне инверзије укупна таласна функција Куперовог пара мора бити антисиметрична при замјени електрона. У случају спински синглетног спаривања спински дио таласне функције је антисиметричан, па орбитални дио мора бити симетричан, односно важи

$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(-\mathbf{k}). \tag{2.35}$$

У складу с тим, потенцијал спаривања може се развити по базисним функцијама иредуцибилних репрезентација кристалне групе [145],

$$U = U_s + U_d + \cdots , \tag{2.36}$$

при чему је први члан изотропан и одговара s-wave каналу, док анизотропни други члан описује d-wave спаривање. За тетрагоналне кристале доминантна је $d_{x^2-y^2}$ компонента која има облик

$$\Delta(\mathbf{k}) \sim -2|U_d|(\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2), \tag{2.37}$$

из чега слиједи да параметар уређења можемо написати у облику

$$\Delta = \Delta_0 \cos 2\alpha, \tag{2.38}$$

гдје је α угао између импулса електрона и кристалографске a-осе. Ако је θ угао између правца кретања електрона и лабораторијске x-осе, а β угао између кристалографске a-осе и x-осе, добија се

$$\Delta = \Delta_0 \cos(2\theta - 2\beta), \tag{2.39}$$

што експлицитно показује да се нодални правци одређују оријентацијом кристала. Ова ангуларна зависност представља карактеристичан знак d-wave симетрије и налази се у основи већине експерименталних метода којима се одређује симетрија параметра уређења.

2.2 Богољубов-де Женов формализам

BCS формализам је добар за проучавање особина хомогених суперпроводника. Међутим, када је ријеч о суперпровођивом параметру уређења који варира са промјеном координата, тј. у хетероструктурама које се састоје од суперпроводника и других материјала погодан је Богољубов-де Женов (BdG) формализам. У овом одјељку приказаћемо извођење Богољубов-де Женових једначина [146] у случају кад постоји поларизација спина, тј. кад се ради о споју синглетног суперпроводника са спински активним материјалима [147]. Полази се од хамилтонијана многоелектронског система у репрезентацији друге квантизације у координатном простору

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r}\, \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\left(\mathcal{H}_e - \mathbf{h}(\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma}\right)\psi_\alpha(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}')U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_\beta(\mathbf{r}')\psi_\alpha(\mathbf{r}). \tag{2.40}$$

Овдје су $\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r})$ и $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ оператори креације и анихилације електрона са спином $\alpha \in \{\uparrow,\downarrow\}$ у положају $\mathbf{r}$. Они задовољавају стандардне антикомутационе релације

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}')\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{2.41}$$

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta(\mathbf{r}')\right\} = \left\{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}')\right\} = 0. \tag{2.42}$$

Једночестични хамилтонијан $\mathcal{H}_e$ дат је са

$$\mathcal{H}_e = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu, \tag{2.43}$$

гдје је μ хемијски потенцијал. Уколико у споју постоји спински активни материјал, нпр. феромагнет, описујемо га ефективним Стонеровим измјенским пољем $\mathbf{h}$, а $\boldsymbol{\sigma}$ су Паулијеве матрице, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$. Претпоставља се да је $U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ негативно чиме уводимо ефективну привлачну интеракцију у другом сабирку хамилтонијана (2.40). Такође, интеракција је парна, тј. важи симетрија $U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = U_{\text{eff}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$. У хамилтонијану (2.40) подразумијева се сумирање по поновљеним спинским индексима. У овом раду бавимо се синглетним суперпроводницима, па други сабирак у хамилтонијану можемо реорганизовати на начин да се остварује спаривање електрона супротних спинова

$$\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}')U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_\downarrow(\mathbf{r}')\psi_\uparrow(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r})\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}')U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_\uparrow(\mathbf{r}')\psi_\downarrow(\mathbf{r}). \tag{2.44}$$

Примјењујући сада метод средњег поља, аналогно као у одјељку 2.1.3 и уводећи дефиниције потенцијала спаривања

$$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}') = U_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle\psi_\downarrow(\mathbf{r}')\psi_\uparrow(\mathbf{r})\rangle = -U_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle\psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r}')\rangle, \tag{2.45}$$

$$\Delta^*(\mathbf{r},\mathbf{r}') = U_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}')\rangle = -U_{\text{eff}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}')\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\rangle, \tag{2.46}$$

добија се ефективни хамилтонијан средњег поља

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d\mathbf{r}\Bigg(&\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\big(\mathcal{H}_e - \mathbf{h}(\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma}\big)\psi_\alpha(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}'\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}')\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) + \\ &+ \int d\mathbf{r}'\Delta^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}'\frac{|\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')|^2}{U_{\text{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\Bigg).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Користећи фермионске антикомутационе релације и операторски идентитет

$$[A, BC] = \{A, B\}\, C - B\, \{A, C\} \tag{2.48}$$

добијају се сљедеће комутационе релације [148]

$$[\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \mathcal{H}_{\text{eff}}] = (\mathcal{H}_e - h_z)\, \psi_\uparrow(\mathbf{r}) - (h_x - ih_y)\, \psi_\downarrow(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'), \tag{2.49}$$

$$[\psi_\downarrow(\mathbf{r}), \mathcal{H}_{\text{eff}}] = (\mathcal{H}_e + h_z)\, \psi_\downarrow(\mathbf{r}) - (h_x + ih_y)\, \psi_\uparrow(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'), \tag{2.50}$$

гдје су h_x, h_y и h_z компоненте вектора измјенског поља, $\mathbf{h}$, у Декартовим координатама.

У циљу дијагонализације ефективног хамилтонијана (2.47) оператори поља се могу развити Богољубовљевим канонским трансформацијама

$$\psi_\uparrow(\mathbf{r}) = \sum_n \left(u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) \gamma_n - v_{n\uparrow}^*(\mathbf{r}) \gamma_n^\dagger \right), \quad \text{и} \quad \psi_\downarrow(\mathbf{r}) = \sum_n \left(u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) \gamma_n + v_{n\downarrow}^*(\mathbf{r}) \gamma_n^\dagger \right) \tag{2.51}$$

при чему су амплитуде квазиелектрона и квазишупљина, $u_{n\sigma}$ и $v_{n\sigma}$, изабране тако да дијагонализују ефективни хамилтонијан изражен операторима γ_n

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = E_g + \sum_n E_n \gamma_n^\dagger \gamma_n, \tag{2.52}$$

гдје је E_g енергија основног стања, а E_n су енергије квазичестичних ексцитација.

Да би електронски оператори поља $\psi_\sigma(\mathbf{r})$ задовољавали антикомутационе релације (2.41) и (2.42), и квазичестични оператори γ_n морају да задовољавају фермионске антикомутационе релације

$$\left\{\gamma_n, \gamma_m^\dagger\right\} = \delta_{nm} \quad \text{и} \quad \{\gamma_n, \gamma_m\} = \left\{\gamma_n^\dagger, \gamma_m^\dagger\right\} = 0, \tag{2.53}$$

одакле директно слиједи релација комплетности коју задовољавају амплитуде u и v

$$\sum_n \left[u_{n\sigma}(\mathbf{r}) u_{n\sigma'}^*(\mathbf{r}') + v_{n\sigma}(\mathbf{r}) v_{n\sigma'}^*(\mathbf{r}') \right] = \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.54}$$

Једноставно се показује да важе сљедеће ралације

$$[\mathcal{H}_{\text{eff}}, \gamma_n] = -E_n \gamma_n \tag{2.55}$$

$$\left[\mathcal{H}_{\text{eff}}, \gamma_n^\dagger\right] = E_n \gamma_n^\dagger \tag{2.56}$$

Изједначавањем коефицијената који стоје уз операторе γ_n и $\gamma_n^\dagger$ долази се до једначина које задовољавају квазичестичне амплитуде [25, 146–148]

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}_e - h_z)\, u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) - (h_x - ih_y)\, u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_{n\downarrow}(\mathbf{r}') &= E_n u_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \\
-(h_x + ih_y)\, u_{n\uparrow}(\mathbf{r}) + (\mathcal{H}_e + h_z)\, u_{n\downarrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_{n\uparrow}(\mathbf{r}') &= E_n u_{n\downarrow}(\mathbf{r}), \\
\int d\mathbf{r}' \Delta^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{n\downarrow}(\mathbf{r}') - (\mathcal{H}_e - h_z)\, v_{n\uparrow}(\mathbf{r}) - (h_x + ih_y)\, v_{n\downarrow}(\mathbf{r}) &= E_n v_{n\uparrow}(\mathbf{r}), \\
\int d\mathbf{r}' \Delta^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{n\uparrow}(\mathbf{r}') - (h_x - ih_y)\, v_{n\uparrow}(\mathbf{r}) - (\mathcal{H}_e + h_z)\, v_{n\downarrow}(\mathbf{r}) &= E_n v_{n\downarrow}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Ове једначине познате су под називом Богољубов – де Женове једначине и представљају основу микроскопског описа нехомогених суперпроводних материјала. Богољубов–де Женове једначине које су овдје приказане представљају својствени проблем за квазичестичне ексцитације у присуству просторно зависног суперпроводног параметра уређења и евентуалног поља које цијепа дегенерацију спинских бендова. Њиховим рјешавањем добијају се енергије квазичестица и одговарајуће таласне функције, из којих је могуће израчунати локалну густину стања, струју, магнетизацију и друге физичке опсервабле. Посебно су погодне за проучавање суперпроводљивих хетероструктура код којих долази до израженог ефекта близине и просторне модулације потенцијала спаривања [146, 149].

Пошто је $\mu \gg |\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')|$ може се рећи да се Куперов пар састоји од два електрона са Фермијеве површи и да је потенцијал спаривања одређен правцем квазичестица на Фермијевој површи. Компоненте таласне функције, $u(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$, тада се могу изразити као производ брзо осцилујућег члана $\exp(i\mathbf{k}_F\mathbf{r})$ и споро промјењивих $u(\mathbf{e_k},\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{e_k},\mathbf{r})$ [150]:

$$u[v](\mathbf{r}) = u[v](\mathbf{e_k},\mathbf{r})\exp(i\mathbf{k}_F\mathbf{r}), \tag{2.58}$$

гдје је $\mathbf{e_k} = \mathbf{k}_F/k_F$ јединични вектор који одређује правац квазичестице и $k_F = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$. Да би се процијенио интеграл у (2.57) користи се апроксимација да је величина Куперовог пара, тј. ефективни домет електрон-електрон интеракције, много мањи од скале на којој се мијења спарујући потенцијал. Ако се уведе положај центра масе, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}+\mathbf{r}')$, и релативне координате, $\mathbf{s} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$, уз услов да је задовољена релација

$$\Delta(\mathbf{e_k},\mathbf{r}) = \int d\mathbf{s}\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r})e^{-\mathbf{k}_F\mathbf{x}}, \tag{2.59}$$

што представља ефективни потенцијал спаривања који осјећа честица са импулсом у правцу орта $\mathbf{e_k}$ у положају $\mathbf{r}$, налази се да се интеграли у BdG једначинама (2.57) могу апроксимирати са [150–152]

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}'\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')v_{n\sigma}(\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}'\Delta(\mathbf{s},\mathbf{R})v_{n\sigma}(\mathbf{r}') = \\
&= e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\int d\mathbf{s}\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r}-\mathbf{s}/2)v_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r}-\mathbf{s})e^{-i\mathbf{k}_F\mathbf{x}} = \\
&\approx e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\int d\mathbf{s}\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r})v_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_F\mathbf{x}} = \\
&= e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\Delta(\mathbf{e_k},\mathbf{r})v_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r}) = \\
&= \Delta(\mathbf{e_k},\mathbf{r})v_{n\sigma}(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

и

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r}'\Delta^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')u_{n\sigma}(\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}'\Delta^*(\mathbf{s},\mathbf{R})u_{n\sigma}(\mathbf{r}') = \\
&= e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\int d\mathbf{s}\Delta^*(\mathbf{s},\mathbf{r}-\mathbf{s}/2)u_{n\sigma}(\hat{\mathbf{k}},\mathbf{r}-\mathbf{s})e^{-i\mathbf{k}_F\mathbf{s}} = \\
&\approx e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\int d\mathbf{s}\Delta^*(\mathbf{s},\mathbf{r})u_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_F\mathbf{s}} = \\
&= e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\left[\int d\mathbf{s}\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{s}}\right]^* u_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r}) = \\
&= e^{i\mathbf{k}_F\mathbf{r}}\Delta^*(-\mathbf{e_k},\mathbf{r})u_{n\sigma}(\mathbf{e_k},\mathbf{r}) = \\
&= \Delta^*(-\mathbf{e_k},\mathbf{r})u_{n\sigma}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

У трећем реду израза (2.60) и (2.61) примијењена је апроксимација

$$\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r}-\mathbf{s}/2)\approx\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r})-\frac{\mathbf{s}}{2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r})\approx\Delta(\mathbf{s},\mathbf{r}), \tag{2.62}$$

што је оправдано уколико је дужина кохеренције много већа од величине Куперовог пара. Такође, пошто је ријеч о спински синглетном спаривању (синглетним суперпроводницима) важи да је $\Delta(-\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{r})=\Delta(\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{r})$[1]. Дакле, једначине (2.57) могу се преписати у облику [33, 147]

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}_e-h_z)\,u_{n\uparrow}(\mathbf{r})-(h_x-ih_y)\,u_{n\downarrow}(\mathbf{r})+\Delta(\hat{\mathbf{k}},\mathbf{r})v_{n\downarrow}(\mathbf{r})&=E_nu_{n\uparrow}(\mathbf{r}),\\
-(h_x+ih_y)\,u_{n\uparrow}(\mathbf{r})+(\mathcal{H}_e+h_z)\,u_{n\downarrow}(\mathbf{r})+\Delta(\hat{\mathbf{k}},\mathbf{r})v_{n\uparrow}(\mathbf{r})&=E_nu_{n\downarrow}(\mathbf{r}),\\
\Delta^*(\hat{\mathbf{k}},\mathbf{r})u_{n\downarrow}(\mathbf{r})-(\mathcal{H}_e-h_z)\,v_{n\uparrow}(\mathbf{r})-(h_x+ih_y)\,v_{n\downarrow}(\mathbf{r})&=E_nv_{n\uparrow}(\mathbf{r}),\\
\Delta^*(\hat{\mathbf{k}},\mathbf{r})u_{n\uparrow}(\mathbf{r})-(h_x-ih_y)\,v_{n\uparrow}(\mathbf{r})-(\mathcal{H}_e+h_z)\,v_{n\downarrow}(\mathbf{r})&=E_nv_{n\downarrow}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{2.63}$$

У случају кад измјенско поље није присутно (тј. кад није присутно било које поље које цијепа спинске бендове – spin-splitting field), BdG једначине (2.57) се могу декупловати у два пара једначина и тада је довољно посматрати само један пар који је нпр. [146, 152]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_eu(\mathbf{r})+\int d\mathbf{r}'\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')v(\mathbf{r}')&=Eu(\mathbf{r}),\\
-\mathcal{H}_ev(\mathbf{r})+\int d\mathbf{r}'\Delta^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')&=Ev(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{2.64}$$

гдје је $u(\mathbf{r})=u_\uparrow(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})=v_\downarrow(\mathbf{r})$, или $u(\mathbf{r})=u_\downarrow(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})=v_\uparrow(\mathbf{r})$.

2.3 Ефекат близине и Андрејевљева рефлексија

Када се суперпроводљиви материјал нађе у контакту са другим материјалима дешава се да суперпроводљиве особине "цуре" у тај материјал. Иако се Куперови парови формирају само у суперпроводнику они могу да уђу до неког растојања у материјал са којим је суперпроводник доведен у контакт и на тај начин индукују локалне суперпроводне особине у том материјалу [127].

Ови феномени називају се ефектом близине (енг. proximity effect). С обзиром на то да обезбјеђује елементарни механизам за конверзију електронских стања у нормалном металу у Куперове парове у суперпроводном кондензату, Андрејевљева рефлексија игра централну улогу у објашњењу ефекта близине [130].

2.3.1 Ефекат близине

Спојеви материјала који имају различита уређења доводе до модификације њихових особина у близини њихове међусобне границе. Ако је један од материјала суперпроводник онда се ова појава назива суперпроводним ефектом близине. Теорију ефекта близине развили су 1960-их година де Жен [129, 146, 153, 154] и Вертамер [155, 156] и она описује продирање Куперових парова у нормални метал, када два електрона (или двије шупљине) остају међусобно корелисани у нормалном металу до неког растојања од границе материјала [6]. Ово растојање зависи од степена неуређености у нормалном металу и од темпера-

[1] За триплетне суперпроводнике је $\Delta(-\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{r})=-\Delta(\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{r})$.

туре. У чистим металима дубина продирања одређена је термалном дужином кохеренције

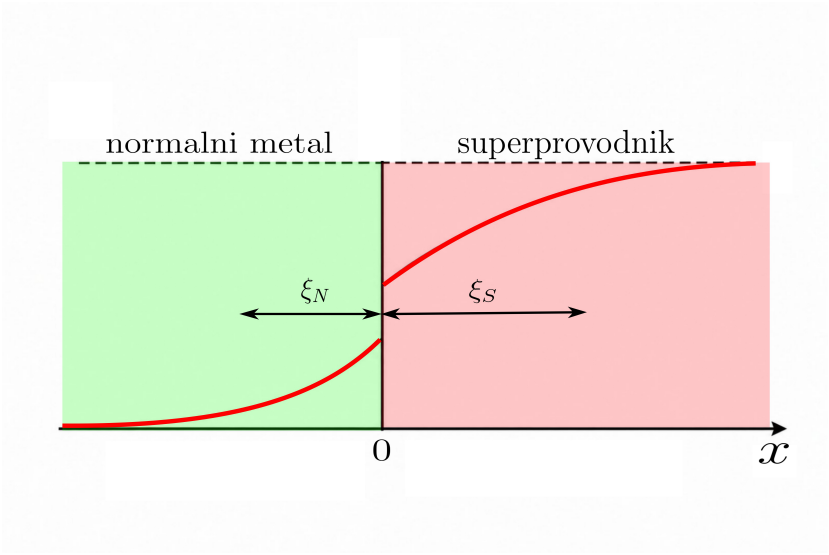
$$\xi_N = \frac{\hbar v_{F,N}}{2\pi k_B T}, \tag{2.65}$$

што се може интерпретирати као растојање које квазичестица пређе крећући се брзином $v_{F,N}$ за вријеме $\hbar/(2\pi k_B T)$ прије него што дође до термалне декохеренције. У случају да је граница између материјала атомски глатка и за балистичко кретање квазичестица, дубина продирања зависи од упадног угла квазичестица па Фермијеву брзину, $v_{F,N}$, треба замијенити њеном компонентом дуж правца нормалног на границу између материјала (нпр. дуж x-осе), $v_{F,N,x}$ [6].

Са друге стране, два електрона која потичу из нормалног метала конвертују се у Куперов пар у суперпроводнику на растојањима

$$\xi_S = \frac{\hbar v_{F,S}}{\pi \Delta(T)}, \tag{2.66}$$

гдје је $v_{F,S}$ Фермијева брзина у суперпроводнику, а $\Delta(T)$ је суперпроводни енергијски процјеп. Ова величина назива се дужином кохеренције и овај појам увео је Пипард 1953. године [157]. На овај начин суперпроводљивост је "ослабљена" у близини границе материјала, што се назива инверзним ефектом близине (енг. inverse proximity effect) [6]. На слици 2.4 квалитативно је приказана зависност суперпроводног уређења у близини границе између нормалног метала и суперпроводника.



Слика 2.4: Зависност суперпроводног параметра уређења од удаљености од границе између нормалног метала и суперпроводника.

У близини границе суперпроводника и феромагнета ефекат близине доводи до експоненцијално опадајућег осцилаторног понашања таласне функције Куперовог пара у феромагнетној средини. Ово се може објаснити помоћу Ларкин-Овчиников-Фулде-Ферел стања о чему ће бити ријечи у наредном одјељку. У чистом случају карактеристична дужина на којој опадају суперпроводне корелације и дужина осцилација су

$$\xi_{F1} = \frac{\hbar v_{F,x}}{2\pi k_B T} \quad \text{и} \quad \xi_{F2} = \frac{\hbar v_{F,x}}{h}, \tag{2.67}$$

респективно [6]. h је јачина измјенског поља у феромагнетној области. Важна особина ефекта близине који се манифестује у спојевима синглетног суперпроводника и фero-

магнета је појава триплетних спинских корелација између електрона са супротном оријентацијом спина, $\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$.

2.3.2 Андрејевљева рефлексија

Приликом транспорта квазичестица кроз суперпроводне хетероструктуре основни механизам конверзије нормалне струје у суперструју (струја Куперових парова) и обратно, на границама споја нормални метал/суперпроводник је процес Андрејевљеве рефлексије. Овај процес интеракције електрона са кондензатом Куперових парова увео је А. Ф. Андрејев 1964. године у свом раду о топлотној проводности мијешаног стања у суперпроводницима [130]. У слично вријеме то су урадили и де Жен и Сент-Џејмс [149].

Механизам Андрејевљеве рефлексије је значајан када постоји промјена суперпроводног параметра уређења дуж правца кретања квазичестица. Дакле, оно се може интерпретирати као расијање индуковано постојањем просторне варијације параметра уређења у вјештачки направљеним слојевитим структурама. Андрејевљева рефлексија је феномен уско повезан са ефектом близине. Она описује корелације између квазичестица са нормалне стране границе које се јављају као посљедица пенетрације Куперових парова. У наставку ћемо дати физичко објашњење Андрејевљеве рефлексије на основу Ландауове теорије Фермијеве течности [6].

Андрејевљева рефлексија у нормалном металу

Претпоставимо да се проводни електрон спина $\uparrow$ и енергије $\mu+\varepsilon$ која је блиска хемијском потенцијалу μ креће у позитивном смјеру x-осе ка суперпроводнику. Такође, претпостављамо да је енергија ексцитације, ε, мања од вриједности енергијског процјепа, Δ, у суперпроводнику. Такав електрон не може да уђе у суперпроводник јер не постоје дозвољена стања унутар енергијског процјепа. Он се може трансмитовати у суперпроводник само заједно са другим електроном спина $\downarrow$, енергије $\mu - \varepsilon$ и са приближно супротним импулсом. На тај начин, као Куперов пар, улазе у суперпроводни кондензат на хемијском потенцијалу 2μ. Када је $\Delta \ll \mu$ дисперзиона релација електрона може да се апроксимира са [6]

$$E(\mathbf{k}) = \mu + \hbar\mathbf{v}_F(\mathbf{k} - \mathbf{k}_F), \tag{2.68}$$

гдје је $\hbar\mathbf{k}_F$ Фермијев импулс, а $\mathbf{v}_F = \mathbf{v}(\mathbf{k}_F)$ Фермијева брзина. Дакле, у оквиру ове апроксимације, енергија ексцитације је $\hbar\mathbf{v}_F(\mathbf{k}-\mathbf{k}_F)$, а групна брзина упадних електрона је $\mathbf{v}_F$. Ако посматрамо квазичестицу спина $\uparrow$ са импулсом $\hbar\mathbf{k}_1 = \hbar(\mathbf{k}_{F1}+\delta\mathbf{k}_1)$ чија је енергија ексцитације $\varepsilon_1 = \hbar\mathbf{v}_{F1}\delta\mathbf{k}_1$, она се спарује са другом квазичестицом спина $\downarrow$ са импулсом $\hbar\mathbf{k}_2 = \hbar(-\mathbf{k}_{F1} + \delta\mathbf{k}_2)$ и ексцитационом енергијом $\varepsilon_2 = -\hbar\mathbf{v}_{F1}\delta\mathbf{k}_2$. Пошто се захтијева да је $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, то доводи до релације $\hbar\mathbf{v}_{F1}(\delta\mathbf{k}_2 - \delta\mathbf{k}_1) = 0$, па можемо да изаберемо $\mathbf{k}_{F1}$ тако да важи $\delta\mathbf{k}_1 = \delta\mathbf{k}_2 = \delta\mathbf{k}$ [6].

Електрон спина $\downarrow$ који сад недостаје еквивалентан је ексцитацији шупљине са енергијом $-\varepsilon_2 = +\varepsilon_1$, и импулсом $-\hbar\mathbf{k}_2 = \hbar(\mathbf{k}_{F1} - \delta\mathbf{k})$, чија је групна брзина $\mathbf{v}(\mathbf{k}_2) \approx -\mathbf{v}_{F1}$ и спин $\uparrow$. Процес се може посматрати као расијање честице наелектрисања e, импулса $\hbar(\mathbf{k}_F + \delta\mathbf{k})$, и брзине $\mathbf{v}_F$ у шупљину наелектрисања $-e$, импулса $\hbar(\mathbf{k}_F - \delta\mathbf{k})$, и брзине $-\mathbf{v}_F$. Овакав пар, електрон-шупљина, је разлог да је густина струје $e\mathbf{v}_F + (-e)(-\mathbf{v}_F) = 2e\mathbf{v}_F$ два пута већа од густине струје упадне честице. Упадни електрон (брзине $\mathbf{v}_{F1}$) је приближно "ретрорефлектован" (брзином $\approx -\mathbf{v}_{F1}$) као шупљина [6]. Овако описани процес је управо процес Андрејевљеве рафлексије [130].

Могући мали угао између правца којим се креће рефлектована шупљина и правца упадне честице јавља се због варијације Фермијеве брзине између импулса $\hbar\mathbf{k}_F$ и $\hbar(\mathbf{k}_F \pm \delta\mathbf{k})$, и реда је ε/E_F, гдје је E_F Фермијева енергија [158]. Ретрорефлексија је идеална када се

упадна честица креће ортогонално на границу и када нема суперструје дуж њене површине. У Андрејевљевом честица-шупљина процесу, енергија и спин су очувани, наелектрисање није, а импулс је само приближно очуван. Наелектрисање $2e$ и (дјелимично) импулс $\hbar\mathbf{Q} = 2\hbar\delta\mathbf{k}$ су трансферовани у суперпроводни кондензат: два електрона са супротним спиновима улазе у суперпроводник, креирајући Куперов пар са ненултим импулсом пара, који се придружује кондензату, доводећи до (мале) суперструје за коначне ексцитационе енергије. Импулс $\hbar\mathbf{Q}$ је тиме дјелимично трансферован на границу, а дјелимично у кондензат резултујући у суперструју. У стању равнотеже, и при одсуству макроскопске суперструје, ова струја се поништава инверзним процесом када Куперов пар улази у нормални метал при чему се квазишупљина конвертује у квазиелектрон [6].

За атомски чисту границу, ако постоји макроскопска суперструја са импулсом Куперовог пара $\hbar\mathbf{k}_S$ у суперпроводнику који је паралелан граници, онда конзервација импулса захтијева да креирани Куперов пар улази у кондензат са импулсом паралелним граници таквим да је $2\hbar\delta\mathbf{k}_{||} = \hbar\mathbf{k}_S$. Добија се (претпостављајући да је $v_{Fx} > 0$) $2\hbar\delta k_x = (2\varepsilon - \hbar\mathbf{v}_F\mathbf{k}_S)/v_{Fx}$. Посебно, за $\hbar\mathbf{k}_S = 0$ само k_x се може промијенити у случају Андрејевљевог процеса. У овом случају, како $\delta\mathbf{k}_{||}$ мора бити нула, импулс Куперовог пара је дат са [6]

$$\hbar Q_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{v_{Fx}}. \tag{2.69}$$

Процес Андрејевљеве рефлексије је фазно кохерентан, тј. фазе упадне честице и андрејевљевски рефлектоване шупљине су корелисане. Ако је параметар уређења суперпроводника $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$, фазна разлика између упадног електрона и рефлектоване шупљине је $\chi(\varepsilon) - \varphi$, а између упадне шупљине и рефлектованог електрона је $\chi(\varepsilon) + \varphi$. Овдје $\chi(\varepsilon) = -\arccos(\varepsilon/|\Delta|)$ описује фазно кашњење због чињенице да током Андрејевљеве рефлексије честица и шупљина продиру у суперпроводник до дужине

$$\xi_c^{(s)} = \frac{\hbar v_F^{(s)}}{\sqrt{|\Delta|^2 - \epsilon^2}}. \tag{2.70}$$

Током њиховог кретања у нормалном металу, фазна кохерентност је изгубљена због мале разлике у импулсима електрона и шупљине, дате са $2\hbar\delta k_x = 2\varepsilon/v_{Fx}$. Кад се усредњи по свим правцима импулса корелациона функција пара се распада са удаљеношћу од границе као $\sim \xi_c^{(N)}/x$, при чему дефинишемо $\xi_c^{(N)} = \hbar v_F/2\varepsilon$. За опсервабле у равнотежи, дужина распада може се добити замјењујући ε у изразу за $\hbar\delta k_x$ са најнижом Мацубарином енергијом $i\pi k_B T$ [159]. Ово доводи до експоненцијалног распада на скали дужине $\hbar v_F/2\pi k_B T$ дуж сваке балистичке трајекторије, што је тачно дужина кохеренције из ефекта близине. На основу ове чињенице видимо да су два феномена, ефекат близине и Андрејевљева рефлексија испреплетени и не могу се разматрати одвојено [6].

Ларкин-Овчиников-Фулде-Ферел стања

Ако се размотри суперпроводљивост у спољњем магнетном пољу или у слабом феромагнетном материјалу, бендови са различитим спином електрона се раздвајају по енергији за $2h$:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \to \varepsilon(\mathbf{k}) - \mathbf{h}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2.71}$$

гдје је $\mathbf{h}$ измјенско поље које се може повезати са ефективним магнетним пољем, $\mathbf{B}_{\text{eff}}$, према релацији $\mathbf{h} = \mu_e \mathbf{B}_{\text{eff}}$ (за слободне електроне магнетни момент је негативан, $\mu_e < 0$). Помјерање у енергији доводи до цијепања Фермијеве површи за двије пројекције спина,

па постоји разлика у импулсима $\mathbf{k}_{F\uparrow}$ и $\mathbf{k}_{F\downarrow}$ [6]

$$\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_{F\uparrow} - \mathbf{k}_{F\downarrow}) = \frac{2h(\mathbf{k}_F)}{\mathbf{v}_F}, \tag{2.72}$$

Овдје је претпостављено да је Фермијева брзина $\mathbf{v}_F$ приближно иста за оба спинска бенда због малог цијепања. Према томе, да би се у систему формирали Куперови парови који се састоје од електрона са Фермијевом енергијом, тј. парови $(\mathbf{k}_{F\uparrow}, -\mathbf{k}_{F\downarrow})$ и $(\mathbf{k}_{F\downarrow}, -\mathbf{k}_{F\uparrow})$, потребно је да они имају коначан импилс $\hbar\mathbf{q}$. Ово доводи до тога да параметар уређења можемо да напишемо као линеарну комбинацију чланова који су одређени различитим импулсима Куперових парова [6]

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n \Delta_n \exp(i\mathbf{q}_n\mathbf{r}). \tag{2.73}$$

Оваква стања теоријски су предвидјели 1964. године, независно једни од других, Фулде и Ферел [160], и Ларкин и Овчиников [161]. Због тога се називају Ларкин-Овчиников-Фулде-Ферел стањима (ЛОФФ)[2]. Из горње формуле уочава се осцилаторни карактер параметра уређења по просторним координатама у оваквим системима.

Андрејевљева рефлексија у феромагнету

Механизам Андрејевљеве рефлексије у феромагнетним металима сложенији је него у нормалним металима [162]. У овом случају електронски бендови су спински поцијепани усљед измјенског поља. Уколико се ради о слабом феромагнету онда је $h \ll E_F$. Упадни електрон са пројекцијом спина $\uparrow$ сад има компоненту импулса нормалну на границу између феромагнета и суперпроводника (нпр. x-компонента) дату са [6]

$$\hbar k_{1x} = \hbar k_{Fx} + \frac{\varepsilon + h}{v_{Fx}}. \tag{2.74}$$

Он се спарује са електроном спина $\downarrow$ чија је x-компонента импулса

$$\hbar k_{2x} = -\hbar k_{Fx} + \frac{\varepsilon + h}{v_{Fx}}. \tag{2.75}$$

Ово ће довести до стварања Куперовог пара чији је импулс центра масе $2(\varepsilon + h)/v_{Fx}$. Са друге стране, ако је упадни електрон спина $\downarrow$, он се спарује са електроном спина $\uparrow$, а знак испред h се мијења у односу на горње једначине, што доводи до тога да је импулс центра масе пара $2(\varepsilon - h)/v_{Fx}$.

Ако се импулс Куперовог пара раздвоји на два дијела, са одговарајућим таласним бројевима $Q_h = 2h/\hbar v_{Fx}$ и $Q_\varepsilon = 2\varepsilon/\hbar v_{Fx}$, видимо да се умјесто синглетног Куперовог пара $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)e^{iQ_\varepsilon x}$ као у случају немагнетног нормалног метала, сада креира Куперов пар облика

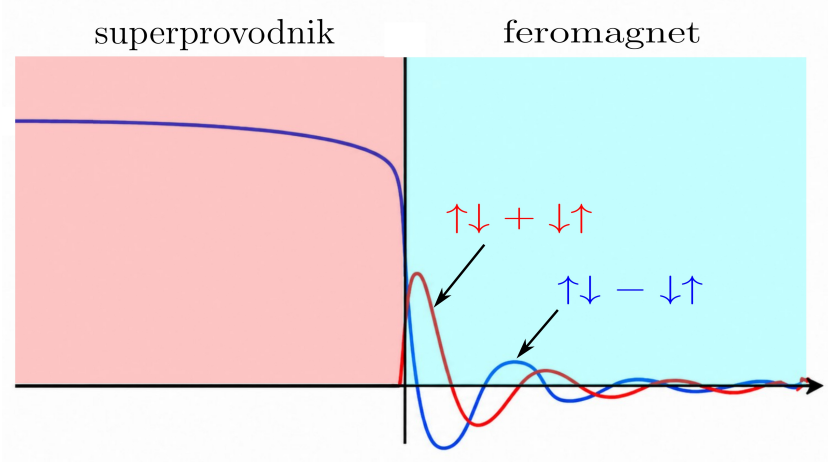
$$(\uparrow\downarrow e^{iQ_h x} - \downarrow\uparrow e^{-iQ_h x})e^{iQ_\varepsilon x}. \tag{2.76}$$

Ово стање пара је управо ЛОФФ типа, само што је сада индуковано ефектом близине, а не у суперпроводном балку. Овакво стање Куперовог пара може се раздвојити на синглетни, $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \equiv |S = 0, S_z = 0\rangle$, и на триплетни дио $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \equiv |S = 1, S_z = 0\rangle$, што даје [6]

$$[\cos(Q_J x)|0,0\rangle + i\sin(Q_J x)|1,0\rangle]\, e^{iQ_\varepsilon x}. \tag{2.77}$$

[2] У западној литератури чешће се користи назив ФФЛО.

Триплетна компонента такође продире и у суперпроводник до дужине кохеренције доводећи до синглет-триплет мијешања у суперпроводнику у близини границе феромагнет/суперпроводник. На слици 2.5 приказана је зависност суперпроводног параметра уређења од удаље-



Слика 2.5: Суперпроводни параметар уређења у близини суперпроводник/феромагнет границе. Синглетна (плава линија) и триплетна компонента (црвена линија) се пригушују у феромагнету осцилујући супротним фазама.

ности од суперпроводник/феромагнет границе. Стање Куперовог пара је мјешавина спинског синглета и триплета. На слици је приказано да синглетна и триплетна компонента осцилују и да се распадају експоненцијално на скали исте дужине. Такође, синглетне амплитуде осцилују као $\cos(Q_h x)$, а триплетне као $\sin(Q_h x)$. Са повећањем измјенског поља феромагнета смањује се дубина продирања Куперових парова у феромагнетну област, тј. дужина на којој долази до декохеренције је краћа [6].

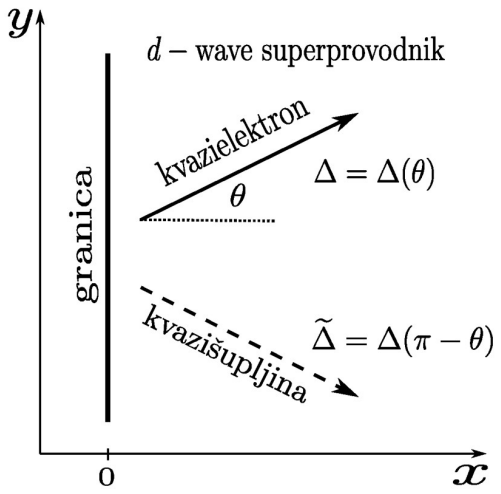
Уколико се посматра спој са нехомогеним феромагнетом, нпр. $S/F_1/F_2$ гдје су феромагнети F_1 и F_2 са различитим правцима измјенског поља тј. са различитим осама квантизације спина, Куперов пар који улази у први феромагнет има синглетну компоненту и триплетну компоненту са супротним оријентацијама спина. Кад триплетна компонента пређе из F_1 у F_2 слој са становишта осе квантизације у другом феромагнету види се као триплет са једнаким оријентацијама спина $\sim (\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow)$. Ови триплети могу да преживе на много већим растојањима и називају се дугометним триплетним корелацијама [163]. Синглетна компонента је ротационо симетрична и распада се на исти начин без обзира на оријентацију осе квантизације спина [4].

2.3.3 Површинска Андрејевљева везана стања у d-wave суперпроводницима

У овом одјељку примијенићемо Богољубов–де Женов формализам да бисмо показали могућност појаве површинских Андрејевљевих везаних стања (surface Andreev bound states, SABS) у d-wave суперпроводницима [151, 152]. За карактеризацију SABS стања потребно је испитати границу или површину неконвенционалних суперпроводника користећи БдГ једначине (2.64). Као модел може се посмарати дводимензионални d-wave суперпроводник са равном границом која је позиционирана у $x = 0$, а суперпроводник је смјештен у полураван $x > 0$ (слика 2.6).

У овако постављеном систему постоји транслаторна инваријантност дуж y-осе, па таласну функцију квазичестица можемо записати у облику

$$\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\theta, x) \exp(ik_y y), \tag{2.78}$$



Слика 2.6: Дводимензионални N/S спој код кога је граница у $x = 0$, а d-wave суперпроводник се налази у области $x > 0$. Квазиелектрони и квазишупљине у суперпроводнику представљене су пуним и испрекиданим стрелицама, респективно, и оне "осјећају" потенцијале спаривања $\Delta = \Delta(\theta)$ и $\widetilde{\Delta} = \Delta(\pi - \theta)$. Смјер стрелице означава смјер групне брзине одговарајућих квазичестица.

гдје је $k_y = k_F \sin\theta$. Таласну функцију у суперпроводнику можемо писати као линеарну комбинацију електронске и шупљинске компоненте као

$$\psi(\theta, x) = c(E,\theta) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \exp(ik_{ex}x) + d(E,\theta) \begin{pmatrix} \widetilde{v} \\ \widetilde{u} \end{pmatrix} \exp(-ik_{hx}x), \tag{2.79}$$

гдје су [152, 164]

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega}{E}\right)}, \qquad & \widetilde{u} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\widetilde{\Omega}}{E}\right)}, \\ v &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega}{E}\right)}\frac{\Delta^*}{|\Delta|}, \qquad & \widetilde{v} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{\Omega}}{E}\right)}\frac{\widetilde{\Delta}}{|\widetilde{\Delta}|}, \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\Omega = \begin{cases} \sqrt{E^2 - |\Delta|^2} & , E \geq |\Delta|, \\ i\sqrt{|\Delta|^2 - E^2} & , -|\Delta| \leq E \leq |\Delta|, \\ -\sqrt{E^2 - |\Delta|^2} & , E \leq -|\Delta|, \end{cases} \tag{2.81}$$

$$\widetilde{\Omega} = \begin{cases} \sqrt{E^2 - \left|\widetilde{\Delta}\right|^2} & , E \geq |\widetilde{\Delta}|, \\ i\sqrt{|\widetilde{\Delta}|^2 - E^2} & , -|\widetilde{\Delta}| \leq E \leq |\widetilde{\Delta}|, \\ -\sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}|^2} & , E \leq -|\widetilde{\Delta}|. \end{cases} \tag{2.82}$$

Увођењем погодних параметара Γ и $\widetilde{\Gamma}$:

$$\Gamma = \frac{v}{u} = \frac{\Delta^*}{E + \Omega}, \tag{2.83}$$

$$\widetilde{\Gamma} = \frac{\widetilde{v}}{\widetilde{u}} = \frac{\widetilde{\Delta}}{E + \widetilde{\Omega}}, \tag{2.84}$$

добија се да је таласна функција квазичестица у суперпроводнику облика [152]

$$\psi(\theta, x) = C(E, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ \Gamma \end{pmatrix} \exp(ik_{xe}x) + D(E, \theta) \begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-ik_{he}x). \tag{2.85}$$

Да бисмо у потпуности одредили таласну функцију $\psi(\theta, x)$ потребно је да одредимо коефицијенте $C(\theta, E)$ и $D(\theta, E)$, што се може урадити намећући граничне услове на таласну функцију у $x = 0$ као

$$\psi(\theta, x = 0) = 0. \tag{2.86}$$

Захтијевајући нетривијална рјешења, налази се да је услов за постојање SABS стања дат са

$$\Gamma\widetilde{\Gamma} = 1. \tag{2.87}$$

Енергију SABS стања добијамо рјешавајући ову једначину по E. У случају кад је $|\Delta| = |\widetilde{\Delta}|$ за енергију SABS стања добија се једноставан израз [151]

$$E_{\mathrm{SABS}} = \Delta_0 \cos\left(\frac{\widetilde{\chi} - \chi}{2}\right) \mathrm{sgn}\left[\sin\left(\frac{\widetilde{\chi} - \chi}{2}\right)\right], \tag{2.88}$$

гдје је Δ_0 максимална вриједност потенцијала спаривања, а локални фазни фактори су

$$\exp\{i\chi\} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \quad \text{и} \quad \exp\{i\widetilde{\chi}\} = \frac{\widetilde{\Delta}}{|\widetilde{\Delta}|}. \tag{2.89}$$

У случају кад је $\Delta = -\widetilde{\Delta}$, или прецизније, кад год је

$$\Delta\,\widetilde{\Delta} < 0, \tag{2.90}$$

имамо да је $\widetilde{\chi} - \chi = \pi$ што је разлог за појаву површинских Андрејевљевих везаних стања нулте енергије $E_{\mathrm{SABS}} = 0$ (zero energy surface Andreev bound states, ZESABS) [165, 166]. ZESABS стања привукла су велику пажњу и постала једно од централних тема приликом проучавања високотемпературних купрата [166]. ZESABS стања експериментално су уочена тунелском спектроскопијом што је дало оправдање за успостављање симетрије спаривања у високотемпературним купратима као синглетно d-wave спаривање [167].

У овом случају потенцијал спаривања може се изразити помоћу угла између кристалне a-осе купрата (јер се један од праваца са максималним спаријућим d-wave потенцијалом поклапа са том осом) и нормале на границу суперпроводника коју у наведеном моделу дефинишемо x-осом. Ако тај угао означимо са β, онда је потенцијал спаривања који осјећа квазичестица која пропагира у правцу дефинисаном углом θ у односу на x-осу дат са

$$\Delta = \Delta_0 \cos(2\theta - 2\beta) \quad \text{и} \quad \widetilde{\Delta} = \Delta_0 \cos(2\theta + 2\beta) \tag{2.91}$$

Користећи услов за појаву ZESABS стања, $\Delta\widetilde{\Delta} < 0$, налази се [25, 152, 165–168]:

(1) за $|\beta| \leq \pi/4$ ZESABS стања се појављују за $\pi/4 - |\beta| < |\theta| < \pi/4 + |\beta|$,

(2) за $\beta = 0$ нема ZESABS стања за било које θ,

(3) за $\beta = \pm\pi/4$ ZESABS стања постоје за свако θ осим за нодални правац $\theta = 0$.

Појава ZESABS стања на површини d-wave суперпроводника има значајан утицај на транспортне особине различитих хетероструктура у којима учествују високотемпературни купрати.

2.4 Џозефсонов спој

Џозефсонови спојеви представљају једну од најважнијих реализација макроскопских квантних ефеката у кондензованој материји. Ријеч је о систему два суперпроводника одвојена танком слабом везом (енг. weak link), која може да буде изолатор, нормални метал или геометријско сужење [169–171]. Кроз такву структуру може да тече суперструја без примијењеног напона, што је посљедица тунеловања Куперових парова усљед преклапања макраскопских таласних функција два суперпроводна кондензата.

Теоријску основу Џозефсоновог ефекта поставио је Брајан Џозефсон (Brian D. Josephson) 1962. године. Он је показао да струја кроз слабу везу зависи од фазне разлике између таласних функција два суперпроводника. Овај резултат је био револуционаран, јер је први пут директно повезао квантну фазу са макроскопски мјерљивим електричним ефектом [13]. Експериментална потврда услиједила је убрзо након тога кад су Андерсон и Ровел демонстрирали Џозефсонов ефекат у SIS (суперпроводник / изолатор / суперпроводник) тунелским спојевима [172].

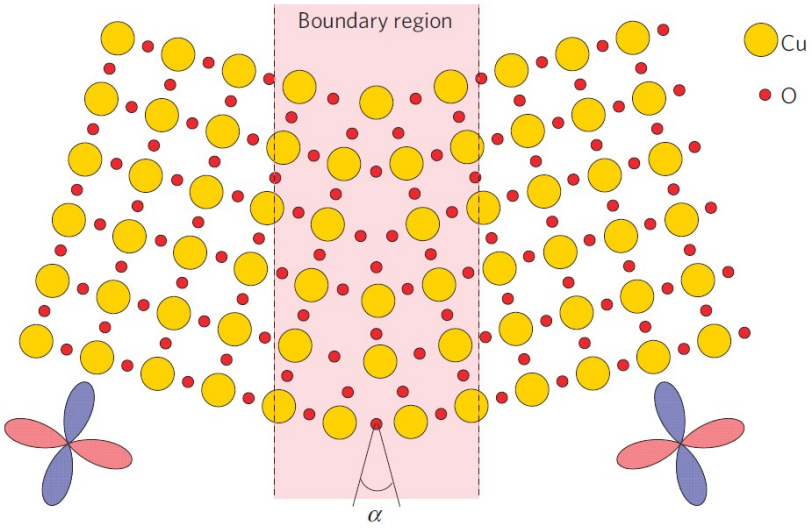
Природа слабе везе одређује транспортна својства споја, због чега се Џозефсонови спојеви најчешће класификују према материјалу који раздваја два суперпроводника [14, 170]. Најједноставнији и историјски први реализовани су SIS спојеви, код којих танка изолаторска баријера омогућава квантномеханичко тунеловање Куперових парова. Они представљају најближу реализацију оригиналног Џозефсоновог модела и због своје репродуцибилности дуго су били доминантни у суперпроводничкој електроници. У SNS спојевима изолатор је замијењен нормалним металом (N), кроз који се суперструја преноси захваљујући ефекту близине. Дебљина и електронска својства нормалног слоја одређују критичну струју и динамику споја [14, 173].

Када слабу везу чини феромагнетни (F) слој настају SFS спојеви. У овим структурама долази до компетиције између суперпроводног и феромагнетног уређења, при чему измјенско поље узрокује осцилаторно понашање суперпроводног параметра уредјења унутар феромагнета. Као посљедица тога може се остварити прелаз између 0 и π Џозефсоновог стања, што SFS спојеве чини посебно значајним за суперпроводничку спинтронику и квантне логичке елементе [1, 2].

Поред ових основних типова, развијен је велики број хетероструктура као што су SINIS, SIFS, SFIFS и друге вишеслојне конфигурације, које омогућавају подешавања транспарентности баријере и поларизације спина. Посљедњих година интензивно се истражују и спојеви у којима слабу везу чине полупроводници, дводимензионални материјали попут графена и тополошки изолатори, због могућности контроле суперструје и реализације егзотичних квантних стања [5, 174].

Код високотемпературних суперпроводника (енг. high temperature superconductors, HTS) ситуација је знатно сложенија него код конвенционалних нискотемпературних материјала. Кратка кохерентна дужина, анизотропија и d-wave симетрија параметра уређења отежавају израду репродуцибилних тунелских баријера [170, 171]. Џозефсонови спојеви најчешће се реализују одговарајућом микроструктуром епитаксијалних филмова. Због тога се код HTS система често говори о технологијама реализације спојева, а не само о типу слабе везе [169, 171].

Најраспрострањенији приступ представљају grain-boundary (зрнаста граница) или би-



Слика 2.7: Схематски приказ симетричног grain-boundary Џозефсоновог споја HTS суперпроводника. Угао мисоријентације између кристалних зрна, α, и оријентација d-wave параметра уређења су приказани. Преузето из [175].

кристални спојеви, код којих граница између два кристална зрна природно дјелује као слаба веза (слика 2.7). Критична струја ових спојева првенствено зависи од угла мисоријентације између кристалних решетки. Алтернативни приступи укључују и тзв. step-edge спојеве, код којих се слаба веза формира на степенастој топографији подлоге, и ramp-edge спојеве, гдје се баријера остварује депозицијом преко претходно формиране косе (ramp) површине. Развојем микро- и нанофабрикационих технологија, попут фотолитографије, електронске литографије и фокусираног јонског снопа, омогућена је реализација Џозефсонових спојева чије су димензије реда неколико десетина нанометара, што је отворило пут интеграцији суперпроводничких квантних кола и сложених Џозефсонових мрежа [14, 169, 171].

2.4.1 Џозефсонова струја

Џозефсон је предвидио да уколико постоји фазна разлика између два суперпроводника раздвојена танком изолаторском баријером, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, Куперови парови могу да прођу кроз баријеру при нултом напону, тако да је резултујућа струја [13]

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi, \tag{2.92}$$

гдје је I_c максимална густина бездисипативног струјног тока (Џозефсонова критична струја). Струјно-фазна релација (енг. current-phase relation, CPR) је фундаментална особина Џозефсонових спојева која представља макроскопски увид у микроскопску физику транспорта Куперових парова. Микроскопско извођење критичне струје из BCS теорије за SIS спојеве дали су Амбегаокар и Баратов [176]

$$I_c(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_N} \tanh \frac{\Delta(T)}{2k_B T}, \tag{2.93}$$

гдје је R_N отпор споја у нормалном стању. На нултој температури, $T = 0$, овај израз се своди на $I_c(T = 0) = \pi\Delta(0)/2eR_N$ што одговара струји у нормалном стању споја при примијењеном напону од $\pi\Delta/2e$. За транспарентне SNS спојеве Кулик је извео два пута већу критичну струју на нултој температури [177], $I_c(0) = \pi\Delta(0)/eR_N$, гдје је сада $R_N =$

$(e^2 v_F \rho(0) S)^{-1}$, а $\rho(0)$ густина стања у нормалном слоју на Фермијевој површи за један спински степен слободе, и S је површина попречног пресјека контакта. У овом споју зависност струје од фазне разлике није синусна, већ постаје "тестераста".

Уколико се на спој два суперпроводника доведе напонска разлика V, трансфер Куперовог пара из једног суперпроводника у други доводи до промјене енергије за $2eV$. Пошто се ради о бездисипативном процесу, ова енергија се појављује у облику израченог фотона фреквенције $2eV/\hbar$. Џозефсон је предвидио да ће се фазна разлика мијењати са временом по закону [13]

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}, \tag{2.94}$$

при чему ће кроз баријеру тећи наизмјенична струја амплитуде I_c са истом фреквенцијом.

CPR, осим у тунелским SIS спојевима, није синусног облика већ се јавља допринос виших хармоника. Пошто је периодична функција фазне разлике са периодом 2π, могуће је записати у облику Фоуријеове декомпозиције [1]:

$$I(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin(n\varphi), \tag{2.95}$$

гдје је највећи допринос првих хармоника. Кад је ријеч о феромагнетним Џозефсоновим спојевима продирање суперпроводних таласних функција у феромагнет праћено је осцилаторним понашањем усљед којег струја може промијенити знак у зависности од дебљине F-слоја и температуре. То је тзв. прелаз из 0-стања у π-стање споја, када фазно зависна слободна енергија која је са струјом повезана као [173]

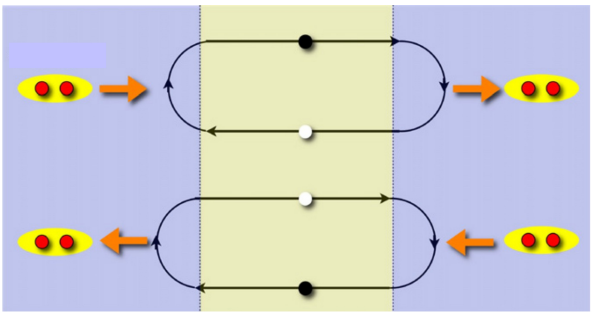
$$I(\varphi) = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi}, \tag{2.96}$$

промијени положај минимума из $\varphi = 0$ у $\varphi = \pi$. При $0 - \pi$-фазним прелазима при којима се губи први хармоник, за одржање коначне критичне струје најзначајнији постаје други хармоник.

CPR јако зависи од симетрије система. Када су очуване симетрије временске инверзије и просторне инверзије које трансформишу $\varphi \to -\varphi$ и $I \to -I$, CPR задовољава релацију $I(\varphi) = -I(-\varphi)$ и њен Фурије развој садржи само синусне чланове. У супротном, када су ове симетрије нарушене, што се може остварити нпр. спин-орбитном интеракцијом и присуством Земановог поља, CPR задовољава $I(\varphi) \neq -I(-\varphi)$, јер слободна енергија споја није више симетрична на трансформацију $\varphi \to -\varphi$, тј. $F(\varphi) \neq F(-\varphi)$. Фуријеов развој CPR сада садржи и косинусне чланове, што даје коначну струју при нултој фазној разлици, $I(\varphi = 0) \neq 0$. Ова појава се назива аномалним Џозефсоновим ефектом. Једна од реализација аномалне струје је у тзв. φ_0-спојевима, гдје постоји додатни фазни помјерај у односу на конвенционални CPR, тј. $I(\varphi) = I_c \sin(\varphi + \varphi_0)$, тако да Џозефсонова слободна енергија има минимум за фазну разлику $\varphi_0 \neq 0, \pi$ [34, 35, 165]. Осим аномалног ефекта, као посљедица нарушења симетрије временске инверзије и просторних инверзија, Џозефсонови спојеви показују особину да је вриједност критичне струје зависна од смјера струје. Вриједност критичне струје, I_c^+, у једном смјеру, није иста као вриједност критичне струје у супротном смјеру, $|I_c^-|$. Ово је тзв. суперпроводни диодни ефекат, који је прво експериментално откривен у суперпроводним суперрешеткама 2020. године [63], а затим у Џозефсоновим спојевима 2022. године [64], гдје је овај ефекат израженији.

2.4.2 Андрејевљева везана стања

У Џозефсоновим спојевима кохерентни транспорт квазичестица кроз баријеру обезбјеђују вишеструке Андрејевљеве рефлексије на границама између баријере и једног и другог суперпроводника. Наиме, електрон који улази из нормалног региона у један суперпроводник бива Андрејевљевски рефлектован у шупљину ка другој граници гдје се поново рефлектује у електрон (слика 2.8). Овај циклични процес вишеструких Андрејевљевих рефлексија води ка квантизацији фазе акумулиране током једне комплетне петље, што резултира дискретним везаним стањима унутар процјепа, који зависе од фазне разлике суперпроводних кондензата [178].



Слика 2.8: Схематски приказ вишеструке Андрејевљеве рефлексије и транспорта Куперових парова преко Андрејевљевих везаних стања. Електрон (црни круг) се рефлектује као шупљина (бијели круг) на граници са десним суперпроводником, а шупљина се затим рефлектује назад као електрон на лијевој граници. Резултат је пренос Куперовог пара кроз Џозефсонов спој. Преузето из [179].

У тунелским, SIS спојевима, Андрејевљева везана стања се формирају на граници са баријером, док се у SNS спојевима везана стања протежу кроз цио нормалан метал унутар суперпроводљивог процјепа. У случају танких баријера (енг. short junctions) постоје само два стања, док се са повећањем дебљине повећава број стања. У најједноставнијем случају кратког једноканалног споја, фазно зависни спектар је дат релацијом [173, 180]

$$E_{\pm}(\varphi) = \pm\Delta\sqrt{1 - \tau\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \tag{2.97}$$

гдје је τ коефицијент трансмисије транспортног канала, а Δ суперпроводни енергијски процјеп. Због своје осјетљивости на фазну разлику суперпроводних електрода, трансмисију канала и геометрију споја, Андрејевљева везана стања представљају кључни концепт у описивању квантног транспорта у Џозефсоновим контактима и природно се јављају у широком спектру суперпроводљивих хетероструктурних система.

Укупна Џозефсонова струја може се изразити као

$$I(\varphi) = \frac{2e}{\hbar}\sum_{n} f(E_n)\frac{\partial E_n(\varphi)}{\partial\varphi}, \tag{2.98}$$

гдје $f(E_n)$ представља Ферми-Диракову расподјелу. Овај израз је општи резултат који повезује спектар Андрејевљевих везаних стања са макроскопском Џозефсоновом струјом [173].

Глава 3

Макмиланова Гринова функција

1968. године Макмилан (W. L. McMillan) је развио теорију Гринових функција која је погодна за израчунавања приликом изучавања појава које су посљедица ефекта близине код нормални метал/суперпроводник спојева [181]. Ова теорија постла је стандард у проучавању суперпроводљивих хетероструктура. Она се примјењује на балистичке спојеве код којих се носиоци наелектрисања, електрони и шупљине, могу представити тзв. кохерентним таласним функцијама [164]. Гринова функција конструише се помоћу ових таласних функција. Приликом њене примјене за израчунавање Џозефсонове струје, предност ове технике је што изведена формула показује јасну кореспонденцију између недисипативног струјног тока и транспорта квазичестица, будући да зависи од коефицијената расијања квазичестица [88].

У овој глави дајемо приказ конструкције ретардоване и адвансиране Макмиланове Гринове функције, као и извођење израза за Џозефсонову струју у спојевима који су проучавани у овој дисертацији.

3.1 Конструкција Макмиланове Гринове функције

Гринова функција се може представити у облику

$$G(x,x',E)=\sum_{\mu}\frac{\langle x|\mu\rangle\langle\mu|x'\rangle}{E-\epsilon_{\mu}\pm i\delta} \tag{3.1}$$

гдје су $x=(\mathbf{r},t)$, $x'=(\mathbf{r}',t')$, δ је инфинитезимално мали позитиван број при чему горњи знак одговара ретардованој, а доњи адвансираној Гриновој функцији [164, 182]. Вектори $|\mu\rangle$ чине комлетан скуп стања који задовољавају једначине

$$H|\mu\rangle=\epsilon_{\mu}|\mu\rangle, \tag{3.2}$$

$$\sum_{\mu}|\mu\rangle\langle\mu|=I, \tag{3.3}$$

гдје је H хамилтонијан система, а I је јединични оператор. Најчешће није могуће извршити сумирање у изразу (3.1) аналитички и да би се то избјегло користимо Макмиланову методу за конструкцију Гринове функције [181]. Ретардована и адвансирана Гринова функција дефинисане су са

$$G^{R}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')=-i\Theta(t-t')\langle\left\{\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}),\hat{\mathbf{\Psi}}^{\dagger}(\mathbf{r}')\right\}\rangle, \tag{3.4}$$

и

$$G^A(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') = i\Theta(t'-t)\langle\left\{\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}),\hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(\mathbf{r}')\right\}\rangle, \tag{3.5}$$

где је $\Theta(t)$ Хевисајдова степ функција, $\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r})$ су оператори поља, а угласте заграде означавају статистичко усредњавање по великом канонском ансамблу [145]. Ове функције задовољавају једначине [25, 164]

$$(E - H(\mathbf{r}))G^{R(A)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{3.6}$$

и

$$G^{R(A)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E)(E - H(\mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{3.7}$$

где је $\delta(\mathbf{r})$ Диракова делта функција. У једначини (3.6) оператор $E-H$ дјелује на Гринову функцију са лијева на десно, док у једначини (3.7) дјелује са десна на лијево. Генерално, ова Гринова функција може се написати у облику [164]

$$G = \Psi(\mathbf{r})\Phi^T(\mathbf{r}') \tag{3.8}$$

где су $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_m p_m\Psi_m(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r}') = \sum_n q_n\Phi_n(\mathbf{r}')$ при чему су m и n квантни бројеви, а p_m и q_n су коефицијенти који се одређују у оквиру Макмиланове теорије. Функције $\Psi_m(\mathbf{r})$ и $\Phi_n(\mathbf{r}')$ задовољавају једначине

$$(E - H(\mathbf{r}))\Psi_m(\mathbf{r}) = 0, \tag{3.9}$$

и

$$\Phi_n^T(\mathbf{r}')(E - H(\mathbf{r}')) = 0. \tag{3.10}$$

Транспоновањем претходног израза налазимо

$$(E - H^T(\mathbf{r}'))\Phi_n(\mathbf{r}') = 0. \tag{3.11}$$

Да бисмо нашли $H^T(\mathbf{r}')$ потребно је да имамо у виду да је $k_j^T = -k_j$, где је $j = \{x',y',z'\}$ при чему је k_j диференцијални оператор у координатном простору $k_j = -i\partial_j$. На примјер, за 2×2 хамилтонијан

$$H(\mathbf{r}') = \sum_j h_j(k_{x'},k_{y'},k_{z'})\sigma_j, \tag{3.12}$$

где су $\sigma_j \in \{\sigma_0,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$ јединична и Паулијеве матрице, транспоновани хамилтонијан је

$$H^T(\mathbf{r}') = \sum_j h_j(-k_{x'},-k_{y'},-k_{z'})\sigma_j^*, \tag{3.13}$$

где * представља комплексну конјугацију [164]. Ради погодности, уводи се оператор $\tilde{H} = H^T$ који се у литератури назива конјугованим хамилтонијаном. Таласне функције које су својствене за $\tilde{H}$ и за H су једнозначно повезане на начин да је

$$\Phi^T_{k_x,k_y,k_z}(E) = \Psi^\dagger_{-k_x,-k_y,-k_z}(E), \tag{3.14}$$

или

$$\Phi_{k_x,k_y,k_z}(E) = \Psi^*_{-k_x,-k_y,-k_z}(E). \tag{3.15}$$

Дакле Хилбертови простори разапети својственим стањима хамилтонијана $\tilde{H}$ и H су једнозначно повезани, а Гринове функције задовољавају једначине

$$(E - H(\mathbf{r}))G^{R/A}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{3.16}$$

и

$$(E - \tilde{H}(\mathbf{r}'))\left[G^{R/A}\right]^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{3.17}$$

Уколико разматрамо дводимензионални нехомогени суперпроводљиви систем смјештен у (x, y)-раван такав да посједује транслаторну симетрију дуж y-осе онда је импулс k_y добар квантни број. Тада Гринова функција има облик

$$G^{R/A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = G^{R/A}_{k_y}(x, x', E)e^{ik_y(y-y')}. \tag{3.18}$$

Дакле, тражимо рјешења једначине (3.9) са квантним бројем k_y (тзв. директни процеси), а рјешења једначине (3.11) са квантним бројем $-k_y$ (тзв. конјуговани процеси).

Детаљну процедуру налажења ретардоване и адвансиране Макмиланове Гринове функције за дводимензионалне суперпроводљиве хетероструктуре које садрже спински активна поља даћемо у наредном одјељку.

3.2 Макмиланова Гринова функција у суперпроводним хетероструктурама са спински активним материјалима

У овом одјељку представићемо детаљно процедуру налажења Макмиланове Гринове функције. Посматрајмо планарни Џозефсонов спој S/M/S гдје је S суперпроводник који може да има s-wave или d-wave симетрију параметра уређења, а M је спински активни материјал од кога је начињена баријера као што је феромагнет или алтермагнет са произвољном оријентацијом поља спинског цијепања. Богољубов-де Женов хамилтонијан дат је са [20, 148]

$$H = \begin{pmatrix} H_0 - h_z & -h_x + ih_y & 0 & \hat{\Delta} \\ -h_x - ih_y & H_0 + h_z & \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}^* & -H_0 + h_z & -h_x - ih_y \\ \hat{\Delta}^* & 0 & -h_x + ih_y & -H_0 - h_z \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

гдје је кинетички дио једночестичног хамилтонијана $H_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$, при чему је μ хемијски потенцијал. $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)^T$ су компоненте поља које поларизује спин квазичестица у области баријере, а суперпроводни параметар уређења моделујемо помоћу Хевисајдових (степ) функција

$$\hat{\Delta} = \Delta e^{i\varphi}\Theta(-x)\Theta(x - d), \tag{3.20}$$

гдје је d дебљина баријере дуж x-осе, а координатни почетак, $x = 0$, је постављен на лијевој S/M граници. Хамилтонијан посједује транслациону симетрију дуж y-осе, па елементарна пропагирајућа стања у лијевом суперпроводнику, која се добијају као рјешења својственог проблема БдГ хамилтонијана, $H\psi = E\psi$, могу се написати у облику

$$\begin{aligned} \psi^{\uparrow}_{\alpha} &= Ae^{ik_{ex}x + ik_y y}, & \psi^{\downarrow}_{\alpha} &= Ce^{ik_{ex}x + ik_y y}, \\ \psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} &= Be^{ik_{hx}x + ik_y y}, & \psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} &= De^{ik_{hx}x + ik_y y}, \\ \psi^{\uparrow}_{\beta} &= \tilde{A}e^{-i\tilde{k}_{ex}x + ik_y y}, & \psi^{\downarrow}_{\beta} &= \tilde{C}e^{-i\tilde{k}_{ex}x + ik_y y}, \\ \psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} &= \tilde{B}e^{-i\tilde{k}_{hx}x + ik_y y}, & \psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} &= \tilde{D}e^{-i\tilde{k}_{hx}x + ik_y y}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Овдје су A, B, C, D, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ колоне димензије 4 дате са

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} ue^{i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ve^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 0 \\ ue^{i\varphi/2} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ve^{-i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
B &= \begin{pmatrix} ve^{i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ue^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 0 \\ ve^{i\varphi/2} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ue^{-i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} \widetilde{u}e^{i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{v}e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, & \tilde{C} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{u}e^{i\varphi/2} \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{v}e^{-i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{B} &= \begin{pmatrix} \widetilde{v}e^{i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{u}e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, & \tilde{D} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{v}e^{i\varphi/2} \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{u}e^{-i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

гдје су BCS фактори, за које важи $u^2 + v^2 = 1$, дати са

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega}{E}\right)}, & v &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega}{E}\right)}, \\
\widetilde{u} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\widetilde{\Omega}}{E}\right)}, & \widetilde{v} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{\Omega}}{E}\right)},
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

а $\Omega = \sqrt{E^2 - |\Delta|^2}$ и $\widetilde{\Omega} = \sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}|^2}$. Индекси $\alpha(\bar{\alpha})$ и $\beta(\bar{\beta})$ означавају правце у којима пропагирају квазичестице дефинисане угловима $\gamma(\gamma - \pi)$ и $(\pi - \gamma)(-\gamma)$ у односу на позитиван смјер x-осе која лежи дуж споја ортогонално на равне границе између различитих материјала, респективно. У случају d-wave суперпроводника, усљед његове анизотропије, параметри уређења се разликују у овим правцима и дати су са

$$
\begin{aligned}
\Delta(\gamma) &= \Delta(T)\cos(2(\gamma - \beta))e^{i\varphi}, \\
\widetilde{\Delta}(\gamma) &= \Delta(T)\cos\left(2(\gamma + \beta)\right)e^{i\varphi}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

гдје је $\Delta(T)$ максимална вриједност параметра уређења у зависности од температуре. Параметар β је угао који мјери оријентацију суперпроводне електроде и представља угао под којим се види максимум параметра уређења у односу на x-осу.

Лонгитудиналне компоненте таласних вектора квазичестица (x-компоненте) су

$$
k_{ex} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu + \sqrt{E^2 - |\Delta|^2}\right) - k_y^2}, \tag{3.25}
$$

$$
k_{hx} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu - \sqrt{E^2 - |\Delta|^2}\right) - k_y^2}, \tag{3.26}
$$

$$
\widetilde{k}_{ex} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu + \sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}|^2}\right) - k_y^2}, \tag{3.27}
$$

$$\widetilde{k}_{hx} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu - \sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}|^2}\right) - k_y^2}, \tag{3.28}$$

гдје је $k_y = k_F \sin\gamma$ трансверзална компонента таласног вектора квазичестица и одржана је за сваки појединачни процес расијања и у том смислу представља добар квантни број. Ознаке e и h односе се на квазиелектроне и квазишупљине, респективно.

Рјешења за елементарна пропагирајућа стања квазичестица у лијевом суперпроводнику која учествују у тзв. конјугованим процесима расијања, за која је $-k_y$ добар квантни број су

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} &= A_1 e^{i\tilde{k}_{ex}x' - ik_y y'}, & \hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}} &= C_1 e^{i\tilde{k}_{ex}x' - ik_y y'},\\
\hat{\psi}^{\uparrow}_{\beta} &= B_1 e^{i\tilde{k}_{hx}x' - ik_y y'}, & \hat{\psi}^{\downarrow}_{\beta} &= D_1 e^{i\tilde{k}_{hx}x' - ik_y y'},\\
\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} &= \tilde{A}_1 e^{-ik_{ex}x' - ik_y y'}, & \hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} &= \tilde{C}_1 e^{-ik_{ex}x' - ik_y y'},\\
\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} &= \tilde{B}_1 e^{-ik_{hx}x' - ik_y y'}, & \hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha} &= \tilde{D}_1 e^{-ik_{hx}x' - ik_y y'},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

гдје су A_1, B_1, C_1, D_1, $\tilde{A}_1$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{C}_1$ и $\tilde{D}_1$ колоне које су рјешења транспонованог хамилтонијана (3.19) дате са

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} \widetilde{u}e^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{v}e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, & C_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{u}e^{-i\varphi/2} \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{v}e^{i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix},\\
B_1 &= \begin{pmatrix} \widetilde{v}e^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{u}e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, & D_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{v}e^{-i\varphi/2} \\ \frac{\widetilde{\Delta}^*}{|\widetilde{\Delta}|}\frac{|E|}{E}\widetilde{u}e^{i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix},\\
\tilde{A}_1 &= \begin{pmatrix} ue^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ve^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, & \tilde{C}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ ue^{-i\varphi/2} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ve^{i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix},\\
\tilde{B}_1 &= \begin{pmatrix} ve^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ue^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, & \tilde{D}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ ve^{-i\varphi/2} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|}\frac{|E|}{E}ue^{i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.1 Ретардована Гринова функција

Ретардована Гринова функција $G^R(x, x', E + i\delta)$ је аналитичка у горњој комплексној полуравни. За њену конструкцију користимо тзв. излазне таласе. Због трансверзалне инваријантности разматраног система дуж y-осе она има облик

$$G^R_{x>x'}(x, x', y, y') = G^R_{x>x'}(x, x', E, k_y)e^{ik_y y - ik_y y'} \quad \text{за} \quad x > x'. \tag{3.31}$$

Ознаке E и k_y у Гриновој функцији са десне стране знака једнакости у претходној једначини служе да укажу да се ради о функцији конструисаној помоћу процеса расијања за енергију квазичестица, E, које се крећу са трансверзалним импулсом k_y. У даљем тексту ову функцију ћемо означавати са $G^R_{x>x'}(x, x')$. Макмилановом методом за њену конструкцију имамо [181, 183]

$$G^R_{x>x'}(x,x') = \alpha_{11}\Psi^{\uparrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_3(x') + \alpha_{12}\Psi^{\uparrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_3(x') + \alpha_{13}\Psi^{\downarrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_3(x') + \alpha_{14}\Psi^{\downarrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_3(x') +$$
$$+ \alpha_{21}\Psi^{\uparrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_3(x') + \alpha_{22}\Psi^{\uparrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_3(x') + \alpha_{23}\Psi^{\downarrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_3(x') + \alpha_{24}\Psi^{\downarrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_3(x') +$$
$$+ \alpha_{31}\Psi^{\uparrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_4(x') + \alpha_{32}\Psi^{\uparrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_4(x') + \alpha_{33}\Psi^{\downarrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_4(x') + \alpha_{34}\Psi^{\downarrow}_1(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_4(x') +$$
$$+ \alpha_{41}\Psi^{\uparrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_4(x') + \alpha_{42}\Psi^{\uparrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_4(x') + \alpha_{43}\Psi^{\downarrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_4(x') + \alpha_{44}\Psi^{\downarrow}_2(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_4(x'). \tag{3.32}$$

Друга грана ретардоване Гринове функције има облик

$$G^R_{x<x'}(x,x',y,z') = G^R_{x<x'}(x,x')e^{ik_y y - ik_y y'} \quad \text{за} \quad x < x', \tag{3.33}$$

при чему је

$$G^R_{x<x'}(x,x') = \beta_{11}\Psi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta_{12}\Psi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_1(x') + \beta_{13}\Psi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta_{14}\Psi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_1(x') +$$
$$+ \beta_{21}\Psi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta_{22}\Psi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_2(x') + \beta_{23}\Psi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta_{24}\Psi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_2(x') +$$
$$+ \beta_{31}\Psi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta_{32}\Psi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_1(x') + \beta_{33}\Psi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta_{34}\Psi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_1(x') +$$
$$+ \beta_{41}\Psi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta_{42}\Psi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_2(x') + \beta_{43}\Psi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta_{44}\Psi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Psi}^{\downarrow T}_2(x'). \tag{3.34}$$

БдГ таласне функције $\Psi^{\uparrow}_i$ и $\Psi^{\downarrow}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ одговарају могућим директним процесима расијања који се разликују на основу особина упадне квазичестице. Постоји осам таквих процеса. Наиме, упадна квазичестица може да буде квазиелектрон или квазишупљина спина $\uparrow$ или $\downarrow$ која наилази на баријеру из лијевог или из десног суперпроводника. Ове функције су линеарне комбинације елементарних пропагирајућих стања са коефицијентима који се односе на Андрејевљеву рефлексију и нормалну рефлексију. Због спински активне баријере расијане квазичестице могу да имају очувану пројекцију спина коју је имала упадна квазичестица или да имају супротну пројекцију спина. Таласне функције које одговарају директним процесима расијања који су схематски приказани на сликама 3.1 (a)-(h) су, редом:

$$\Psi^{\uparrow}_1 = \psi^{\uparrow}_{\alpha} + a^{\uparrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + a^{\uparrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + b^{\uparrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\beta} + b^{\uparrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\beta}, \tag{3.35}$$

$$\Psi^{\uparrow}_2 = \psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + a^{\uparrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\beta} + a^{\uparrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\beta} + b^{\uparrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + b^{\uparrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}}, \tag{3.36}$$

$$\Psi^{\uparrow}_3 = c^{\uparrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\beta} + c^{\uparrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\beta} + d^{\uparrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + d^{\uparrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}}, \tag{3.37}$$

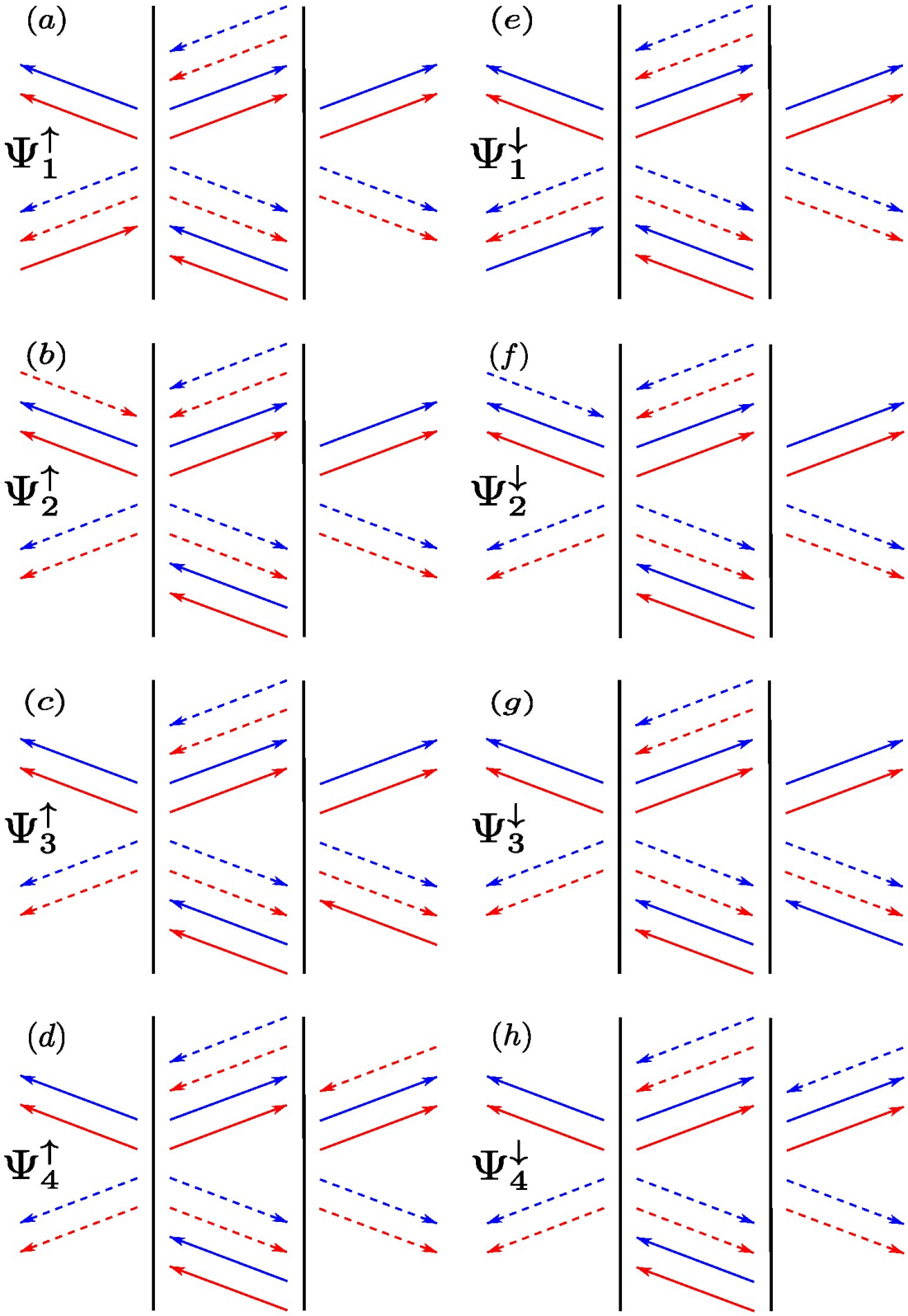
$$\Psi^{\uparrow}_4 = c^{\uparrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + c^{\uparrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + d^{\uparrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\beta} + d^{\uparrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\beta}, \tag{3.38}$$

$$\Psi^{\downarrow}_1 = \psi^{\downarrow}_{\alpha} + a^{\downarrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + a^{\downarrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + b^{\downarrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\beta} + b^{\downarrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\beta}, \tag{3.39}$$

$$\Psi^{\downarrow}_2 = \psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + a^{\downarrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\beta} + a^{\downarrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\beta} + b^{\downarrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + b^{\downarrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}}, \tag{3.40}$$

$$\Psi^{\downarrow}_3 = c^{\downarrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\beta} + c^{\downarrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\beta} + d^{\downarrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + d^{\downarrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}}, \tag{3.41}$$

$$\Psi^{\downarrow}_4 = c^{\downarrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + c^{\downarrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + d^{\downarrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\beta} + d^{\downarrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\beta}. \tag{3.42}$$



Слика 3.1: Схематска илустрација директних процеса расијања за ретардовану Гринову функцију. Квазиелектрони представљени су пуним, а квазишупљине испрекиданим стрелицама. Црвеном бојом означене су квазичестице спина $\uparrow$, а плавом спина $\downarrow$.

На примјер, за процес приказан на слици 3.1 (a) упадна честица која из лијевог суперпроводника наилази на баријеру је квазиелектрон спина $\uparrow$ означен црвеном пуном стрелицом и описан таласном функцијом $\psi_{\alpha}^{\uparrow}$. Он се на баријери андрејевљевски расијава у квазишупљину спина $\uparrow$ или $\downarrow$ које су на слици означене испрекиданим црвеним и плавим стрелицама које одговарају функцијама $\psi_{\bar{\alpha}}^{\uparrow}$ и $\psi_{\bar{\alpha}}^{\downarrow}$, респективно. Коефицијенти који одговарају овим расијањима су означени са $a_1^{\uparrow\uparrow}$ и $a_1^{\uparrow\downarrow}$. Ознаке коефицијената су такве да прва ознака пројекције спина одговара спину упадне честице, а друга спину расијане честице. Упадни квазиелектрон може при нормалној рефлексији да се расије и у квазиелектроне са обје могуће пројекције спина (црвана и плава пуна стрелица) који су описани функцијама $\psi_{\beta}^{\uparrow}$ и $\psi_{\beta}^{\downarrow}$, а коефицијенти који одговарају нормално расијаним честицама у овом процесу означени су са $b_1^{\uparrow\uparrow}$ и $b_1^{\uparrow\downarrow}$. На аналоган начин уведене су ознаке коефицијената за Андрејевљеву и нормалну рефлексију приликом конструкције таласних функција у области лијевог суперпроводника код осталих процеса расијања код којих упадна честица наилази са лијеве стране (слике 3.1 (b), (e) и (f)). Када је упадна честица из десног суперпроводника онда се таласна функција у лијевом суперпроводнику добија као линеарна комбинација трансмитованих стања. На слици 3.1 (c) приказан је процес расијања када квазиелектрон спина $\uparrow$ наилази на баријеру са десне стране. Тада трансмитовани квазиелектрони могу бити са обје пројекције спина ($\psi_{\beta}^{\uparrow}$ и $\psi_{\beta}^{\downarrow}$), а коефицијенти за ову трансмисију означени су са $c_3^{\uparrow\uparrow}$ и $c_3^{\uparrow\downarrow}$. Поред квазиелектрона могућа је и трансмисија квазишупљина које су описане функцијама $\psi_{\bar{\alpha}}^{\uparrow}$ и $\psi_{\bar{\alpha}}^{\downarrow}$, којима одговарају коефицијенти $d_3^{\uparrow\uparrow}$ и $d_3^{\uparrow\downarrow}$, респективно. И код коефицијената трансмисије прва спинска ознака одговара спину упадне квазичестице, а друга спину трансмитоване квазичестице. На аналоган начин уведене су ознаке коефицијената и у осталим процесима код којих се таласна функција у лијевом суперпроводнику конструише на основу трансмитованих стања (слике 3.1 (d), (g) и (h)).

Таласне функције $\hat{\Psi}_i^{\uparrow}$ и $\hat{\Psi}_i^{\downarrow}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ које одговарају конјугованим процесима расијања схематски приказаним на сликама 3.2 (a)-(h), дате су, редом

$$\hat{\Psi}_1^{\uparrow} = \hat{\psi}_{\bar{\beta}}^{\uparrow} + \hat{a}_1^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} + \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{b}_1^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} \tag{3.43}$$

$$\hat{\Psi}_2^{\uparrow} = \hat{\psi}_{\alpha}^{\uparrow} + \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{a}_2^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} + \hat{b}_2^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} \tag{3.44}$$

$$\hat{\Psi}_3^{\uparrow} = \hat{c}_3^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{c}_3^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} + \hat{d}_3^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{d}_3^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} \tag{3.45}$$

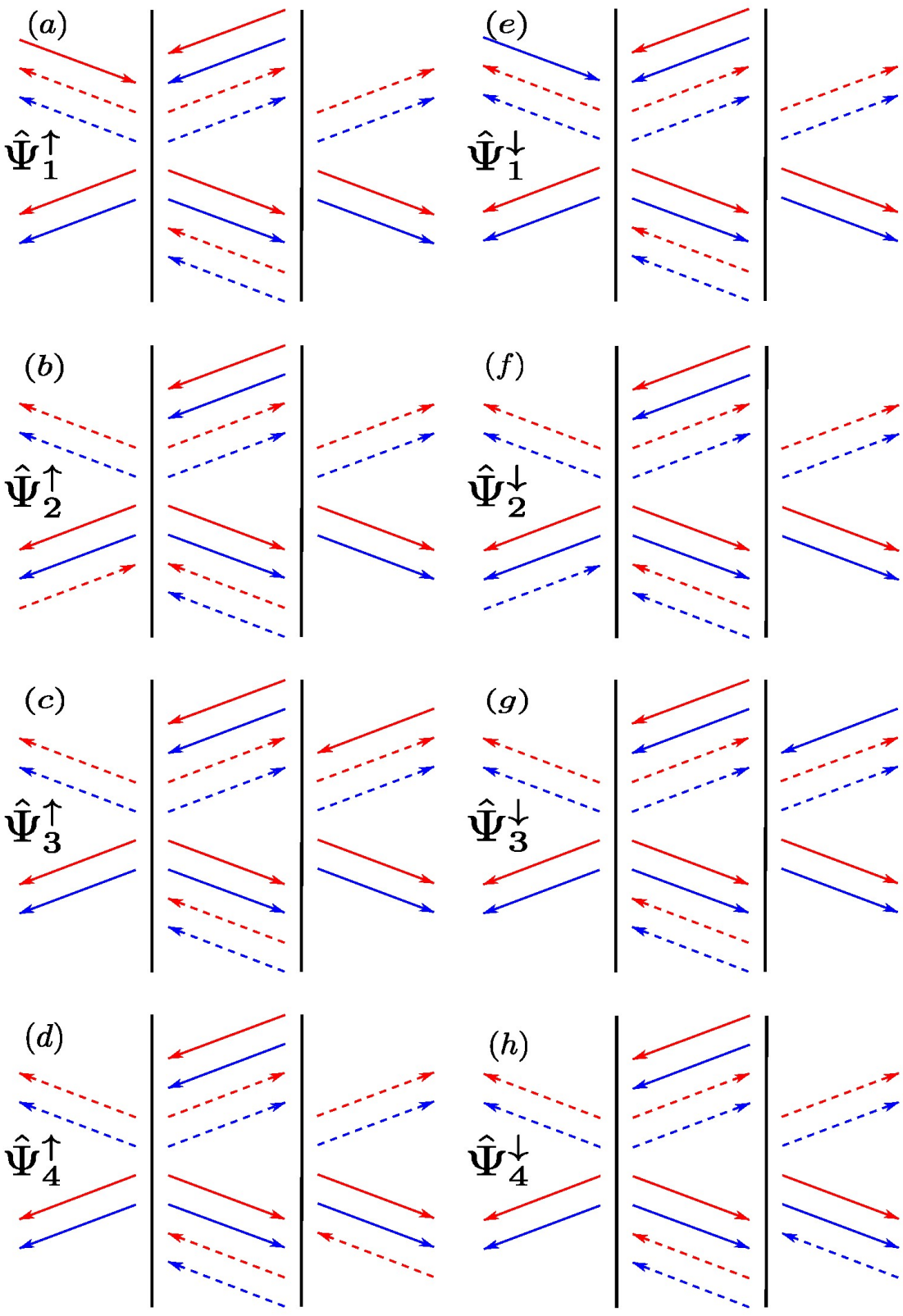
$$\hat{\Psi}_4^{\uparrow} = \hat{c}_4^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{c}_4^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} + \hat{d}_4^{\uparrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{d}_4^{\uparrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} \tag{3.46}$$

$$\hat{\Psi}_1^{\downarrow} = \hat{\psi}_{\bar{\beta}}^{\downarrow} + \hat{a}_1^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} + \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{b}_1^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} \tag{3.47}$$

$$\hat{\Psi}_2^{\downarrow} = \hat{\psi}_{\alpha}^{\downarrow} + \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{a}_2^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} + \hat{b}_2^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} \tag{3.48}$$

$$\hat{\Psi}_3^{\downarrow} = \hat{c}_3^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{c}_3^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} + \hat{d}_3^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{d}_3^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} \tag{3.49}$$

$$\hat{\Psi}_4^{\downarrow} = \hat{c}_4^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\uparrow} + \hat{c}_4^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\beta}^{\downarrow} + \hat{d}_4^{\downarrow\uparrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\uparrow} + \hat{d}_4^{\downarrow\downarrow}\hat{\psi}_{\bar{\alpha}}^{\downarrow} \tag{3.50}$$



Слика 3.2: Схематска илустрација конјугованих процеса расијања за ретардовану Гринову функцију. Квазиелектрони представљени су пуним, а квазишупљине испрекиданим стрелицама. Црвеном бојом означене су квазичестице спина $\uparrow$, а плавом спина $\downarrow$.

Замјењујући ове таласне функције у изразе (3.32) и (3.34) уз (3.21) и (3.29) налази се

$$G^R_{x>x'}(x,x') = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}, \tag{3.51}$$

гдје су

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = {} & g_1 A\tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + g_2 A\tilde{A}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\ & + g_3 \tilde{B}B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + g_4 \tilde{D}B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\ & + g_5 C\tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + g_6 C\tilde{A}_1^T e^{ik_{ex} - ik_{ex}x'} + \\ & + g_7 \tilde{B}D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + g_8 \tilde{D}D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'},\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = {} & g_9 AB_1^T e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + g_{10} AD_1^T e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\ & + g_{11} CB_1^T e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + g_{12} CD_1^T e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\ & + g_{13} \tilde{B}\tilde{C}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{ex}x'} + g_{14} \tilde{D}\tilde{C}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{ex}x'} + \\ & + g_{15} \tilde{B}\tilde{A}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{ex}x'} + g_{16} \tilde{D}\tilde{A}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{ex}x'},\end{aligned} \tag{3.53}$$

и

$$\begin{aligned}\mathrm{III} = {} & g_1 \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\uparrow\uparrow} B\tilde{C}_1^T + a_1^{\uparrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T + b_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T\right)\right) + \\ & + g_2 \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\uparrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + a_1^{\uparrow\downarrow} D\tilde{A}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + b_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T\right)\right) + \\ & + g_3 \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\uparrow\uparrow} BB_1^T + b_2^{\uparrow\downarrow} DB_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + a_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}B_1^T\right)\right) + \\ & + g_4 \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\downarrow\uparrow} BB_1^T + b_2^{\downarrow\downarrow} DB_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + a_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}B_1^T\right)\right) + \\ & + g_5 \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\downarrow\uparrow} B\tilde{C}_1^T + a_1^{\downarrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T + b_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T\right)\right) + \\ & + g_6 \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\downarrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + a_1^{\downarrow\downarrow} D\tilde{A}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + b_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T\right)\right) + \\ & + g_7 \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\uparrow\uparrow} BD_1^T + b_2^{\uparrow\downarrow} DD_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}D_1^T + a_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T\right)\right) + \\ & + g_8 \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\downarrow\uparrow} BD_1^T + b_2^{\downarrow\downarrow} DD_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}D_1^T + a_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T\right)\right) + \\ & + g_9 \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_1^{\uparrow\uparrow} BB_1^T + a_1^{\uparrow\downarrow} DB_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + b_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}B_1^T\right)\right) + \\ & + g_{10} \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_1^{\uparrow\uparrow} BD_1^T + a_1^{\uparrow\downarrow} DD_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}D_1^T + b_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T\right)\right) + \\ & + g_{11} \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_1^{\downarrow\uparrow} BB_1^T + a_1^{\downarrow\downarrow} DB_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + b_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}B_1^T\right)\right) + \\ & + g_{12} \left(e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_1^{\downarrow\uparrow} BD_1^T + a_1^{\downarrow\downarrow} DD_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}D_1^T + b_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T\right)\right) + \\ & + g_{13} \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(b_2^{\uparrow\uparrow} B\tilde{C}_1^T + b_2^{\uparrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(a_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T + a_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T\right)\right) + \\ & + g_{14} \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(b_2^{\downarrow\uparrow} B\tilde{C}_1^T + b_2^{\downarrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(a_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T + a_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T\right)\right) + \\ & + g_{15} \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(b_2^{\uparrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + b_2^{\uparrow\downarrow} D\tilde{A}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(a_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + a_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T\right)\right) + \\ & + g_{16} \left(e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(b_2^{\downarrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + b_2^{\downarrow\downarrow} D\tilde{A}_1^T\right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(a_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + a_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T\right)\right),\end{aligned} \tag{3.54}$$

при чему су нови неодређени коефицијенти $(g_1, ..., g_{16})$ дати помоћу претходно уведених

са

$$g_1 = \alpha_{12}\hat{c}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{11}\hat{c}_3^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{32}\hat{d}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{31}\hat{d}_4^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.55}$$

$$g_2 = \alpha_{12}\hat{c}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{11}\hat{c}_3^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{32}\hat{d}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{31}\hat{d}_4^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.56}$$

$$g_3 = \alpha_{42}\hat{c}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{41}\hat{c}_4^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{22}\hat{d}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{21}\hat{d}_3^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.57}$$

$$g_4 = \alpha_{44}\hat{c}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{43}\hat{c}_4^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{24}\hat{d}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{23}\hat{d}_3^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.58}$$

$$g_5 = \alpha_{14}\hat{c}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{13}\hat{c}_3^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{34}\hat{d}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{33}\hat{d}_4^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.59}$$

$$g_6 = \alpha_{14}\hat{c}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{13}\hat{c}_3^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{34}\hat{d}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{33}\hat{d}_4^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.60}$$

$$g_7 = \alpha_{42}\hat{c}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{41}\hat{c}_4^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{22}\hat{d}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{21}\hat{d}_3^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.61}$$

$$g_8 = \alpha_{44}\hat{c}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{43}\hat{c}_4^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{24}\hat{d}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{23}\hat{d}_3^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.62}$$

$$g_9 = \alpha_{32}\hat{c}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{31}\hat{c}_4^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{12}\hat{d}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{11}\hat{d}_3^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.63}$$

$$g_{10} = \alpha_{32}\hat{c}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{31}\hat{c}_4^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{12}\hat{d}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{11}\hat{d}_3^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.64}$$

$$g_{11} = \alpha_{34}\hat{c}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{33}\hat{c}_4^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{14}\hat{d}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{13}\hat{d}_3^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.65}$$

$$g_{12} = \alpha_{34}\hat{c}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{33}\hat{c}_4^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{14}\hat{d}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{13}\hat{d}_3^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.66}$$

$$g_{13} = \alpha_{22}\hat{c}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{21}\hat{c}_3^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{42}\hat{d}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{41}\hat{d}_4^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.67}$$

$$g_{14} = \alpha_{24}\hat{c}_3^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{23}\hat{c}_3^{\uparrow\downarrow} + \alpha_{44}\hat{d}_4^{\downarrow\downarrow} + \alpha_{43}\hat{d}_4^{\uparrow\downarrow}, \tag{3.68}$$

$$g_{15} = \alpha_{22}\hat{c}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{21}\hat{c}_3^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{42}\hat{d}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{41}\hat{d}_4^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.69}$$

$$g_{16} = \alpha_{24}\hat{c}_3^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{23}\hat{c}_3^{\uparrow\uparrow} + \alpha_{44}\hat{d}_4^{\downarrow\uparrow} + \alpha_{43}\hat{d}_4^{\uparrow\uparrow}. \tag{3.70}$$

Такође, на исти начин можемо расписати и ретардовану Гринову функцију за $x < x'$:

$$G^R_{x<x'} = \bar{\mathrm{I}} + \overline{\mathrm{II}} + \overline{\mathrm{III}}, \tag{3.71}$$

гдје су

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{I}} = {} & h_1\tilde{A}A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + h_2\tilde{C}A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\ & + h_3 B\tilde{B}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + h_4 B\tilde{D}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + \\ & + h_5\tilde{A}C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + h_6\tilde{C}C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\ & + h_7 D\tilde{B}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + h_8 D\tilde{D}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'},\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{II}} = {} & h_9 B A_1^T e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} + h_{10} D A_1^T e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + h_{11} B C_1^T e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} + h_{12} D C_1^T e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + h_{13} \tilde{A} \tilde{B}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{hx}x'} + h_{14} \tilde{A} \tilde{D}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{hx}x'} + \\
& + h_{15} \tilde{C} \tilde{B}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{hx}x'} + h_{16} \tilde{C} \tilde{D}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{hx}x'},
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{III}} = {} & h_1 \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A} B_1^T + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{A} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{A} \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_2 \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{C} B_1^T + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C} \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{C} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_3 \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\uparrow\uparrow} B B_1^T + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow} B D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\uparrow\downarrow} B \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow} B \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_4 \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\downarrow\uparrow} B B_1^T + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow} B D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\downarrow\downarrow} B \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow} B \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_5 \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A} B_1^T + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{A} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{A} \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_6 \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{C} B_1^T + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C} \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{C} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_7 \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\uparrow\uparrow} D B_1^T + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow} D D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\uparrow\downarrow} D \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow} D \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_8 \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\downarrow\uparrow} D B_1^T + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow} D D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\downarrow\downarrow} D \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow} D \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_9 \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\uparrow\uparrow} B B_1^T + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow} B D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\uparrow\downarrow} B \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow} B \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{10} \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\uparrow\uparrow} D B_1^T + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow} D D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\uparrow\downarrow} D \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow} D \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{11} \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\downarrow\uparrow} B B_1^T + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow} B D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\downarrow\downarrow} B \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow} B \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{12} \left(e^{ik_{hx}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\downarrow\uparrow} D B_1^T + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow} D D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\downarrow\downarrow} D \tilde{C}_1^T + \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow} D \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{13} \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A} B_1^T + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{A} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{A} \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{14} \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A} B_1^T + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{A} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{A} \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{15} \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{C} B_1^T + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C} \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{C} \tilde{A}_1^T \right) \right) + \\
& + h_{16} \left(e^{-i\tilde{k}_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{C} B_1^T + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C} D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x-ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C} \tilde{C}_1^T + \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{C} \tilde{A}_1^T \right) \right),
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

при чему су нови коефицијенти изражени преко претходно уведених дати са

$$h_1 = \beta_{11} c_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{13} c_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{31} d_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{33} d_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.75}$$

$$h_2 = \beta_{11} c_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{13} c_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{31} d_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{33} d_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.76}$$

$$h_3 = \beta_{21} d_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{23} d_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{41} c_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{43} c_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.77}$$

$$h_4 = \beta_{22} d_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{24} d_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{42} c_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{44} c_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.78}$$

$$h_5 = \beta_{12} c_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{14} c_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{32} d_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{34} d_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.79}$$

$$h_6 = \beta_{12} c_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{14} c_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{32} d_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{34} d_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.80}$$

$$h_7 = \beta_{21} d_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{23} d_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{41} c_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{43} c_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.81}$$

$$h_8 = \beta_{22} d_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{24} d_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{42} c_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{44} c_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.82}$$

$$h_9 = \beta_{11} d_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{13} d_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{31} c_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{33} c_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.83}$$

$$h_{10} = \beta_{11} d_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{13} d_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{31} c_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{33} c_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.84}$$

$$h_{11} = \beta_{12} d_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{14} d_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{32} c_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{34} c_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.85}$$

$$h_{12} = \beta_{12} d_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{14} d_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{32} c_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{34} c_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.86}$$

$$h_{13} = \beta_{21} c_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{23} c_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{41} d_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{43} d_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.87}$$

$$h_{14} = \beta_{22} c_3^{\uparrow\uparrow} + \beta_{24} c_3^{\downarrow\uparrow} + \beta_{42} d_4^{\uparrow\uparrow} + \beta_{44} d_4^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.88}$$

$$h_{15} = \beta_{21} c_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{23} c_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{41} d_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{43} d_4^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.89}$$

$$h_{16} = \beta_{22} c_3^{\uparrow\downarrow} + \beta_{24} c_3^{\downarrow\downarrow} + \beta_{42} d_4^{\uparrow\downarrow} + \beta_{44} d_4^{\downarrow\downarrow}. \tag{3.90}$$

Гранични услови које задовољава Гринова функција добијају се интеграцијом израза (3.16) и дати су са

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, x', k_y, E)\Big|_{x=x'+0} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, x', k_y, E)\Big|_{x=x'-0} = \frac{2m}{\hbar^2} \sigma_0 \otimes \tau_z, \tag{3.91}$$

$$G(x, x', k_y, E)|_{x=x'+0} - G(x, x', k_y, E)|_{x=x'-0} = 0, \tag{3.92}$$

гдје је σ_0 јединична матрица у спинском простору, а τ_z Паулијева матрица у Намбу простору. Рјешавањем ових граничних услова добијамо коефицијенте g_i и h_i $(i = 1, ..., 16)$. Пошто десна страна горњих једнакости не зависи од координата, изједначавајући $\Pi(x, x + 0) = \overline{\Pi}(x, x - 0)$ у случају такве оријентације параметра суперпроводног уређења d-wave суперпроводника при којој је $k_{ex} \neq \widetilde{k}_{ex}$ и $k_{hx} \neq \widetilde{k}_{hx}$ због линеарне независности експоненцијалних фактора са лијеве и десне стране знака једнакости, лако се налази да су g_i и h_i $(i = 9, ..., 16)$ једнаки нули. У случају да је суперпроводна електрода са s-wave симетријом или d-wave код које је $\beta = 0$ $(d_{x^2-y^2})$ или $\beta = \pi/4$ (d_{xy}) онда је $k_{ex} = \widetilde{k}_{ex}$ и $k_{hx} = \widetilde{k}_{hx}$, и у тим случајевима ћемо добити, имајући у виду линеарну независност матрица,

$$\begin{aligned} g_9 A B_1^T &= h_9 B A_1^T, & g_{13} \tilde{B} \tilde{C}_1^T &= h_{14} \tilde{A} \tilde{D}_1^T, \\ g_{10} A D_1^T &= h_{11} B C_1^T, & g_{14} \tilde{D} \tilde{C}_1^T &= h_{16} \tilde{C} \tilde{D}_1^T, \\ g_{11} C B_1^T &= h_{10} D A_1^T, & g_{15} \tilde{B} \tilde{A}_1^T &= h_{13} \tilde{A} \tilde{B}_1^T, \\ g_{12} C D_1^T &= h_{12} D C_1^T, & g_{16} \tilde{D} \tilde{A}_1^T &= h_{15} \tilde{C} \tilde{B}_1^T. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Рјешавајући ове матричне једначине добијамо

$$\begin{aligned} g_9 = g_{10} = g_{11} = g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{15} = g_{16} = 0, \\ h_9 = h_{10} = h_{11} = h_{12} = h_{13} = h_{14} = h_{15} = h_{16} = 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Сада граничне услове (3.91) и (3.92) можемо свести на

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{I}(x,x',k_y,E)\Big|_{x=x'+0} - \frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathrm{I}}(x,x',k_y,E)\Big|_{x=x'-0} = \frac{2m}{\hbar^2}\sigma_0\otimes\tau_z, \tag{3.95}$$

$$\mathrm{I}(x,x',k_y,E)\big|_{x=x'+0} - \bar{\mathrm{I}}(x,x',k_y,E)\big|_{x=x'-0} = 0. \tag{3.96}$$

Након рјешавања ових једначина, и уведећи апроксимацију $k_{ex} \approx k_{hx} \approx \tilde{k}_{ex} \approx \tilde{k}_{hx} \approx k_F\cos\gamma$ с обзиром на то да је $E, |\Delta| \ll \mu$, налазимо

$$g_2 = h_3 = g_5 = h_8 = -\frac{iE}{2k_F\cos\gamma\ \Omega}\frac{2m}{\hbar^2}, \tag{3.97}$$

и

$$g_3 = h_1 = g_8 = h_6 = -\frac{iE}{2k_F\cos\gamma\ \widetilde{\Omega}}\frac{2m}{\hbar^2}, \tag{3.98}$$

а остали коефицијенти су нулти

$$g_1 = g_4 = g_6 = g_7 = h_2 = h_4 = h_5 = h_7 = 0. \tag{3.99}$$

Помоћу функција $\mathrm{III}(x,x')$ и $\overline{\mathrm{III}}(x,x')$ налазимо релације детаљног баланса које осигуравају задовољење граничних услова (3.91) и (3.92):

$$\begin{aligned}
&g_2 a_1^{\uparrow\uparrow} = h_3 \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_1^{\uparrow\uparrow} = \hat{a}_2^{\uparrow\uparrow}, \\
&g_2 a_1^{\uparrow\downarrow} = h_8 \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_1^{\uparrow\downarrow} = \hat{a}_2^{\downarrow\uparrow}, \\
&g_2 b_1^{\uparrow\uparrow} = h_1 \hat{b}_1^{\uparrow\uparrow}, \\
&g_2 b_1^{\uparrow\downarrow} = h_6 \hat{b}_1^{\downarrow\uparrow}, \\
&g_3 b_2^{\uparrow\uparrow} = h_3 \hat{b}_2^{\uparrow\uparrow}, \\
&g_3 b_2^{\uparrow\downarrow} = h_8 \hat{b}_2^{\downarrow\uparrow}, \\
&g_3 a_2^{\uparrow\uparrow} = h_1 \hat{a}_1^{\uparrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_2^{\uparrow\uparrow} = \hat{a}_1^{\uparrow\uparrow}, \\
&g_3 a_2^{\uparrow\downarrow} = h_6 \hat{a}_1^{\downarrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_2^{\uparrow\downarrow} = \hat{a}_1^{\downarrow\uparrow}, \\
&g_5 a_1^{\downarrow\uparrow} = h_3 \hat{a}_2^{\uparrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_1^{\downarrow\uparrow} = \hat{a}_2^{\uparrow\downarrow}, \\
&g_5 a_1^{\downarrow\downarrow} = h_3 \hat{a}_2^{\downarrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_1^{\downarrow\downarrow} = \hat{a}_2^{\downarrow\downarrow}, \\
&g_5 b_1^{\downarrow\uparrow} = h_1 \hat{b}_1^{\uparrow\downarrow}, \\
&g_5 b_1^{\downarrow\downarrow} = h_6 \hat{b}_1^{\downarrow\downarrow}, \\
&g_8 b_2^{\downarrow\uparrow} = h_3 \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow}, \\
&g_8 b_2^{\downarrow\downarrow} = h_8 \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow}, \\
&g_8 a_2^{\downarrow\uparrow} = h_1 \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_2^{\downarrow\uparrow} = \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow}, \\
&g_8 a_2^{\downarrow\downarrow} = h_6 \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_2^{\downarrow\downarrow} = \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow}.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

На основу ове анализе можемо написати коначно рјешење за ретардовану Макмиланову

Гринову функцију у области лијевог суперпроводника Џозефсоновог споја S/M/S:

$$\begin{aligned}
G^R_{x>x'}(x,x') = g_2 \Big[& A\tilde{A}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\uparrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + a_1^{\uparrow\downarrow} D\tilde{A}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + b_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T \right) \Big] + \\
& + g_3 \Big[\tilde{B}B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + a_2^{\uparrow\downarrow} \tilde{C}B_1^T \right) + e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\uparrow\uparrow} BB_1^T + b_2^{\uparrow\downarrow} DB_1^T \right) \Big] + \\
& + g_5 \Big[C\tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(a_1^{\downarrow\uparrow} B\tilde{C}_1^T + a_1^{\downarrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(b_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T + b_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T \right) \Big] + \\
& + g_8 \Big[\tilde{D}D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(a_2^{\downarrow\uparrow} \tilde{A}D_1^T + a_2^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T \right) + e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(b_2^{\downarrow\uparrow} BD_1^T + b_2^{\downarrow\downarrow} DD_1^T \right) \Big],
\end{aligned} \tag{3.101}$$

и

$$\begin{aligned}
G^R_{x<x'}(x,x') = h_1 \Big[& \tilde{A}A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}B_1^T + \hat{a}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{A}D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\uparrow\uparrow} \tilde{A}\tilde{A}_1^T + \hat{b}_1^{\uparrow\downarrow} \tilde{A}\tilde{C}_1^T \right) \Big] + \\
& + h_3 \Big[B\tilde{B}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + \\
& + e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\uparrow\uparrow} B\tilde{A}_1^T + \hat{a}_2^{\uparrow\downarrow} B\tilde{C}_1^T \right) + e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\uparrow\uparrow} BB_1^T + \hat{b}_2^{\uparrow\downarrow} BD_1^T \right) \Big] + \\
& + h_6 \Big[\tilde{C}C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{a}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{C}B_1^T + \hat{a}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}D_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{ex}x'} \left(\hat{b}_1^{\downarrow\uparrow} \tilde{C}\tilde{A}_1^T + \hat{b}_1^{\downarrow\downarrow} \tilde{C}\tilde{C}_1^T \right) \Big] + \\
& + h_8 \Big[D\tilde{D}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + \\
& + e^{ik_{hx}x - ik_{ex}x'} \left(\hat{a}_2^{\downarrow\uparrow} D\tilde{A}_1^T + \hat{a}_2^{\downarrow\downarrow} D\tilde{C}_1^T \right) + e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} \left(\hat{b}_2^{\downarrow\uparrow} DB_1^T + \hat{b}_2^{\downarrow\downarrow} DD_1^T \right) \Big].
\end{aligned} \tag{3.102}$$

3.2.2 Адвансирана Гринова функција

У овом одјељку користићемо Макмиланов метод [181] да конструишемо адвансирану Гринову функцију $G^A(x,x',E-i\delta)$ која је аналитичка у доњој комплексној полуравни. За њену конструкцију користимо тзв. улазне таласе. Одговарајући директни и конјуговани процеси расијања приказани су на сликама 3.3 и 3.4, респективно. Као и за ретардовану, због трансверзалне инваријантности разматраних система, за $x > x'$ адвансирана Гринова функција има облик $G^A_{x>x'}(x,x',y,y') = G^A_{x>x'} e^{ik_y(y-y')}$, где је

$$\begin{aligned}
G^A_{x>x'}(x,x') = {} & \alpha'_{11}\Phi_1^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{12}\Phi_1^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\downarrow T}(x') + \alpha'_{13}\Phi_1^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{14}\Phi_1^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\downarrow T}(x') + \\
& + \alpha'_{21}\Phi_2^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{22}\Phi_2^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\downarrow T}(x') + \alpha'_{23}\Phi_2^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{24}\Phi_2^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_3^{\downarrow T}(x') + \\
& + \alpha'_{31}\Phi_1^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{32}\Phi_1^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\downarrow T}(x') + \alpha'_{33}\Phi_1^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{34}\Phi_1^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\downarrow T}(x') + \\
& + \alpha'_{41}\Phi_2^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{42}\Phi_2^{\uparrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\downarrow T}(x') + \alpha'_{43}\Phi_2^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\uparrow T}(x') + \alpha'_{44}\Phi_2^{\downarrow}(x)\hat{\Phi}_4^{\downarrow T}(x'),
\end{aligned} \tag{3.103}$$

а за $x < x'$ има облик $G^A_{x<x'}(x,x',y,y') = G^A_{x<x'} e^{ik_y(y-y')}$, где је

$$G^A_{x<x'}(x,x') = \beta'_{11}\Phi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta'_{12}\Phi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_1(x') + \beta'_{13}\Phi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta'_{14}\Phi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_1(x') +$$
$$+ \beta'_{21}\Phi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta'_{22}\Phi^{\uparrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_2(x') + \beta'_{23}\Phi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta'_{24}\Phi^{\downarrow}_3(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_2(x') +$$
$$+ \beta'_{31}\Phi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta'_{32}\Phi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_1(x') + \beta'_{33}\Phi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_1(x') + \beta'_{34}\Phi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_1(x') +$$
$$+ \beta'_{41}\Phi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta'_{42}\Phi^{\uparrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_2(x') + \beta'_{43}\Phi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\uparrow T}_2(x') + \beta'_{44}\Phi^{\downarrow}_4(x)\hat{\Phi}^{\downarrow T}_2(x'). \tag{3.104}$$

Таласне функције у области лијевог суперпроводника које се односе на директне процесе расијања (слика 3.3), а које улазе у горње изразе дате су са:

$$\Phi^{\uparrow}_1 = \psi^{\uparrow}_{\beta} + a'^{\uparrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + a'^{\uparrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + b'^{\uparrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\alpha} + b'^{\uparrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.105}$$

$$\Phi^{\uparrow}_2 = \psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + a'^{\uparrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\alpha} + a'^{\uparrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\alpha} + b'^{\uparrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + b'^{\uparrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.106}$$

$$\Phi^{\uparrow}_3 = c'^{\uparrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\alpha} + c'^{\uparrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\alpha} + d'^{\uparrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + d'^{\uparrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.107}$$

$$\Phi^{\uparrow}_4 = c'^{\uparrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + c'^{\uparrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + d'^{\uparrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\alpha} + d'^{\uparrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.108}$$

$$\Phi^{\downarrow}_1 = \psi^{\downarrow}_{\beta} + a'^{\downarrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + a'^{\downarrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + b'^{\downarrow\uparrow}_1\psi^{\uparrow}_{\alpha} + b'^{\downarrow\downarrow}_1\psi^{\downarrow}_{\alpha} \tag{3.109}$$

$$\Phi^{\downarrow}_2 = \psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + a'^{\downarrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\alpha} + a'^{\downarrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\alpha} + b'^{\downarrow\uparrow}_2\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + b'^{\downarrow\downarrow}_2\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.110}$$

$$\Phi^{\downarrow}_3 = c'^{\downarrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\alpha} + c'^{\downarrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\alpha} + d'^{\downarrow\uparrow}_3\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + d'^{\downarrow\downarrow}_3\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.111}$$

$$\Phi^{\downarrow}_4 = c'^{\downarrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + c'^{\downarrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + d'^{\downarrow\uparrow}_4\psi^{\uparrow}_{\alpha} + d'^{\downarrow\downarrow}_4\psi^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.112}$$

а оне које одговарају конјугованим процесима расијања (слика 3.4) су дате са:

$$\hat{\Phi}^{\uparrow}_1 = \hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\alpha}} + \hat{a}'^{\uparrow\uparrow}_1\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{a}'^{\uparrow\downarrow}_1\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha} + \hat{b}'^{\uparrow\uparrow}_1\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{b}'^{\uparrow\downarrow}_1\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.113}$$

$$\hat{\Phi}^{\uparrow}_2 = \hat{\psi}^{\uparrow}_{\beta} + \hat{a}'^{\uparrow\uparrow}_2\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{a}'^{\uparrow\downarrow}_2\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + \hat{b}'^{\uparrow\uparrow}_2\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{b}'^{\uparrow\downarrow}_2\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.114}$$

$$\hat{\Phi}^{\uparrow}_3 = \hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_3\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_3\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + \hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_3\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_3\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.115}$$

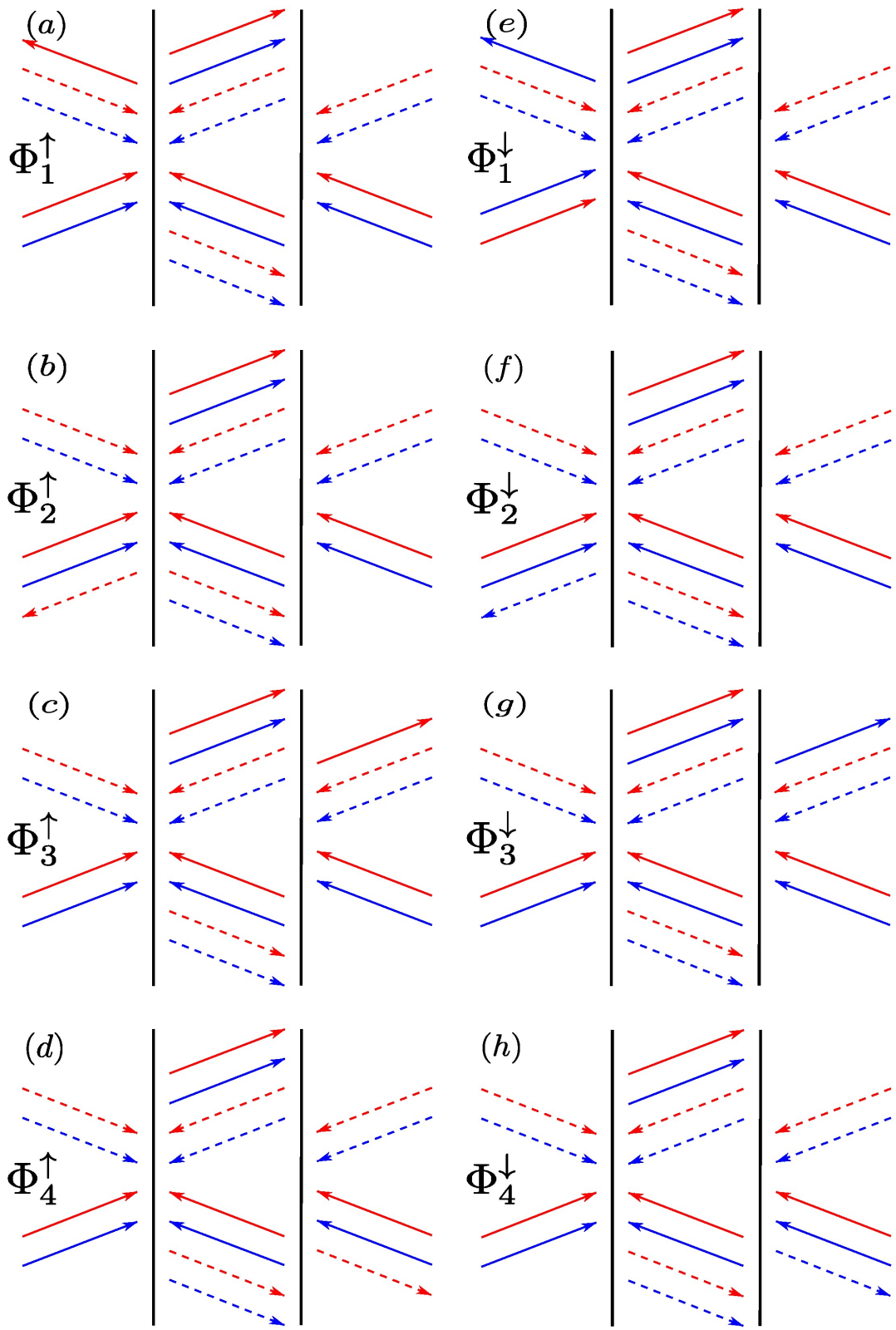
$$\hat{\Phi}^{\uparrow}_4 = \hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_4\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_4\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha} + \hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_4\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_4\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.116}$$

$$\hat{\Phi}^{\downarrow}_1 = \hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\alpha}} + \hat{a}'^{\downarrow\uparrow}_1\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{a}'^{\downarrow\downarrow}_1\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha} + \hat{b}'^{\downarrow\uparrow}_1\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{b}'^{\downarrow\downarrow}_1\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}}, \tag{3.117}$$

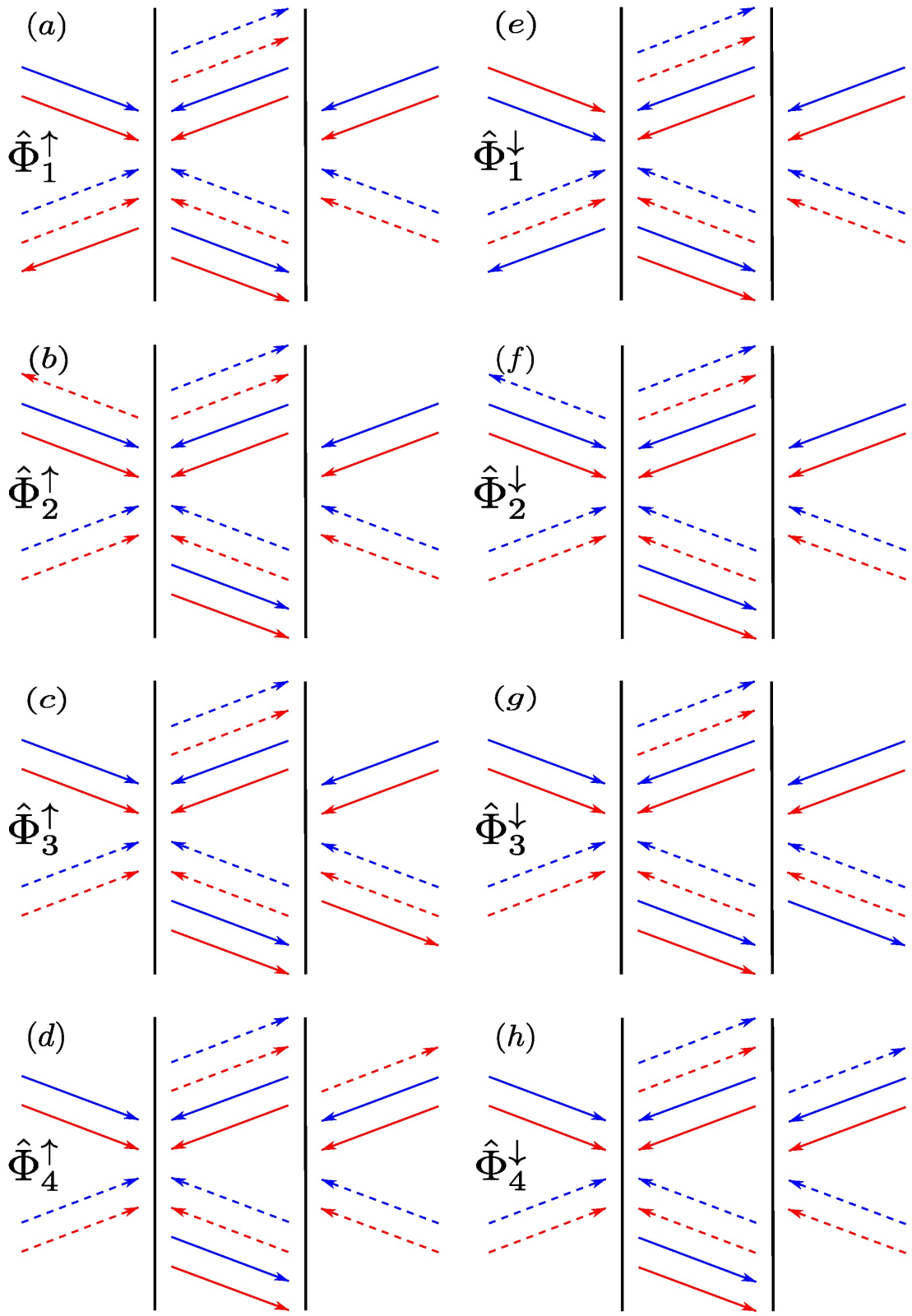
$$\hat{\Phi}^{\downarrow}_2 = \hat{\psi}^{\downarrow}_{\beta} + \hat{a}'^{\downarrow\uparrow}_2\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{a}'^{\downarrow\downarrow}_2\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + \hat{b}'^{\downarrow\uparrow}_2\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{b}'^{\downarrow\downarrow}_2\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.118}$$

$$\hat{\Phi}^{\downarrow}_3 = \hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_3\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_3\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}} + \hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_3\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_3\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha}, \tag{3.119}$$

$$\hat{\Phi}^{\downarrow}_4 = \hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_4\hat{\psi}^{\uparrow}_{\alpha} + \hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_4\hat{\psi}^{\downarrow}_{\alpha} + \hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_4\hat{\psi}^{\uparrow}_{\bar{\beta}} + \hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_4\hat{\psi}^{\downarrow}_{\bar{\beta}}. \tag{3.120}$$



Слика 3.3: Схематска илустрација директних процеса расијања за адвансирану Гринову функцију. Квазиелектрони представљени су пуним, а квазишупљине испрекиданим стрелицама. Црвеном бојом означене су квазичестице спина $\uparrow$, а плавом спина $\downarrow$.



Слика 3.4: Схематска илустрација конјугованих процеса расијања за адвансирану Гринову функцију. Квазиелектрони представљени су пуним, а квазишупљине испрекиданим стрелицама. Црвеном бојом означене су квазичестице спина $\uparrow$, а плавом спина $\downarrow$.

Замјењујући ове таласне функције у изразе (3.103) и (3.104) уз (3.21) и (3.29) налази се

$$G^A_{x>x'} = \mathrm{I}' + \mathrm{II}' + \mathrm{III}', \tag{3.121}$$

гдје су

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}' = {} & g_1 \tilde{A} A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + g_2 \tilde{C} A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + g_3 B D_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + g_4 B B_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} + \\
& + g_5 \tilde{A} C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + g_6 \tilde{C} C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + g_7 D D_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} + g_8 D B_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'},
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}' = {} & g'_9 B A_1^T e^{-ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + g'_{10} D A_1^T e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + g'_{11} B C_1^T e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + g'_{12} D C_1^T e^{ik_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + g'_{13} \tilde{A} \tilde{D}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{hx}x'} + g'_{14} \tilde{C} \tilde{D}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{hx}x'} + \\
& + g'_{15} \tilde{A} \tilde{B}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{hx}x'} + g'_{16} \tilde{C} \tilde{B}_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x - ik_{hx}x'},
\end{aligned} \tag{3.123}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}' = {} & g'_1 \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + b_1'^{\uparrow\downarrow} C A_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + a_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} A_1^T \right) \right) + \\
& + g'_2 \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\downarrow\uparrow} A A_1^T + b_1'^{\downarrow\downarrow} C A_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + a_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} A_1^T \right) \right) + \\
& + g'_3 \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{D}_1^T + a_2'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + b_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_4 \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + a_2'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{B}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + b_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_5 \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\uparrow\uparrow} A C_1^T + b_1'^{\uparrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} C_1^T + a_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) \right) + \\
& + g'_6 \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\downarrow\uparrow} A C_1^T + b_1'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} C_1^T + a_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) \right) + \\
& + g'_7 \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{D}_1^T + a_2'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + b_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_8 \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + a_2'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{B}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + b_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_9 \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_2'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + a_2'^{\uparrow\downarrow} C A_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + b_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} A_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{10} \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_2'^{\downarrow\uparrow} A A_1^T + a_2'^{\downarrow\downarrow} C A_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + b_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} A_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{11} \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_2'^{\uparrow\uparrow} A C_1^T + a_2'^{\uparrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} C_1^T + b_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{12} \left(e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_2'^{\downarrow\uparrow} A C_1^T + a_2'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} C_1^T + b_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{13} \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(b_1'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{D}_1^T + b_1'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(a_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + a_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{14} \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(b_1'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{D}_1^T + b_1'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(a_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + a_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{15} \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(b_1'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + b_1'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{B}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(a_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + a_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + g'_{16} \left(e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(b_1'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + b_1'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{B}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(a_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + a_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.124}$$

при чему су нови коефицијенти изражени преко старих дати са

$$g'_1 = \alpha'_{12} \hat{c}_3'^{\downarrow\uparrow} + \alpha'_{11} \hat{c}_3'^{\uparrow\uparrow} + \alpha'_{32} \hat{d}_4'^{\downarrow\uparrow} + \alpha'_{31} \hat{d}_4'^{\uparrow\uparrow}, \tag{3.125}$$

$$g'_2 = \alpha'_{14}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{13}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_3 + \alpha'_{34}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{33}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_4, \tag{3.126}$$

$$g'_3 = \alpha'_{42}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{41}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_4 + \alpha'_{22}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{21}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_3, \tag{3.127}$$

$$g'_4 = \alpha'_{42}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{41}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_4 + \alpha'_{22}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{21}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_3, \tag{3.128}$$

$$g'_5 = \alpha'_{12}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{11}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_3 + \alpha'_{32}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{31}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_4, \tag{3.129}$$

$$g'_6 = \alpha'_{14}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{13}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_3 + \alpha'_{34}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{33}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_4, \tag{3.130}$$

$$g'_7 = \alpha'_{44}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{43}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_4 + \alpha'_{24}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{23}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_3, \tag{3.131}$$

$$g'_8 = \alpha'_{44}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{43}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_4 + \alpha'_{24}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{23}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_3, \tag{3.132}$$

$$g'_9 = \alpha'_{22}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{21}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_3 + \alpha'_{42}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{41}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_4, \tag{3.133}$$

$$g'_{10} = \alpha'_{24}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{23}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_3 + \alpha'_{44}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{43}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_4, \tag{3.134}$$

$$g'_{11} = \alpha'_{22}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{21}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_3 + \alpha'_{42}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{41}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_4, \tag{3.135}$$

$$g'_{12} = \alpha'_{24}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{23}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_3 + \alpha'_{44}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{43}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_4, \tag{3.136}$$

$$g'_{13} = \alpha'_{32}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{31}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_4 + \alpha'_{12}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{11}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_3, \tag{3.137}$$

$$g'_{14} = \alpha'_{34}\hat{c}'^{\downarrow\downarrow}_4 + \alpha'_{33}\hat{c}'^{\uparrow\downarrow}_4 + \alpha'_{14}\hat{d}'^{\downarrow\downarrow}_3 + \alpha'_{13}\hat{d}'^{\uparrow\downarrow}_3, \tag{3.138}$$

$$g'_{15} = \alpha'_{32}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{31}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_4 + \alpha'_{12}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{11}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_3, \tag{3.139}$$

$$g'_{16} = \alpha'_{34}\hat{c}'^{\downarrow\uparrow}_4 + \alpha'_{33}\hat{c}'^{\uparrow\uparrow}_4 + \alpha'_{14}\hat{d}'^{\downarrow\uparrow}_3 + \alpha'_{13}\hat{d}'^{\uparrow\uparrow}_3. \tag{3.140}$$

На исти начин можемо расписати и адвансирану Гринову функцију за $x < x'$:

$$G^A_{x<x'} = \bar{\mathrm{I}}' + \overline{\mathrm{II}}' + \overline{\mathrm{III}}', \tag{3.141}$$

гдје су

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{I}}' = {} & h'_1 A\tilde{A}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + h'_2 A\tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + h'_3 \tilde{B}B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + h'_4 \tilde{D}B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + h'_5 C\tilde{A}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + h'_6 C\tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + h'_7 \tilde{B}D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + h'_8 \tilde{D}D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'},
\end{aligned} \tag{3.142}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{II}}' = {} & h'_9 A B_1^T e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} + h'_{10} A D_1^T e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + h'_{11} C B_1^T e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} + h'_{12} C D_1^T e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + h'_{13} \tilde{B} \tilde{A}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{ex}x'} + h'_{14} \tilde{D} \tilde{A}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{ex}x'} + \\
& + h'_{15} \tilde{B} \tilde{C}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{ex}x'} + h'_{16} \tilde{D} \tilde{C}_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{ex}x'},
\end{aligned}
\tag{3.143}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{III}}' = {} & h'_1 \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow} A C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow} A \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_2 \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow} A A_1^T + \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow} A C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow} A \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_3 \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_4 \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{D} A_1^T + \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_5 \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow} C A_1^T + \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow} C \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_6 \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow} C A_1^T + \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow} C \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_7 \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{B} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_8 \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} A_1^T + \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_9 \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow} A C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow} A \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{10} \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow} A A_1^T + \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow} A C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\downarrow\downarrow} A \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{11} \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow} C A_1^T + \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow} C \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{12} \left(e^{ik_{ex}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow} C A_1^T + \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T + \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow} C \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{13} \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{14} \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{D} A_1^T + \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{15} \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{B} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T \right) \right) + \\
& + h'_{16} \left(e^{-i\tilde{k}_{hx}x+i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} A_1^T + \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x-ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T + \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \right),
\end{aligned}
\tag{3.144}
$$

при чему су нови коефицијенти изражени преко старих дати са

$$h'_1 = \beta'_{11} c_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{13} c_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{31} d_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{33} d_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.145}$$

$$h'_2 = \beta'_{12} c_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{14} c_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{32} d_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{34} d_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.146}$$

$$h'_3 = \beta'_{21} d_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{23} d_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{41} c_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{43} c_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.147}$$

$$h'_4 = \beta'_{21} d_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{23} d_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{41} c_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{43} c_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.148}$$

$$h'_5 = \beta'_{11} c_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{13} c_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{31} d_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{33} d_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.149}$$

$$h'_6 = \beta'_{12} c_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{14} c_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{32} d_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{34} d_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.150}$$

$$h'_7 = \beta'_{22} d_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{24} d_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{42} c_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{44} c_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.151}$$

$$h'_8 = \beta'_{22} d_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{24} d_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{42} c_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{44} c_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.152}$$

$$h'_9 = \beta'_{21} c_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{23} d_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{41} d_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{43} d_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.153}$$

$$h'_{10} = \beta'_{22}c_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{24}c_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{42}d_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{44}d_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.154}$$

$$h'_{11} = \beta'_{21}c_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{23}c_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{41}d_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{43}d_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.155}$$

$$h'_{12} = \beta'_{22}c_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{24}c_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{42}d_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{44}d_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.156}$$

$$h'_{13} = \beta'_{11}d_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{13}d_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{31}c_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{33}c_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.157}$$

$$h'_{14} = \beta'_{11}d_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{13}d_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{31}c_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{33}c_4'^{\downarrow\downarrow}, \tag{3.158}$$

$$h'_{15} = \beta'_{12}d_3'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{14}d_3'^{\downarrow\uparrow} + \beta'_{32}c_4'^{\uparrow\uparrow} + \beta'_{34}c_4'^{\downarrow\uparrow}, \tag{3.159}$$

$$h'_{16} = \beta'_{12}d_3'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{14}d_3'^{\downarrow\downarrow} + \beta'_{32}c_4'^{\uparrow\downarrow} + \beta'_{34}c_4'^{\downarrow\downarrow}. \tag{3.160}$$

Адвансирана Гринова функција, тј. функције $G^A_{x>x'}(x,x')$ и $G^A_{x<x'}(x,x')$ задовољавају исте граничне услове (3.91) и (3.92) као и ретардована Гринова функција. Истим поступком као код ретардоване, налазимо да су вриједности коефицијената који су различити од нуле

$$g'_1 = h'_3 = g'_6 = h'_8 = \frac{iE}{2k_F\cos\gamma\ \widetilde{\Omega}}\frac{2m}{\hbar^2}, \tag{3.161}$$

и

$$g'_4 = h'_1 = g'_7 = h'_6 = \frac{iE}{2k_F\cos\gamma\ \Omega}\frac{2m}{\hbar^2}, \tag{3.162}$$

а остали коефицијенти су нулти.

Помоћу функција $\mathrm{III}'(x,x')$ и $\overline{\mathrm{III}}'(x,x')$ налазимо релације детаљног баланса које осигуравају задовољење граничних услова (3.91) и (3.92):

$$\begin{aligned}
&g'_1 b_1'^{\uparrow\uparrow} = h'_1 \hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow}, && && \\
&g'_1 b_1'^{\uparrow\downarrow} = h'_6 \hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow}, && && \\
&g'_1 a_1'^{\uparrow\uparrow} = h'_3 \hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_1'^{\uparrow\uparrow} = \hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow}, \\
&g'_1 a_1'^{\uparrow\downarrow} = h'_8 \hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_1'^{\uparrow\downarrow} = \hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow}, \\
&g'_4 a_2'^{\uparrow\uparrow} = h'_1 \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_2'^{\uparrow\uparrow} = \hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow}, \\
&g'_4 a_2'^{\uparrow\downarrow} = h'_6 \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow}, && \text{тј.} && a_2'^{\uparrow\downarrow} = \hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow}, \\
&g'_4 b_2'^{\uparrow\uparrow} = h'_3 \hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow}, && && \\
&g'_4 b_2'^{\uparrow\downarrow} = h'_8 \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow}, && && \\
&g'_6 b_1'^{\downarrow\uparrow} = h'_1 \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow}, && && \\
&g'_6 b_1'^{\downarrow\downarrow} = h'_6 \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow}, && && \\
&g'_6 a_1'^{\downarrow\uparrow} = h'_3 \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_1'^{\downarrow\uparrow} = \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow}, \\
&g'_6 a_1'^{\downarrow\downarrow} = h'_8 \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_1'^{\downarrow\downarrow} = \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow}, \\
&g'_7 a_2'^{\downarrow\uparrow} = h'_1 \hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_2'^{\downarrow\uparrow} = \hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow}, \\
&g'_7 a_2'^{\downarrow\downarrow} = h'_6 \hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow}, && \text{тј.} && a_2'^{\downarrow\downarrow} = \hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow}, \\
&g'_7 b_2'^{\downarrow\uparrow} = h'_3 \hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow}, && && \\
&g'_7 b_2'^{\downarrow\downarrow} = h'_8 \hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow}. && &&
\end{aligned} \tag{3.163}$$

На основу претходног коначно можемо написати рјешење за адвансирану Макмиланову Гринову функцију у области лијевог суперпроводника Џозефсоновог споја S/M/S:

$$
\begin{aligned}
G^A_{x>x'}(x,x') = g'_1 \Big[& \tilde{A} A_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + a_1'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} A_1^T \right) + e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + b_1'^{\uparrow\downarrow} C A_1^T \right) \Big] + \\
& + g'_4 \Big[B \tilde{B}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + \\
& + e^{ik_{ex} - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + a_2'^{\uparrow\downarrow} C \tilde{B}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + b_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T \right) \Big] + \\
& + g'_6 \Big[\tilde{C} C_1^T e^{-i\tilde{k}_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(a_1'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} C_1^T + a_1'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(b_1'^{\downarrow\uparrow} A C_1^T + b_1'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) \Big] + \\
& + g'_7 \Big[D \tilde{D}_1^T e^{ik_{hx}x - ik_{hx}x'} + \\
& + e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(a_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D}_1^T + a_2'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(b_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T + b_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \Big]
\end{aligned}
\tag{3.164}
$$

и

$$
\begin{aligned}
G^A_{x<x'}(x,x') = h'_1 \Big[& A \tilde{A}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + e^{ik_{ex}x - ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\uparrow\uparrow} A \tilde{B}_1^T + \hat{a}_1'^{\uparrow\downarrow} A \tilde{D}_1^T \right) + e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\uparrow\uparrow} A A_1^T + \hat{b}_1'^{\uparrow\downarrow} A C_1^T \right) \Big] + \\
& + h'_3 \Big[\tilde{B} B_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} A_1^T + \hat{a}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\uparrow\uparrow} \tilde{B} \tilde{B}_1^T + \hat{b}_2'^{\uparrow\downarrow} \tilde{B} \tilde{D}_1^T \right) \Big] + \\
& + h'_6 \Big[C \tilde{C}_1^T e^{ik_{ex}x - ik_{ex}x'} + \\
& + e^{ik_{ex}x + ik_{hx}x'} \left(\hat{a}_1'^{\downarrow\uparrow} C \tilde{B}_1^T + \hat{a}_1'^{\downarrow\downarrow} C \tilde{D}_1^T \right) + e^{ik_{ex}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{b}_1'^{\downarrow\uparrow} C A_1^T + \hat{b}_1'^{\downarrow\downarrow} C C_1^T \right) \Big] + \\
& + h'_8 \Big[\tilde{D} D_1^T e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{hx}x'} + \\
& + e^{-i\tilde{k}_{hx}x + i\tilde{k}_{ex}x'} \left(\hat{a}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} A_1^T + \hat{a}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} C_1^T \right) + e^{-i\tilde{k}_{hx}x - ik_{hx}x'} \left(\hat{b}_2'^{\downarrow\uparrow} \tilde{D} \tilde{B}_1^T + \hat{b}_2'^{\downarrow\downarrow} \tilde{D} \tilde{D}_1^T \right) \Big]
\end{aligned}
\tag{3.165}
$$

3.3 Израчунавање Џозефсонове струје

У овом одјељку скицираћемо извођење израза за Џозефсонову струју у S/M/S спојевима користећи се Макмилановом Гриновом функцијом која се односи на област лијевог суперпроводника и у њему ћемо узети да је фаза суперпроводног кондензата $\varphi_L = 0$, док је у десном $\varphi_R = \varphi$ чиме обезбјеђујемо фазну разлику $\varphi_R - \varphi_L = \varphi$. Густина наелектрисања, изражена помоћу оператора поља је

$$
P = -e \left(\hat{\Psi}_\uparrow^\dagger \hat{\Psi}_\uparrow + \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger \hat{\Psi}_\downarrow \right). \tag{3.166}
$$

Одавде налазимо да је извод по времену густине наелектрисања дат са

$$
\frac{\partial P}{\partial t} = -e \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger}{\partial t} \hat{\Psi}_\uparrow + \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger \frac{\partial \hat{\Psi}_\uparrow}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger}{\partial t} \hat{\Psi}_\downarrow + \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger \frac{\partial \hat{\Psi}_\downarrow}{\partial t} \right). \tag{3.167}
$$

Временска еволуција оператора поља одређена је једначинама

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_\uparrow}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi}_\uparrow + \Delta(\mathrm{r})\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow, \tag{3.168}$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_\downarrow}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi}_\downarrow + \Delta(\mathrm{r})\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow, \tag{3.169}$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow + \Delta(\mathrm{r})\hat{\Psi}_\downarrow, \tag{3.170}$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow + \Delta(\mathrm{r})\hat{\Psi}_\uparrow, \tag{3.171}$$

гдје је Δ диференцијални оператор Лапласа, а $\Delta(\mathbf{r})$ је суперпроводни параметар уређења. Замјењујући парцијалне изводе оператора поља по времену у (3.167) и користећи идентитет

$$\Phi\Delta\Psi = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\nabla\Psi) - \nabla\Phi\nabla\Psi, \tag{3.172}$$

добија се

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} = &-\frac{e\hbar}{2im}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\nabla\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\hat{\Psi}_\uparrow - \hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\nabla\hat{\Psi}_\uparrow + \nabla\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\hat{\Psi}_\downarrow - \hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\nabla\hat{\Psi}_\downarrow\right)\\ &-\frac{e}{i\hbar}\left(\Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}_\downarrow\hat{\Psi}_\uparrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}_\uparrow\hat{\Psi}_\downarrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\right).\end{aligned} \tag{3.173}$$

Упоређујући овај израз са једначином континуитета

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + S = 0, \tag{3.174}$$

налазимо да је

$$\mathbf{J} = \frac{e\hbar}{2im}\left(\nabla\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\hat{\Psi}_\uparrow - \hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\nabla\hat{\Psi}_\uparrow + \nabla\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\hat{\Psi}_\downarrow - \hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\nabla\hat{\Psi}_\downarrow\right), \tag{3.175}$$

и

$$S = \frac{e}{i\hbar}\left(\Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}_\downarrow\hat{\Psi}_\uparrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}_\uparrow\hat{\Psi}_\downarrow + \Delta(\mathbf{r})\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow\right). \tag{3.176}$$

Сорс члан (енг. source term), S, који се не јавља у уобичајеним једначинама континуитета је посљедица тога што потенцијал спаривања представљамо у облику Хевисајдове (степ) функције (3.20), а не рачунамо самоусаглашено његову промјену на границама суперпроводника. Он служи за конверзију суперструје у области суперпроводника и био би нула кад би се спровео потпуни самоусаглашени прорачун. Експериментална мјерења и досадашња израчунавања Џозефсонове струје показују да су разлике између ова два начина довољно мале да не мијењају квалитативне особине Џозефсонове CPR, а самоусаглашени нумерички прорачуни захтијевају значајније компјутерске ресурсе.

Након Викове ротације, $t \to i\tau$, производе оператора можемо представити помоћу матричних елемената Мацубарине Гринове функције и налазимо [16]

$$\begin{aligned}\langle J_x\rangle &= \frac{e\hbar k_B T}{4im}\lim_{x'\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\Big\langle\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow(x'\tau')\hat{\Psi}_\uparrow(x\tau) + \hat{\Psi}^\dagger_\downarrow(x'\tau')\hat{\Psi}_\downarrow(x\tau) -\\ &\qquad -\hat{\Psi}_\uparrow(x'\tau')\hat{\Psi}^\dagger_\uparrow(x\tau) - \hat{\Psi}_\downarrow(x'\tau')\hat{\Psi}^\dagger_\downarrow(x\tau)\Big\rangle\\ &= \frac{e\hbar k_B T}{4im}\lim_{x'\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x}\right)(G_{11} + G_{22} + G_{33} + G_{44}).\end{aligned} \tag{3.177}$$

Мацубарине Гринове функције добијамо аналитичким продужењем

$$G^R(E+i\delta)\to G(i|\omega_n|)\quad \text{и}\quad G^A(E-i\delta)\to G(-i|\omega_n|), \tag{3.178}$$

при чему су ω_n Мацубарине фреквенције које су за систем фермиона дате са

$$\omega_n=\pi k_BT(2n+1), \tag{3.179}$$

гдје је $n=0,\pm1,\pm2,...$, а T је температура система. Дакле, из (3.177) читамо да је

$$\langle J_x\rangle=\frac{e\hbar k_BT}{4im}\lim_{x'\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{Tr}\,G(x,x',i\omega_n,k_y). \tag{3.180}$$

Слично, за сорс члан имамо

$$\langle S\rangle=\frac{ek_BT}{i\hbar}\Delta(\mathbf{r})\lim_{x'\to x}\left\langle\hat\Psi_\downarrow(x'\tau')\hat\Psi_\uparrow(x\tau)+\hat\Psi^\dagger_\uparrow(x'\tau')\hat\Psi^\dagger_\downarrow(x\tau)+\hat\Psi_\uparrow(x'\tau')\hat\Psi_\downarrow(x\tau)+\hat\Psi^\dagger_\downarrow(x'\tau')\hat\Psi^\dagger_\uparrow(x\tau)\right\rangle, \tag{3.181}$$

одакле читамо

$$\langle S\rangle=\frac{ek_BT}{i\hbar}\lim_{x'\to x}\left(\Delta(\mathbf{r})G_{14}+\Delta(\mathbf{r})G_{23}-\Delta(\mathbf{r})G_{41}-\Delta(\mathbf{r})G_{32}\right). \tag{3.182}$$

Мацубарину Гринову функцију за позитивне фреквенције, $\omega_n>0$, добијамо из ретардоване Макмиланове функције (3.101) аналитичким продужењем $E+i\delta\to i\omega_n$ и примјењујући израз (3.180) на њу налазимо

$$\begin{aligned}\left\langle J_x^R\right\rangle=&\frac{e\hbar k_BT}{4im}\Big\{-4ik_{exn}g_{2n}+4i\tilde k_{hxn}g_{3n}+\\&+(-i)\Big(k_{exn}+k_{hxn}\Big)g_{2n}\left(a^{\uparrow\uparrow}_{1n}+a^{\downarrow\downarrow}_{1n}\right)2u_nv_n\,e^{i(k_{hxn}-k_{exn})x}+\\&+(i)\left(\tilde k_{exn}+\tilde k_{hxn}\right)g_{3n}\left(a^{\uparrow\uparrow}_{2n}+a^{\downarrow\downarrow}_{2n}\right)2\tilde u_n\tilde v_n\,e^{i\left(\tilde k_{hxn}-\tilde k_{exn}\right)x}+\\&+(-i)\left(k_{exn}-\tilde k_{exn}\right)g_{2n}\left(b^{\uparrow\uparrow}_{1n}+b^{\downarrow\downarrow}_{1n}\right)\left(u_n\tilde u_n+v_n\tilde v_n\,\mathrm{sgn}(\Delta)\,\mathrm{sgn}(\tilde\Delta)\right)e^{-i\left(k_{exn}+\tilde k_{exn}\right)x}+\\&+(i)\left(\tilde k_{hxn}-k_{hxn}\right)g_{3n}\left(b^{\uparrow\uparrow}_{2n}+b^{\downarrow\downarrow}_{2n}\right)\left(v_n\tilde v_n+u_n\tilde u_n\,\mathrm{sgn}(\Delta)\,\mathrm{sgn}(\tilde\Delta)\right)e^{-i\left(k_{hxn}+\tilde k_{hxn}\right)x}\Big\},\end{aligned} \tag{3.183}$$

гдје индекс n служи да означи величине које одговарају Мацубариној фреквенцији ω_n. Имајући у виду да је $k_{exn}\approx\tilde k_{exn}$ и $k_{hxn}\approx\tilde k_{hxn}$ занемарујемо посљедња два сабирка. Прва два сабирка ће се компензовати са одговарајућим члановима који се добијају приликом рачунања струје за $\omega_n<0$, а за шта се користи аналитичко продужење адвансиране Макмиланове Гринове функције. Из тог разлога одмах ћемо их изоставити ради једноставнијег записивања израза, па је

$$\begin{aligned}\left\langle J_x^R\right\rangle=\frac{e\hbar k_BT}{4im}\Big\{&(-i)\Big(k_{exn}+k_{hxn}\Big)g_{2n}\left(a^{\uparrow\uparrow}_{1n}+a^{\downarrow\downarrow}_{1n}\right)2u_nv_n\,e^{i(k_{hxn}-k_{exn})x}+\\&+(i)\left(\tilde k_{exn}+\tilde k_{hxn}\right)g_{3n}\left(a^{\uparrow\uparrow}_{2n}+a^{\downarrow\downarrow}_{2n}\right)2\tilde u_n\tilde v_n\,e^{i\left(\tilde k_{hxn}-\tilde k_{exn}\right)x}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.184}$$

На сличан начин, користећи (3.182), налази се да је струја која потиче од сорс члана

$$J_s^R = \int_x^0 \left\langle S^R \right\rangle dx = \frac{ek_BT}{i\hbar}\Big\{|\Delta|\left(v_n^2-u_n^2\right)g_{2n}\left(a_{1n}^{\uparrow\uparrow}+a_{1n}^{\downarrow\downarrow}\right)\frac{k_{hxn}+k_{exn}}{i\left(k_{hxn}^2-k_{exn}^2\right)}\Big(1-e^{i(k_{hxn}-k_{exn})x}\Big)+$$
$$+|\tilde{\Delta}|\left(\tilde{v}_n^2-\tilde{u}_n^2\right)g_{3n}\left(a_{2n}^{\uparrow\uparrow}+a_{2n}^{\downarrow\downarrow}\right)\frac{\tilde{k}_{hxn}+\tilde{k}_{exn}}{i\left(\tilde{k}_{hxn}^2-\tilde{k}_{exn}^2\right)}\left(1-e^{i\left(\tilde{k}_{hxn}-\tilde{k}_{exn}\right)x}\right)\Big\}. \tag{3.185}$$

Укупна струја је

$$J^R = \left\langle J_x^R \right\rangle + J_s^R. \tag{3.186}$$

Имајући у виду да је

$$uv = \frac{|\Delta|}{2E}, \quad \tilde{u}\tilde{v} = \frac{|\tilde{\Delta}|}{2E}, \tag{3.187}$$

$$u^2 - v^2 = \frac{\Omega}{E}, \quad \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{\Omega}}{E}, \tag{3.188}$$

$$k_{hx}^2 - k_{ex}^2 = -2\frac{2m}{\hbar^2}\Omega, \quad \tilde{k}_{hx}^2 - \tilde{k}_{ex}^2 = -2\frac{2m}{\hbar^2}\tilde{\Omega}, \tag{3.189}$$

као и да је

$$\Omega_n = i\,\mathrm{sgn}(\omega_n)\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}, \tag{3.190}$$

$$\tilde{\Omega}_n = i\,\mathrm{sgn}(\omega_n)\sqrt{\omega_n^2+|\tilde{\Delta}|^2}, \tag{3.191}$$

након сабирања израза (3.184) и (3.185) уз сумирање по свим трансверзалним каналима, k_y, и по свим Мацубариним фреквенцијама $\omega_n > 0$, послије сређивања долазимо до израза за израчунавање укупне Џозефсонове струје за позитивне Мацубарине фреквенције

$$I^R = \frac{ek_BT}{2\hbar}\sum_{\substack{k_y\\ \omega_n>0}}\left\{\frac{|\Delta|}{\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}}\left(k_{exn}+k_{hxn}\right)\frac{a_{1n}^{\uparrow\uparrow}+a_{1n}^{\downarrow\downarrow}}{2k_{Fx}} - \frac{|\tilde{\Delta}|}{\sqrt{\omega_n^2+|\tilde{\Delta}|^2}}\left(\tilde{k}_{exn}+\tilde{k}_{hxn}\right)\frac{a_{2n}^{\uparrow\uparrow}+a_{2n}^{\downarrow\downarrow}}{2k_{Fx}}\right\}. \tag{3.192}$$

Описаним поступком, уз аналитичко продужење адвансиране Макмиланове Гринове функције долази се до израза за израчунавање укупне Џозефсонове струје за негативне Мацубарине фреквенције

$$I^A = \frac{ek_BT}{2\hbar}\sum_{\substack{k_y\\ \omega_n<0}}\left\{\frac{|\Delta|}{\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}}\left(k_{exn}+k_{hxn}\right)\frac{a_{2n}'^{\uparrow\uparrow}+a_{2n}'^{\downarrow\downarrow}}{2k_{Fx}} - \frac{|\tilde{\Delta}|}{\sqrt{\omega_n^2+|\tilde{\Delta}|^2}}\left(\tilde{k}_{exn}+\tilde{k}_{hxn}\right)\frac{a_{1n}'^{\uparrow\uparrow}+a_{1n}'^{\downarrow\downarrow}}{2k_{Fx}}\right\}. \tag{3.193}$$

Укупна Џозефсонова струја добија се као збир доприноса који потиче од позитивних и негативних фреквенција:

$$I(\varphi) = I^R + I^A, \tag{3.194}$$

што представља генерализацију Фурусаки-Цукада формуле за израчунавање Џозефсонове CPR за случај d-wave суперпроводника повезаних спински активном баријером. Наиме, Фурусаки и Цукада су извели 1991. године формулу за израчунавање Џозефсонове струје у случају спојева изотропних s-wave суперпроводника са баријером која може бити нормални метал или изолатор [88].

Уколико се примијени Андрејевљева апроксимација при којој је

$$k_{ex} \approx k_{hx} \approx \tilde{k}_{ex} \approx \tilde{k}_{hx} \approx k_{Fx}, \tag{3.195}$$

што се оправдава чињеницом да је $|\Delta|, |E| \ll \mu$, испоставља се да су ова два доприноса једнака, па се Џозефсонова CPR може са довољном прецизношћу рачунати као [16, 20, 33, 81, 184]

$$I(\varphi) = \frac{ek_BT}{\hbar} \sum_{\substack{k_y \\ \omega_n>0}} \left\{ \frac{a_{1n}^{\uparrow\uparrow} + a_{1n}^{\downarrow\downarrow}}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} |\Delta| - \frac{a_{2n}^{\uparrow\uparrow} + a_{2n}^{\downarrow\downarrow}}{\sqrt{\omega_n^2 + |\tilde{\Delta}|^2}} |\tilde{\Delta}| \right\}. \tag{3.196}$$

CPR зависи само од коефицијената за Андрејевљеву рефлексију и то само оних који се односе на ситуацију кад је спин андрејевљевски расијане квазичестице исти као и спин упадне квазичестице. Коефицијенти $a_1^{\uparrow\uparrow}$ и $a_1^{\downarrow\downarrow}$ односе се на процесе са упадним квазиелектроном спина $\uparrow$ и $\downarrow$, респективно, при чему се рефлектују квазишупљине исте пројекције спина, а коефицијенти $a_2^{\uparrow\uparrow}$ и $a_2^{\downarrow\downarrow}$ на процесе са упадном квазишупљином спина $\uparrow$ и $\downarrow$, респективно, при чему се рефлектују квазиелектрони са непромијењеном пројекцијом спина. Другим ријечима, ови процеси се односе на пролазак Куперовог пара на десно или на лијево [88].

Глава 4

Џозефсонов ефекат у DFFD спојевима

У овој глави анализира се Џозефсонов ефекат у спојевима са произвољно оријентисаним суперпроводљивим електродама са d-wave симетријом параметра уређења и са баријером која се састоји од два феромагнетна слоја са различито оријентисаним векторима магнетизација. Наиме, у посљедњих неколико деценија, развој тзв. ramp-edge технике [185–187] омогућио је фабрикацију Џозефсонових спојева са произвољним углом између кристалних оса суперпроводљивих материјала и њихове међусобне границе, што је мотивисало истраживања појава које зависе од оријентације [188–191].

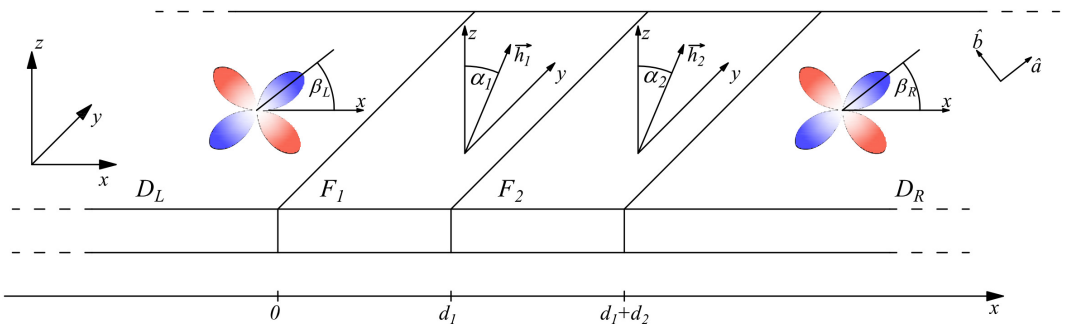
Истраживан је узајамни утицај оријентације кристала суперпроводних електрода и угла мисоријентације између магнетизација у феромагнетном двослоју. Карактеристични оштри минимуми (у даљем тексту дипови) на кривама које представљају зависност критичне струје од дебљине баријере повезани су са $0-\pi$ фазним прелазима, или са прелазима између $\pi/2$ стања и коегзистенције 0 и π стања, зависно од типа споја. За сваку специфичну оријентацију суперпроводљивих електрода у Џозефсоновим спојевима са погодно изабраном дебљином баријере и јачином измјенског поља у феромагнетима, показује се могућност постизања различитих фазних разлика основног стања споја мијењањем међусобне оријентације феромагнетног поља, што је много лакше за примјену него промјеном дебљине баријере или температуре. Такође, на фазним дијаграмима дебљина – феромагнетна мисоријентација уочене су зоне коегзистенције стабилних и метастабилних стања споја [33].

Резултати представљени у овој глави засновани су на објављеном раду [33]:

S. Djurdjević and Z. Popović, *Influence of d-wave superconductor orientation on Josephson current and phase difference in junctions with inhomogeneous ferromagnet*, **PTEP 2021, 083I02 (2021).**

4.1 Модел

Посматрамо дводимензионални Џозефсонов спој смјештен у xy-раван који се састоји од двије полубесконачне суперпроводљиве електроде са d-wave симетријом спаривања ($\mathrm{D_L}$ и $\mathrm{D_R}$) и два феромагнетна слоја ($\mathrm{F_1}$ и $\mathrm{F_2}$) у баријери (слика 4.1). Дебљине феромагнетних слојева су d_1 и d_2, а вектори њихових магнетизација могу да имају произвољне правце у yz-равни. Измјенска поља у $\mathrm{F_1}$ и $\mathrm{F_2}$ су $\mathbf{h_1} = h_1(0, \sin\alpha_1, \cos\alpha_1)$ и $\mathbf{h_2} = h_2(0, \sin\alpha_2, \cos\alpha_2)$, респективно. Релативни угао између магнетизација у два феромагнета је $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.



Слика 4.1: Схематски приказ $\mathrm{D_LF_1F_2D_R}$ Џозефсоновог споја. Вектори магнетизација леже у yz равни и са z-осом формирају углове α_1 и α_2. Приказан је потенцијал спаривања са d-wave симетријом, гдје су β_L и β_R углови између $\hat{a}$-оса кристала и x-осе у лијевој и десној суперпроводљивој електроди, респективно [33].

Да бисмо израчунали Џозефсонову струју у оваквом типу споја потребно је да одредимо транспортне коефицијенте квазичестица примјењујући Богољубов-де Женов формализам. У Намбу-спинском простору BdG хамилтонијан је [146]

$$H_{\mathrm{BdG}} = \begin{pmatrix} H & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^* & -\widetilde{H} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Једночестични хамилтонијан дат је са

$$H = H_0 + W(\mathbf{r}) + \sum_{i=1,2} H_{\mathrm{F}_i}, \tag{4.2}$$

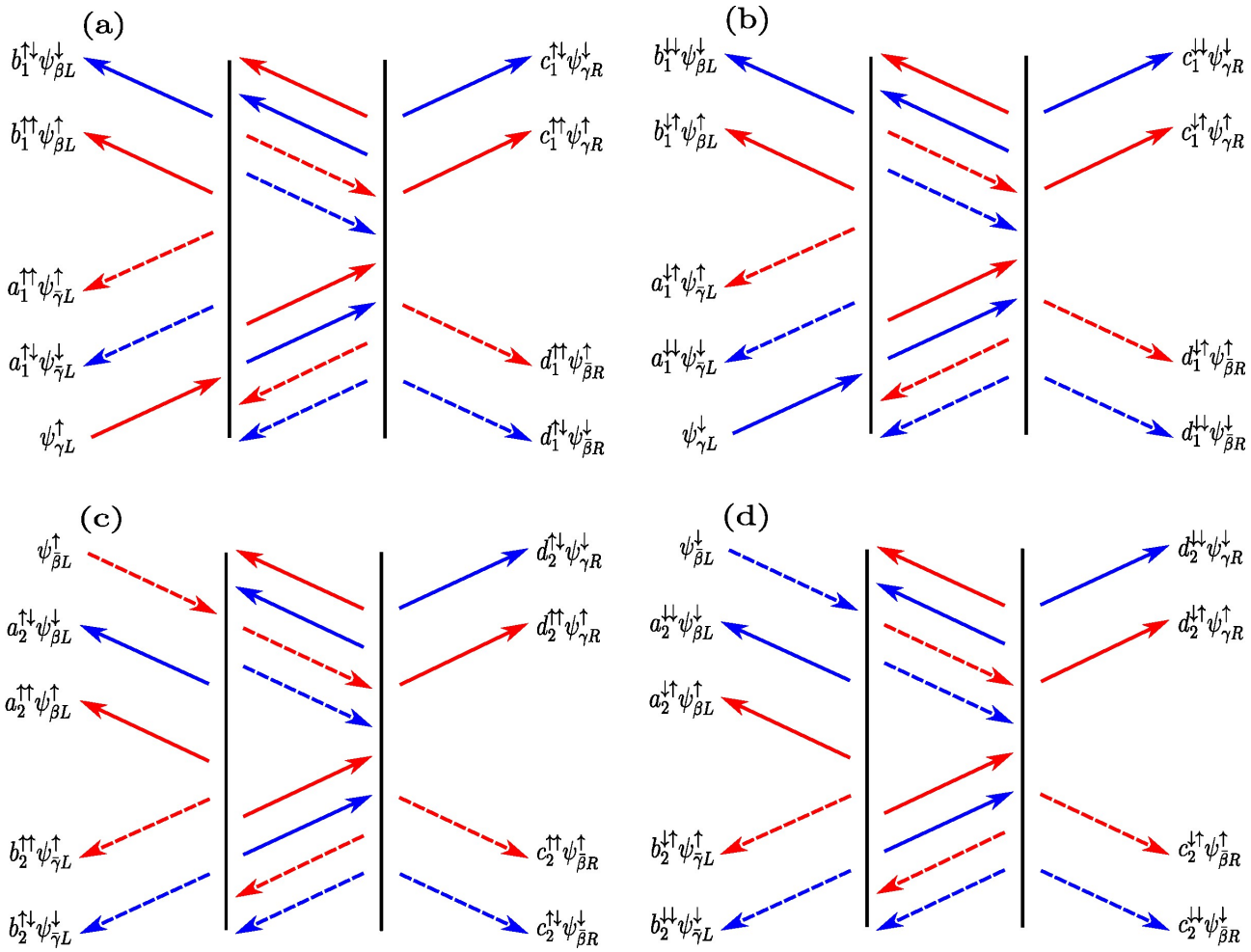
гдје $H_0 = (\hbar^2 k^2/2m - \mu)\sigma_0$ кинетички члан, μ је хемијски потенцијал, а m је ефективна маса квазичестица. Ради једноставности, претпостављамо да су хемијски потенцијали као и ефективне масе једнаки у свим дјеловима споја. σ_0 је јединична 2×2 матрица. Потенцијал на границама између слојева моделирамо са $W(\mathbf{r}) = \sum_i W_i \delta(x - x_i)$, гдје је W_i ефективна јачина изолаторског потенцијала, а $\delta(x)$ је Диракова делта функција. Положаји граница које су парарлелне y-оси одређени су координатама x_i. Феромагнетни чланови дати су са

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{F}_1} &= -\mathbf{h}_1 \boldsymbol{\sigma} \Theta(x)\Theta(d_1 - x), \\ H_{\mathrm{F}_2} &= -\mathbf{h}_2 \boldsymbol{\sigma} \Theta(x - d_1)\Theta(d_1 + d_2 - x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

гдје $\Theta(x)$ Хевисајдова функција, а $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ је вектор Паулијевих матрица. Потенцијал спаривања у суперпроводницима дефинисан је са

$$\hat{\Delta} = \Delta_L \sigma_x \Theta(x) + \Delta_R \sigma_x \Theta(x - d_1 - d_2). \tag{4.4}$$

Будући да је у споју задовољена транслациона инваријантност дуж правца y-осе, компонента импулса паралелна границама између дјелова споја, $k_y = k_F \sin\theta$, је очувана.



Слика 4.2: Схематска илустрација рефлексије и трансмисије на феромагнетној баријери када квазиелектрон наилази из лијевог суперпроводника са: (a) пројекцијом спина (↑) - (црвена пуна стрелица), (b) пројекцијом спина (↓) - (плава пуна стрелица), или када квазишупљина наилази из лијевог суперпроводника са: (c) пројекцијом спина (↑) - (црвена испрекидана стрелица), (d) пројекцијом спина (↓) - (плава испрекидана линија).

Таласна функција која задовољава BdG једначине,

$$H_{\mathrm{BdG}}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \tag{4.5}$$

тада има облик

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ik_y y}\psi(x,\theta), \tag{4.6}$$

гдје је θ угао између x-осе и таласног вектора квазичестице. Непозната таласна функција $\psi(x,\theta)$ дуж x-правца може се записати у четири области споја као

$$\begin{aligned}\psi(x,\theta) = {} & \psi_{\mathrm{D_L}}(x,\theta)\Theta(-x) + \psi_{\mathrm{F_1}}(x,\theta)\Theta(x)\Theta(d_1-x) + \\ & + \psi_{\mathrm{F_2}}(x,\theta)\Theta(x-d_1)\Theta(d_1+d_2-x) + \psi_{\mathrm{D_R}}(x,\theta)\Theta(x-d_1-d_2).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Свака од компоненти, $\psi_{\mathrm{D_L}}(x,\theta)$, $\psi_{\mathrm{F_1}}(x,\theta)$, $\psi_{\mathrm{F_2}}(x,\theta)$ и $\psi_{\mathrm{D_R}}(x,\theta)$, добија се рјешавањем својственог проблема BdG хамилтонијана засебно у свакој од четири области споја, након чега се конструшу таласне функције у складу са одговарајућим процесима расијања. Постоји осам процеса расијања којима одговара осам типова упадних квазичестица: квазиелектрон или квазишупљина, са спином ↑ или спином ↓, које на баријеру

наилазе из лијеве или из десне суперпроводљиве електроде. У претходној глави извели смо Фурусаки-Цукада формулу (3.196) за израчунавање Џозефсонове струје у зависности од фазне разлике између суперпроводника. Испоставило се да она зависи само од коефицијената за Андрејевљеву рефлексију за прва четири директна процеса који су коришћени за конструкцију ретардоване Макмиланове Гринове функције. На слици 4.2 приказана су ова четири процеса који одговарају случају када квазичестице наилазе на баријеру из лијевог суперпроводника. Пошто је баријера спински активна она може да промијени оријентацију спина расијаних честица. Видјели смо и да формула (3.196) зависи само од коефицијената за Андрејевљеву рефлексију при којој је спин упадне и рефлектоване честице исти. Међутим, не смијемо из формализма искључити расијане квазичестице са супротном пројекцијом спина како бисмо исправно одредили нумеричке вриједности потребних амплитуда вјероватноће.

Параметар уређења у лијевој и десној d-wave суперпроводљивој електроди зависи од правца квазичестица и дат је са

$$\Delta_{L[R]}(\theta) = \Delta(T)\cos\big(2(\theta - \beta_{L[R]})\big)e^{i\varphi_{L[R]}}, \tag{4.8}$$

$$\widetilde{\Delta}_{L[R]}(\theta) = \Delta(T)\cos\left(2(\theta + \beta_{L[R]})\right)e^{i\varphi_{L[R]}}. \tag{4.9}$$

Овдје, β_L и β_R означавају углове између x-осе и $\hat{a}$-оса кристала лијеве и десне електроде, респективно. Температурна зависност амплитуде потенцијала спаривања је [192]

$$\Delta(T) = \Delta(0)\tanh\left(1.74\sqrt{\frac{T_c}{T} - 1}\right). \tag{4.10}$$

Ознаке, $\Delta_{L[R]}$ и $\widetilde{\Delta}_{L[R]}$, користимо за квазичестице чији је правац пропагације дефинисан угловима θ и $\pi - \theta$ у односу на x-осу. Ови правци, означени са γ ($\bar{\gamma}$) и β ($\bar{\beta}$) индексима, наведени су и на слици 4.2. Индексом γ означена је таласна функција квазиелектрона који пропагира у правцу под углом θ у односу на x-осу. Индексом $\bar{\gamma}$ означена је таласна функција квазишупљине која пропагита у правцу $\pi + \theta$. Индексима, β и $\bar{\beta}$ означене су таласне функције квазиелектрона и квазишупљина који пропагирају у правцима $\pi - \theta$ и $-\theta$, респективно.

Рјешења BdG хамилтонијана, која представљају елементарна пропагирајућа стања у суперпроводљивим областима су

$$\psi^{\uparrow}_{\gamma j}(x,\theta) = \left(u_j e^{i\varphi_j/2}, 0, 0, \frac{\Delta_j^*}{|\Delta_j|}v_j e^{-i\varphi_j/2}\right)^T e^{ik_j^+ x}, \tag{4.11}$$

$$\psi^{\downarrow}_{\gamma j}(x,\theta) = \left(0, u_j e^{i\varphi_j/2}, \frac{\Delta_j^*}{|\Delta_j|}v_j e^{-i\varphi_j/2}, 0\right)^T e^{ik_j^+ x}, \tag{4.12}$$

$$\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma} j}(x,\theta) = \left(0, v_j e^{i\varphi_j/2}, \frac{\Delta_j^*}{|\Delta_j|}u_j e^{-i\varphi_j/2}, 0\right)^T e^{ik_j^- x}, \tag{4.13}$$

$$\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma} j}(x,\theta) = \left(v_j e^{i\varphi_j/2}, 0, 0, \frac{\Delta_j^*}{|\Delta_j|}u_j e^{-i\varphi_j/2}\right)^T e^{ik_j^- x}, \tag{4.14}$$

$$\psi^{\uparrow}_{\beta j}(x,\theta) = \left(\widetilde{u}_j e^{i\varphi_j/2}, 0, 0, \frac{\widetilde{\Delta}_j^*}{|\widetilde{\Delta}_j|}\widetilde{v}_j e^{-i\varphi_j/2}\right)^T e^{-i\widetilde{k}_j^+ x}, \tag{4.15}$$

$$\psi^{\downarrow}_{\beta j}(x,\theta) = \left(0, \widetilde{u}_j e^{i\varphi_j/2}, \frac{\widetilde{\Delta}^*_j}{|\widetilde{\Delta}_j|}\widetilde{v}_j e^{-i\varphi_j/2}, 0\right)^T e^{-i\widetilde{k}^+_j x}, \tag{4.16}$$

$$\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta} j}(x,\theta) = \left(0, \widetilde{v}_j e^{i\varphi_j/2}, \frac{\widetilde{\Delta}^*_j}{|\widetilde{\Delta}_j|}\widetilde{u}_j e^{-i\varphi_j/2}, 0\right)^T e^{-i\widetilde{k}^-_j x}, \tag{4.17}$$

$$\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta} j}(x,\theta) = \left(\widetilde{v}_j e^{i\varphi_j/2}, 0, 0, \frac{\widetilde{\Delta}^*_j}{|\widetilde{\Delta}_j|}\widetilde{u}_j e^{-i\varphi_j/2}\right)^T e^{-i\widetilde{k}^-_j x}, \tag{4.18}$$

гдје су BCS амплитуде

$$u_j = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega_j}{E}\right)}, \qquad v_j = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega_j}{E}\right)}, \tag{4.19}$$

$$\widetilde{u}_j = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\widetilde{\Omega}_j}{E}\right)}, \qquad \widetilde{v}_j = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\widetilde{\Omega}_j}{E}\right)}, \tag{4.20}$$

и $\Omega_j = \sqrt{E^2 - |\Delta_j(\theta)|^2}$, док је $\widetilde{\Omega}_j = \sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}_j(\theta)|^2}$. Лонгитудиналне ($x$) компоненте таласних вектора у суперпроводницима су

$$k^{\pm}_j = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu \pm \sqrt{E^2 - |\Delta_j|^2}) - k_y^2}, \tag{4.21}$$

$$\widetilde{k}^{\pm}_j = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu \pm \sqrt{E^2 - |\widetilde{\Delta}_j|^2}) - k_y^2}. \tag{4.22}$$

гдје се горњи знак односи на квазиелектроне, а доњи на квазишупљине. Индекс j служи за разликовање лијевог и десног суперпроводника и $j \in \{L, R\}$.

У лијевом феромагнету елементарна пропагирајућа стања су

$$\psi^{\uparrow}_{1\gamma[\beta]}(x) = \left(\cos\frac{\alpha_1}{2}, i\sin\frac{\alpha_1}{2}, 0, 0\right)^T e^{+[-]iq^+_{1\uparrow}x}, \tag{4.23}$$

$$\psi^{\downarrow}_{1\gamma[\beta]}(x) = \left(i\sin\frac{\alpha_1}{2}, \cos\frac{\alpha_1}{2}, 0, 0\right)^T e^{+[-]iq^+_{1\downarrow}x}, \tag{4.24}$$

$$\psi^{\downarrow}_{1\bar{\gamma}[\bar{\beta}]}(x,\theta) = \left(0, 0, i\sin\frac{\alpha_1}{2}, \cos\frac{\alpha_1}{2}\right)^T e^{+[-]iq^-_{1\downarrow}x}, \tag{4.25}$$

$$\psi^{\downarrow}_{1\bar{\gamma}[\bar{\beta}]}(x,\theta) = \left(0, 0, \cos\frac{\alpha_1}{2}, i\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)^T e^{+[-]iq^-_{1\uparrow}x}, \tag{4.26}$$

а у десном феромагнету

$$\psi^{\uparrow}_{2\gamma[\beta]}(x) = \left(\cos\frac{\alpha_2}{2}, i\sin\frac{\alpha_2}{2}, 0, 0\right)^T e^{+[-]iq^+_{2\uparrow}x}, \tag{4.27}$$

$$\psi^{\downarrow}_{2\gamma[\beta]}(x) = \left(i\sin\frac{\alpha_2}{2}, \cos\frac{\alpha_2}{2}, 0, 0\right)^T e^{+[-]iq^+_{2\downarrow}x}, \tag{4.28}$$

$$\psi^{\downarrow}_{2\bar{\gamma}[\bar{\beta}]}(x,\theta) = \left(0, 0, i\sin\frac{\alpha_2}{2}, \cos\frac{\alpha_2}{2}\right)^T e^{+[-]iq^-_{2\downarrow}x}, \tag{4.29}$$

$$\psi^{\downarrow}_{2\bar{\gamma}[\bar{\beta}]}(x,\theta)=\left(0,0,\cos\frac{\alpha_2}{2},i\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)^T e^{+[-]iq^{-}_{2\uparrow}x}, \tag{4.30}$$

гдје су лонгитудиналне (x) компоненте таласних вектора

$$q^{\pm}_{1\sigma}=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu+\rho_\sigma h_1\pm E)-k_y^2}, \tag{4.31}$$

$$q^{\pm}_{2\sigma}=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu+\rho_\sigma h_2\pm E)-k_y^2}. \tag{4.32}$$

И овдје горњи знак одговара квазиелектронима, а доњи квазишупљинама. $\rho_\sigma=+1$ за пројекцију спина $\sigma=\uparrow$, и $\rho_\sigma=-1$ за пројекцију спина $\sigma=\downarrow$.

На слици 4.2 приказани су процеси расијања када квазиелектрон или квазишупљина са пројекцијом спина $\uparrow$ или $\downarrow$ наилазе са лијеве стране на баријеру. Рјешења за таласне функције у процесу када је упадна честица квазиелектрон са пројекцијом спина $\uparrow$ (слика 4.2 (a)), у свакој области споја, дата су као линеарна комбинација елементарних пропагирајућих стања

$$\psi^{e\uparrow}_{D_L}(x,\theta) = \psi^{\uparrow}_{\gamma L}(x,\theta)+a_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}L}(x,\theta)+a_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma}L}(x,\theta)+b_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\beta L}(x,\theta)+b_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\beta L}(x,\theta), \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\psi^{e\uparrow}_{F_1}(x,\theta) = {} & f_1\psi^{\uparrow}_{\gamma}(x,\theta)+f_2\psi^{\downarrow}_{\gamma}(x,\theta)+f_3\psi^{\uparrow}_{\beta}(x,\theta)+f_4\psi^{\downarrow}_{\beta}(x,\theta)+\\ & +f_5\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta)+f_6\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta)+f_7\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}(x,\theta)+f_8\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta),\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\psi^{e\uparrow}_{F_2}(x,\theta) = {} & g_1\psi^{\uparrow}_{\gamma}(x,\theta)+g_2\psi^{\downarrow}_{\gamma}(x,\theta)+g_3\psi^{\uparrow}_{\beta}(x,\theta)+g_4\psi^{\downarrow}_{\beta}(x,\theta)+\\ & +g_5\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta)+g_6\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta)+g_7\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}(x,\theta)+g_8\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta),\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\psi^{e\uparrow}_{D_R}(x,\theta) = c_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\gamma R}(x,\theta)+c_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\gamma R}(x,\theta)+d_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}R}(x,\theta)+d_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}R}(x,\theta). \tag{4.36}$$

Коефицијенти $a_1^{\uparrow\uparrow}$ и $a_1^{\uparrow\downarrow}$ представљају амплитуде вјероватноће за Андрејевљеву рефлексију без и са промјеном оријентације спина, а $b_1^{\uparrow\uparrow}$ и $b_1^{\uparrow\downarrow}$ су одговарајући коефицијенти за нормалну рефлексију у лијевом суперпроводнику. Коефицијенти f_i и g_i $(i=1,...,8)$ су амплитуде вјероватноће за пропагирајућа стања у лијевом и десном феромагнету, респективно. Амплитуде вјероватноће за нормалну трансмисију у десни суперпроводник су $c_1^{\uparrow\uparrow}$ и $c_1^{\uparrow\downarrow}$, а за Андрејевљеву трансмисију су $d_1^{\uparrow\uparrow}$ и $d_1^{\uparrow\downarrow}$. Рјешења за преостала три процеса могу се записати на аналоган начин, уз нови скуп коефицијената, у складу са схемама приказаним на сликама 4.2 (b), (c) и (d).

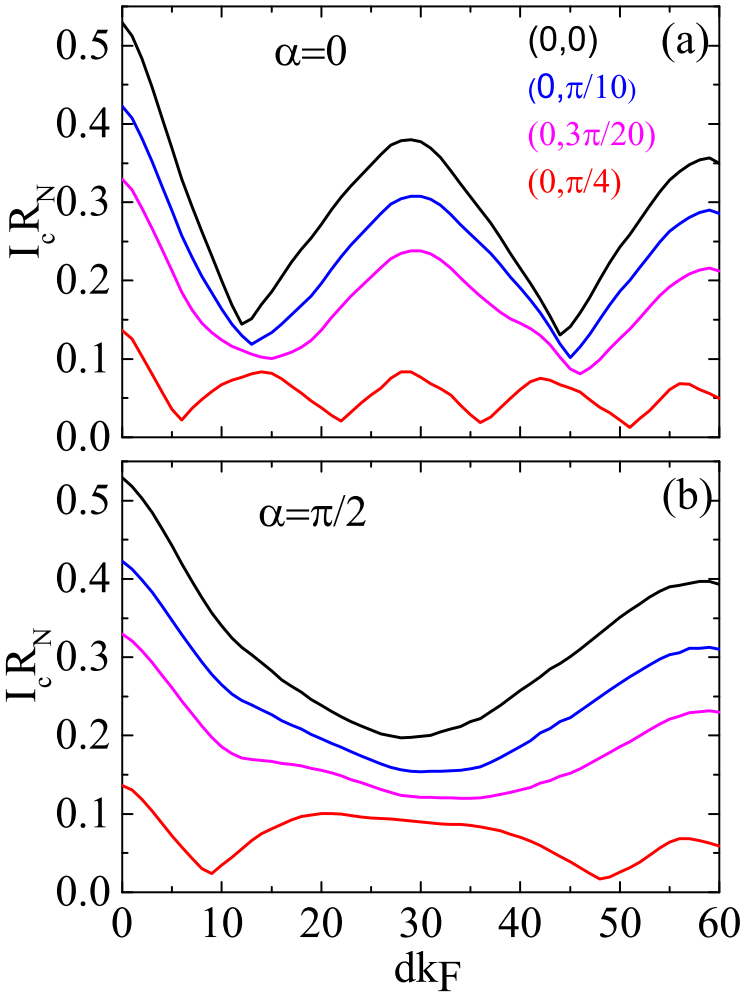
Коефицијенти расијања се одређују на основу граничних услова који су у овом случаји дати са

$$\psi(x,\theta)|_{x_i+0}=\psi(x,\theta)|_{x_i-0}=\psi(x_i,\theta), \tag{4.37}$$

$$\frac{d\psi(x,\theta)}{dx}\Big|_{x_i+0}-\frac{d\psi(x,\theta)}{dx}\Big|_{x_i-0}=Z_i k_F^{(S)}\psi(x_i,\theta), \tag{4.38}$$

гдје су изолаторске границе, које се налазе у $x_i=0,d_1,d_1+d_2$, описане бездимензионим параметром $Z_i=2mW_i/\hbar^2k_F$ $(i=1,2,3)$.

Ови гранични услови рјешавају се нумерички, и за сваку енергију и трансверзални импулс k_y, постоје 24 једначине у којима је 24 непозната коефицијента расијања. За израчунавање Џозефсонове струје према формули (3.196) која је изведена у претходној глави потербни су само коефицијенти за Андрејевљеву рефлексију са очуваним спином, $a_1^{\uparrow\uparrow}$, $a_1^{\downarrow\downarrow}$, $a_2^{\uparrow\uparrow}$ и $a_2^{\downarrow\downarrow}$.



Слика 4.3: Критична струја, I_c, у зависности од дебљине феромагнетног двослоја, d, за $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$, и четири различите оријентације десне d-wave суперпроводне електроде: $\beta_R = 0$ (црна линија), $\beta_R = \pi/10$ (плава линија), $\beta_R = 3\pi/20$ (розе линија), $\beta_R = \pi/4$ (црвена линија). Лијева суперпроводна електрода има оријентацију $d_{x^2-y^2}$, тј. $\beta_L = 0$, у свим случајевима. (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = \pi/2$.

4.2 Резултати: улога оријентације суперпроводног параметра уређења и оријентације магнетизација

Послије нумеричког сабирања по Мацубара фреквенцијама и интеграцијом по трансверзалним транспортним каналима, формула (3.196) даје CPR за описане Џозефсонове спојеве. Вриједност критичне Џозефсонове струје добија се према

$$I_c = \max_{\varphi} |I(\varphi)|, \tag{4.39}$$

гдје је $\varphi = \varphi_L - \varphi_R$ разлика макроскопских фаза лијевог и десног суперпроводљивог кондензата. Ради једноставности, представићемо резултате у случају кад су феромагнетни слојеви једнаке дебљине, $d_1 = d_2 = d/2$, и са једнаким измјенским пољима, $h_1 = h_2 = h$. Такође, претпостављамо да су једнаки интензитети Фермијевих таласних вектора у свим дјеловима споја, $k_F^{(S)} = k_F^{(F)} = k_F$, и да су границе између различитих материјала потпуно транспарентне, $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$.

На слици 4.3 приказана је критична Џозефсонова струја (нормализована на отпор $R_N = 4\pi^2\hbar/(e^2 k_F)$) у зависности од дебљине феромагнетног двослоја за спој у којем лијева суперпроводна електрода има оријентацију $d_{x^2-y^2}$ ($\beta_L = 0$), док десна електрода може да има произвољну оријентацију β_R. Пошто дебљина феромагнетне баријере, d, и измјенско поље, h, имају приближно реципрочан утицај на струју кроз спој [37], критичну струју приказујемо у функцији дебљине баријере за $h = 0.1E_F$. Осцилаторни карактер $I_c(d)$ усљед присуства измјенског поља приказан је за различите оријентације десне d-wave суперпроводне електроде, $(\beta_L, \beta_R) = (0,0), (0,\pi/10), (0,3\pi/20)$ и $(0,\pi/4)$. Ради илустрације утицаја угла мисоријентације, α, између магнетизација у феромагнетима у yz-равни, криве $I_c(d)$ приказане су за два случаја, $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, на сликама 4.3(a) и 4.3(b), редом.

За DFFD спојеве код којих је $\beta_R \neq \pi/4$, минимуми на кривама $I_c(d)$ раздвајају 0 и π стања Џозефсоновог споја која се наизмјенично смјењују, почевши од 0 стања са лијеве стране. Минимуми за спој типа $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pi/4)$ раздвајају интервале коегзистенције стабилних 0 и π стања од интервала у којима је стабилно стање Џозефсоновог споја $\pi/2$ стање, при чему се са лијеве стране почиње са $\pi/2$ стањем[1]. Имајући у виду да параметар уређења у d-wave суперпроводницима има четири лобуса, са наизменичним знаковима који су раздвојени чворовима у којима суперпроводни енергијски процјеп ишчезава, у споју типа $(0,\pi/4)$ хармоници означени непарним индексом у Џозефсоновој CPR датој изразом (2.95) су потиснути, што даје

$$I(\varphi) = \sum_{n\geq 1} I_{2n} \sin(2n\varphi). \tag{4.40}$$

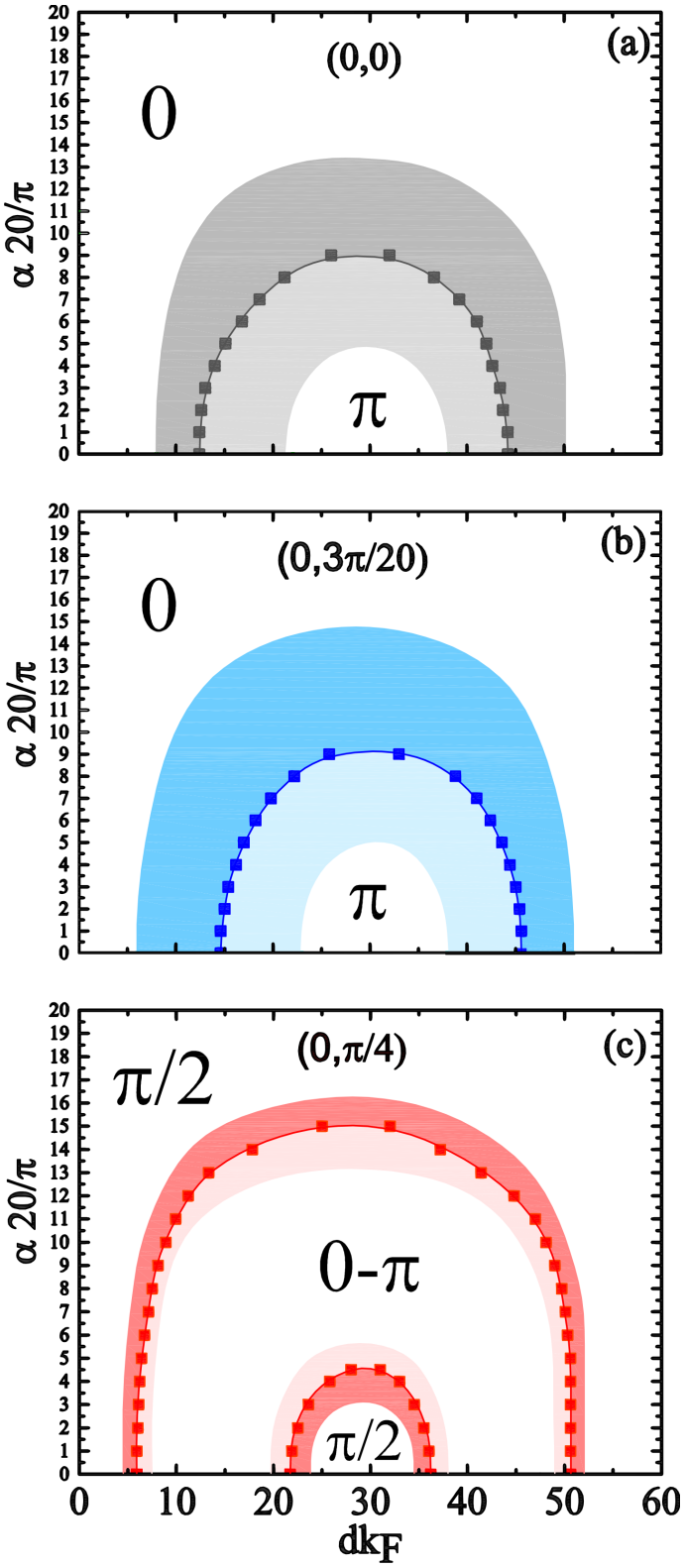
Најчешће је најдоминантнији први члан у овом развоју па Џозефсонова струја има двоструко већу периодичност по фази у односу на спојеве са конвенционалним или d-wave суперпроводницима код којих је $\beta_L = 0$, а $\beta_R \neq \pi/4$ [193]. За $\alpha = 0$ у споју типа $(0,\pi/4)$ постоје четири минимума на кривој $I_c(d)$ (за $k_F d < 60$), док се са повећањем угла α број минимума смањује, тако да за $\alpha = \pi/2$ постоје два минимума. За све остале типове спојева $(0, \beta_R \neq \pi/4)$, у случају $\alpha = 0$, на кривама $I_c(d)$ постоје два јасно уочљива минимума (за $k_F d < 60$), док за $\alpha = \pi/2$ нема оштрих минимума што указује да се тада фазни прелаз не индукује промјеном дебљине баријере. Са повећањем угла β_R од 0 до $\pi/4$, критична струје се смањује за сваку одређену вриједност угла мисоријентације, α, између магнетизација.

На основу прорачуна кривих $I_c(d)$ и положаја оштрих минимума на њима за дискретан број углова α са вриједностима између 0 и π, на сликама 4.4(a), 4.4(b) и 4.4(c) су приказани фазни дијаграми у (d,α) равни за DFFD спојеве типа $(0,0)$, $(0,3\pi/20)$ и $(0,\pi/4)$, редом. За спојеве типа $(0,0)$ и $(0,3\pi/20)$, (d,α) фазни дијаграм показује један полукруг (означен црним квадратима за спој типа $(0,0)$, слика 4.4(a), и плавим квадратима за спој типа $(0,3\pi/20)$, слика 4.4(b)) који је повезан са највише два оштра минимума на кривама $I_c(d)$ за $0 \leq \alpha < \pi/2$, док за $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ оштри минимуми не постоје. Линија у (d,α) дијаграму означена квадратићима раздваја области параметара у којима се спој налази у стабилном 0 или π стању, док за вриједности параметара које одговарају линији којој квадратићи припадају постоји коегзистенција 0 и π стања. Треба напоменути да сличан (d,α) фазни дијаграм постоји и за све спојеве типа $(0, \beta_R \neq \pi/4)$, у којима су могућа само стабилна 0 и π стања. Осјенченим областима око полукругова приказана је област параметара у којој могу коегзистирати стабилна и метастабилна стања. На сликама 4.4(a)

[1]Стање Џозефсоновог споја одређено је фазном разликом између суперпрододника у којој слободна Џозефсонова енергија која је дефининисана са

$$F(\varphi) \sim \int_0^{\varphi} I(\varphi')d\varphi'$$

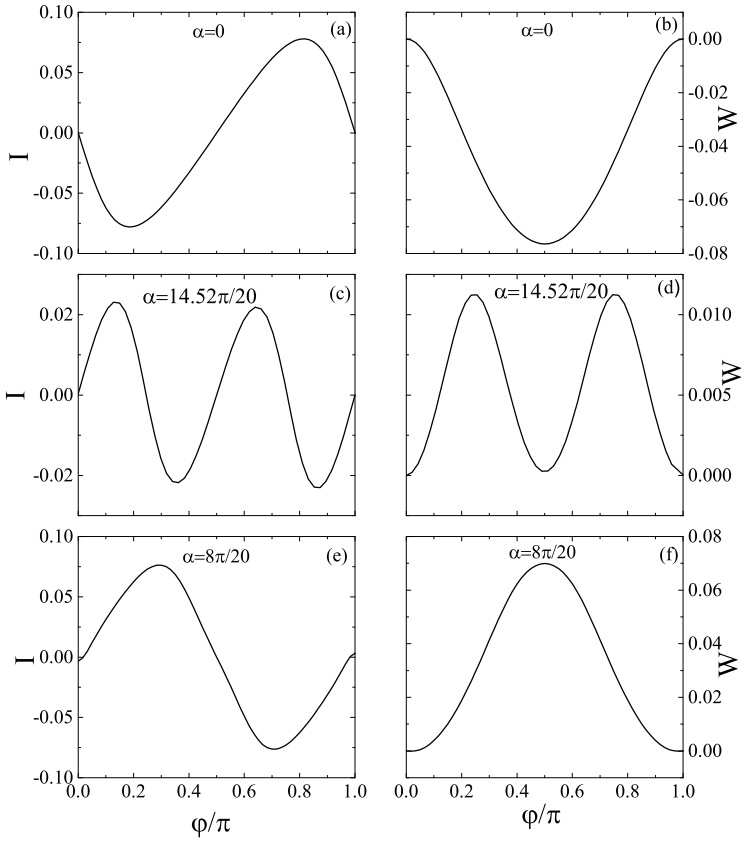
постиже минимум.



Слика 4.4: Фазни дијаграм у зависности од угла мисоријентације, α, између магнетизација, и дебљине, d, баријере, за $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$. (a) $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, (b) $(\beta_L, \beta_R) = (0, 3\pi/20)$, (c) $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pi/4)$. Осјенчене области око полукругова представљају области у (d, α) равни у којима коегзистирају стабилна и метастабилна стања.

и 4.4(b), стабилно 0 и метастабилно π стање коегзистирају у осјенченој области изван полукруга, док стабилно π и метастабилно 0 стање коегзистирају у осјенченој области унутар полукруга. Са повећањем угла β_R, оштри минимуми на кривама $I_c(d)$ се благо помјерају ка већим дебљинама, што се може уочити поређењем слика 4.4(a) и 4.4(b) за било које вриједности α између 0 и $\pi/2$.

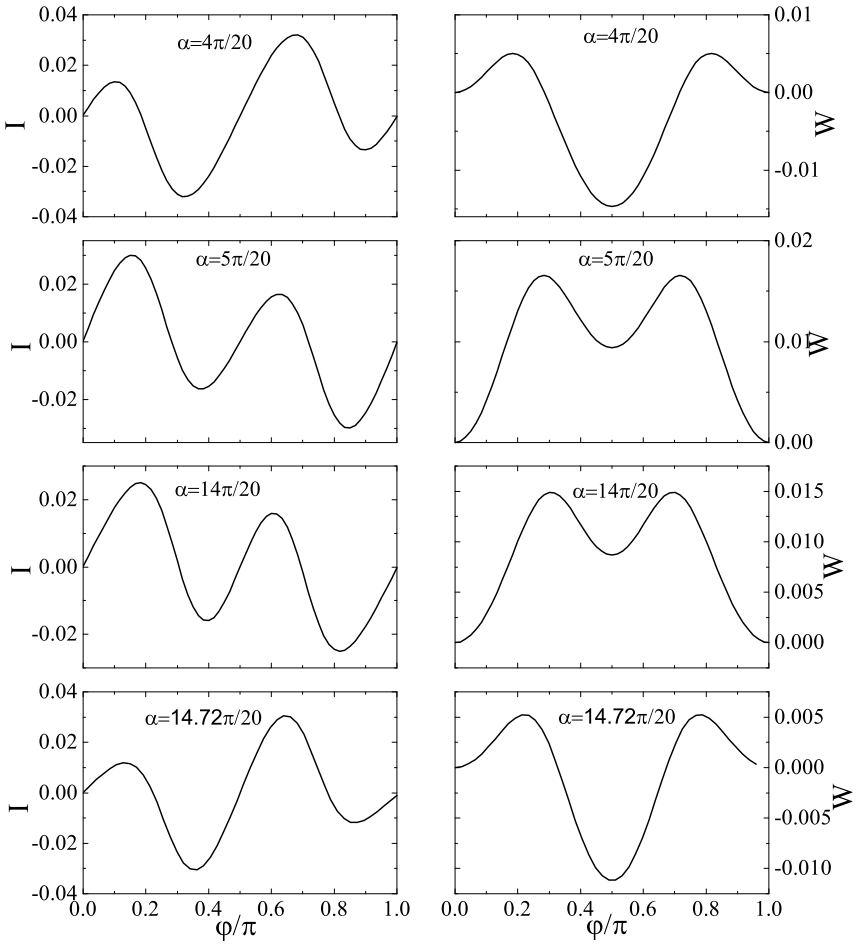
Са друге стране, када је лобус параметра уређења једне електроде окренут ка чвору друге електроде, $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pi/4)$, фазни дијаграм у (d, α) равни показује два уметнута полукруга (формирана црвеним квадратићима на слици 4.4(c)), који су повезани са највише четири минимума (за $k_F d < 60$) на кривама $I_c(d)$, приказаним за случај $\alpha = 0$ на слици 4.3(a), и два минимума за случај $\alpha = \pi/2$ на слици 4.3(b). Овдје линије означене квадратићима на (d, α) дијаграму раздвајају области параметара у којима је спој у стабилном $\pi/2$ стању и области у којима постоји коегзистенција стабилних 0 и π стања (двоструко дегенерисано основно стање споја), као што је приказано на слици 4.4(c). За вриједности параметара које одговарају овим двјема линијама постоји коегзистенција три стања: 0, $\pi/2$ и π. У осјенченој области изван великог полукруга коегзистирају стабилно $\pi/2$ стање и метастабилна 0 и π стања, док у осјенченој области унутар већег полукруга коегзистирају стабилна 0 и π стања и метастабилно $\pi/2$ стање. У осјенченој области изван мањег полукруга коегзистирају стабилна 0 и π стања и метастабилно $\pi/2$ стање, док у осјенченој области унутар мањег полукруга коегзистирају стабилно $\pi/2$ стање и метастабилна 0 и π стања.



Слика 4.5: Зависност Џозефсонове струје, $I(\varphi)$, и одговарајуће слободне енергије, $F(\varphi)$, од фазне разлике за спој типа $(0, \pi/4)$, при чему је $dk_F = 30$, $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$ и три вриједности угла мисоријентације магнетизација: (a) и (b) $\alpha = 0$, (c) и (d) $\alpha = 14.52\pi/20$, (e) и (f) $\alpha = 8\pi/20$.

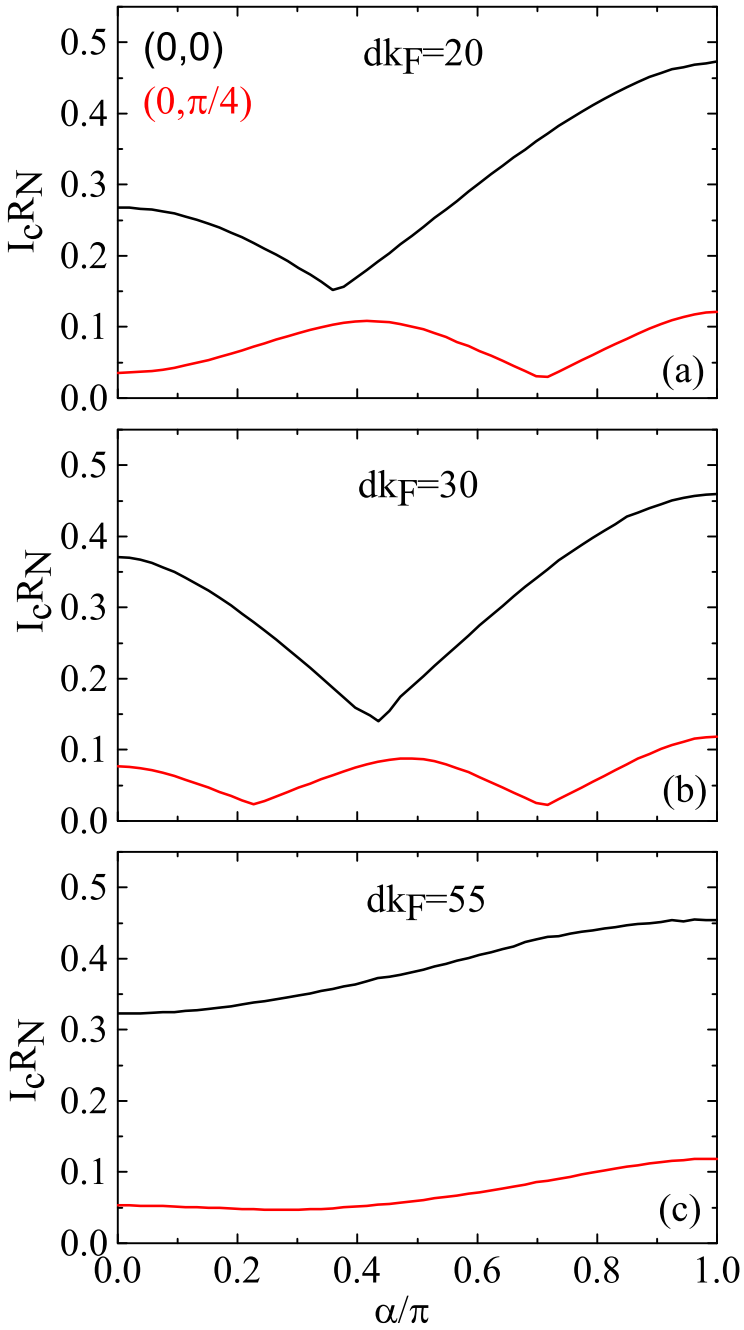
Графици фазне зависности Џозефсонове струје, $I(\varphi)$, и слободне енергије споја, $F(\varphi)$, на основу којих се одређује фазна разлика основног стања споја, φ_G, у којој функција

$F(\varphi)$ постиже минимум, приказани су на слици 4.5 за $k_F d = 30$ и различите вриједности α одабране тако да одговарају положајима у (d, α) равни у којима постоје само стабилна стања. За $\alpha = 0$ једино стабилно стање је $\varphi_G = \pi/2$, приказано као једини минимум на $F(\varphi)$, слика 4.5(b), док је фазна зависност струје слична облику $I \sim \sin(2\varphi + \pi)$, слика 4.5(a), (на исти начин као у референци [31]). За вриједност $\alpha = 14.52\pi/20$ која одговара линији са квадратићима већег полукруга на слици 4.4(c), постоји тројка стања $\varphi_G = 0, \pi/2, \pi$ (минимуми слободне енергије имају једнаке вриједности за три вриједности фазне разлике, као што је приказано на слици 4.5(d)), а фазна зависност струје је слична деформисаној кривој $I \sim \sin 4\varphi$ (слика 4.5(c)). За $\alpha = 8\pi/20$ крива $F(\varphi)$ показује коегзистенцију стабилних 0 и π стања (слика 4.5(f)), а фазна зависност струје је слична кривој $I \sim \sin 2\varphi$ (слика 4.5(e)). Дакле, у d-wave Џозефсоновом споју који садржи два феромагнетна слоја, основно стање споја се може мијењати између коегзистенције 0 и π стања и $\pi/2$ стања промјеном релативне оријентације двије магнетизације. У тачки прелаза јављају се троструко дегенерисана, $0, \pi/2$ и π, стања. Пошто разматрамо Џозефсонов спој типа $(0, \pi/4)$, струја је једнака нули за фазну разлику $\varphi = n\pi/2$, а у фазној зависности струје могу постојати само хармоници означени парним индексом [165, 194]. Стога, у тачки коегзистенције $0, \pi/2$ и π стања, четврти хармоник има доминантан допринос, $I \sim \sin 4\varphi$, на исти начин као у SFS споју конвенционалних суперпроводника, гдје други хармоник има доминантан допринос у тачки коегзистенције 0 и π стања [1]. Одступања од геометрије споја типа $(0, \pi/4)$ искључују могућност реализације равнотежне фазне разлике $\varphi_G = \pi/2$ и самим тим искључују могућност појаве четвртог хармоника у CPR.



Слика 4.6: Зависност Џозефсонове струје, $I(\varphi)$, и одговарајуће слободне енергије, $F(\varphi)$, од фазне разлике за спој типа $(0, \pi/4)$, $dk_F = 30$, $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$ и четири вриједности угла мисоријентације: $\alpha = 4\pi/20$, $\alpha = 5\pi/20$, $\alpha = 14\pi/20$ и $\alpha = 14.72\pi/20$.

На слици 4.6 приказани су графици $I(\varphi)$ и одговарајуће $F(\varphi)$ за исту вриједност $k_F d = 30$ и вриједности α одабране из осјенчених области ($\alpha = 4\pi/20$, $\alpha = 5\pi/20$, $\alpha = 14\pi/20$, $\alpha = 14.72\pi/20$) на слици 4.4(c), гдје постоји коегзистенција стабилних и метастабилних стања. Графици у првој и четвртој врсти слике 4.6 одговарају стањима споја са коегзистенцијом стабилног $\pi/2$ стања и метастабилних 0 и π стања. Друга и трећа врста стањима са коегзистенцијом стабилних 0 и π стања и метастабилног $\pi/2$ стања. Област коегзистенције је ужа за $(0, \pi/4)$ него за спој типа $(0, \beta_R \neq \pi/4)$, гдје се област дебљина у којој долази до коегзистенције стабилних и метастабилних стања повећава са порастом α.

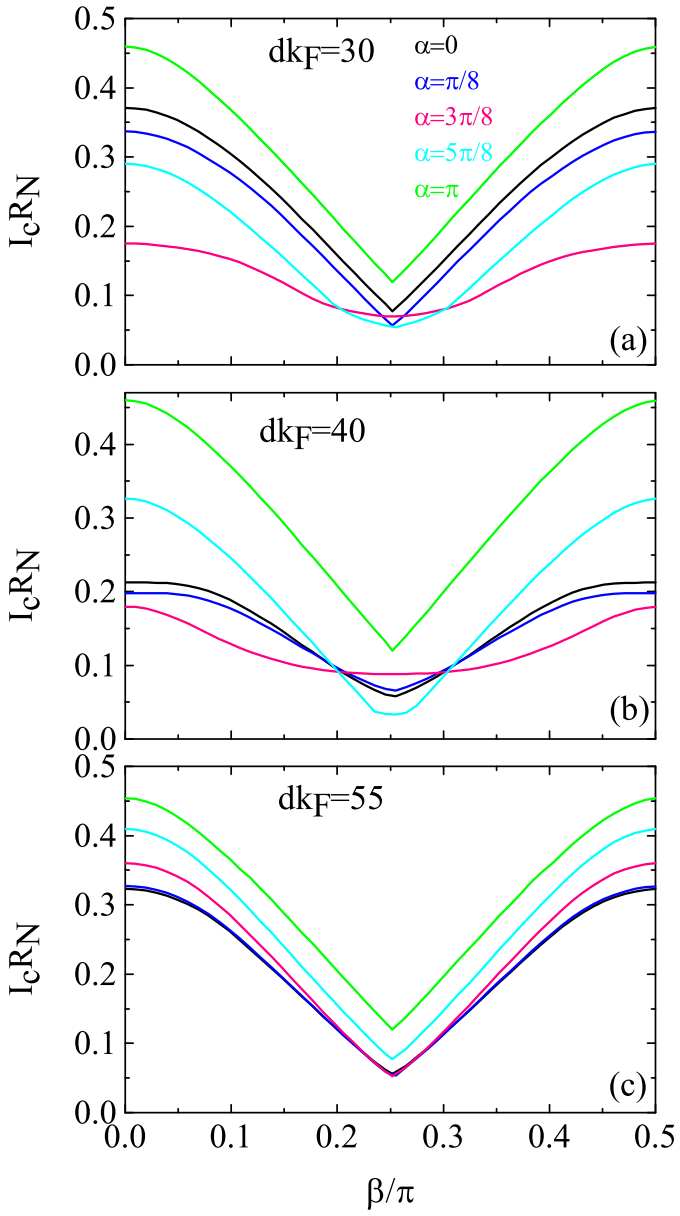


Слика 4.7: Критична струја, I_c, у зависности од угла мисоријентације, α, за $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$, за два типа спија, $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ (црна линија) и $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pi/4)$ (црвена линија). (a) $dk_F = 20$, (b) $dk_F = 30$ и (c) $dk_F = 55$.

Поред осцилација критичне Џозефсонове струје са d, она се мијења и са α што је приказано на сликама 4.7(a), 4.7(b) и 4.7(c) за вриједности дебљине баријере $k_F d = 20$,

30 и 55, редом, и за два типа спојева $(0,0)$ и $(0,\pi/4)$. Могући оштри минимуми на овим графицима указују на промјену фазне разлике основног стања Џозефсоновог споја. Стога је прелаз између 0 и π стања у споју типа $(0,0)$ (на исти начин као у SFFS споју [20]) и могући наизмјенични прелаз између $\pi/2$ и коегзистенције 0 и π стања у споју типа $(0,\pi/4)$ могуће изазвати промјеном угла мисоријентације магнетизација, α. Ово би могло бити корисно за примјене, јер се фино подешавање између 0 и π стања у споју типа $(0,0)$, као и између $\pi/2$, 0 и π стања у споју типа $(0,\pi/4)$, може лакше постићи промјеном α него промјеном дебљине [21].

За $k_F d = 55$ критична струја монотоно расте са α за оба разматрана типа спојева (слика 4.7(c)). Пошто је спој довољно удаљен од тачке фазног прелаза у (d,α) равни, он се јасно налази у 0 стању за $(0,0)$ и у $\pi/2$ стању за спој типа $(0,\pi/4)$ за све вриједности угла мисоријентације магнетизација, α.



Слика 4.8: Критична струја, I_c, у зависности од оријентације, β, d-wave суперпроводника за спој типа $(\beta_L,\beta_R) = (0,\beta)$, $T/T_c = 0.1$, $h/E_F = 0.1$, за пет вриједности угла мисоријентације: $\alpha = 0$ (црна линија), $\alpha = \pi/8$ (плава линија), $\alpha = 3\pi/8$ (розе линија), $\alpha = 5\pi/8$ (цијан линија) и $\alpha = \pi$ (зелена линија). (a) $dk_F = 30$, (b) $dk_F = 40$ и (c) $dk_F = 55$.

Зависност критичне струје од оријентације десне суперпроводне електроде при фиксираној оријентацији лијеве електроде, $\beta_L = 0$ ($(0, \beta)$ тип споја), дата је на сликама 4.8(a), 4.8(b) и 4.8(c) за три дебљине феромагнетне баријере $k_F d = 30$, 40 и 55, респективно, и за пет вриједности угла мисоријентације, $\alpha = 0, \pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8$ и π. На кривама се уочавају двије гране симетричне у односу на $\beta = \pi/4$, гдје критична струја достиже минималну вриједност, јер је ефекат разбијања Куперових парова најјачи, а правац x-осе се поклапа са нодалним правцем параметра уређења десног суперпроводника. Криве показују глатки или оштри минимум у $\beta = \pi/4$, у зависности од вриједности угла мисоријентације α и дебљине баријере d. Постојање оштрог минимума повезано је са $\pi/2$ стањем које је могуће у споју типа $(0, \pi/4)$, за вриједности α и d које омогућавају појаву овог стања у складу са фазним дијаграмом на слици 4.4(c). Са друге стране, глатки минимум на кривој означава да за такав избор параметара није могуће $\pi/2$ стање. Треба напоменути да је у случају антипаралелних магнетизација ($\alpha = \pi$) критична струја већа него у паралелном случају и слична оној кад се у баријери налази нормални метал (DND спој), усљед чињенице да је утицај супротних магнетизација готово поништен [20].

4.3 Закључак

У овој глави смо показали како се може контролисати и реализовати спој са фазним разликама основног стања које, поред коегзистенције два стабилна стања 0 и π, укључују и коегзистенцију три стабилна стања 0, π и $\pi/2$, промјеном кристалне оријентације d-wave суперпроводних електрода или релативне оријентације измјенских поља у феромагнетном двослоју. Поред стабилних стања, уочили смо и области коегзистенције стабилних и метастабилних стања. Квалитативно, наши резултати су у сагласности са претходно добијеним карактеристикама у $(0, 0)$ и $(0, \pi/4)$ DFD хетероспојевима [31]. Штавише, могућност остваривања прелаза у стање $\pi/2$ у споју типа $(0, \pi/4)$, промјеном релативног угла између магнетизација у феромагнетној двослојној баријери, може представљати додатни доказ у прилог d-wave симетрији параметра уређења у купратима. Могућност контроле фазе такође налази примјену у неколико области суперпроводне електронике, као што су криогена меморија и уређаји за квантно рачунарство.

Глава 5

Диодни и аномални Џозефсонов ефекат у DFD спојевима са Рашба спин-орбитном спрегом на границама материјала

У овој глави проучаван је Џозефсонов ефекат у дводимензионалном споју са произвољно оријентисаним d-wave суперпроводљивим електродама и хомогеном феромагнетном баријером уз присуство Рашба спин-орбиталне спреге (SOC) и изолаторске баријере на границама између различитих материјала у споју. Пошто разматрамо суперпроводнике са d-wave симетријом параметра уређења, код којих потенцијал спаривања мијења знак на Фермијевој површи у зависности од смјера пропагације квазичестица као и због SOC спрезања, CPR у оваквим хетероспојевима може испољити мноштво нових особина.

Овдје се првенствено фокусирамо на Џозефсонов диодни ефекат (JDE), испитујући могућност његове контроле помоћу међусобне оријентације лијеве и десне суперпроводљиве електроде, измјенског поља у феромагнету, јачине Рашба SOC и транспарентности на границама. Будући да је појава JDE повезана са нарушењем симетрије временске и просторне инверзије укупног хамилтонијана споја [54], одговарајућом симетријском анализом описали смо услове под којима се JDE јавља. Истовремено присуство чланова $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$ у Фуријеовом развоју CPR неопходно је за појаву JDE [65]. Анализирали смо услове за постизање значајне вриједности диодне ефикасности. Сличан спој са s-wave суперпроводницима већ је проучаван у раду [184], али тај спој не испољава ни аномални Џозефсонов ефекат (AJE), нити Џозефсонов диодни ефекат (JDE). Показали смо да је фазни прелаз између 0-оликог и π-оликог стања споја повезан са асиметријом критичне струје у диодном ефекту и да се може контролисати промјеном вриједности измјенског поља, као и модулацијом јачине Рашба SOC. Такође, анализирана је и улога температуре у постизању значајнијих вриједности диодне ефикасности и фазних прелаза у споју.

Резултати наведени у овој глави засновани су на објављеном раду [81]:

S. Djurdjević and Z. Popović, *Josephson diode effect in d-wave superconductor/ ferromagnet/ d-wave superconductor junction with interfacial Rashba spin-orbit coupling*, **PTEP 2025, 103I01 (2025).**

5.1 Поријекло спин-орбитне спреге

Спин-орбитна интеракција има релативистичко поријекло и да би се описао начин на који се уводи у нерелативистичку Шредингерову једначину, мора се кренути од Дираковог хамилтонијана за честицу спина 1/2 у присуству спољашњег потенцијала $V(\mathbf{r})$

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta mc^2 + V(\mathbf{r})\mathrm{I}_{4\times 4}, \tag{5.1}$$

гдје је m маса електрона у мировању, c брзина свјетлости у вакууму, $\mathrm{I}_{4\times 4}$ јединична матрица димензије 4×4, док су β, α_x, α_y и α_z матрице димензије 4×4 дате са

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

гдје је $\mathrm{I}_{2\times 2}$ јединична матрица димензије 2×2, док су σ_x, σ_y и σ_z Паулијеве матрице.

Својствени вектори хамилтонијана H представљају четворокомпонентне таласне функције које се могу изразити помоћу спинорских функција χ и ϕ

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Тада својствена једначина, $(E-H)\psi = 0$, постаје

$$\begin{pmatrix} (E - V(\mathbf{r}) - mc^2)\mathrm{I}_{2\times 2} & -c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ -c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & (E - V(\mathbf{r}) + mc^2)\mathrm{I}_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Одавде се добија

$$(E - V(\mathbf{r}) - mc^2)\chi - c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\phi = 0, \tag{5.4}$$

$$-c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi + (E - V(\mathbf{r}) + mc^2)\phi = 0. \tag{5.5}$$

Када се из једначине (5.5) изрази ϕ добија се

$$\phi = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E - V(\mathbf{r}) + mc^2}\chi. \tag{5.6}$$

Увртавањем овог израза у (5.4) налази се

$$(E - mc^2)\chi = V(\mathbf{r})\chi + c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E - V(\mathbf{r}) + mc^2}\chi. \tag{5.7}$$

Ако се уведе величина $E_S = E - mc^2$ која представља енергију из Шредингерове једначине, претходну једначину могуће је написати у облику

$$E_S\chi = V(\mathbf{r})\chi + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\frac{1}{1 + \frac{E_S - V(\mathbf{r})}{2mc^2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi. \tag{5.8}$$

У нерелативистичком лимесу је $E_S \ll mc^2$, и тада може да се примијени апроксимација

$$\frac{1}{1 + \frac{E_S - V(\mathbf{r})}{2mc^2}} \approx 1 - \frac{E_S - V(\mathbf{r})}{2mc^2}. \tag{5.9}$$

Ако се, даље, искористе релације

$$\mathbf{p}V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\mathbf{p} - i\hbar\nabla V(\mathbf{r}), \tag{5.10}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla V(\mathbf{r}))(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) = (\nabla V(\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V(\mathbf{r})\times\mathbf{p}), \tag{5.11}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) = p^2, \tag{5.12}$$

једначина (5.8) може се преписати у облику

$$E_S\chi = \left[V(\mathbf{r}) + \frac{p^2}{2m}\left(1 - \frac{E_S - V(\mathbf{r})}{2mc^2}\right)\right]\chi - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\nabla V(\mathbf{r}))(\nabla\chi) + \frac{\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V(\mathbf{r})\times\mathbf{p})\chi. \tag{5.13}$$

У нерелативистичком лимесу важе апроксимације

$$E_S - V(\mathbf{r}) \approx p^2/2m, \tag{5.14}$$

и

$$(E_S - V(\mathbf{r}))p^2 \approx p^4/2m, \tag{5.15}$$

па у апроксимативном облику Диракову једначину је могуће написати у форми

$$E_S\chi = \left(\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{p^4}{8m^3c^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\nabla V(\mathbf{r}))\cdot\nabla + \frac{\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V(\mathbf{r})\times\mathbf{p})\right)\chi. \tag{5.16}$$

Прва два сабирка представљају нерелативистички хамилтонијан, трећи члан је класична релативистичка корекција, четврти члан је тзв. Дарвинов члан и представља релативистичку корекцију која не зависи од спина и нема класични аналог, а пети сабирак представља хамилтонијан спин-орбитне интеракције, који детерминише спрегу између спинских и орбиталних степени слободе,

$$H_{SOC} = \frac{\hbar}{4m^2c^2}(\nabla V(\mathbf{r})\times\mathbf{p})\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{5.17}$$

На граници између различитих материјала, тј. у системима који нарушавају симетрију просторне инверзије какав је и спој суперпроводника и феромагнета, појављује се електрично поље нормално на раван система. За систем који је смјештен у xy-раван, електрично поље је дуж z-осе. У том случају хамилтонијан Рашба SOC изгледа као

$$H_{SOC} = R(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_z)\cdot\boldsymbol{\sigma} = R(k_x\sigma_y - k_y\sigma_x), \tag{5.18}$$

гдје је R феноменолошки Рашба параметар који описује јачину спин-орбитне интеракције. Хамилтонијан дводимензионалног електронског гаса у присуству Рашба интеракције је

$$H = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \pm R(k_x\sigma_y - k_y\sigma_x). \tag{5.19}$$

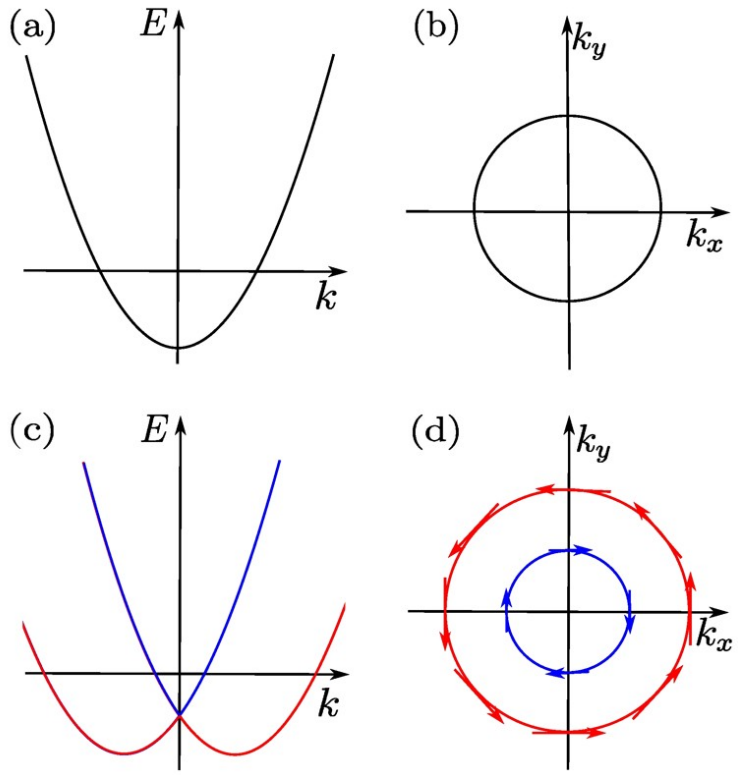
Одговарајућа дисперзиона релација је

$$E_\pm = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \pm Rk. \tag{5.20}$$

Одавде се види да су у одсуству Рашба интеракције ($R = 0$) спински бендови дегенерисани, док у присуству Рашба интеракције долази до разбијања ове дегенерације. Својствени вектори хамилтонијана (5.19) су

$$\Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i e^{i\theta} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{kr}}, \tag{5.21}$$

гдје је $\theta = \arctan(k_y/k_x)$ угао између правца импулса и x-осе. Формирају се два хеликална спинска бенда са хелицитетима $\pm$, што значи да ће спинови бити ортогонални на вектор импулса електрона, $\hbar\mathbf{k}$. Ово се може показати налазећи очекиване вриједности за операторе спина у овим својственим стањима. Описана физичка ситуација илустрована је на слици 5.1.

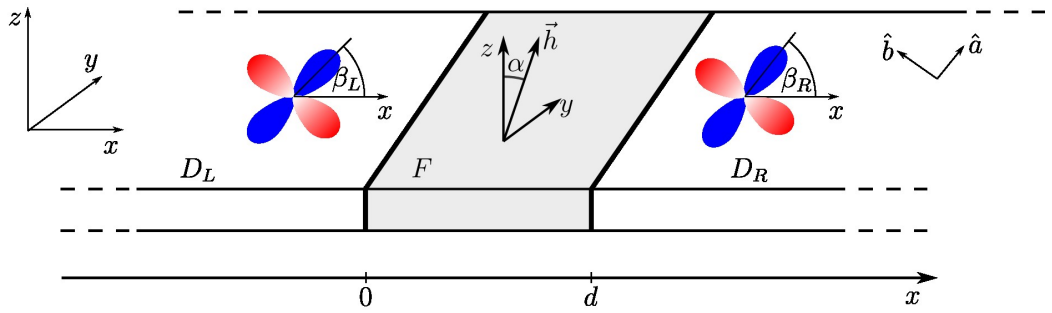


Слика 5.1: (a) Дисперзиона релација у одсуству SOC има двоструко дегенерисане спинске бендове. (b) Фермијева површ у одсуству SOC, (c) Раздвајање спинских бендова усљед Рашба SOC и (d) Спин је фиксиран за вектор импулса на Фермијевој површи (spin-momentum locking) која је поцијепана у импулсном простору на два хеликална бенда у присуству Рашба SOC.

5.2 Модел

У овој глави разматрамо дводимензионални Џозефсонов спој који се састоји од два полубесконачна d-wave суперпроводника (D_L и D_R) и хомогене феромагнетне баријере дебљине d са произвољном магнетизацијом у yz-равни. На равним границама између слојева, да бисмо постигли што реалнији модел, претпостављамо изолаторски и Рашба SOC потенцијал (Слика 5.2). Изолаторски потенцијал уводимо како бисмо описали несавршености на границама материјала, а Рашба SOC како бисмо описали могући утицај структурне асиметрије.

Да бисмо израчунали Џозефсонову струју, као и у претходној глави, потребно је прво размотрити Богољубов-де Женов хамилтонијан (4.1) с тим што је сада једночестични



Слика 5.2: Схематска илустрација D_LFD_R Џозефсоновог споја. Вектор магнетизације лежи у yz-равни и заклапа угао α са z-осом. Приказани су потенцијали спаривања са d-wave симетријом гдје су β_L и β_R углови између кристалних $\hat{a}$-оса и x-осе у лијевој и десној суперпроводљивој електроди, респективно.

хамилтонијан можемо записати у облику

$$H = H_0 + H_F + \sum_{j=L,R} H_j, \tag{5.22}$$

гдје је $H_0 = \hbar^2 k^2/2m - \mu$. И овдје, ради једноставности, претпостављамо да су хемијски потенцијал и ефективне масе квазичестица једнаке у свим дјеловима система. У феромагнетном слоју имамо

$$H_F = -\mathbf{h}\boldsymbol{\sigma}\Theta(x)\Theta(d-x), \tag{5.23}$$

гдје измјенско поље $\mathbf{h}$ са z-осом заклапа угао α, тј.

$$\mathbf{h} = h \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

На лијевој ($x_L = 0$) и десној ($x_R = d$) суперпроводник/феромагнет граници претпостављамо потенцијал у облику Диракове δ-функције

$$H_{L,R} = [W_{L,R} + R_{L,R}(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_x)\boldsymbol{\sigma}]\delta(x - x_{L,R}), \tag{5.25}$$

гдје први члан описује изолаторску баријеру (нетранспарентност), а други је потенцијал Рашба SOC [195, 196], који је моделован претпостављајући да постоји градијент скаларног потенцијала дуж правца дефинисаног ортом $\mathbf{e}_x$ (дуж x-осе) пошто су у нашем споју контактне линије између различитих материјала паралелне y-оси. $R_{L,R}$ су феноменолошки параметри који моделују јачину Рашба спин-орбитног спрезања на лијевој и десној граници, респективно. Потенцијал спаривања дефинисан је са

$$\hat{\Delta} = \Delta_L\sigma_x\Theta(-x) + \Delta_R\sigma_x\Theta(x-d). \tag{5.26}$$

Параметар уређења у лијевој и десној суперпроводљивој електроди, Δ_L и Δ_R, описан је на исти начин као у претходној глави (видјети изразе (4.8), (4.9) и (4.10)).

Због транслаторне инваријантности система дуж y-осе довољно је да нађемо таласну функцију $\psi(x,\theta)$ коју у овом случају можемо написати преко компоненти у различитим областима Џозефсоновог споја као

$$\psi(x,\theta) = \psi_{D_L}(x,\theta)\Theta(-x) + \psi_F(x,\theta)\Theta(x)\Theta(d-x) + \psi_{D_R}(x,\theta)\Theta(x-d). \tag{5.27}$$

Користећи схему четири типа процеса расијања (слика 4.2) који су релевантни за израчунавање Џозефсонове струје (3.196), компоненте ψ_{D_L}, ψ_F и ψ_{D_R} можемо написати као линеарну комбинацију елементарних пропагирајућих стања у одговарајућим областима споја. На примјер, за процес приказан на слици 4.2 (а) када је упадна честица квазиелектрон који на баријеру наилази из лијеве суперпроводљиве електроде биће

$$\psi^{e\uparrow}_{D_L}(x,\theta) = \psi^{\uparrow}_{\gamma L}(x,\theta) + a_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}L}(x,\theta) + a_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma}L}(x,\theta) + b_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\beta L}(x,\theta) + b_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\beta L}(x,\theta), \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}\psi^{e\uparrow}_{F}(x,\theta) = {} & f_1\psi^{\uparrow}_{\gamma}(x,\theta) + f_2\psi^{\downarrow}_{\gamma}(x,\theta) + f_3\psi^{\uparrow}_{\beta}(x,\theta) + f_4\psi^{\downarrow}_{\beta}(x,\theta) + \\ & + f_5\psi^{\downarrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta) + f_6\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta) + f_7\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}}(x,\theta) + f_8\psi^{\uparrow}_{\bar{\gamma}}(x,\theta),\end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\psi^{e\uparrow}_{D_R}(x,\theta) = c_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\gamma R}(x,\theta) + c_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\gamma R}(x,\theta) + d_1^{\uparrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\bar{\beta}R}(x,\theta) + d_1^{\uparrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\bar{\beta}R}(x,\theta). \quad (5.30)$$

Елементарна пропагирајућа стања у различитим областима споја одређена су на исти начин као у претходној глави.

За сваки од четири процеса расијања са слике 4.2 постоји 16 непознатих коефицијената: 4 у лијевом, 4 у десном суперпроводнику и 8 у феромагнетној баријери. У формулу за Џозефсонову струју (3.196) улазе коефицијенти за Андрејевљеву рефлексију, који се одређују на основу граничних услова на таласне функције

$$\psi(x,\theta)|_{x_j-0} = \psi(x,\theta)|_{x_j+0}, \quad (5.31)$$

$$\frac{d\psi(x,\theta)}{dx}\Big|_{x_j+0} - \frac{d\psi(x,\theta)}{dx}\Big|_{x_j-0} = \frac{2m}{\hbar^2 k_F}(W_j\tau_0\sigma_0 - R_j k_y \tau_0\sigma_z)\psi(x_j,\theta), \quad (5.32)$$

где су $x_j = x_L = 0$ и $x_j = x_R = d$, а τ_0 и σ_0 су 2×2 јединичне матрице у честично-шупљинском простору и спинском простору, респективно.

Ради нумеричких прорачуна уводимо бездимензионе параметре $Z_{L[R]} = 2mW_{L[R]}/(\hbar^2 k_F)$ који мјере јачину изолаторског потенцијала на лијевој и десној граници, док $\chi_{L[R]} = 2mR_{L[R]}/\hbar^2$ мјере одговарајуће јачине Рашба SOC на поменутим границама између суперпроводљивих и феромагнетних материјала. Ради једноставности, приказани су резултати за једнаке транспарентности на лијевој и десној граници ($Z_L = Z_R = Z$), и за једнаке вриједности јачина Рашба SOC ($\chi_L = -\chi_R = \chi$).

5.3 Резултати

Пошто разматрамо суперпроводнике са d-wave симетријом параметра уређења, међусобни утицај оријентације кристалних решетки суперпроводљивих електрода, Рашба спин-орбитне спреге и коначне транспарентности на границама споја, као и измјенског поља у феромагнетној баријери, одређује транспорт квазичестица, а самим тим и струјно-фазну релацију (CPR), која може испољити мноштво нових особина. При различитим конфигурацијама у којима се релевантни параметри споја подешавају тако да су истовремено нарушене симетрије просторне и временске инверзије, може доћи до разлике између интензитета критичних струја у супротним смјеровима, односно до појаве Џозефсоновог диодног ефекта.

Величина којом се описује диодни ефекат је диодна ефикасност, дефинисана као

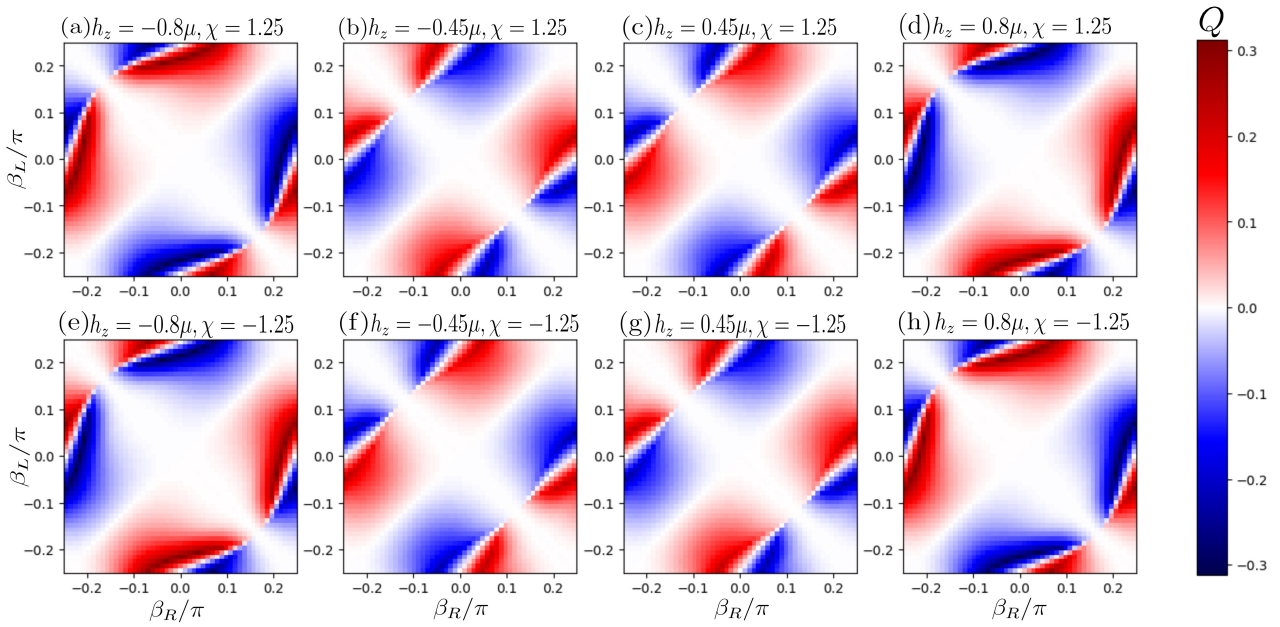
$$Q = \frac{I_c^+ - |I_c^-|}{I_c^+ + |I_c^-|}, \quad (5.33)$$

гдје су I_c^+ и I_c^- вриједности критичних струја које дефинишемо са

$$I_c^+ = \max_{\varphi} I(\varphi) \quad \text{и} \quad I_c^- = \min_{\varphi} I(\varphi). \tag{5.34}$$

5.3.1 Улога оријентација

У овој глави испитивали смо Џозефсонов спој са феромагнетном баријером чије је измјенско поље усмјерено дуж z-осе ($h = h_z$), у присуству Рашба SOC и коначне транспарентности граница међу материјалима. У овим спојевима појава диодног ефекта ($I_c^+ \neq |I_c^-|$, односно $Q \neq 0$) првенствено зависи од оријентације кристала лијеве и десне суперпроводљиве електроде. На слици 5.3 приказане су зависности диодне ефикасности Q од углова β_L и β_R ($-\pi/4 \leq \beta_{L[R]} \leq \pi/4$). Панели су приказани за двије вриједности измјенског поља, $h_z = 0.8\mu$ и $h_z = 0.45\mu$, двије оријентације магнетизације (дуж z-осе ($\alpha = 0$, $h_z > 0$) и у супротном смјеру ($\alpha = \pi$, $h_z < 0$)), као и за двије вриједности симетричне Рашба SOC на границама, $\chi = 1.25$ и $\chi = -1.25$, у присуству слабог изолаторског потенцијала ($Z = 0.5$), за кратку феромагнетну баријеру дебљине $d = 2k_F^{-1}$ (short junction) и температуру $T/T_c = 0.1$.



Слика 5.3: Диодна ефикасност Q у зависности од оријентације лијевог и десног d-wave суперпроводљивог кристала β_L и β_R за $h = h_z$, $dk_F = 2$, $Z = 0.5$ и $T/T_c = 0.1$. Горњи ред панела приказује случајеве са $\chi = 1.25$: (a) $h_z = -0.8\mu$, (b) $h_z = -0.45\mu$, (c) $h_z = 0.45\mu$ и (d) $h_z = 0.8\mu$. Доњи ред панела приказује случајеве са $\chi = -1.25$: (e) $h_z = -0.8\mu$, (f) $h_z = -0.45\mu$, (g) $h_z = 0.45\mu$, (h) $h_z = 0.8\mu$.

Промјеном јачине измјенског поља могуће је промијенити знак и вриједност диодне ефикасности. Диодна ефикасност може се контролисати промјеном оријентације суперпроводљивих електрода и може достићи значајне вриједности, веће од 30%. Због симетрије d-wave параметра уређења, она показује периодичност од $\pi/2$ у равни (β_L, β_R):

$$Q(\beta_L, \beta_R) = Q(\beta_L + \pi/2, \beta_R) = Q(\beta_L, \beta_R + \pi/2) = Q(\beta_L + \pi/2, \beta_R + \pi/2). \tag{5.35}$$

Такође, диодна ефикасност показује да је симетрична функција у односу на главну дијагоналу, антисиметрична у односу на споредну дијагоналу и антисиметрична при инверзији кроз тачку $(0,0)$ у равни (β_L, β_R):

$$Q(\beta_L, \beta_R) = Q(-\beta_R, -\beta_L) = -Q(\beta_R, \beta_L) = -Q(-\beta_L, -\beta_R). \tag{5.36}$$

Према томе, диодни ефекат изостаје за спојеве типа $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pm\pi/4)$ и $(\pm\pi/4, 0)$. Такође, изостаје за $\beta_L = \pm\beta_R$, а у зависности од осталих параметара споја важи да је $Q = 0$ и за оне оријентације d-wave суперпроводљивих електрода код којих диодна ефикасност мијења знак (бијеле тачке између плавих и црвених области на слици 5.3).

Поређењем парова панела (a) и (d), (b) и (c), (e) и (h), као и (f) и (g) са слике 5.3, може се уочити да је једина разлика између одговарајућих панела промјена знака диодне ефикасности при промјени знака измјенског поља. Због тога диодна ефикасност задовољава релацију

$$Q(h_z) = -Q(-h_z). \tag{5.37}$$

Слично томе, поређењем парова панела (a) и (e), (b) и (f), (c) и (g), као и (d) и (h), налази се да диодна ефикасност задовољава и релацију

$$Q(\chi) = -Q(-\chi), \tag{5.38}$$

одакле непосредно слиједи

$$Q(h_z, \chi) = Q(-h_z, -\chi), \tag{5.39}$$

што се може уочити, на примјер, поређењем панела (c) и (f), односно (d) и (e).

Према томе, карактеристике и конструкција Џозефсоновог споја одређују како ефикасност диоде, тако и аномалну струју, чије особине произилазе из својстава струјно-фазне релације (CPR), која представља фундаменталну карактеристику Џозефсоновог споја и поприма егзотична својства усљед нерециprочног карактера Џозефсонове струје. У општем случају, Џозефсонова струја се може развити у Фуријеов ред [16]

$$I(\varphi) = \sum_{n\geq 1} [I_n \sin(n\varphi) + J_n \cos(n\varphi)], \tag{5.40}$$

гдје је n позитиван цио број. Да би струја при нултој фазној разлици, φ, била различита од нуле, неопходно је присуство чланова $J_n \cos(n\varphi)$ у изразу за $I(\varphi)$. Стога, уколико су нарушене све (унитарне или антиунитарне) трансформације, U, које трансформишу хамилтонијан H на начин $UH(\varphi)U^\dagger = H(-\varphi)$, у струјно-фазној релацији појављују се чланови $J_n \cos(n\varphi)$, чиме постаје могућ аномални транспорт у Џозефсоновом споју, за који важи $I(\varphi) \neq -I(-\varphi)$.

Кад је ријеч о Џозефсоновом споју типа $(\beta_L, \beta_R) = (0,0)$ са баријером од нормалног метала, постоји укупно 16 трансформација које пресликавају $H(\varphi)$ у $H(-\varphi)$ [54]. То су трансформације

$$\sigma_i T, \quad P_y\sigma_i T, \quad P_x\sigma_i \quad \text{и} \quad P_xP_y\sigma_i, \tag{5.41}$$

гдје су σ_i $(i = 0, x, y, z)$ јединична матрица и Паулијеве матрице у спинском простору, P_x и P_y операције просторне инверзије дуж x и y осе, респективно, док је T оператор временске инверзије.

Да би се јавила аномална струја, односно да би коефицијенти J_n били различити од нуле, неопходно је нарушити све наведене симетрије. Све оне су нарушене у Џозефсоновом споју са феромагнетном баријером чије измјенско поље има ненулту компоненту дуж z-осе ($h_z \neq 0$), у присуству Рашба SOC на границама ($\chi \neq 0$) и за оријентације d-wave суперпроводљивих електрода које задовољавају услов да је $\beta_L \neq \pm\beta_R$.

Још једна симетрија која може бити присутна у споју трансформише хамилтонијан према релацији

$$UH(\varphi, h_z)U^\dagger = H(-\varphi, h_z), \tag{5.42}$$

што повлачи да важи

$$I(\varphi, h_z) = -I(-\varphi, h_z). \tag{5.43}$$

Као посљедица тога, критичне Џозефсонове струје у супротним смјеровима имају једнаке апсолутне вриједности, односно

$$I_c^+(h_z) = -I_c^-(h_z). \tag{5.44}$$

Ове трансформације представљају подскуп трансформација чије нарушење је одговорно за појаву аномалног Џозефсоновог ефекта. У присуству Рашба SOC на границама неопходно је да важи $\beta_L \neq \pm\beta_R$ како би се нарушила ова симетрија и омогућила појава диодног ефекта.

На сличан начин могу се анализирати и симетрије које одређују зависност критичних струја $I_c^\pm(\beta_L, \beta_R)$ од оријентације суперпроводљивих електрода. Постојање трансформација U које задовољавају

$$UH(\varphi, \beta_L, \beta_R)U^\dagger = H(\varphi, -\beta_R, -\beta_L), \tag{5.45}$$

подразумијева да важи

$$I(\varphi, \beta_L, \beta_R) = I(\varphi, -\beta_R, -\beta_L), \tag{5.46}$$

па критичне струје морају бити симетричне у односу на главну дијагоналу у равни (β_L, β_R), односно

$$I_c^\pm(\beta_L, \beta_R) = I_c^\pm(-\beta_R, -\beta_L). \tag{5.47}$$

Једна од трансформација која остаје очувана у присуству Рашба SOC на границама и магнетизације у баријери споја јесте $P_x\sigma_x T$, па диодна ефикасност показује парност у односу на главну дијагоналу у равни (β_L, β_R), описану једначином (5.36).

Са друге стране, постојање трансформација U које задовољавају

$$UH(\varphi, \beta_L, \beta_R)U^\dagger = H(-\varphi, \beta_R, \beta_L), \tag{5.48}$$

што имплицира

$$I(\varphi, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, \beta_R, \beta_L), \tag{5.49}$$

односно

$$I_c^+(\beta_L, \beta_R) = -I_c^-(\beta_R, \beta_L), \tag{5.50}$$

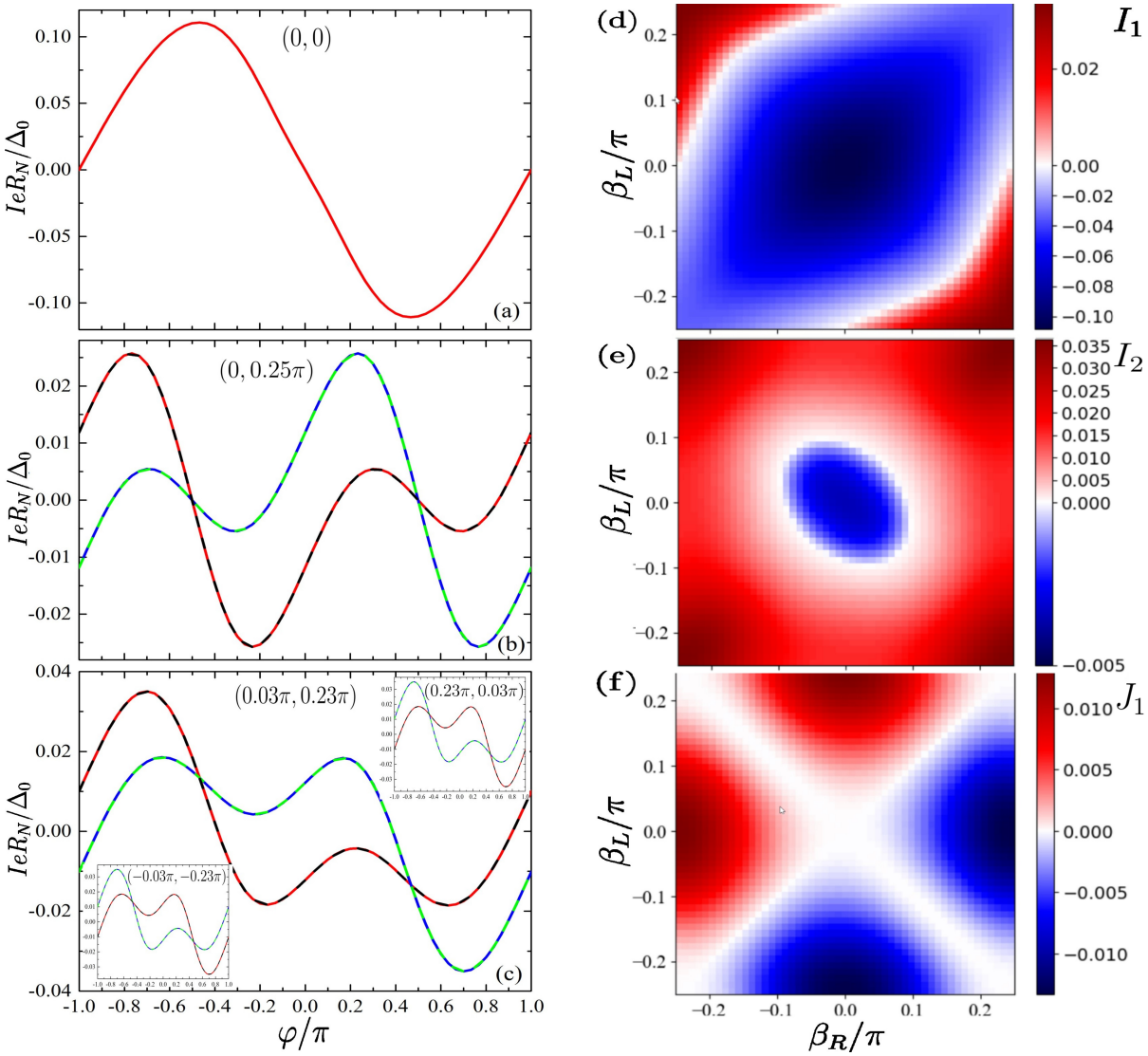
доводи до антисиметричности диодне ефикасности у односу на споредну дијагоналу у равни (β_L, β_R). Једна трансформација овог типа јесте P_yP_x, која остаје очувана у спојевима разматраним на панелима слике 5.3.

На слици 5.4 приказане су струјно-фазне релације за различите оријентације суперпроводљивих електрода. За оријентацију типа $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ (слика 5.4(а)) четири CPR криве се поклапају, тј.

$$I(\varphi, h_z, \chi) = I(\varphi, -h_z, \chi) = I(\varphi, h_z, -\chi) = I(\varphi, -h_z, -\chi). \tag{5.51}$$

Ово је посљедица постојања симетријских операција

$$UH(\varphi, h_z)U^\dagger = H(\varphi, -h_z) \quad \text{и} \quad UH(\varphi, \chi)U^\dagger = H(\varphi, -\chi) \tag{5.52}$$



Слика 5.4: Лијева колона: струјно-фазна релација, $I(\varphi)$, за $T/T_c = 0.1$, $dk_F = 2$, $Z = 0.5$, и за четири скупа параметара: $h_z = 0.8\mu, \chi = -1.25$ (плава), $h_z = -0.8\mu, \chi = -1.25$ (црна), $h_z = 0.8\mu, \chi = 1.25$ (црвена) и $h_z = -0.8\mu, \chi = 1.25$ (зелена). (a) $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, (b) $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0.25\pi)$ и (c) $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$ тип споја. У горњем и доњем уметку панела (c), $I(\varphi)$ за $(\beta_L, \beta_R) = (0.23\pi, 0.03\pi)$ и $(\beta_L, \beta_R) = (-0.03\pi, -0.23\pi)$ типове споја, респективно. Десна колона: коефицијенти Џозефсонове струје (d) I_1, (e) I_2 и (f) J_1 у зависности од оријентација лијевог и десног d-wave суперпроводљивог кристала, β_L и β_R, за $h_z = 0.8\mu$, $\chi = 1.25$, $dk_F = 2$, $Z = 0.5$ и $T/T_c = 0.1$.

У овом типу споја трансформација $P_xP_y\sigma_zT$ очувана је у присуству Рашба SOC на границама, док је трансформација P_y очувана у присуству ненулте магнетизације дуж z-осе, за одговарајуће симетријске операције. Као посљедица, CPR је антисиметрична и не јавља се аномална струја. Такође, диодни ефекат је одсутан јер је $\beta_L = \beta_R = 0$.

CPR криве су линеарна комбинација синусних функција фазне разлике и посједују 2π периодичност по фазној разлици, φ, са доминантним првим хармоником, $I \sim I_1 \sin\varphi$, у поређењу са занемарљивим доприносима виших хармоника. Ово је у складу са панелима (d), (e) и (f) на слици 5.4, гдје су приказани коефицијенти I_1, I_2 и J_1 из релације (5.40) у зависности од β_L и β_R. Може се уочити да је коефицијент J_1 једнак нули, док I_1 има доминантну вриједност у односу на допринос хармоника I_2 у случају споја $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$.

На сликама 5.4(b) и 5.4(c) приказане су CPR за спојеве типа $(0, 0.25\pi)$ и $(0.03\pi, 0.23\pi)$, респективно. Црна и црвена, као и плава и зелена крива се поклапају јер важи

$$I(\varphi, h, \chi) = I(\varphi, -h, -\chi). \tag{5.53}$$

Такође, важи

$$I(\varphi, h_z) = -I(-\varphi, -h_z), \quad \text{и} \quad I(\varphi, \chi) = -I(-\varphi, -\chi), \tag{5.54}$$

што је посљедица постојања симетрија

$$UH(\varphi, h_z)U^\dagger = H(-\varphi, -h_z) \quad \text{и} \quad UH(\varphi, \chi)U^\dagger = H(-\varphi, -\chi), \tag{5.55}$$

респективно, што се потврђује поређењем црних и црвених са плавим и зеленим кривама. Све криве показују 2π периодичност. Детаљан поступак симетријске анализе биће приказан у наредној глави.

За спој типа $(0, 0.25\pi)$ Џозефсонова струја нестаје при фазним разликама суперпроводника $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ ($I(\varphi = -\pi/2) = I(\varphi = \pi/2) = 0$), што указује да је појава аномалне струје еквивалентна појави непарних косинусних хармоника $J_{2n+1}\cos((2n+1)\varphi)$, са доминантним првим хармоником $J_1\cos\varphi$, у Фуријеовом развоју струје (5.40). Такође, присутни су само парни синусни хармоници $I_{2n}\sin(2n\varphi)$, са доминантним доприносом $I_2\sin(2\varphi)$ (видјети десну колону на слици 5.4). Диодни ефекат није присутан јер важи $I_c^+ = |I_c^-|$, усљед постојања тачака у односу на које је CPR антисиметрична, $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$.

У споју типа $(0.03\pi, 0.23\pi)$, гдје је диодна ефикасност максимална (видјети слику 5.3), долази до коегзистенције три хармоника: $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$, упоредивих амплитуда према нумеричким резултатима приказаним на панелима (d), (e) и (f) слике 5.4. Ово представља неопходан услов за постизање велике диодне ефикасности [65].

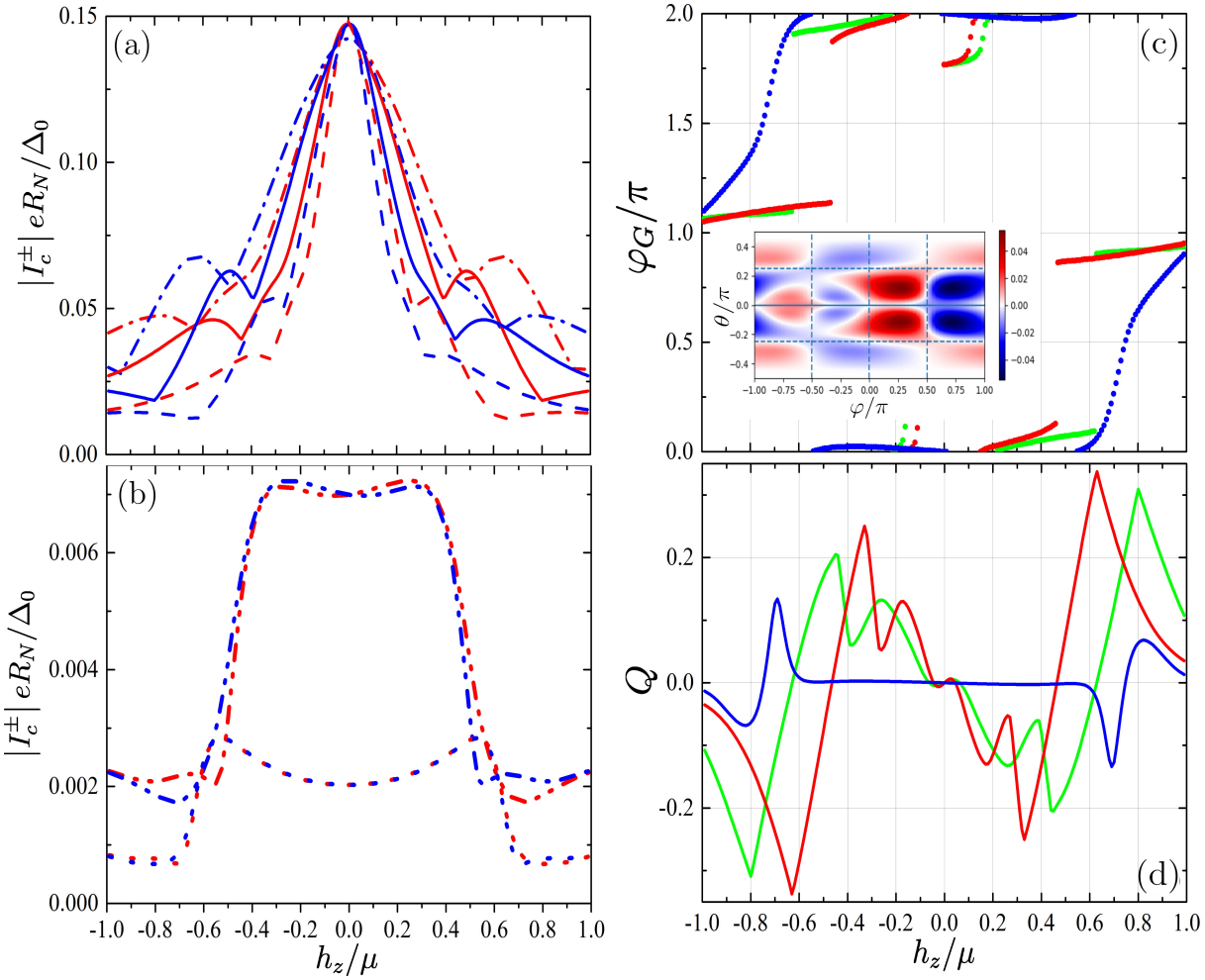
Поређењем слике 5.4(c) са умецима за типове спојева $(-0.03\pi, -0.23\pi)$ и $(0.23\pi, 0.03\pi)$ јасно се види да CPR задовољава релације

$$I(\varphi, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R), \qquad I(\varphi, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, \beta_R, \beta_L), \tag{5.56}$$

што је у складу са релацијама (5.36) за ефикасност диоде.

5.3.2 Улога баријере и параметара на граници

У овом одјељку разматрамо спој типа $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, код кога су истовремено присутни и аномални и диодни Џозефсонов ефекат. На сликама 5.5(a) и 5.5(b) приказана је зависност I_c^+ и $|I_c^-|$ од измјенског поља $\mathbf{h} = (0, 0, h_z)$, за танку баријеру дебљине $dk_F = 2$, ниску температуру $T/T_c = 0.1$, јачину Рашба SOC $\chi = 1.25$ и за више вриједности параметра Z. У случају када се између двије суперпроводљиве електроде налази баријера од нормалног метала ($h_z = 0$), вриједности I_c^+ и $|I_c^-|$ су једнаке и диодни ефекат је одсутан,



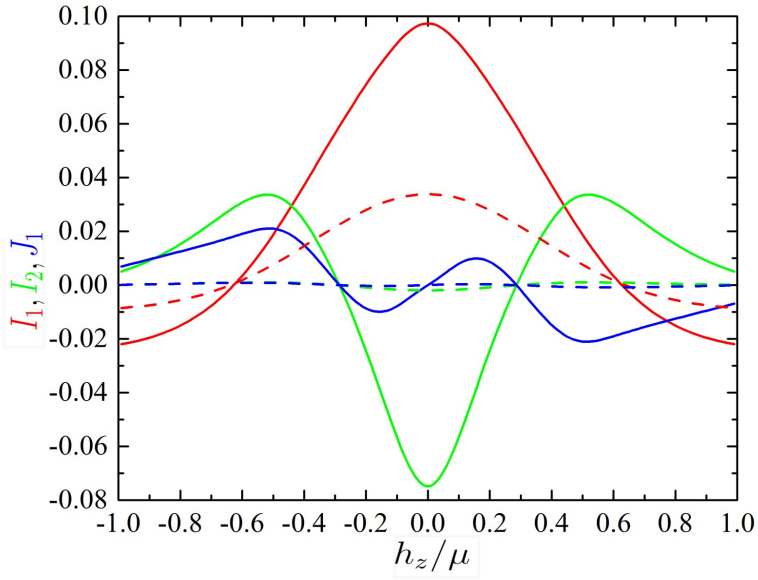
Слика 5.5: Зависност I_c^+ (плава крива) и $|I_c^-|$ (црвена крива) од измјенског поља за спој са транспарентношћу граница (а) $Z = 0$ (црта-тачка), $Z = 0.5$ (пуна) и $Z = 1$ (испрекидана), (b) $Z = 3$ (црта-тачка-тачка) и $Z = 4$ (тачкаста). (c) зависност фазне разлике основног стања, φ_G, од измјенског поља, (d) зависност диодне ефикасности, Q, од измјенског поља за три вриједности транспарентности на границама: $Z = 0.5$ (зелена), $Z = 1$ (црвена) и $Z = 4$ (плава). CPR по транспортним каналима за $h_z = 0.6\mu$ приказана је на уметку панела (c). Остали параметри споја су: $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, $T/T_c = 0.1$, $dk_F = 2$ и $\chi = 1.25$.

што је и очекивано јер је симетрија временске инверзије очувана. Са порастом h_z јавља се разлика између I_c^+ и $|I_c^-|$, што доводи до појаве Џозефсоновог диодног ефекта (JDE), при чему је смањење I_c^+ израженије него смањење $|I_c^-|$, док за $h_z < 0$ важи супротно. Ове криве показују асиметричну природу при промјени знака измјенског поља

$$|I_c^{\pm}(h_z)| \neq |I_c^{\pm}(-h_z)| \quad \text{и} \quad |I_c^{\pm}(h_z)| = |I_c^{\mp}(-h_z)|, \tag{5.57}$$

независно од вриједности параметра Z. Ово је у складу са непарном зависношћу коефицијената J_n од h_z, будући да су коефицијенти I_n парне функције од h_z, што се може видјети на слици 5.6, гдје је приказана зависност коефицијената I_1, I_2 и J_1 од измјенског поља. Ова асиметрија представља и један од показатеља истовременог нарушавања симетрије временске инверзије и симетрије просторне инверзије [74, 76].

Криве $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ показују дипове за различите вредности h_z, при чему важи $|I_c^{\pm}(h_d)| = |I_c^{\mp}(-h_d)|$, гдје је h_d вриједност измјенског поља при којој се дип јавља. Ови дипови на $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ представљају показатељ промјене фазе у неким каналима CPR-

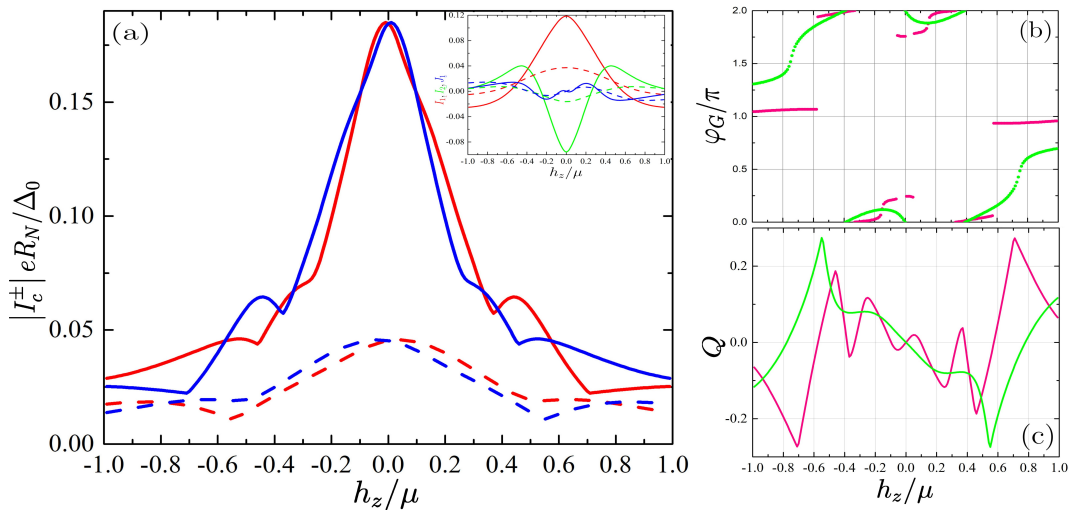


Слика 5.6: Зависност коефицијената Џозефсонове струје I_1 (црвена), I_2 (зелена) и J_1 (плава) од измјенског поља за $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$ тип споја, $dk_F = 2$, $\chi = 1.25$, $Z = 0.5$ и за двије вриједности температуре: $T/T_c = 0.1$ (пуна линија) и $T/T_c = 0.7$ (испрекидана линија).

а. Наиме, у овом типу споја укупни CPR се добија као збир свих CPR-ова по трансверзалним каналима, k_y, који доприносе транспорту (видјети једначину (3.196)). CPR-ови који одговарају различитим каналима k_y су међусобно различити (што доводи до благо различитих појединачних фазних помјераја који зависе од k_y), што се може видјети на уметку слике 5.5(c), гдје су приказани CPR-ови по каналима. Због тога кумулативна CPR не представља чисто 0 или π стање, већ фазна разлика основног стања споја поприма вриједности које су обично у близини 0 или π, па се таква стања називају 0-олика или π-олика [74]. Фазна разлика основног стања Џозефсоновог споја, φ_G, укупне CPR у зависности од h_z приказана је на слици 5.5(c). Може се видјети да, осим $0-\pi$-оликих прелаза који се јављају при малим вриједностима Z са скоковима између 0-оликог и π-оликог стања, за веће вриједности Z долази до континуалног $0-\pi$-оликог фазног прелаза, јер φ_G може да узме све вриједности између 0 и π (видјети плаву криву на слици 5.5(c)). То значи да се положај глобалног минимума слободне енергије може континуално помјерати од 0 ка π.

Вриједност измјенског поља при којој се кумулативна фазна разлика основног стања, φ_G, мијења из 0-оликог у π-олико стање је управо она вриједност при којој диодна ефикасност мијења знак и при којој се $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ сијеку. То се може видјети поређењем слике 5.5(c) и слике 5.5(d), на којој је приказана диодна ефикасност, Q, у зависности од h_z.

Када се криве $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ са слике 5.5(a) сијеку, тј. када важи $I_c^+(h_z^*) = |I_c^-(h_z^*)|$, диодна ефикасност, Q, мијења знак при $h_z = h^*$. На примјер, за $Z = 0.5$ ово се дешава при $h_z^* = 0.63\mu$ и -0.63μ (видјети зелену криву на слици 5.5(d)). Ово се, као што је раније објашњено, манифестује кроз фазни прелаз који се јавља при истој вредности h_z^* (видјети слику 5.5(c)). Ове тачке пресјека кривих $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ праћене су постојањем дипа за $h_d = 0.43\mu$ или -0.8μ на кривој $I_c^+(h_z)$ са лијеве стране пресјека, као и дипа за $h_d = 0.8\mu$ или -0.43μ на кривој $|I_c^-(h_z)|$ са десне стране пресјека. Као резултат тога, крива $Q(h_z)$ показује дип у $h_z = 0.43\mu$ [пик у $h_z = -0.43\mu$], затим расте [опада] скоро линеарно, пролази кроз нулу у $h_z^* = 0.63\mu$ [$h_z^* = -0.63\mu$] и достиже пик [дип] у $h_z = 0.8\mu$ [$h_z = -0.8\mu$]. За

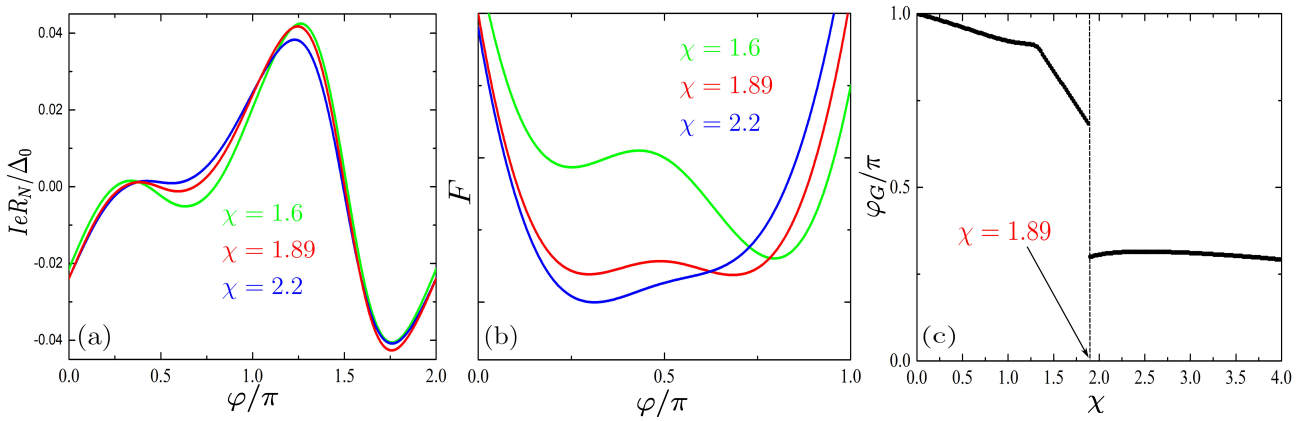


Слика 5.7: (a) Зависност I_c^+ (плава крива) и $|I_c^-|$ (црвена крива) од измјенског поља за двије вриједности јачине Рашба SOC: $\chi = 0.8$ (пуне криве) и $\chi = 4.0$ (испрекидане криве) (У уметку је приказана зависност коефицијената Џозефсонове струје I_1 (црвена), I_2 (зелена) и J_1 (плава) од измјенског поља за двије вриједности јачине Рашба SOC: $\chi = 0.8$ (пуна крива) и $\chi = 4.0$ (испрекидана крива)), (b) зависност фазне разлике основног стања, φ_G, од измјенског поља, и (c) зависност диодне ефикасности, Q, од измјенског поља за двије вриједности јачине Рашба SOC: $\chi = 0.8$ (роза) и $\chi = 4.0$ (зелена). Остали параметри споја су: $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, $T/T_c = 0.1$, $dk_F = 2$, и $Z = 0.5$.

ове вриједности измјенског поља при којима диодна ефикасност достиже пик или дип, коефицијенти I_1, I_2 и J_1 су истог реда величине, што се може видјети из пуних кривих на слици 5.6. Још један пик [дип] на кривој $Q(h_z)$ у $h_z = 0.39\mu$ [$h_z = -0.39\mu$] посљедица је постојања дипа на тој вриједности измјенског поља на кривој $|I_c^-(h_z)|$ [$I_c^+(h_z)$], али без фазног прелаза упркос постојању дипова. Утицај смањења транспарентности граница, приказан на слици 5.5(b), огледа се у смањењу амплитуде струје и ширењу пикова на кривама $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ у околини $h_z = 0$, уз готово хоризонталан облик и веома малу међусобну разлику [74]. Ово се манифестује појавом платоа $Q \approx 0$ на кривој $Q(h_z)$ (видјети плаву криву на слици 5.5(d)), па је диодни ефекат изражен само у коначном опсегу вриједности h_z у којем је разлика између $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ довољно велика. У поређењу са случајем гдје су границе веће транспарентности, јавља се одсуство оштрих пикова на $Q(h_z)$, што је посљедица одсуства оштрих дипова на $|I_c^-(h_z)|$, јер је у овом случају минимум остварен кроз глатку криву. Ово је повезано са постојањем континуалног $0-\pi$-оликог фазног прелаза при већим Z (видјети плаву криву на слици 5.5(c)). Пошто се φ_G мијења континуално, када је фазна разлика мања од $\pi/2$ кажемо да је систем у 0-оликом стању, а када је већа од $\pi/2$ у π-оликом стању. Према томе, $0-\pi$-олики прелаз се јавља на оним вриједностима измјенског поља за које је $\varphi_G = \pi/2$. Могућност оваквих континуалних прелаза потиче од различитог CPR-а за различите k_y канале, као што је раније дискутовано.

Други начин за подешавање диодног ефекта јесте помоћу јачине Рашба SOC-а. Утицај χ на I_c^+ и $|I_c^-|$, као и на коефицијенте I_1, I_2 и J_1 у функцији од h_z, приказани су на слици 5.7(a) и на њеном уметку, респективно, за спој високе транспарентности ($Z = 0.5$), за двије вриједности $\chi = 0.8$ и $\chi = 4$, уз исте остале параметре као на слици 5.5. При већим вриједностима χ, вриједности $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$, као и вриједности коефицијената I_1, I_2 и J_1, су мање. За мање χ криве $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ сијеку се неколико пута, али ови пресјеци, који доводе до промјене знака диодне ефикасности са h_z (видјети слику 5.7(a)), нијесу нужно показатељ фазног прелаза, јер морају бити праћени постојањем минимума

у $I_c^+(h_z)$ са лијеве стране и минимума у $|I_c^-(h_z)|$ са десне стране њиховог пресјека [74]. Стога, за $\chi = 0.8$, само промјена знака Q при $h_z = 0.57\mu$, која је посљедица промјене знака коефицијента I_1, одговара $0-\pi$-оликом фазном прелазу, као што је приказано на слици 5.7(b). Повећањем χ, на сличан начин као и повећањем Z, $0-\pi$-олики фазни прелаз (који може бити континуалан) помјера се ка већим вриједностима измјенског поља, усљед чега се изражени диодни ефекат постиже на већим пољима.

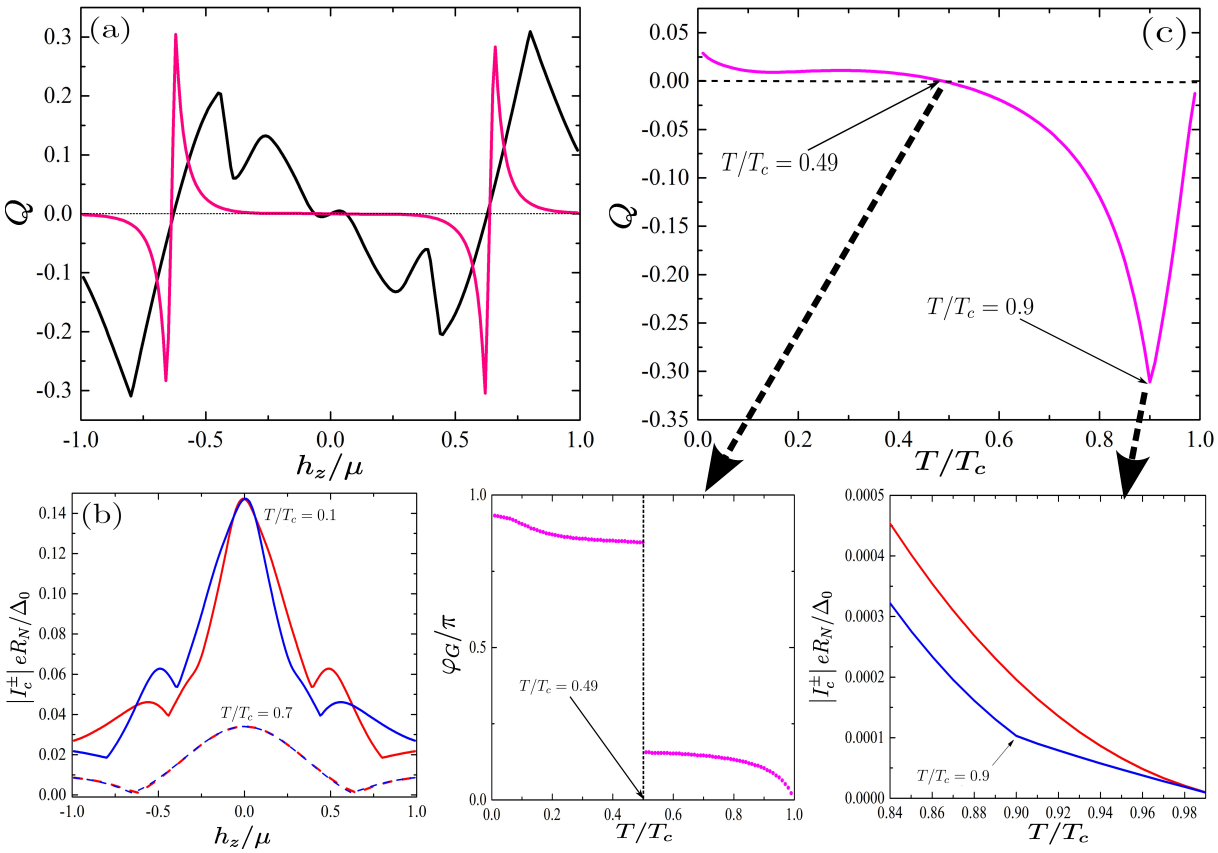


Слика 5.8: (a) Струјно-фазна релација, $I(\varphi)$, и (b) слободна енергија, $F(\varphi)$, за $\chi = 1.6$ (зелена), $\chi = 1.89$ (црвена), и $\chi = 2.2$ (плава); (c) фазна разлика основног стања, φ_G, у зависности од χ. Остали параметри споја су: $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, $T/T_c = 0.1$, $h_z = 0.7\mu$, $dk_F = 2$, и $Z = 0.5$.

Прелазак између 0-оликих и π-оликих стања у овом типу споја могуће је изазвати и подешавањем јачине Рашба SOC-а. На слици 5.8(a) приказане су CPR криве за неколико вриједности χ одабраних у близини $0-\pi$-оликог фазног прелаза, за $h_z = 0.7\mu$. Упркос сличном облику ових кривих, положај одговарајућих минимума Џозефсонове слободне енергије се мијења (видјети слику 5.8(b)), при чему се фазни прелаз кроз скок фазе јавља за $\chi = 1.89$, што се може видјети на слици 5.8(c), гдје је приказана фазна разлика основног стања, φ_G, у функцији од χ.

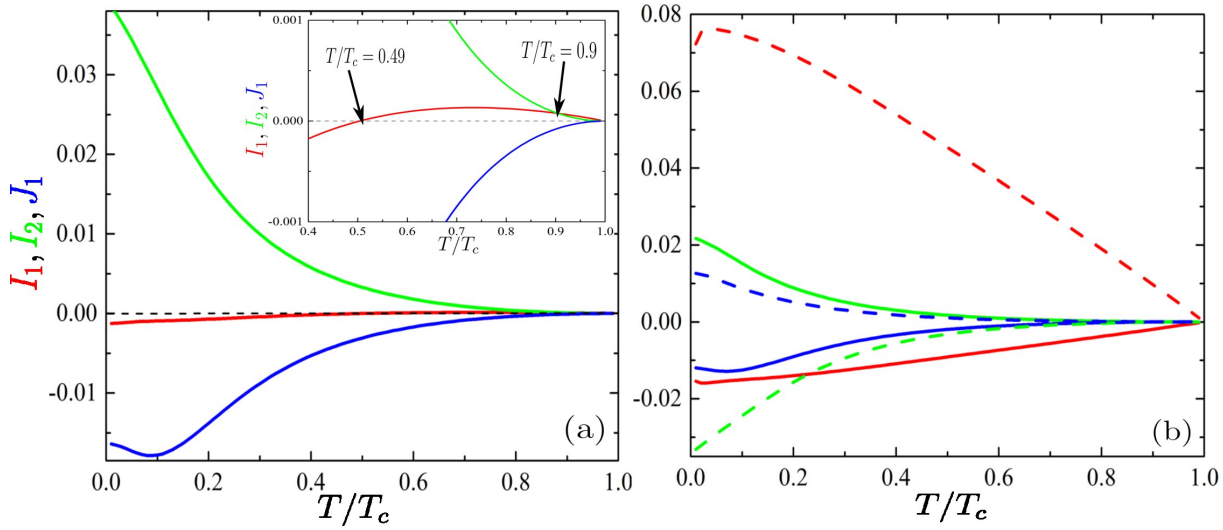
5.3.3 Улога температуре

Температурна зависност диодног ефекта такође је интересантна за разматрање. Диодне ефикасности у функцији h_z, за двије температуре $T/T_c = 0.1$ и $T/T_c = 0.7$, приказане су на слици 5.9(a). При нижој температури присутан је таласасти (немонотони) облик, док се при вишој температури формира плато на $Q \approx 0$, усљед губитка разлике између кривих $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ на нижим вриједностима измјенског поља (видјети слику 5.9(b)). При већим пољима разлика између $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$ присутна је чак и на вишој температури, што доводи до појаве минимума и максимума на кривој $Q(h_z)$, чија се израженост повећава са порастом температуре, јер интервал у h_z између минимума на $I_c^+(h_z)$ и $|I_c^-(h_z)|$, између којих се оне сијеку, постаје ужи. Ово је праћено промјеном знака Q, која одговара $0-\pi$-оликом фазном прелазу. При вишој температури, интензитет коефицијента I_1, из једначине (5.40), доминантан је у поређењу са доприносом виших синусних хармоника и свих косинусних хармоника, при свим вриједностима h_z, осим у близини вриједности измјенског поља на којој I_1 мијења знак и постаје упоредив са вриједностима коефицијената I_2 и J_1 (видјети испрекидане криве на слици 5.6). Стога је диодни ефекат значајан само у околини вриједности измјенског поља при којој коефицијент I_1, а самим тим и диодна ефикасност, мијењају знак, док је аномална Џозефсонова струја готово поништена за све вриједности h_z.



Слика 5.9: (a) Зависност диодне ефикасности, Q, од измјенског поља за двије вриједности температуре: $T/T_c = 0.1$ (црна крива) и $T/T_c = 0.7$ (роза крива). (b) Зависност I_c^+ (плава крива) и $|I_c^-|$ (црвена крива) од измјенског поља. (c) Температурна зависност диодне ефикасности, Q, за $h_z = 0.635\mu$. На лијевом уметку приказана је температурна зависност фазне разлике основног стања, φ_G, а на десном уметку температурна зависност $|I_c^{\pm}|$ за $0.84T_c < T < 0.99T_c$. Остали параметри споја су: $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, $dk_F = 2$, $Z = 0.5$ и $\chi = 1.25$.

Како бисмо одредили температурни фазни прелаз, проучавали смо температурну зависност диодне ефикасности (слика 5.9(c)) за вриједност измјенског поља у области у којој $Q(h_z)$ (са слике 5.9(a)) мијења знак. Стога, за $h_z = 0.635\mu$ и исте остале параметре као на слици 5.9(a), диодна ефикасност, као и коефицијент I_1, мијењају знак при температури $T/T_c = 0.49$ (видјети слику 5.9(c) и слику 5.10(a), респективно), што је посљедица фазног прелаза при тој температури (видјети лијеви уметак на слици 5.9(c)). Температурна зависност Q у овом случају такође је карактерисана присуством оштрог минимума при $T/T_c = 0.9$ (тј. при температури на којој диодни ефекат достиже максималну вриједност), што је посљедица постојања прегиба на $I_c^+(h_z)$ (видјети десни уметак на слици 5.9(c)). При овој температури коефицијенти I_1 и I_2 се сијеку, при чему имају исту вриједност по апсолутној вриједности као коефицијент J_1, што се може видјети у уметку на слици 5.10(a). Прегиб на $I_c^+(h_z)$ посљедица је скока фазне разлике при којој се јавља максимум $I(\varphi)$ [16]. Стога је промјеном температуре могуће постићи значајне вриједности Q упркос малој вриједности струје. За друге вриједности измјенског поља, коефицијенти I_2 и J_1 опадају са порастом температуре, приближавајући се нули на вишим температурама, док коефицијент I_1 задржава ненулту вриједност на свим температурама, као што се може видјети на слици 5.10(b), па није могуће постићи $0-\pi$-олики фазни прелаз.



Слика 5.10: Температурна зависност коефицијената Џозефсонове струје I_1 (црвано), I_2 (зелено) и J_1 (плаво) за $(\beta_L, \beta_R) = (0.03\pi, 0.23\pi)$, $dk_F = 2$, $\chi = 1.25$ и $Z = 0.5$. (a) $h_z = 0.635\mu$. Увећани цртеж за $0.4 < T/T_c < 0.99$ приказан је у уметку. (b) $h_z = 0.2\mu$ (испрекидане криве) и $h_z = 0.8\mu$ (пуне криве).

5.4 Закључак

Теоријски смо истраживали Џозефсонов ефекат у дводимензионалном споју d-wave суперпроводник/феромагнет/d-wave суперпроводник са коначним транспарентностима интерфејса и у присуству Рашба SOC-а на S/F контактима. Утврдили смо да су за појаву AJE и JDE истовремено потребни сљедећи услови: Рашба SOC на границама, ненулта компонента измјенског поља нормална на раван споја и несиметрична оријентација два суперпроводна кристала ($\beta_L \neq \pm\beta_R$). Такође смо анализом симетрије објаснили особине JDE у зависности од кристалне оријентације два d-wave суперпроводника. Наше истраживање је показало како се оптимална нереципрочност суперпроводне струје у овом типу споја може остварити подешавањем јачине измјенског поља у феромагнетној баријери, Рашба SOC-а на равним границама, као и оптимизацијом транспарентности тих граница. Нумерички прорачуни показују да се код диодних CPR кривих истовремено појављују чланови $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$ у Фуријеовом развоју. За постизање већих вриједности диодне ефикасности потребно је да ови чланови буду истог реда величине, при чему Q може бити веће од 30%. Показали смо да се фазни прелаз између 0-оликих и π-оликих стања може остварити не само промјеном јачине измјенског поља већ и промјеном јачине Рашба SOC-а. Утврдили смо да се фазни прелаз јавља у области у којој диодна ефикасност мијења знак, односно гдје се криве I_c^+ и $|I_c^-|$ сијеку, али само ако се њихов пресјек налази између минимума критичних струја. Такође, фазни прелази могу бити праћени скоком фазе или бити континуални, будући да различити појединачни канали имају различите фазе основног стања. Наши резултати показују значајну температурну зависност карактеристика диодног ефекта и указују на могућност температурно индукованог 0-π-оликог фазног прелаза уз одговарајући избор вриједности осталих параметара.

Глава 6

Диодни и аномални Џозефсонов ефекат у спојевима са нехомогеном феромагнетном баријером

У овој глави разматрамо нереципрочни транспорт наелектрисања у планарним дводимензионалним Џозефсоновим спојевима са произвољно оријентисаним измјенским пољима у два феромагнетна слоја у баријери и Рашба спин-орбитном спрегом на границама суперпроводник/феромагнет. Суперпроводљиве електроде могу имати s-wave или произвољно оријентисане d-wave параметре уређења. Посебна пажња посвећена је условима потребним за појаву аномалне Џозефсонове струје и нереципрочне критичне струје, $I_c^+ \neq |I_c^-|$, односно аномалном (AJE) и диодном Џозефсоновом ефекту (JDE).

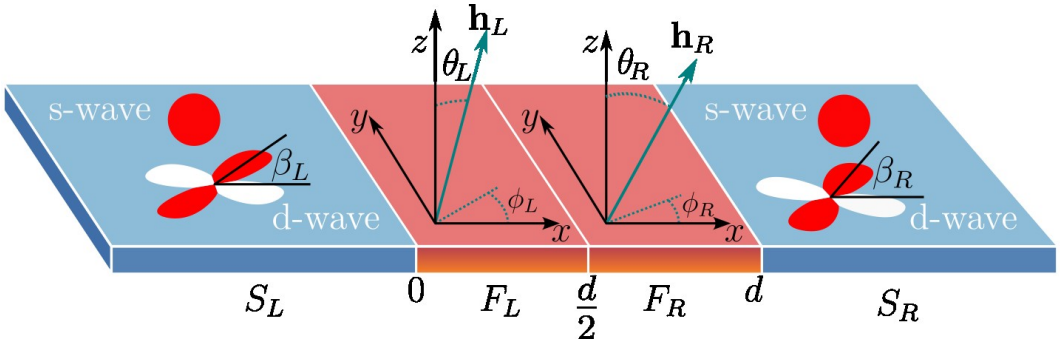
У циљу одређивања ових услова спроводена је систематска анализа симетрија хамилтонијана споја чиме је извршена класификација DFFD Џозефсонових спојева у три класе. Сви резултати симетријске анализе су потврђени нумеричким прорачунима Џозефсонове струје у оквиру Богољубов–де Женовог формализма, користећи уопштени Фурусаки–Цукада (F-T) приступ за спин-активне границе и анизотропно спаривање. Посебна пажња посвећена је споју са $d_{x^2-y^2}/d_{xy}$ оријентисаним суперпроводним електродама код којих се, у случају копланарне оријентације праваца поларизације спина на границама и у два феромагнетна слоја, не јавља JDE, али се јавља коначна струја на нултој фазној разлици, тј. AJE. У том случају успостављен је критеријум за препознавање фазних прелаза између 0-оликог и π-оликог стања споја који се огледа у промјени знака аномалне Џозефсонове струје [96].

Резултати наведени у овој глави засновани су на објављеном раду [96]:

S. Djurdjević and Z. Popović, *Anomalous and diode Josephson effect in junctions with inhomogeneous ferromagnetic barrier and interfacial Rashba spin-orbit coupling*, Phys. Rev. B **114**, 144503 (2026).

6.1 Модел

Разматрамо планарни дводимензионални Џозефсонов спој суперпроводник (S_L)/феромагнет (F_L)/феромагнет (F_R)/суперпроводник (S_R), који се налази у xy-равни, при чему је x-оса нормална на границе између слојева. Лијеви и десни суперпроводник налазе се у полуравнима $x < 0$ и $x > d$, респективно. Два монодоменска феромагнетна слоја једнаке дебљине налазе се у областима $0 < x < d/2$, за лијеви феромагнет, и $d/2 < x < d$, за десни феромагнет. На слици 6.1 приказана је схематска илустрација разматраног споја.



Слика 6.1: Схематска илустрација $S_LF_LF_RS_R$ Џозефсоновог споја. Вектори магнетизације у лијевом и десном феромагнету, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$, произвољно су оријентисани, при чему су њихове оријентације одређене поларним угловима, θ_L и θ_R, и азимуталним угловима, ϕ_L и ϕ_R, респективно. Суперпроводне електроде могу имати или s-wave или d-wave параметар уређења, при чему су β_L и β_R углови између $\hat{a}$-оса лијевог и десног суперпроводног кристала и x-осе, респективно.

Суперпроводници могу имати или изотропан (s-wave) или анизотропан (d-wave) параметар уређења. У случају d-wave симетрије спаривања, оријентације лијевог и десног суперпроводног кристала дефинисане су угловима β_L и β_R, респективно, који представљају углове између правца лобуса параметра уређења и x-осе. У два феромагнетна слоја унутар баријере дозвољене су произвољно оријентисане магнетизације. Како би модел био што реалистичнији, потенцијали на равним контактима између различитих материјала (S_L/F_L и F_R/S_R) моделују се изолационим баријерама и, усљед промјене позадинског електростатичког потенцијала на контактима дуж x-осе, Рашба спин-орбитним спрезањем.

Суперпроводници се описују у оквиру BCS модела, док за феромагнете користимо Стонеров модел. Богољубов–де Женов хамилтонијан је [81, 146]

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} H & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^* & -\tilde{H} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

гдје

$$H = H_0 + \sum_j H_j^F + \sum_i H_i \tag{6.2}$$

представља једночестични Хамилтонијан. Овдје је $H_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ његов кинетички дио. Ради једноставности претпостављамо да су хемијски потенцијал и ефективна маса једнаки у свим дјеловима споја. Други члан у једночестичном хамилтонијану односи се на измјенско поље, при чему $j \in L, R$ означава лијеви и десни феромагнетни слој, тако да су

$$H_L^F = -\boldsymbol{h}_L \boldsymbol{\sigma} \Theta(x)\Theta(d/2 - x), \tag{6.3}$$

$$H_R^F = -\boldsymbol{h}_R \boldsymbol{\sigma} \Theta(x - d/2)\Theta(d - x). \tag{6.4}$$

Претпостављамо да су вектори магнетизација у два феромагнетна слоја произвољно оријентисани са правцима дефинисаним азимуталним, ϕ_j, и поларним, θ_j, угловима (видјети слику 6.1), при чему су интензитети измјенског поља у феромагнетним доменима једнаки, $\boldsymbol{h}_j = h(\sin\theta_j\cos\phi_j, \sin\theta_j\sin\phi_j, \cos\theta_j)^T$.

Трећи члан у једночестичном хамилтонијану (6.2) моделује границе између суперпроводних и феромагнетних материјала помоћу потенцијала облика Диракове δ-функције,

$$H_i = [W_i + R_i(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_x)\boldsymbol{\sigma}]\delta(x - x_i), \tag{6.5}$$

гдје $i \in \{L, R\}$ означава лијеву и десну S/F границу. Овдје је први члан, W_i, изолаторски потенцијал, док други члан представља потенцијал Рашба SOC [195, 196], који се моделује под претпоставком да је градијент скаларног потенцијала дуж x-правца, с обзиром на то да су граничне линије контаката између различитих материјала паралелне са y-осом. Јачина Рашба SOC описана је феноменолошким параметром R_i. Шупљински дио хамилтонијана, $\tilde{H}$ из једначине (6.1), добија се замјеном $\boldsymbol{\sigma}$ у H са $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (-\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$. Дирекциона и температурна зависност параметра уређења дата је на исти начин као и у претходним главама ((4.8), (4.9) и (4.10)).

BdG таласне функције у различитим дјеловима споја конструишу се на исти начин као у глави 4 (видјети изразе (4.33), (4.34), (4.35) и (4.36)). Међутим, сада гранични услови изгледају мало другачије усљед постојања Рашба SOC на S/F границама [96]

$$\begin{aligned}
&\psi_{S_L}(0) = \psi_{F_L}(0),\\
&\psi'_{F_L}(0) - \psi'_{S_L}(0) = \frac{2m}{\hbar^2}(W_L\sigma_0\tau_0 - \hbar v_F R_L k_y \sigma_z\tau_z)\psi(0),\\
&\psi_{F_L}(d/2) = \psi_{F_R}(d/2),\\
&\psi'_{F_R}(d/2) - \psi'_{F_L}(d/2) = 0,\\
&\psi_{F_R}(d) = \psi_{S_R}(d),\\
&\psi'_{S_R}(d) - \psi'_{F_R}(d) = \frac{2m}{\hbar^2}(W_R\sigma_0\tau_0 - \hbar v_F R_R k_y \sigma_z\tau_z)\psi(d).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Као и раније, ови гранични услови служе за нумеричко одређивање коефицијената у различитим процесима расијања. За израчунавање Џозефсонове струје према формули (3.196) потребни су коефицијенти за Андрејевљеву рефлексију при којој је спин квазичестица непромијењен.

6.2 Симетријска анализа

У овом одјељку разматрамо услове за појаву аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта користећи анализу симетрије хамилтонијана споја, будући да два хамилтонијана повезана унитарном или антиунитарном трансформацијом имају идентичне спектре. Уобичајено је да је CPR непарна функција фазне разлике између два суперпроводна кондензата, $I(\varphi) = -I(-\varphi)$. То подразумијева постојање трансформације, U, која пресликава хамилтонијан на начин да је $UH(\varphi)U^\dagger = H(-\varphi)$. У том случају је $I(\varphi = 0) = 0$, па AJE није присутан. То је, на примјер, случај код Џозефсоновог споја са нормалним металом као

баријером и суперпроводним електродама са изотропном s-wave или анизотропном d-wave симетријом параметра уређења са оријентацијом $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, без спин-орбитне спреге на S/F границама. У овом случају постоји скуп од 16 унитарних или антиунитарних трансформација које пресликавају $H(\varphi)$ у $H(-\varphi)$: $\sigma_i T$, $P_y\sigma_i T$, $P_x\sigma_i$ и $P_xP_y\sigma_i$, где су σ_i $(i = 0, x, y, z)$ јединична матрица и Паулијеве матрице у спинском простору, T је оператор временске инверзије, док су P_x и P_y оператори парности дуж x- и y-осе, респективно, што доводи до одсуства AJE [54, 81], како је дискутовано и у претходној глави. Неопходан услов за појаву AJE јесте да све ове трансформације симетрије буду нарушене.

Наш модел Џозефсоновог споја укључује додатне елементе, два монодоменска феромагнетна слоја са произвољним оријентацијама измјенског поља у баријери, Рашба SOC на граници између суперпроводних и феромагнетних материјала, као и могућност произвољне оријентације параметра уређења у d-wave суперпроводницима. Због тога је потребна даља анализа како бисмо одредили услове под којима може доћи до појаве AJE.

У додатку A, у табели A1, приказане су трансформације хамилтонијана коришћене у овој анализи, као и начин на који оне мијењају елементе од којих хамилтонијан зависи. Неке од трансформација које пресликавају $H(\varphi)$ у $H(-\varphi)$ нарушене су присуством SOC-а. За нарушење преосталих симетрија потребна је одговарајућа међусобна оријентација суперпроводних електрода и праваца поља спинског цијепања у два феромагнетна слоја. Ове трансформације и одговарајући услови под којима се ове симетрије нарушавају наведени су у табели 6.1. Ради једноставности, као што је већ наведено, претпостављамо да су јачине измјенских поља у два феромагнета једнаке, $h_L = h_R = h$, као и да су јачине Рашба SOC-а једнаке, са супротним знацима на двјема S/F границама, $R_L = -R_R = R$.

Табела 6.1: Табела трансформација $UH(\varphi)U^\dagger = H(-\varphi)$ и варијабли које нарушавају симетрију. Ова табела не укључује трансформације које су већ нарушене помоћу Рашба SOC.

U	Суперпроводници	Феромагнети
T		Најмање један F је присутан.
$\sigma_z T$		$h_{zL} \neq 0$ or $h_{zR} \neq 0$
$P_x\sigma_x$	$\beta_L \neq -\beta_R$	$(\theta_L, \phi_L) \neq (\pi - \theta_R, -\phi_R)$
$P_x\sigma_y$	$\beta_L \neq -\beta_R$	$(\theta_L, \phi_L) \neq (\pi - \theta_R, \pi - \phi_R)$
P_xP_y	$\beta_L \neq \beta_R$	$(\theta_L, \phi_L) \neq (\theta_R, \phi_R)$
$P_y\sigma_x T$	$\beta_L \neq 0$ or $\beta_R \neq 0$	$h_{xL} \neq 0$ or $h_{xR} \neq 0$
$P_y\sigma_y T$	$\beta_L \neq 0$ or $\beta_R \neq 0$	$h_{yL} \neq 0$ or $h_{yR} \neq 0$
$P_yP_x\sigma_z$	$\beta_L \neq \beta_R$	$(\theta_L, \phi_L) \neq (\theta_R, \phi_R + \pi)$

У Џозефсоновом споју са s-wave или d-wave суперпроводним електродама са оријентацијом $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, потребно нарушење симетрије постиже се искључиво одговарајућим оријентацијама праваца поља спинског цијепања у феромагнетима, што се види из табеле 6.1. Трансформације симетрије које се тривијално нарушавају су: T (ако постоји најмање један феромагнет), $\sigma_z T$ (ако најмање један феромагнет има ненулту компоненту измјенског поља у z-правцу), $P_y\sigma_x T$ (ако најмање један феромагнет има ненулту компоненту измјенског поља у x-правцу) и $P_y\sigma_y T$ (ако најмање један феромагнет има ненулту компоненту измјенског поља у y-правцу). Стога је неопходан услов за нарушење ових симетрија присуство све три компоненте измјенског поља у баријери.

Из табеле 6.1 произилази да су трансформације $P_x\sigma_x$ и $P_x\sigma_y$ нарушене када је $\theta_L \neq \pi - \theta_R$ или $\phi_L \neq -\phi_R$ и $\phi_L \neq \pi - \phi_R$. Треба напоменути да ове трансформације пресликавају $\phi_L - \phi_R$ у $\phi_L - \phi_R$. Међутим, будући да Џозефсонова струја зависи само од релативног азимуталног угла између измјенских поља у феромагнетима усљед префериране осе кван-

тизације спина (осе z дефинисане Рашба SOC-ом на границама), ове симетрије су очуване за све вриједности ϕ_L и ϕ_R када је $\theta_L = \pi - \theta_R$.

Додатно, показује се да су трансформације P_xP_y и $P_xP_y\sigma_z$ нарушене за $\theta_L \neq \theta_R$ или $\phi_L \neq \phi_R$ и $\phi_L \neq \pi + \phi_R$. У случају када је $\theta_L = \theta_R$, за нарушење симетрије потребно је да $\phi_L \neq \phi_R$ и $\phi_L \neq \pi + \phi_R$, односно да вектори $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$ буду некопланарни. У осталим случајевима, када је $\theta_L \neq \theta_R$, некопланарност није потребна за нарушење ових симетрија.

Међутим, како бисмо разјаснили услове за постојање AJE у овим типовима спојева, потребно је размотрити трансформације под којима се хамилтонијан пресликава из $H(\varphi, \beta_L, \beta_R)$ у $H(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R)$ и испитати да ли су оне нарушене. Поред трансформација које су већ нарушене присуством Рашба SOC-а, трансформације $P_y\sigma_xT$ и $P_y\sigma_yT$ остају очуване за све θ_L и θ_R када је $\phi_L = \phi_R$ и $\phi_L = \pi + \phi_R$, односно у случају када су вектори $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$ копланарни. То значи да је Џозефсонова струја антисиметрична у односу на тачку $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, односно $I(\varphi, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R)$, па за $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ имамо $I(0, 0, 0) = -I(0, 0, 0)$, што доводи до нулте аномалне Џозефсонове струје.

Дакле, узимајући у обзир све претходне закључке, можемо утврдити услове за појаву AJE у Џозефсоновим спојевима са s-wave или $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ оријентисаним d-wave суперпроводницима. Поред присуства Рашба SOC-а на границама, потребно је да магнетизације у два феромагнета и z-оса буду некопланарне, као и да важи $\theta_L \neq \pi - \theta_R$, односно да z-компоненте измјенских поља у феромагнетним слојевима не буду супротно усмјерене.

За утврђивање услова за појаву AJE у Џозефсоновим спојевима типа $\beta_L = -\beta_R$ потребна су додатна разматрања. Конкретно, трансформације $P_x\sigma_xT$ и $P_x\sigma_yT$, које замјењују промјењиве θ_L и θ_R у хамилтонијану споја (видјети табелу A2 у додатку A) и дају релацију $I(\varphi, \theta_L, \theta_R) = I(\varphi, \theta_R, \theta_L)$, остају очуване за $\beta_L = -\beta_R$. Додатно, трансформација $P_x\sigma_z$, која пресликава $H(\varphi, \theta_L, \theta_R, \beta_L, \beta_R)$ у $H(-\varphi, \theta_R, \theta_L, -\beta_R, -\beta_L)$ и даје релацију $I(\varphi, \theta_L, \theta_R, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, \theta_R, \theta_L, -\beta_R, -\beta_L)$, такође остаје очувана за $\beta_L = -\beta_R$. Будући да је за $\beta_L = -\beta_R$ струја парна функција при замјени θ_L и θ_R, имамо $I(\varphi, \theta_L, \theta_R, \beta_L, \beta_R) = -I(-\varphi, \theta_L, \theta_R, -\beta_R, -\beta_L)$, па посљедично слиједи $I(\varphi = 0, \beta_L, -\beta_L) = -I(\varphi = 0, \beta_L, -\beta_L)$. Надаље, $P_x\sigma_z$ пресликава $\phi_L - \phi_R$ у $\phi_R - \phi_L$ и остаје очувана када је $\phi_L = \phi_R$ или $\phi_L = \pi + \phi_R$. То значи да AJE изостаје за копланарну оријентацију праваца поља спинског цијепања при $\beta_L = -\beta_R$. Овдје смо занемарили чињеницу да трансформација $P_x\sigma_z$ мијења знак параметра Рашба SOC-а, $R \to -R$. Разлог је то што израчунавање CPR-а подразумијева интеграцију по свим каналима са трансверзалним импулсима k_y, односно укључени су доприноси и за k_y и за $-k_y$. Стога се промјена знака Рашба члана $Rk_y\sigma_z$ може еквивалентно представити промјеном интеграционе промјењиве $k_y \to -k_y$. У случају $\beta_L = -\beta_R$, сви остали чланови који зависе од k_y остају непромијењени под овом трансформацијом. Допринос феромагнетних слојева не зависи од знака k_y и стога ова трансформација не мијења њихов допринос CPR-у.

Додатно, трансформације $P_x\sigma_x$ и $P_x\sigma_y$, које пресликавају $H(\varphi, \beta_L, -\beta_L)$ у $H(-\varphi, \beta_L, -\beta_L)$, остају очуване за $\theta_L = \pi - \theta_R$. У случају копланарне оријентације вектора $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$, ова симетрија је такође очувана, док је за некопланарну оријентацију симетрија нарушена када је $\theta_L \neq \pi - \theta_R$.

На основу претходних разматрања можемо утврдити опште услове за појаву AJE у спојевима са s-wave и са $(\beta_L, -\beta_L)$, укључујући и тип $(0, 0)$, оријентисаним d-wave суперпроводним електродама: некопланарност вектора $\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{h}_L$ и $\boldsymbol{h}_R$ ($\phi_L \neq \phi_R$, $\phi_L \neq \pi + \phi_R$), заједно са условом $\theta_L \neq \pi - \theta_R$.

За спојеве типа $\beta_L = \beta_R \neq 0$, нарушење трансформација симетрије P_xP_y и $P_xP_y\sigma_z$, које пресликавају $H(\varphi)$ у $H(-\varphi)$, постиже се за $\theta_L \neq \theta_R$ или $\phi_L \neq \phi_R$ и $\phi_R \neq \pi + \phi_L$.

За спојеве типа $\beta_L \neq \pm\beta_R$, све трансформације из табеле 6.1, осим T и σ_zT, нарушене су оријентацијом суперпроводних електрода. За нарушење ових симетрија потребан је најмање један феромагнет са ненултом z-компонентом измјенског поља.

За налажење услова за појаву JDE потребно је размотрити трансформације $H(\varphi, h) \to H(-\varphi, h)$. Ако је ова симетрија очувана, тада важи $I_c^+(h) = -I_c^-(h)$, што показује да JDE није присутан. Ове трансформације су подскуп трансформација које су разматране у анализи услова потребних за појаву AJE, па се лако може видјети да су услови за појаву JDE исти као и услови за појаву AJE.

Овдје треба истаћи да је неопходност постојања ненулте z-компоненте измјенског поља у свим класама спојева директна посљедица њихових симетријских особина. Будући да Рашба спин-орбитна спрега на S/F границама уводи преферирани правац спина преко члана $H_{RSOC} \sim Rk_y\sigma_z$, измјенска поља која леже искључиво у равни споја очувавају комбиновану симетрију $\sigma_z T$, која ограничава CPR на начин да онемогућава појаву нерециprочне критичне струје. Ненулта компонента измјенског поља нормална на раван споја нарушава ову симетрију и тиме омогућава Џозефсонов диодни ефекат.

Дакле, са становишта услова за појаву аномалног и диодног ефекта у Џозефсоновим спојевима са два монодоменска феромагнетна слоја и Рашба SOC-ом између различитих материјала, разликујемо три класе:

(1) спојеве са s-wave или $\beta_L = -\beta_R$ оријентисаним d-wave суперпроводницима;

(2) спојеве са $\beta_L = \beta_R \neq 0$; и

(3) спојеве са $\beta_L \neq \pm\beta_R$.

Претходна анализа симетрије хамилтонијана споја претпоставља једнаке јачине Рашба SOC-а са супротним знацима на двјема границама, па је корисно размотрити како се класификација спојева према овим симетријама мијења када се овај услов релаксира. За различите јачине Рашба SOC-а ($R_L \neq -R_R$), неке од трансформација симетрије коришћених у претходној класификацији више нијесу очуване. Конкретно, трансформације $P_x\sigma_x$ и $P_x\sigma_y$ више нијесу симетрије хамилтонијана споја (видјети крајњу десну колону табеле A1 у додатку A), па услов $\theta_R \neq \pi - \theta_L$ више није релевантан за појаву AJE и JDE. Поред тога, нарушавање трансформација P_xP_y и $P_xP_y\sigma_z$, које одређују другу класу спојева, доводи до спајања друге и треће класе према условима за настанак AJE и JDE добијеним из симетријске анализе.

Према томе, Џозефсонови спојеви са неједнаким јачинама Рашба SOC-а могу се класификовати у само двије класе према симетрији:

(1) спојеви са s-wave и $\beta_L = -\beta_R$ оријентисаним d-wave суперпроводним електродама за које су AJE и JDE забрањени за копланарне оријентације вектора $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$;

(2) спојеви са $\beta_L = \beta_R$ и $\beta_L \neq \pm\beta_R$ оријентисаним d-wave суперпроводним електродама за које AJE и JDE остају забрањени ако ниједан феромагнетни слој нема ненулту z-компоненту измјенског поља.

Закључци добијени анализом симетрије у потпуности су потврђени нумеричким резултатима који су представљени у наставку.

6.3 Нумерички резултати

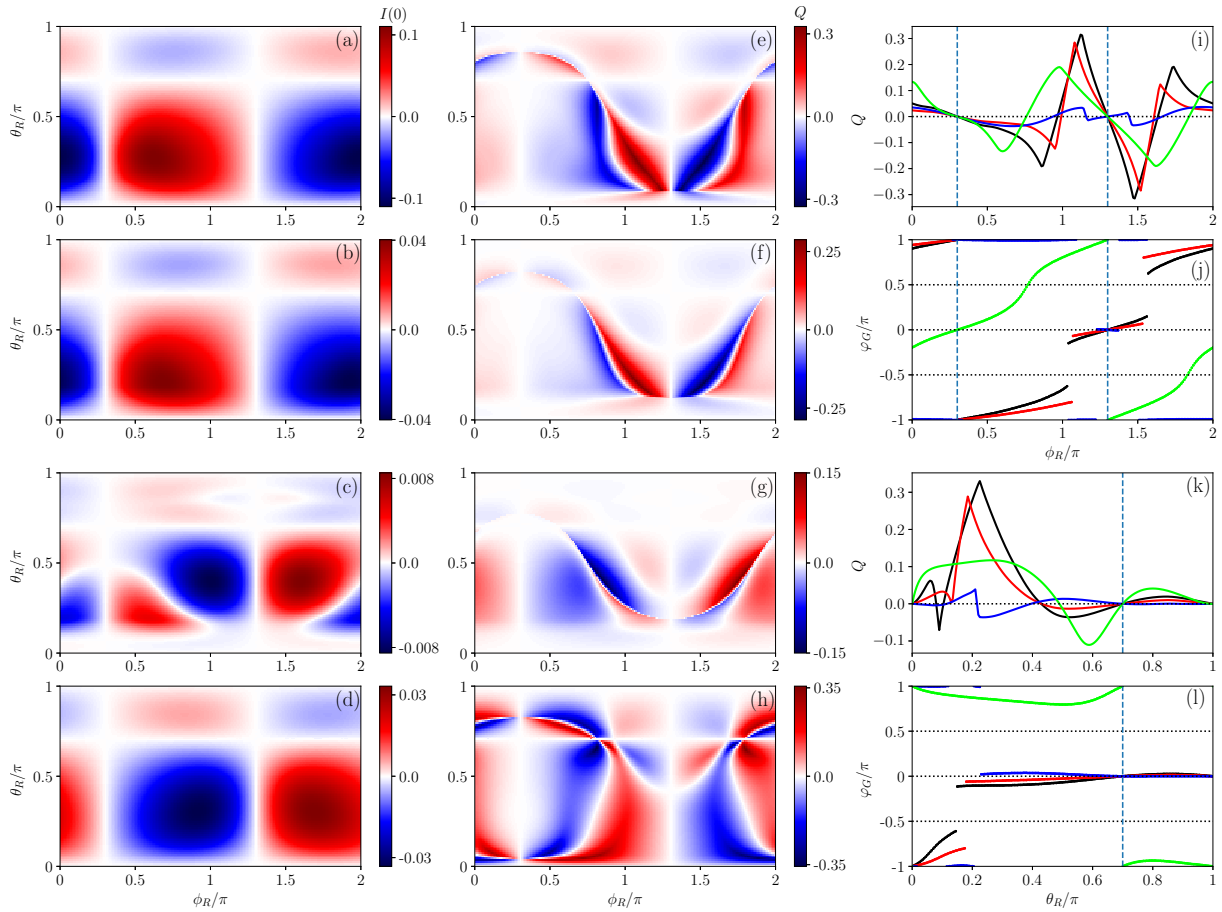
У овом одјељку анализирамо како оријентације измјенских поља у два феромагнетна слоја утичу на карактеристике нерециprочног транспорта у три претходно дефинисане класе Џозефсонових спојева, при чему претпостављамо једнаке јачине Рашба SOC-а са супротним знацима на двјема S/F границама. У свим нумеричким прорачунима разматрамо спој који је транслаторно инваријантан дуж y-правца, при чему се Џозефсонова

струја добија сумирањем по свим трансверзалним каналима пропагације квазичестица, будући да је трансверзални импулс, k_y, очуван. Претпостављамо да је Фермијева енергија 1000 пута већа од суперпроводног енергијског процјепа. Јачине измјенских поља и дужине нормализоване су инверзном Фермијевом енергијом, μ, односно Фермијевим таласним вектором, k_F. Приказани резултати добијени су за кратке Џозефсонове спојеве са $dk_F = 10$, при чему је јачина измјенских поља у оба феромагнета $h/\mu = 0.8$. За потребе нумеричких прорачуна уводимо бездимензионе параметре којима квантификујемо јачину изолаторског потенцијала, $Z_{L(R)} = 2mW_{L(R)}/(\hbar^2 k_F)$, и Рашба SOC-а, $\chi_{L(R)} = 2mR_{L(R)}/\hbar^2 k_F$, на лијевој и десној S/F граници. Ради једноставности, резултате приказујемо за симетричан случај са идентичним транспарентностима на обје S/F границе ($Z_L = Z_R = Z$). Како бисмо моделовали границе високе транспарентности, али за реалистичан балистички спој који је могућ захваљујући савременим техникама израде, бирамо $Z = 0.5$. Приказани резултати израчунати су за $\chi_L = -\chi_R = \chi = 1.25$ и ниску температуру, $T/T_c = 0.1$.

Најприје анализирамо прву класу Џозефсонових спојева дефинисану у претходном одјељку. Аномална Џозефсонова струја и диодна ефикасност, као функције оријентације вектора магнетизације у десном феромагнетном слоју (тј. као функције углова θ_R и ϕ_R), приказане су на слици 6.2: (a) и (e) за спојеве са s-wave суперпроводницима; (b) и (f) за d-wave суперпроводнике са $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$; (c) и (g) за d-wave суперпроводнике са $(\beta_L, \beta_R) = (0.1\pi, -0.1\pi)$; и (d) и (h) за d-wave суперпроводнике са $(\beta_L, \beta_R) = (0.2\pi, -0.2\pi)$, при чему је оријентација измјенског поља у лијевом феромагнету фиксирана са $\theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$. Вриједност и знак карактеристика нерециprочног транспорта јако зависе како од међусобне оријентације феромагнетних слојева, тако и од оријентације параметара уређења у двјема суперпроводним електродама. Сви панели на лијевој страни слике 6.2 показују да $I(0)$ и Q ишчезавају за $\phi_R = \phi_L = 0.3\pi$ и $\phi_R = \phi_L + \pi = 1.3\pi$, независно од угла θ_R (видјети двије вертикалне бијеле линије), као и за $\theta_R = 0$, $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$ и $\theta_R = \pi$, независно од угла ϕ_R (видјети три хоризонталне бијеле линије). Појава вертикалних бијелих линија за које је $I(0) = 0$ и $Q = 0$ потврђује да су, за копланарну оријентацију z-осе и измјенских поља у два феромагнетна слоја, и AJE и JDE забрањени у овој класи Џозефсонових спојева. На основу услова копланарности може се објаснити и појава двије хоризонталне бијеле линије за $\theta_R = 0$ и $\theta_R = \pi$, независно од угла ϕ_R, док трећа хоризонтална бијела линија за $\theta_R = 0.7\pi$ одговара оријентацији феромагнета при којој су z-компоненте измјенских поља у два феромагнетна слоја једнаке по интензитету, али супротног знака. Одсуство AJE и JDE у складу је са закључцима симетријске анализе датим у претходном одјељку.

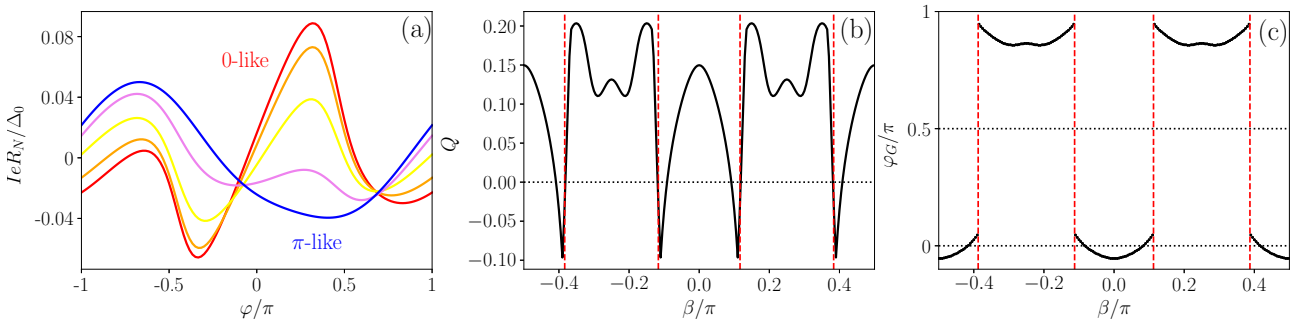
Десна колона на слици 6.2 приказује зависност Q и фазне разлике основног стања, φ_G, од азимуталног угла ϕ_R за фиксирани поларни угао $\theta_R = 0.2\pi$ (слика 6.2 (i) и (j)), као и од поларног угла θ_R за фиксирани азимутални угао $\phi_R = 1.1\pi$ (слика 6.2 (k) и (l)), респективно. Усљед присуства Рашба SOC-а на S/F границама, укупна CPR настаје као резултат доприноса свих трансверзалних k_y канала који учествују у транспорту. Посљедично, појединачни фазни помаци, различити за различите вриједности k_y, доводе до кумулативне фазне разлике основног стања која није нужно једнака 0 или π, већ може попримити било коју вриједност у интервалу $\varphi_G \in [0, \pi]$ [74, 81]. Треба напоменути да је, за копланарну оријентацију поља спинског цијепања у два феромагнетна слоја у баријери, односно за $\phi_R = 0.3\pi$ и $\phi_R = 1.3\pi$, фазна разлика основног стања једнака искључиво 0 или π, док је $Q = 0$ за све разматране спојеве (што је приказано испрекиданим линијама на слици 6.2 (j), односно (i)). Слично понашање уочава се када су z-компоненте измјенских поља у два феромагнета једнаке по интензитету, али супротног знака, односно за $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$, што је приказано испрекиданим линијама на сликама 6.2 (k) и (l).

$0 - \pi$-олики фазни прелази могу се индуковати промјеном међусобне оријентације два феромагнета у баријери, тј. промјеном азимуталног угла ϕ_R или поларног угла θ_R (ви-



Слика 6.2: (a)-(d) Аномална Џозефсонова струја, $I(0)$, и (e)-(h) диодна ефикасност, Q, у зависности од углова ϕ_R и θ_R за фиксну оријентацију измјенског поља у лијевом феромагнету ($\phi_L = 0.3\pi$ и $\theta_L = 0.3\pi$), за s-wave ((a) и (e)), $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ d-wave ((b) и (f)), $(\beta_L, \beta_R) = (0.1\pi, -0.1\pi)$ d-wave ((c) и (g)), $(\beta_L, \beta_R) = (0.2\pi, -0.2\pi)$ d-wave ((d) и (h)), типове Џозефсонових спојева, респективно. Диодна ефикасност, Q, и фазна разлика основног стања, φ_G, у зависности од ϕ_R за фиксиран угао $\theta_R = 0.2\pi$ (панели (i) и (j)), и у зависности од θ_R за фиксиран угао $\phi_R = 1.1\pi$ (панели (k) и (l)), за s-wave (црна), $(0, 0)$ d-wave (црвена), $(0.1\pi, -0.1\pi)$ d-wave (плава) и $(0.2\pi, -0.2\pi)$ d-wave (зелена) типове споја. Вертикалне плаве испрекидане линије показују копланарну оријентацију поља спинског цијепања у два феромагнетна слоја и на S/F границама. Остали параметри су: $h/\mu = 0.8$, $dk_F = 10$, $T/T_c = 0.1$, $\chi = 1.25$, $Z = 0.5$.

дјети слике 6.2 (j) и (l), респективно). Фазни прелаз се јавља у близини нагле промјене знака диодне ефикасности, што доводи до повећања вриједности Q у близини тачке фазног прелаза. Поред фазног прелаза индукованог промјеном ϕ_R, који се одвија кроз скок, као у случају спојева s-wave, $(0, 0)$ и $(0.1\pi, -0.1\pi)$, фазни прелаз може наступити и континуално. То је случај за спој типа $(0.2\pi, -0.2\pi)$, гдје се континуални фазни прелаз индукован промјеном ϕ_R одвија при $\varphi_G = \pi/2$ или $-\pi/2$. За $|\varphi_G| < \pi/2$ спој се налази у 0-оликом стању, док је за $|\varphi_G| > \pi/2$ у π-оликом стању. За овај тип споја, фазни прелаз индукован промјеном поларног угла θ_R не јавља се за $\phi_R = 1.1\pi$, па спој остаје у π-оликом стању за све вриједности θ_R (видјети слику 6.2 (l)). Ово указује на то да се $0 - \pi$-олики фазни прелаз може индуковати и промјеном међусобне оријентације d-wave суперпроводних електрода ($\beta_L = -\beta_R = \beta$) [81]. На слици 6.3 (a) приказане су CPR криве за произвољно оријентисане магнетизације у феромагнетним слојевима, дефинисане угловима $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_R = 1.1\pi$ и $\theta_R = 0.2\pi$, за неколико Џозефсонових спојева који припадају првој класи, што



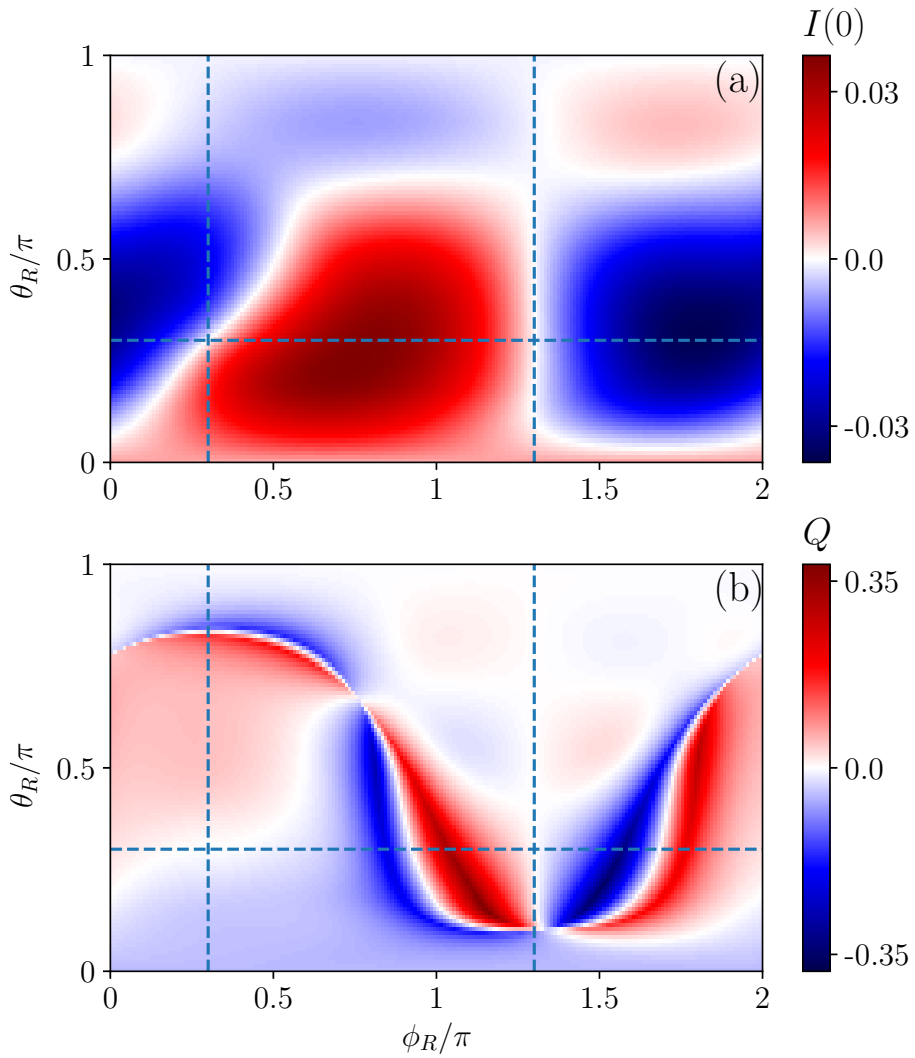
Слика 6.3: (a) CPR за $\beta_L = -\beta_R = \beta$ тип споја за $\beta = 0$ (црвена), $\beta = 0.05\pi$ (наранџаста), $\beta = 0.1\pi$ (жута), $\beta = 0.15\pi$ (љубичаста) и $\beta = 0.2\pi$ (плава). Спој пролази кроз $0-\pi$-олики фазни прелаз приликом промјене оријентација суперпроводних електрода. (b) Диодна ефикасност, Q, и (c) фазна разлика основног стања, φ_G, у зависности од β. Вертикалне испрекидане црвене линије показују вриједности β на којима се дешава $0-\pi$-олики фазни прелаз. Други параметри су: $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_R = 1.1\pi$, $\theta_R = 0.2\pi$, а остали параметри су исти као на слици 6.2.

указује на појаву $0-\pi$-оликих фазних прелаза при промјени β. Одговарајућа зависност фазне разлике основног стања од β, приказана на слици 6.3 (c), показује да се $0-\pi$-олики фазни прелази јављају при вриједностима β за које диодна ефикасност нагло пролази кроз нулу, што је означено испрекиданим линијама на слици 6.3 (b).

Како бисмо анализирали AJE и JDE у другој класи Џозефсонових спојева, приказаћемо резултате за спој типа $(\beta_L, \beta_R) = (0.15\pi, 0.15\pi)$. Оријентација лијевог феромагнетног слоја фиксирана је на $\theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$. Аномална Џозефсонова струја и диодна ефикасност, као функције оријентације десног феромагнетног слоја (тј. углова θ_R и ϕ_R), приказане су на слици 6.4 (a) и (b). Према симетријској анализи, постоје двије карактеристичне оријентације десног феромагнета за које су и AJE и JDE забрањени. За разматрани Џозефсонов спој, прва оријентација одређена је са $\theta_R = \theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_R = \phi_L = 0.3\pi$, док је друга одређена са $\theta_R = \theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_R = \phi_L + \pi = 1.3\pi$, што је означено пресјецима испрекиданих линија на слици 6.4 (a) и (b). Може се уочити да на слици 6.4 постоје и друге тачке у којима $I(0)$ и Q ишчезавају, а које зависе од вриједности осталих параметара споја. Међутим, само за оријентације магнетизација у феромагнетним слојевима у којима се испрекидане линије сијеку, и AJE и JDE су одсутни независно од промјена осталих параметара разматраног типа споја.

Трећа класа Џозефсонових спојева односи се на спојеве са произвољно оријентисаним d-wave суперпроводним електродама за које важи $\beta_R \neq \pm\beta_L$. Аномална Џозефсонова струја и диодна ефикасност, као функције оријентације измјенског поља у десном феромагнету, за спој типа $(0.09\pi, -0.21\pi)$ приказане су на слици 6.5 (a) и (b), респективно. Будући да је, према услову утврђеном анализом симетрије, за појаву AJE и JDE неопходно присуство ненулте z-компоненте измјенског поља у најмање једном феромагнетном слоју, оријентацију магнетизације у лијевом феромагнету фиксирали смо у xy-равни ($\theta_L = 0.5\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$), чиме је обезбијеђено одсуство ненулте z-компоненте. Као посљедица тога, $I(0)$ и Q се анулирају када десни феромагнет има оријентацију $\theta_R = 0.5\pi$, што је потврђено постојањем хоризонталне бијеле линије на $\theta_R = 0.5\pi$, независно од угла ϕ_R, као што је приказано на слици 6.5 (a) и (b). Усљед трансформације $\sigma_z T$, z-компонента магнетизације десног феромагнета мијења знак, $h_{R,z} \to -h_{R,z}$, што доводи до релације $I(\varphi, h_{R,z}) = -I(-\varphi, -h_{R,z})$. Будући да су аномална Џозефсонова струја и диодни одзив непарне функције у односу на z-компоненту измјенског поља [81], одговарајуће величине мијењају знак при трансформацији $\theta_R \to \pi - \theta_R$.

Међусобни утицај оријентације магнетизација у два феромагнетна слоја и оријентације

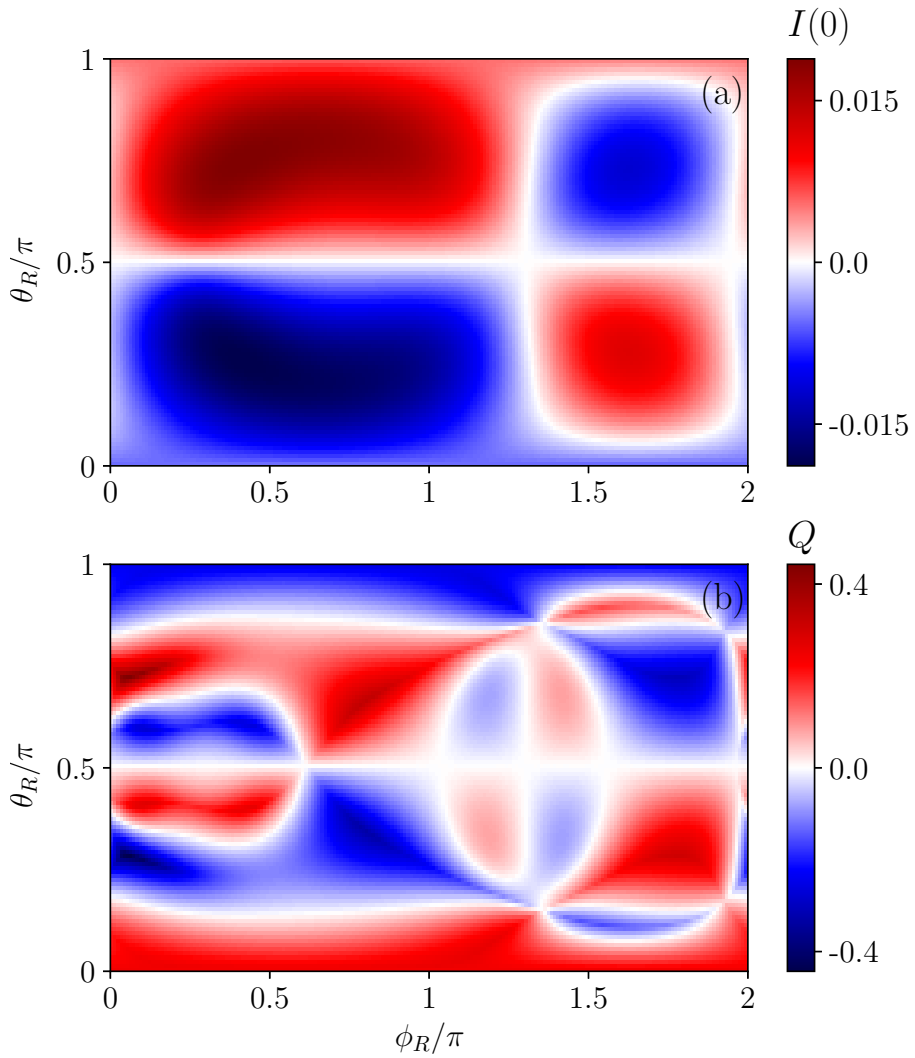


Слика 6.4: (a) Аномална Џозефсонова струја $I(0)$ и (b) диодна ефикасност Q у зависности од углова ϕ_R и θ_R, при фиксираној оријентацији измјенског поља у лијевом феромагнету ($\phi_L = 0.3\pi$ и $\theta_L = 0.3\pi$), за $(\beta_L, \beta_R) = (0.15\pi, 0.15\pi)$ тип споја. Тачке пресјека испрекиданих линија означавају оријентацију измјенског поља десног феромагнета за које су AJE и JDE забрањени. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

d-wave суперпроводних електрода значајно утиче на карактеристике нереципрочног транспорта и заслужује детаљније разматрање, будући да смо се до сада углавном фокусирали на услове под којима су AJE и JDE забрањени усљед симетрије. Панели на слици 6.6 приказују зависност диодне ефикасности од углова оријентације суперпроводника β_L и β_R за различите међусобне конфигурације праваца поља спинског цијепања у феромагнетној баријери. Прве двије колоне панела одговарају копланарним оријентацијама, $\phi_R = \phi_L$ и $\phi_R = \pi + \phi_L$, док трећа колона представља некопланарни случај. Први ред панела одговара случају $\theta_R = \theta_L$, други случају $\theta_R = \pi - \theta_L$, а трећи случају у којем су z-компоненте измјенских поља у феромагнетним слојевима различите.

У наставку анализирамо особине симетрије расподјела диодне ефикасности у (β_L, β_R) панелима приказаним на слици 6.6.

Трансформације $P_y\sigma_x T$ и $P_y\sigma_y T$ (видјети табелу A1 у Додатку A) пресликавају $H(\varphi, \beta_L, \beta_R)$ у $H(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R)$. Ове трансформације су очуване за све θ_L и θ_R када је $\phi_L = \phi_R$ или $\phi_L = \phi_R + \pi$, што доводи до релације $I_c^+(\beta_L, \beta_R) = -I_c^-(-\beta_L, -\beta_R)$. Стога је, за копланарну оријентацију вектора $\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{h}_L$ и $\boldsymbol{h}_R$, диодна ефикасност непарна функција



Слика 6.5: (a) Аномална Џозефсонова струја $I(0)$ и (b) диодна ефикасност Q у зависности од углова ϕ_R и θ_R за фиксирану оријентацију измјенског поља у лијевом феромагнету ($\phi_L = 0.3\pi$ и $\theta_L = 0.5\pi$), за $(\beta_L, \beta_R) = (0.09\pi, -0.21\pi)$ тип споја. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

у односу на β_L и β_R око тачке $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$, односно задовољава

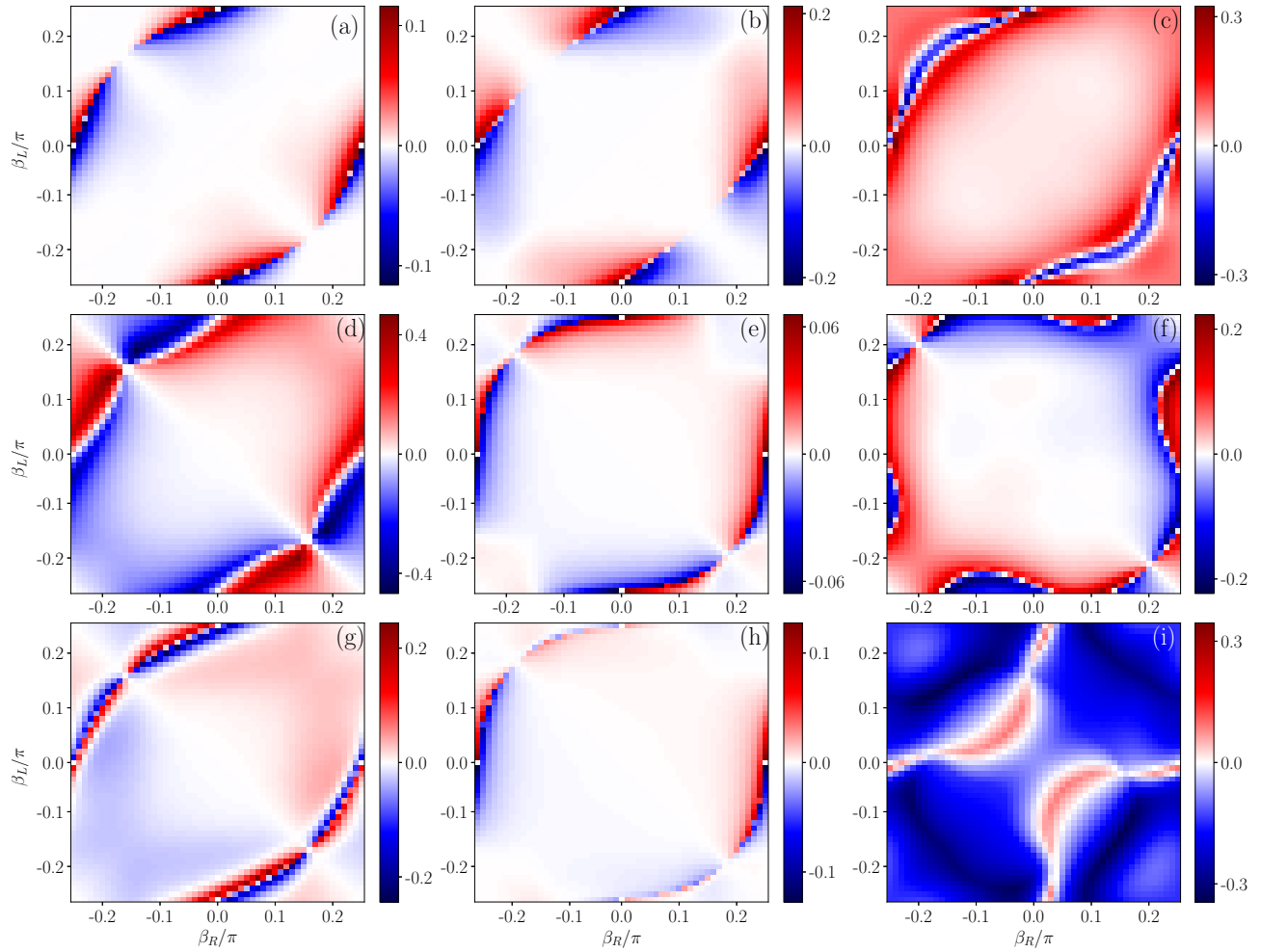
$$Q(\beta_L, \beta_R) = -Q(-\beta_L, -\beta_R). \tag{6.7}$$

Ово је приказано на панелима (a), (b), (d), (e), (g) и (h) слике 6.6, чиме се потврђују захтјеви симетрије.

Са друге стране, трансформација $P_x P_y$ пресликава $H(\varphi, \beta_L, \beta_R)$ у $H(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R)$ и очувана је за $\theta_L = \theta_R$ и $\phi_L = \phi_R$ или $\phi_L = \phi_R + \pi$. То доводи до непарности диодне ефикасности у односу на антидијагоналу, што се може потврдити на панелима (a) и (b) слике 6.6.

Даље, трансформација $P_x \sigma_x T$ (видјети табелу A2 у Додатку A) пресликава $H(\varphi, \beta_L, \beta_R)$ у $H(\varphi, -\beta_R, -\beta_L)$, при чему важи $I_c^{\pm}(\beta_L, \beta_R) = I_c^{\pm}(-\beta_R, -\beta_L)$. Ова трансформација је очувана за $\theta_L = \theta_R$ за све азимуталне оријентације ϕ_L и ϕ_R измјенских поља у феромагнетима. Као посљедица тога, диодна ефикасност је парна у односу на главну дијагоналу у (β_L, β_R) равни, што се може видјети на панелима (a), (b) и (c) слике 6.6.

Уколико постоје трансформације које пресликавају хамилтонијан $H(\varphi, \beta_L, \beta_R)$ у $H(-\varphi, -\beta_L, -\beta_R)$, тада је диодна ефикасност непарна у односу на главну дијагоналу у



Слика 6.6: Диодна ефикасност Q у зависности од оријентације лијевог и десног d-wave суперпроводног кристала, β_L и β_R за $\theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$. (a) $\theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_R = 0.3\pi$, (b) $\theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_R = 1.3\pi$, (c) $\theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_R = 0$, (d) $\theta_R = 0.7\pi$ и $\phi_R = 0.3\pi$, (e) $\theta_R = 0.7\pi$ и $\phi_R = 1.3\pi$, (f) $\theta_R = 0.7\pi$ и $\phi_R = 0.8\pi$, (g) $\theta_R = 0.4\pi$ и $\phi_R = 0.3\pi$, (h) $\theta_R = 0.6\pi$ и $\phi_R = 1.3\pi$, (i) $\theta_R = 0.5\pi$ и $\phi_R = 0.8\pi$. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

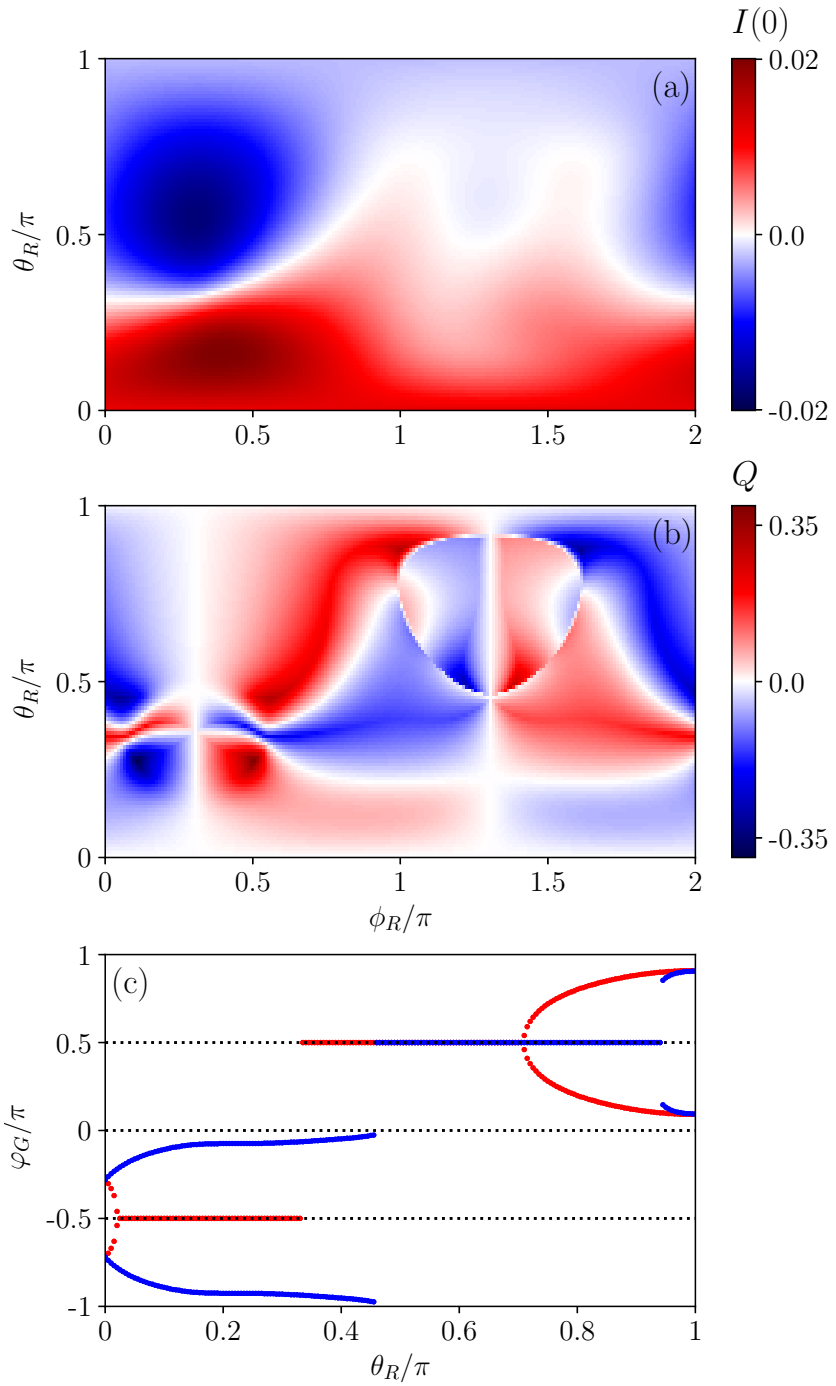
(β_L, β_R) равни. То су трансформације $P_x\sigma_x$ и $P_x\sigma_y$, које су очуване за $\theta_L = \pi - \theta_R$, као што је приказано на панелима (d), (e) и (f) слике 6.6.

У случају некопланарне оријентације и различитих интензитета z-компоненти измјенских поља у два феромагнета, не постоји парност у односу на тачку $(0, 0)$ нити у односу на главну и антидијагоналу, што се може видјети на панелу (i) слике 6.6.

За копланарну оријентацију праваца поља спинског цијепања, одговарајући панели на слици 6.6 показују да је диодна ефикасност за суперпроводне електроде оријентисане као $(0, \pm 0.25\pi)$ и $(\pm 0.25\pi, 0)$ једнака нули, усљед непарности Q у односу на тачку $(0, 0)$ у равни (β_L, β_R) и периодичног понашања у зависности од оријентације суперпроводних електрода [81]

$$Q(\beta_L, \beta_R) = Q(\beta_L \pm \pi/2, \beta_R \pm \pi/2). \tag{6.8}$$

Диодна ефикасност за спој типа $(0, 0.25\pi)$ у функцији оријентације магнетизације у десном феромагнету, за $\theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$, приказана на слици 6.7 (b), показује двије вертикалне бијеле линије на $\phi_R = \phi_L = 0.3\pi$ и $\phi_R = \phi_L + \pi = 1.3\pi$, као и двије хоризонталне бијеле линије на $\theta_R = 0$ и π, будући да је диодни ефекат забрањен за копланарну оријентацију праваца поља спинског цијепања. Насупрот томе, одговарајућа аномална Џозефсонова струја има ненулту вриједност за копланарну оријентацију, као



Слика 6.7: (a) Аномална Џозефсонова струја $I(0)$ и (b) диодна ефикасност Q у зависности од углова ϕ_R и θ_R, заједно са (c) фазном разликом основног стања, φ_G, у зависности од θ_R за $\phi_R = 0.3\pi$ (црвена) и $\phi_R = 1.3\pi$ (плава), рачунате за $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0.25\pi)$ d-wave тип споја. Оријентација измјенског поља у лијевом феромагнету је фиксирана са $\phi_L = 0.3\pi$ и $\theta_L = 0.3\pi$. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

што се види на слици 6.7 (a), што је у складу са њеном класификацијом у трећу класу спојева дефинисану у претходном одјељку. За копланарну оријентацију, праваца поља спинског цијепања, трансформације $P_x\sigma_x T$ и $P_y\sigma_y T$ представљају симетрије хамилтонијана које пресликавају $H(\varphi, 0, \pi/4)$ у $H(-\varphi \pm \pi, 0, \pi/4)$, што доводи до 2π периодичности CPR-а ($I(\varphi) = -I(-\varphi + \pi)$), при чему струја за фазну разлику $\varphi = \pm\pi/2$ постаје једнака

нули. Генерално, Џозефсонова CPR може се разложити на Фуријеове компоненте

$$I(\varphi) = \sum_{n\geq 1} I_n \sin(n\varphi) + J_n \cos(n\varphi), \tag{6.9}$$

док у разматраном случају то значи да CPR садржи Фуријеове компоненте $\sin 2n\varphi$ и $\cos(2n-1)\varphi$ [47], а минимуми слободне енергије показују да основно стање споја може бити: $\pi/2$, коегзистенција 0-оликог и π-оликог стања у близини $\pi/2$, $-\pi/2$, или коегзистенција 0-оликог и π-оликог стања у близини $-\pi/2$ (видјети слику 6.7 (c)). Ово се разликује од случаја споја типа $(0, \pi/4)$ без SOC-а, гдје фазна разлика може бити $\pi/2$ или коегзистенција 0 и π стања, што је посљедица π периодичности са само $\sin 2n\varphi$ Фуријеовим компонентама у CPR-у [31, 33].

Фазни прелази приказани на слици 6.7 (c) одговарају ефективном скоку фазне разлике основног стања за π. CPR за овај тип споја може се разложити на Фуријеове хармонике

$$I(\varphi) = \sum_{n\geq 1} I_{2n} \sin(2n\varphi) + J_{2n-1} \cos((2n-1)\varphi). \tag{6.10}$$

Будући да помјерање фазе за π даје

$$I(\varphi \pm \pi) = \sum_{n\geq 1} I_{2n} \sin(2n\varphi) - J_{2n-1} \cos((2n-1)\varphi), \tag{6.11}$$

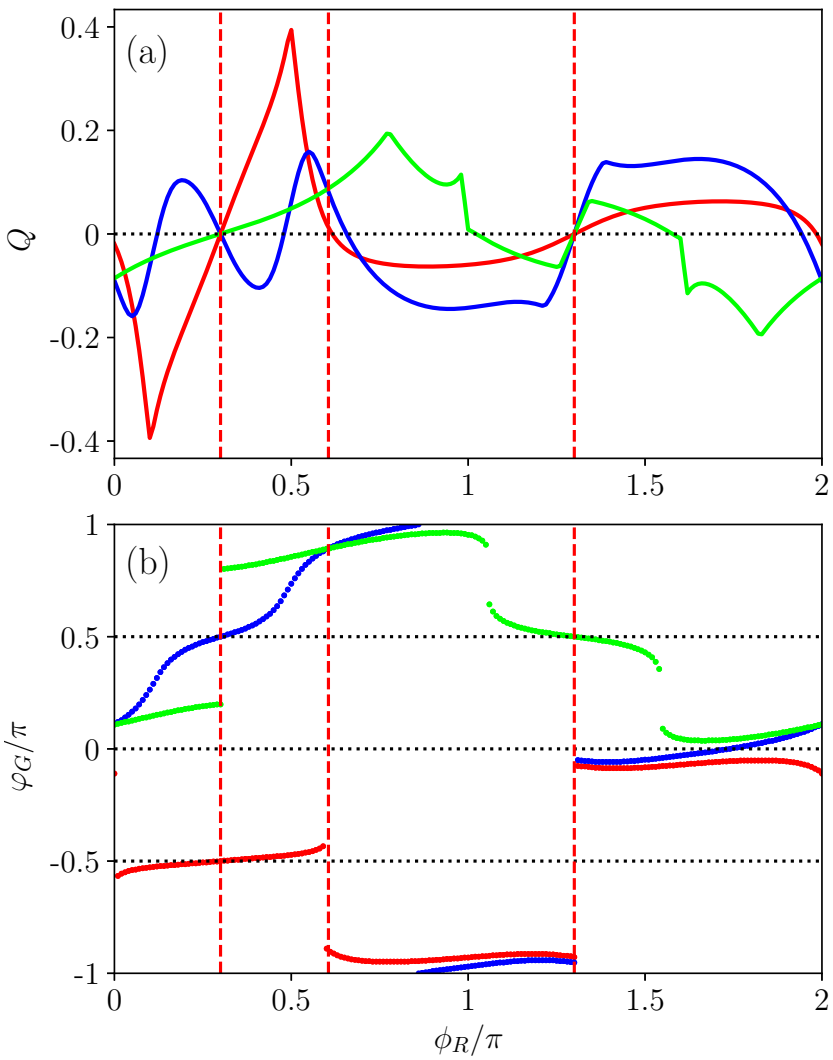
у тачки у којој се дешава фазни прелаз, гдје важи услов $I(\varphi) = I(\varphi \pm \pi)$, слиједи да сви непарни косинусни хармоници морају ишчезавати:

$$J_{2n-1} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

То значи да је у тачки фазног прелаза, у којој је JDE одсутан, аномална Џозефсонова струја једнака нули и мијења знак при преласку кроз фазни прелаз. Овакво понашање може се потврдити нумерички поређењем панела (a), (b) и (c) на слици 6.7.

Насупрот томе, за спој типа $(0, 0.25\pi)$ са некопланарном оријентацијом праваца поља спинског цијепања, јавља се JDE, што доводи до присуства и синусних и косинусних Фуријеових хармоника свих редова, тј. чланова облика $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$. Као резултат тога, минимум слободне енергије је јединствен (недегенерисан) и одређује такозвана 0-олика и π-олика стања. На слици 6.8 (a) и (b) приказане су, респективно, диодна ефикасност и одговарајућа фазна разлика основног стања у функцији ϕ_R за неколико вриједности $\theta_R = 0.27\pi$ (црвена), $\theta_R = 0.4\pi$ (плава) и $\theta_R = 0.8\pi$ (зелена), при фиксираној оријентацији лијевог феромагнета ($\theta_L = 0.3\pi$ и $\phi_L = 0.3\pi$). Фазни прелаз између 0-оликог и π-оликог стања може се индуковати промјеном ϕ_R. За разлику од прве класе спојева приказане на слици 6.2 (j), фазни прелаз се у овом случају јавља за $\phi_R = 0.3\pi$ и $\phi_R = 1.3\pi$, што одговара копланарној конфигурацији.

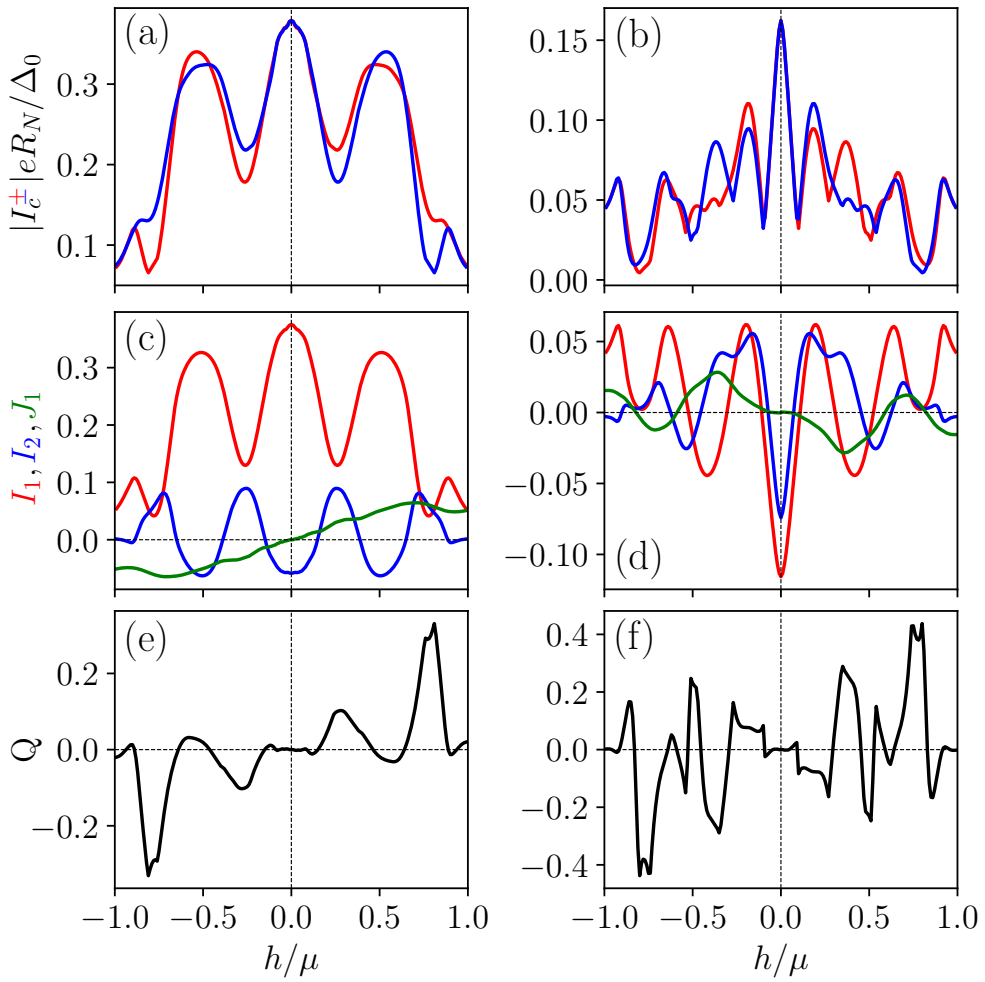
Како бисмо испитали зависност AJE и JDE од интензитета измјенског поља, разматрамо Џозефсонове спојеве са s-wave и d-wave суперпроводним електродама оријентисаним као $(0.09\pi, -0.21\pi)$, при чему бирамо фиксиране оријентације измјенских поља у два феромагнетна слоја тако да су оба ефекта дозвољена усљед симетрије. За разлику од случаја нормалне баријере између суперпроводних електрода, гдје су критичне струје у супротним смјеровима једнаке, присуство измјенског поља доводи до разлике између I_c^+ и $|I_c^-|$, што указује на појаву JDE, док обје критичне струје показују карактеристичну осцилаторну зависност од интензитета измјенског поља, повезану са акумулацијом фазе индукованом измјенским пољем у феромагнетним Џозефсоновим спојевима (видјети слику 6.9 (a) и (b)).



Слика 6.8: (a) Диодна ефикасност и (b) фазна разлика основног стања, φ_G, у зависности од ϕ_R за $\theta_R = 0.27\pi$ (црвена), $\theta_R = 0.4\pi$ (плава), и $\theta_R = 0.8\pi$ (зелена) за $(0, 0.25\pi)$ d-wave спој. Оријентација измјенског поља у лијевом феромагнету је фиксирана са $\phi_L = 0.3\pi$ и $\theta_L = 0.3\pi$. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

Асиметрично понашање I_c^+ и $|I_c^-|$ при промјени знака измјенског поља, $|I_c^{\pm}(h)| \neq |I_c^{\pm}(-h)|$ и $|I_c^{\pm}(h)| = |I_c^{\mp}(-h)|$, слиједи из трансформације временске инверзије струјно-фазне релације, $I(\varphi, h) = -I(-\varphi, -h)$ [74, 81]. Ово је у складу са парном зависношћу коефицијената I_n од измјенског поља, $I_n(h) = I_n(-h)$, док су коефицијенти J_n, одговорни за коначну струју при нултој фазној разлици (видјети једначину (6.9)), непарне функције измјенског поља, $J_n(h) = -J_n(-h)$, као што је приказано на слици 6.9 (c) и (d), гдје је приказана зависност коефицијената I_1, I_2 и J_1 од измјенског поља.

Немонотона зависност диодне ефикасности од интензитета измјенског поља приказана је на слици 6.9 (e) и (f), при чему је видљива њена непарна симетрија у односу на измјенско поље, $Q(-h) = -Q(h)$. Диодна ефикасност мијења знак при вриједностима измјенског поља за које се сијеку криве I_c^+ и $|I_c^-|$, док се њене највеће вриједности јављају у близини минимума кривих критичних струја. Ово повећање диодног одзива поклапа се са интервалом измјенског поља у којем водећи хармонијски доприноси I_1, I_2 и J_1 постају упоредиви по интензитету. То указује да снажна нерециprочност произлази из међудјеловања конвенционалних и аномалних компоненти струјно-фазне релације, а не из једног доминантног хармоника.



Слика 6.9: Панели (a), (c) и (e) у лијевој колони одговарају s-wave Џозефсоновом споју који садржи два феромагнета са правцима магнетизације одређеним угловима $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.26\pi$ и $\phi_R = 1.06\pi$. Панели (b), (d) и (f) у десној колони одговарају d-wave Џозефсоновом споју са оријентацијом $(0.09\pi, -0.21\pi)$ и правцима магнетизације одређеним угловима $\theta_L = 0.5\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.72\pi$ и $\phi_R = 0.05\pi$. (a) и (b) Зависност критичне струје у супротним смјеровима, I_c^+ (црвено) и $|I_c^-|$ (плаво), од измјенског поља. (c) и (d) Зависност водећих хармонијских коефицијената струјно-фазне релације, I_1 (црвено), I_2 (плаво) и J_1 (зелено), од измјенског поља. (e) и (f) Зависност диодне ефикасности Q од измјенског поља. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

6.4 Закључак

У овој глави смо проучавали појаву аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта у планарним 2D Џозефсоновим спојевима који садрже два феромагнетна слоја са произвољно оријентисаним векторима магнетизација, при чему се претпоставља да су јачине Рашба SOC једнаке по интензитету и супротног знака на S/F границама. За суперпроводнике је претпостављено да имају или s-wave или произвољно оријентисане d-wave параметре уређења. Систематском анализом симетрија хамилтонијана споја идентификовали смо услове за појаву AJE и JDE и класификовали спојеве у три класе. У спојевима са s-wave или d-wave суперпроводницима оријентисаним тако да је $\beta_L = -\beta_R$, појава и AJE и JDE захтијева некопланарну оријентацију праваца измјенског поља у феромагнетима са z-осом, заједно са условом да z-компоненте измјенског поља нијесу једнаке и супротног знака. За d-wave суперпроводнике са $\beta_L = \beta_R \neq 0$, и AJE и JDE су забрањени када су поларне оријентације магнетизација једнаке, а њихове азимуталне оријентације једнаке

или супротне. За све преостале оријентације d-wave електрода ($\beta_L \neq \pm\beta_R$), и AJE и JDE се појављују када бар један од феромагнетних слојева има ненулту компоненту магнетизације нормалну на раван споја. Све услове добијене анализом симетрија потврдили смо нумерички, користећи Фурусаки–Цукада технику, проширену на спински активне материјале и анизотропне суперпроводнике, за израчунавање Џозефсонове струје.

За посебан случај Џозефсоновог споја са суперпроводницима оријентисаним као $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}, прорачуни ефикасности диоде показали су да је, за копланарну оријентацију праваца измјенског поља и z-осе, JDE забрањен усљед додатних симетрија карактеристичних за овај тип споја. У одсуству JDE, CPR се може развити у Фуријеов ред који садржи чланове облика $\sin 2n\varphi$ и $\cos(2n-1)\varphi$, чиме се објашњава коегзистенција 0-оликих и π-оликих стања у околини $\varphi = \pm\pi/2$. Утврдили смо да AJE нестаје на фазном прелазу између ових стања, док се промјена знака аномалне Џозефсонове струје може користити као индикатор фазног прелаза споја.

Поред случаја једнаких јачина Рашба SOC, укратко смо анализирали и неједнаке јачине Рашба SOC и показали да се класификација на основу симетрија смањује са три на двије класе. Прва класа одговара s-wave и d-wave суперпроводницима са $\beta_L = -\beta_R$, код којих AJE и JDE изостају када су $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{h}_L$ и $\mathbf{h}_R$ компланарни. Друга класа одговара осталим оријентацијама d-wave суперпроводника, код којих AJE и JDE изостају ако ниједан од феромагнетних слојева нема z-компоненту измјенског поља.

Нумерички резултати показују да се значајна ефикасност диоде, већа од 40%, може остварити подешавањем оријентације суперпроводних електрода и праваца измјенског поља у феромагнетним слојевима.

Глава 7

Андрејевљева везана стања у SFFS и DFFD спојевима

У овој глави анализирамо Андрејевљева везана стања (ABS) у дводимензионалним спојевима са феромагнетном баријером. Фокусирамо се на њихов фазно-зависни енергетски спектар и допринос транспорту наелектрисања. Полазећи од зависности ABS од трансверзалног импулса квазичестица и од оријентације измјенских поља у феромагнетним слојевима, испитујемо како спинско цијепање изазвано измјенским пољем и Рашба SOC-ом обликује енергетске бендове ABS. Посебно се разматра разлика између спојева са s-wave и d-wave суперпроводницима, код којих анизотропија параметра уређења може да доведе до сложеније структуре фазно-зависног спектра.

Анализом појединачних трансверзалних канала испитује се њихова улога у формирању укупне CPR, укључујући појаву различитих хармонијских компоненти. На тај начин успоставља се директна веза између структуре ABS спектра и аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта. Коначно, поређењем CPR-ова добијених из ABS спектра са резултатима Фурусаки-Цукада (F-T) приступа одређује се значај дискретних ABS и континуумских стања за транспорт. Посебна пажња посвећена је ситуацијама у којима се допринос континуумских стања не може занемарити.

Резултати наведени у овој глави засновани су на објављеном раду [96]:

S. Djurdjević and Z. Popović, *Anomalous and diode Josephson effect in junctions with inhomogeneous ferromagnetic barrier and interfacial Rashba spin-orbit coupling*, Phys. Rev. B **114**, 144503 (2026).

7.1 Формализам у континуалном моделу

Други формализам за добијање Џозефсонове струје заснива се на фазној зависности ABS спектра. Будући да разматрамо Џозефсонове спојеве чија је дебљина баријере много мања од кохерентне дужине суперпроводника, доминантан допринос транспортним особинама потиче од ABS [89, 197]. Гранични услови (6.6) се могу записати у матричном облику

$$AX = B, \tag{7.1}$$

гдје је A матрица димензија 24×24, чији елементи зависе од E, φ и γ, X је векторска колона која садржи 24 непозната коефицијента расејања, док је B векторска колона од 24 члана који потичу од пропагирајућих стања упадних квазичестица. Енергетски спектар ABS добија се из услова за постојање нетривијалних рјешења једначине (7.1),

$$\det(A) = 0. \tag{7.2}$$

За задато k_y, зависност E од φ може се добити нумеричким рјешавањем претходне једначине. Енергије ABS налазе се унутар енергетског процјепа,

$$|E| \leq \min\left\{|\Delta_L|, |\widetilde{\Delta}_L|, |\Delta_R|, |\widetilde{\Delta}_R|\right\}. \tag{7.3}$$

На основу $E(\varphi)$ слободна енергија може се одредити као [89, 114, 198, 199]

$$F(\varphi) = -\frac{1}{2}\sum_{k_y=-k_F}^{k_F}\sum_i E_i(\varphi)\tanh\left(\frac{1}{2}\frac{E_i}{k_BT}\right), \tag{7.4}$$

гдје су $E_i(\varphi)$ позитивне енергије ABS унутар енергетског процјепа, нумерисане индексом i. Џозефсонова струја која потиче од квантизованих стања унутар енергетског процјепа дата је изразом

$$I(\varphi) = \frac{2e}{\hbar}\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}. \tag{7.5}$$

У овом одјељку анализирамо како различите оријентације измјенских поља у два феромагнетна слоја утичу на спектар нискоенергетских ABS-ова и њихове карактеристике у нереципрочном транспорту. Разматрамо кратке спојеве, јер се у овом режиму унутар суперпроводног енергијског процјепа појављује само неколико стања [52, 89], као што ће бити приказано у наставку. Будући да разматрамо дводимензионални спој, постоји велики број трансверзалних канала, дефинисаних са $k_y = k_F \sin\gamma$, који доприносе транспорту наелектрисања. Канали различито доприносе CPR-у, не само по интензитету струје, већ и, усљед присуства Рашба SOC-а, по фазним разликама основног стања појединачних канала [74]. Укупни CPR се добија сумирањем доприноса свих канала k_y. Стога је неопходно узети у обзир заједнички утицај различитих попречних канала на спектар ABS-ова. Будући да резултате приказујемо за ниске температуре, слободна енергија појединачног канала (на основу једначине (7.4)) може се апроксимирати као

$$F(\gamma, \varphi) = -\frac{1}{2}\sum_i E_i(\gamma, \varphi), \tag{7.6}$$

гдје су $E_i(\gamma, \varphi)$ позитивне енергије ABS-ова које задовољавају $0 \leq E_i \leq \Delta$. CPR за сваки канал тада се добија из одговарајућег ABS спектра коришћењем једначине (7.5). Канали дефинисани супротним вриједностима γ потребни су за израчунавање слободне енергије

из фазно-зависног спектра ABS-ова, у складу са очувањем симетрије честица–шупљина. Услови под којима Андрејевљева везана стања доминантно одређују транспорт наелектрисања биће утврђени поређењем Фурусаки–Цукада методе и приступа заснованог на ABS-овима.

7.2 Спојеви са s-wave суперпроводницима

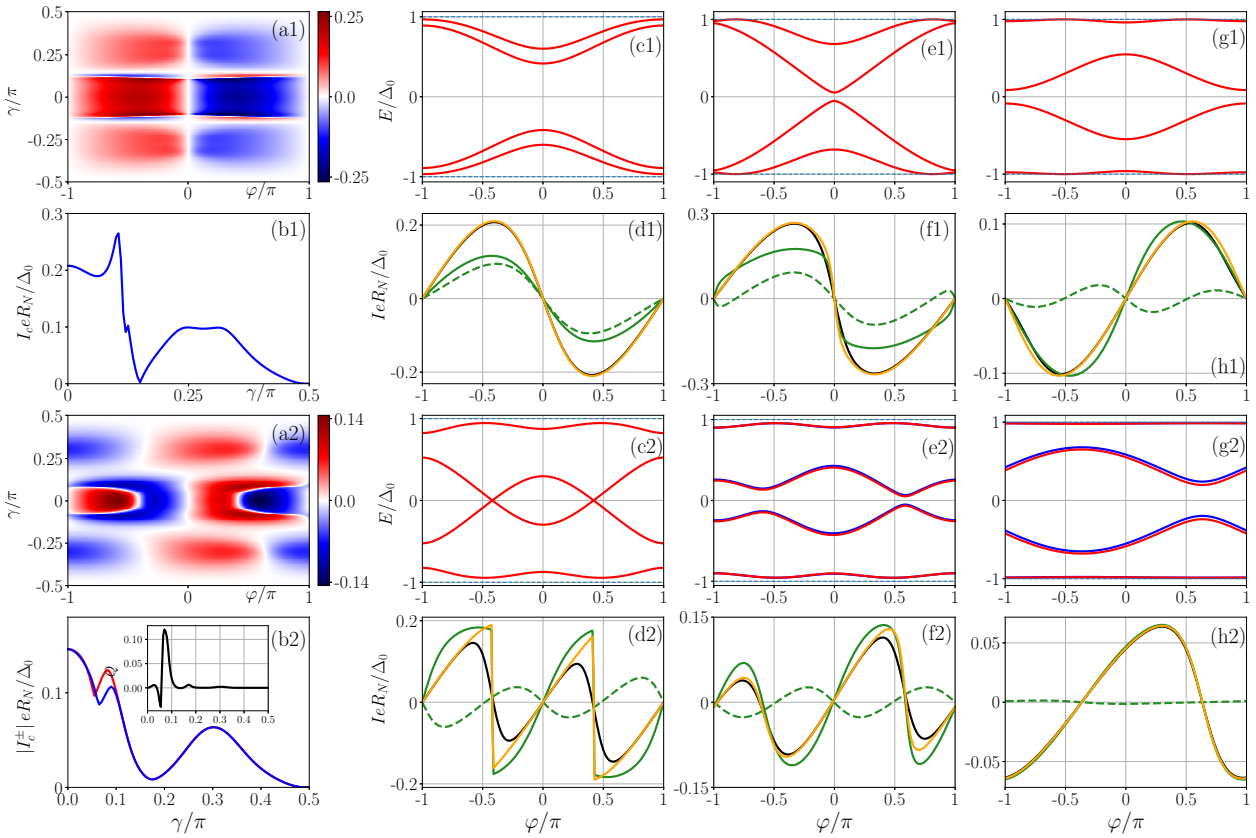
Најприје разматрамо Џозефсонов спој са хомогеним феромагнетом у баријери, при чему су $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$. На слици 7.1 (a1), CPR разложен по упадном углу показује да је доминантни хармоник у свим каналима $\pm\sin\varphi$, па стога и $I(0)$ и Q иш чезавају. Ово је посљедица чињенице да је за појаву AJE у CPR-у неопходан косинусни члан, док је за JDE потребна коегзистенција чланова $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$ [65, 81]. Зависност максималне Џозефсонове струје од γ, приказана на слици 7.1 (b1), показује немонотоно понашање, при чему уочени минимуми указују на промјену знака струје између канала, за $\gamma \in [0, \pi/2)$, будући да CPR разложен по углу показује парност у односу на упадни угао γ.

Како бисмо размотрили допринос ABS-ова Џозефсоновој струји за различите канале, на слици 7.1 (c1), (e1) и (g1) приказујемо фазно-зависне енергетске спектре ABS-ова за упадне углове $\pm\gamma = 0$, 0.105π и 0.125π, респективно. ABS спектри су спински недегенерисани и показују двије позитивне енергијске ABS гране, заједно са одговарајућим гранама негативне енергије у складу са честица-шупљина симетријом, при чему се криве за упадне углове $\pm\gamma$ готово поклапају. И доња и горња фазно-зависна енергијска грана симетричне су у односу на $\varphi = 0$. У случају квазичестице која упада нормално на границу ($\gamma = 0$), Рашба SOC нема утицаја, а спинска недегенерисаност потиче искључиво од измјенског поља. Доприноси енергијских грана укупној суперструји су упоредиви, што се може видјети поређењем зелених кривих, пуне за доњу и испрекидане за горњу грану позитивне енергије, на слици 7.1 (d1), гдје су приказани одговарајући CPR-ови. CPR-ови који потичу од обје гране имају исту фазну разлику основног стања (π-стање) за изабране вриједности параметара.

Са повећањем упадног угла квазичестице ($\gamma \neq 0$), фазно-зависни спектар остаје симетричан у односу на $\varphi = 0$. ABS спектар за канал $\pm\gamma = 0.105\pi$, који одговара максималној критичној струји, показује да се доња грана у близини $\varphi = 0$ помјера ка центру суперпроводног енергетског процјепа, док се горња грана помјера ка ивици процјепа (видјети слику 7.1 (e1)). За канал $\pm\gamma = 0.125\pi$, који одговара углу при којем се јавља максимална критична струја супротног знака, доња грана се у близини $\varphi = \pm\pi$ потискује ка нижим енергијама, док је горња грана везана за ивицу процјепа и постаје готово равна у односу на φ (видјети слику 7.1 (g1)). Одговарајући CPR-ови приказани су на сликама 7.1 (f1) и (h1) и показују да CPR-ови који потичу од различитих грана имају различите фазне разлике основног стања.

Добро слагање укупних CPR-ова изведених из фазно-зависних ABS грана за појединачни канал (наранџасте криве) са онима добијеним F-T методом (црне криве), приказаним на сликама 7.1 (d1), (f1) и (h1), указује на то да кохерентним транспортом наелектрисања доминантно управљају ABS-ови унутар енергијског процјепа. Одсуство и AJE и JDE, приказано на CPR кривама, у складу је са нашом анализом симетрије и потврђено је и F-T и ABS приступом.

Затим разматрамо случај са два феромагнета у баријери чије су магнетизације са z-осом некопланарне, за који наша анализа симетрије предвиђа присуство и AJE и JDE. Бирамо оријентације магнетизација лијевог и десног феромагнета ($\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.26\pi$ и $\phi_R = 1.06\pi$), које одговарају конфигурацији у којој диодна ефикасност достиже максималну вриједност, у складу са сликом 6.2 (e). У овом случају, CPR разложен



Слика 7.1: Џозефсонов спој са s-wave суперпроводним електродама. Панели (a1)–(h1) одговарају хомогеној феромагнетној баријери са $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$. Панели (a2)–(h2) одговарају споју који садржи два феромагнетна слоја са неколинеарним магнетизацијама, при чему су $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.26\pi$ и $\phi_R = 1.06\pi$. (a1), (a2) По упадном углу разложени CPR, $I(\varphi, \gamma)$, за попречне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b1), (b2) Критична Џозефсонова струја у функцији упадног угла γ, при чему су приказане струје у супротним смјеровима I_c^+ (црвена) и $|I_c^-|$ (плава). Уметак у панелу (b2) приказује ефикасност диоде Q у функцији γ. ABS и одговарајућа CPR приказани за: (c1), (c2) и (d1), (d2) $\gamma = 0$; (e1) и (f1) $\gamma = \pm 0.105\pi$; (g1) и (h1) $\gamma = \pm 0.125\pi$; (e2) и (f2) $\gamma = \pm 0.07\pi$; (g2) и (h2) $\gamma = \pm 0.3\pi$, респективно. Црвене и плаве криве представљају ABS енергетске бендове за γ и $-\gamma$, респективно. Треба напоменути да се за хомогену феромагнетну баријеру криве за $\pm\gamma$ готово потпуно преклапају. Пуна и испрекидана зелена крива представљају доприносе доњег и горњег ABS енергетског бенда, респективно. Наранџаста и црна крива представљају укупне CPR за дати канал, добијене ABS и F-T приступима, респективно. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

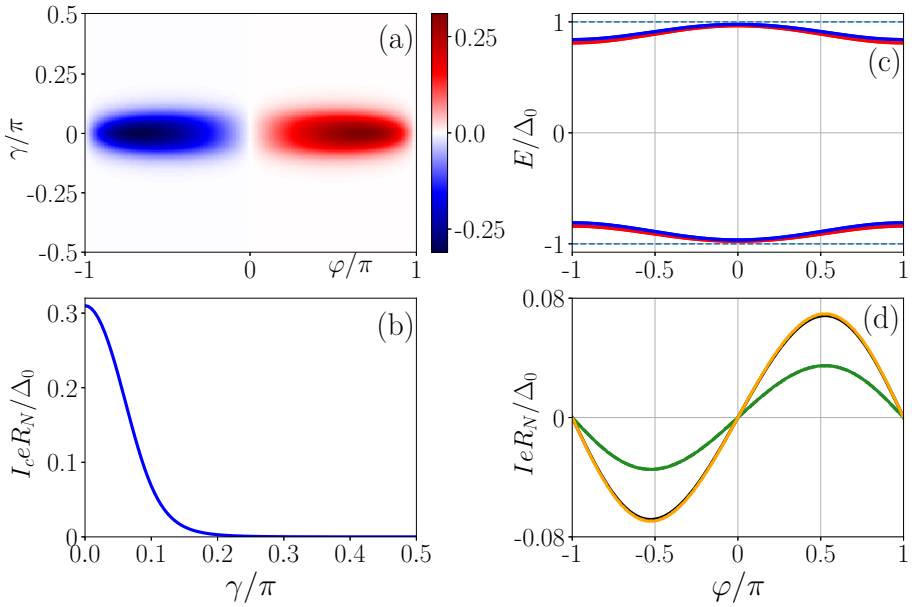
по упадном углу приказан на слици 7.1 (a2) постаје сложенији јер су доприноси појединачних канала различити и показују присуство хармоника $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$. Разлика у зависности максималних критичних струја у супротним смјеровима, I_c^+ (црвена крива) и $|I_c^-|$ (плава крива), од упадног угла γ, приказана на слици 7.1 (b2), постаје израженија при мањим упадним угловима квазичестица (видјети и уметак који приказује диодну ефикасност у функцији γ). За $\gamma = 0$ ABS спектар је недегенерисан и симетричан у односу на $\varphi = 0$ (видјети слику 7.1 (c2)). Доња грана пролази кроз нулту енергију у тачкама симетричним око $\varphi = 0$, што значи да се спој налази у близини $0 - \pi$-оликог фазног прелаза [44]. То доводи до дисконтинуитета у струјно-фазној релацији у облику тестере и присуства значајног другог хармоника (пуна зелена крива на слици 7.1 (d2)). Горња грана има мањи допринос CPR-у, при чему је њен други хармоник супротног знака у односу на

допринос доње гране (испрекидана зелена крива на слици 7.1 (d2)). Усљед тога, укупни CPR добијен из ABS-ова задржава облик тестере (наранџаста крива на слици 7.1 (d2)), уз примијетно одступање од CPR-а добијеног F-T методом (црна крива на слици 7.1 (d2)), нарочито у близини фазне разлике при којој се јавља укрштање са нултом енергијом.

ABS спектри показују асиметрију у односу на $\varphi = 0$ за канале који дају допринос диодном и аномалном ефекту. Ово понашање је приказано на сликама 7.1 (e2) и (g2), које приказују ABS спектар за упадне углове $\pm\gamma = 0.07\pi$, при којем је диодна ефикасност значајна (видјети слику 7.1 (b2)), и за $\pm\gamma = 0.3\pi$, при којем је аномални ефекат максималан (видјети слику 7.1 (a2)), респективно. У овом случају ABS гране за $-\gamma$ и γ се незнатно разликују, што се може видјети поређењем плавих кривих (за $-\gamma$) и црвених кривих (за γ) на сликама 7.1 (e2) и (g2). Симетрија $E(-\varphi) = E(\varphi)$ је стога нарушена, а искривљени фазно-зависни ABS спектар одражава присуство и JDE и AJE, будући да су уочљиви и разлика између апсолутних вриједности максималне и минималне струје, као и аномална суперструја за $\varphi = 0$, што је приказано на сликама 7.1 (f2) и (h2) [93, 95]. Доминантан допринос CPR-у потиче од доњих грана, будући да је горња грана готово равна. За упадне углове $\pm\gamma = 0.07\pi$, ова нискоенергетска стања налазе се близу нулте енергије око тачака $\varphi = \pm\pi/2$, што доводи до значајног доприноса другог хармоника укупном CPR-у (слике 7.1 (e2) и (f2)). Пошто нема укрштања са нултом енергијом, CPR овђе задржава гладак облик. Као и раније, одступање између CPR-ова добијених F-T методом и ABS приступом повећава се у близини фазне разлике при којој се појављују нискоенергетски ABS-ови.

За већи упадни угао $\pm\gamma = 0.3\pi$, при којем је аномални ефекат изражен, CPR показује јасну аномалну карактеристику усљед асиметричне природе и значајног нагиба доње гране за $\varphi = 0$, што резултира доминантним чланом $\cos\varphi$ (видјети слику 7.1 (h2)). У овом случају слагање CPR-ова добијених F-T методом и ABS приступом готово је потпуно.

Даље разматрамо спој са нехомогеним феромагнетом, у којем су вектори магнетизације у два феромагнетна слоја супротно оријентисани, односно $\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$ и $\phi_R = \pi + \phi_L = 1.3\pi$. У овој конфигурацији и AJE и JDE су одсутни, што је потврђено нашом анализом симетрије. CPR разложен по упадним угловима (слика 7.2 (a)) показује да доминантни допринос струји потиче од канала са малим упадним угловима квазичестица. Сви канали налазе се у 0-оликом стању са доминантним хармоником $\sin\varphi$, док максимална струја кроз канале монотоно опада са γ (видјети слику 7.2 (b)). ABS спектар остаје симетричан у односу на $\varphi = 0$ (слика 7.2 (c)), у складу са одсуством и JDE и AJE. ABS спектар садржи само једну позитивну енергетску грану, што указује на спински дегенерисано стање. Ова дегенерација потиче од специфичних оријентација праваца поља спинског цијепања у споју. Наиме, два измјенска поља дјелују супротно на спин квазичестице, док Рашба SOC на два интерфејса такође има супротне оријентације (у смјеру $\mathbf{e}_z$ на лијевој S/F граници и $-\mathbf{e}_z$ на десној S/F граници). Добро слагање F-T и ABS приступа је значајно (преклопљене црне и наранџасте криве на слици 7.2 (d)), што указује да струју доминантно носе ABS-ови унутар енергијског процјепа, док допринос континуалног дијела спектра остаје занемарљив.

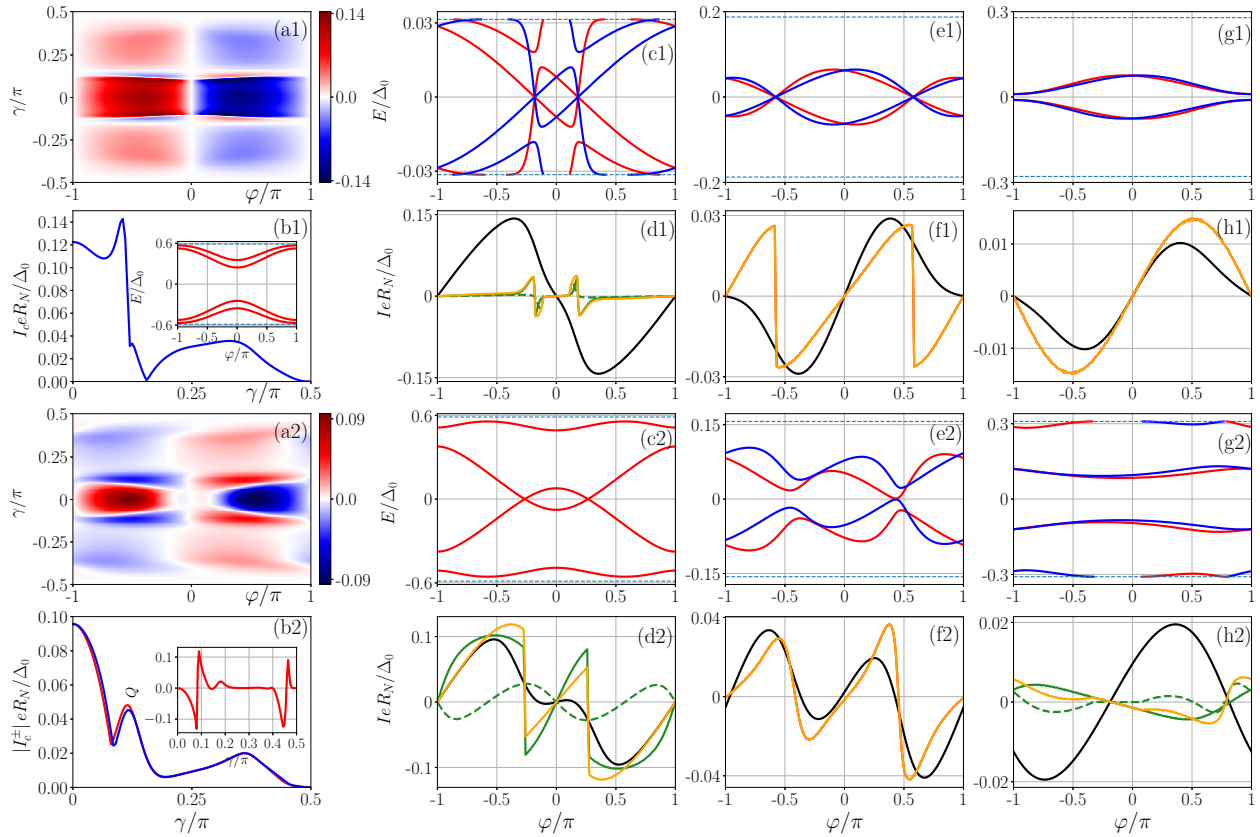


Слика 7.2: Сви панели одговарају Џозефсоновом споју са s-wave суперпроводним електродама и нехомогеном феромагнетном баријером, при чему су вектори магнетизација у два феромагнетна слоја супротно оријентисани ($\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$ и $\phi_R = \pi + \phi_L = 1.3\pi$). (a) CPR разложен по углу, $I(\varphi, \gamma)$, за попречне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b) Критична Џозефсонова струја у функцији упадног угла γ. (c) ABS енергије у функцији фазне разлике између суперпроводника φ. Црвене и плаве криве представљају ABS гране за γ и $-\gamma$, респективно. (d) Одговарајући CPR за $\gamma = 0.1\pi$. Зелена крива одговара струјама ABS грана, док наранџаста и црна крива представљају укупне CPR-ове за дати канал добијене ABS и F-T приступом, респективно. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

7.3 Спојеви са d-wave суперпроводницима

За анализу ABS спектара у случају Џозефсоновог споја са d-wave суперпроводним електродама, најприје разматрамо Џозефсонов спој са $\beta_L = \beta_R = 0.15\pi$. За хомогени феромагнет у баријери, са $\theta_L = \theta_R = \phi_L = \phi_R = 0.3\pi$, CPR разложена по угловима и зависност максималне Џозефсонове струје од упадног угла приказане су на сликама 7.3 (a1) и (b1), респективно. Глобално понашање је веома слично оном нађеном у одговарајућем споју са s-wave суперпроводним електродама, будући да је доминантни хармоник у свим каналима $\pm \sin\varphi$, са једнаким интензитетима позитивне I_c^+ и негативне I_c^- критичне струје, што резултира одсуством и AJE и JDE. Слично томе, ABS спектар за нормални упад (уметак на слици 7.3 (b1)) и одговарајуће CPR су квалитативно слични случају s-wave споја, иако су вриједности струје смањене усљед ужег суперпроводног процјепа који потиче од угаоно зависног параметра уређења [27].

ABS спектри за канале са максималном критичном струјом, $\pm\gamma = 0.105\pi$, приказани су на слици 7.3 (c1), гдје црвена крива одговара $\gamma = 0.105\pi$, а плава крива $\gamma = -0.105\pi$. У овом режиму суперпроводни енергетски процјеп постаје веома узак, а фазно-зависне енергетске гране ABS-ова показују сложену структуру. За разлику од Џозефсоновог споја са s-wave електродама, у случају d-wave суперпроводника разлика између ABS спектара за γ и $-\gamma$ је израженија усљед анизотропије параметра уређења. За s-wave спој, симетрична зависност енергије од фазе у односу на $\varphi = 0$, за канале γ и $-\gamma$, доводи до одсуства и аномалног фазног помака и разлике између критичних струја у супротним смјеровима. У споју са d-wave електродама, иако су сами ABS спектри асиметрични у односу на $\varphi = 0$, укупна слободна енергија добијена из једначине (7.6), укључивањем до-



Слика 7.3: Сви панели одговарају Џозефсоновом споју са d-wave суперпроводним електродама типа $(0.15\pi, 0.15\pi)$. Панели (a1)–(h1) одговарају хомогеној феромагнетној баријери, са $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$. Панели (a2)–(h2) одговарају споју са два феромагнета са неколинеарним магнетизацијама, за $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.13\pi$ и $\phi_R = 1.16\pi$. (a1), (a2) CPR разложене по угловима, $I(\varphi, \gamma)$, за попречне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b1), (b2) Џозефсонова критична струја као функција упадног угла γ, при чему су приказане струје у супротним смјеровима, I_c^+ (црвено) и $|I_c^-|$ (плаво). ABS-ови и одговарајуће CPR приказани су за: (c1) и (d1) $\pm\gamma = 0.105\pi$; (e1) и (f1) $\pm\gamma = 0.13\pi$; (g1) и (h1) $\pm\gamma = 0.145\pi$; (c2) и (d2) $\gamma = 0$; (e2) и (f2) $\pm\gamma = 0.075\pi$; (g2) и (h2) $\pm\gamma = 0.35\pi$, респективно. Црвена и плава крива означавају ABS гране за γ и $-\gamma$, респективно. Пуна и испрекидана зелена крива представљају допринос доње и горње ABS гране, респективно. Наранџаста и црна крива представљају укупне CPR добијене за дати канал коришћењем ABS и F-T приступа, респективно. ABS за $\gamma = 0$ и диодна ефикасност као функција γ приказани су као умеци на панелима (b1) и (b2), респективно. Остали параметри су исти као на слици 6.2.

приноса канала γ и $-\gamma$, задовољава симетрију $F(\varphi) = F(-\varphi)$. Усљед тога, ни AJE ни JDE се не појављују. За одређене вриједности фазне разлике, горња грана је потиснута изван суперпроводног процјепа и не доприноси струји коју носе ABS-ови. Упркос сложеној фазно-зависној структури ABS спектара, због готово затвореног суперпроводног процјепа ($\sim 0.03\Delta_0$), допринос континуалних стања Џозефсоновој струји је најзначајнији (видјети додатак Б), што се види на слици 7.3 (d1), гдје CPR добијена F-T приступом (црна крива) значајно надмашује CPR добијену из ABS-ова (наранџаста крива).

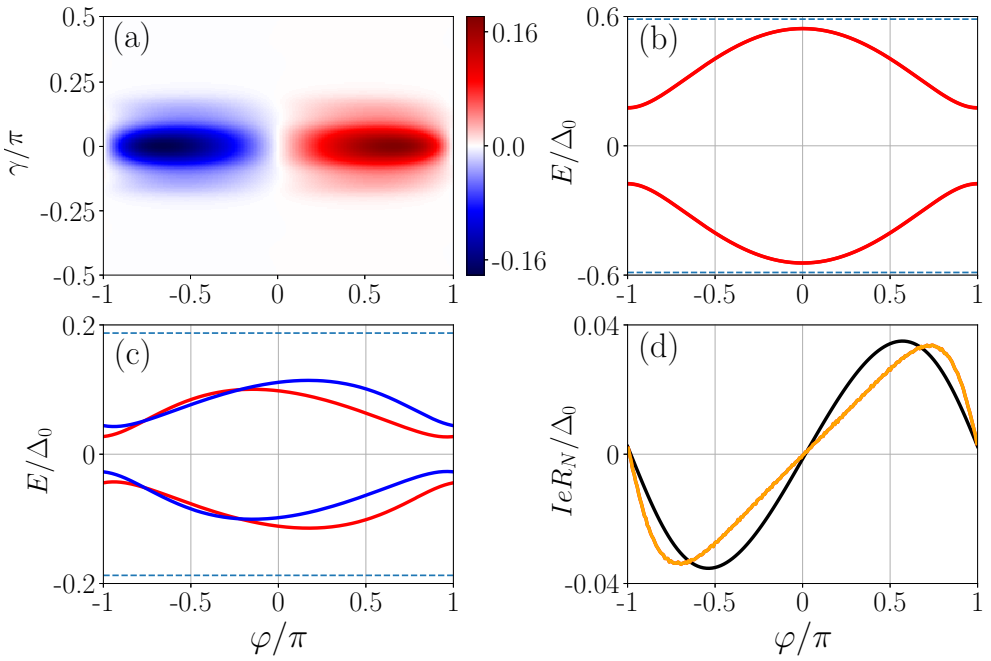
У случају канала $\pm\gamma = 0.13\pi$, у којем се за изабране вриједности осталих параметара појављује максимална струја супротног смјера, горња грана је у потпуности избачена изван суперпроводног процјепа, док је доња грана потиснута према ниским енергијама и показује укрштање са нултом енергијом при истој вриједности φ за $\pm\gamma$ (видјети слику 7.3

(e1)), што доводи до CPR-а облика тестере са израженим доприносом другог хармоника (наранџаста крива на слици 7.3 (f1)). Појава овог члана може се приписати близини угла γ при којем струја мијења знак. Ово понашање је супротно CPR-у добијеном F-T приступом, које не показује значајан допринос другог хармоника (упоредити наранџасту и црну криву на слици 7.3 (f1)). Неслагање између ова два приступа потиче од заједничког утицаја малог суперпроводног процјепа ($\approx 0.2\Delta_0$) и присуства укрштања са нултом енергијом у ABS спектру. Удаљавањем од угла при којем струја мијења знак, на примјер за $\pm\gamma = 0.145\pi$, ABS спектар има само једну нискоенергетску грану, која се незнатно разликује за канале γ и $-\gamma$ и више не показује укрштање са нултом енергијом (слика 7.3 (g1)). У овом режиму први хармоник $\sin\varphi$ поново доминира (слика 7.3 (h1)), а уочава се и боље слагање између F-T и ABS приступа.

Када се хомогени феромагнет у баријери замијени са два феромагнета са нехомогеном магнетизацијом, при чему је $\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.13\pi$ и $\phi_R = 1.16\pi$, ефикасност диоде достиже своју максималну вриједност, као што је приказано на слици 6.4 (b). CPR разложен по углу за овај спој приказан је на слици 7.3 (a2), илуструјући различите доприносе појединачних канала укупној CPR. На слици 7.3 (b2) и њеном уметку приказане су, респективно, зависности критичне струје и ефикасности диоде од упадног угла. ABS спектри за три репрезентативна упадна угла $\pm\gamma = 0$ (нормални упад), 0.075π (који одговара максималној ефикасности диоде) и 0.35π (који одговара највећој аномалној струји) приказани су на сликама 7.3 (c2), (e2) и (g2), док су одговарајуће CPR приказане на сликама 7.3 (d2), (f2) и (h2). Ови резултати показују квалитативно сличне карактеристике као у случају са s-wave суперпроводним електродама (слика 7.1), али са израженијом разликом у енергијама за $\pm\gamma$ правце квазичестица, што доприноси асиметричној слободној енергији у односу на $\varphi = 0$, а тиме и појави и AJE и JDE. Најизраженије одступање између струја добијених F-T и ABS приступима уочава се на слици 7.3 (h2), усљед комбинованог утицаја малог енергијског процјепа ($\sim 0.3\Delta_0$) и ABS бендова са малим нагибом (видјети слику 7.3 (g2)), што доводи до мале струје коју носе ABS и доминантног доприноса стања из континуалног дијела спектра.

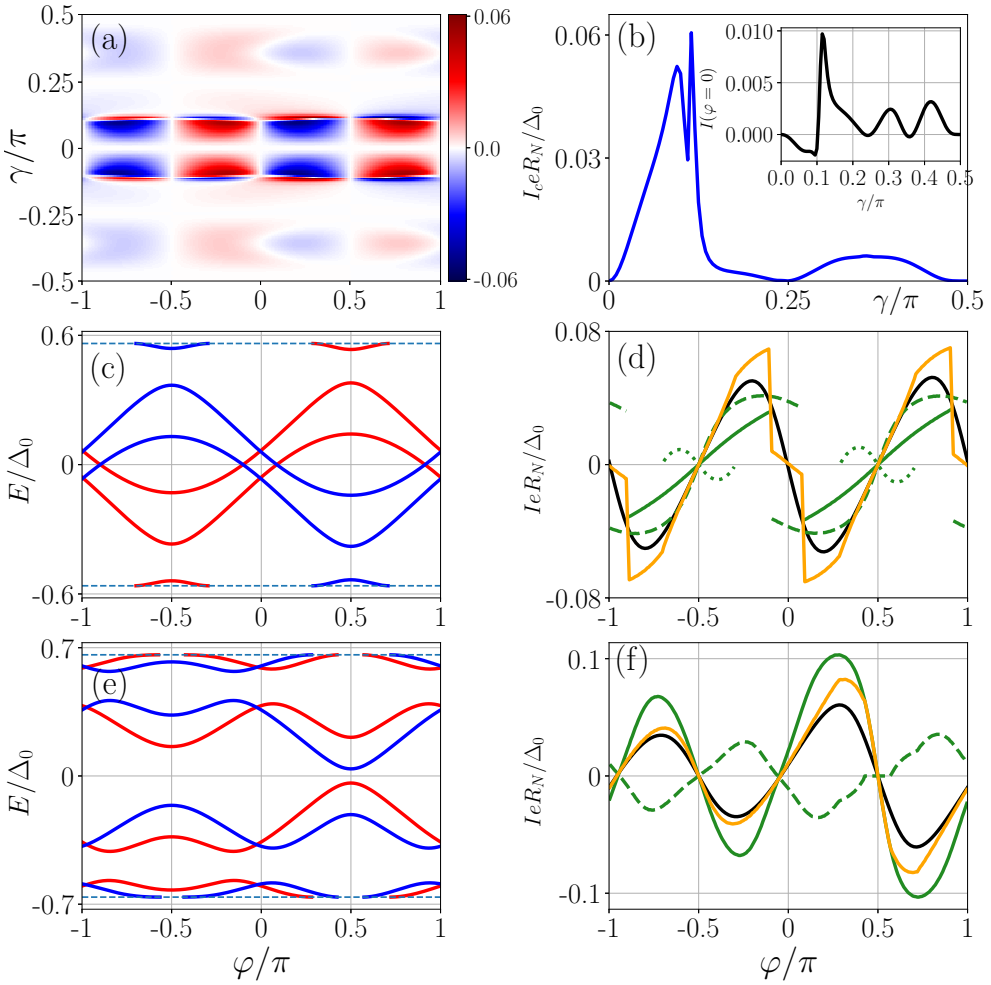
Када су два феромагнета у баријери Џозефсоновог споја са d-wave електродама супротно оријентисана, за разлику од одговарајућег s-wave споја, присутни су и AJE и JDE, у сагласности са нашом анализом симетрије. CPR разложена по углу, приказана на слици 7.4 (a), слична је случају s-wave споја, са монотоно опадајућом критичном струјом у функцији упадног угла γ квазичестица. У свим каналима, CPR су у 0-оликом стању. Сада постоји мала разлика између I_c^+ и $|I_c^-|$, што резултира појавом JDE са слабом диодном ефикасношћу. ABS су дегенерисани у свим каналима усљед супротног ефективног дјеловања поља спинског цијепања дуж споја. За разлику од канала $\gamma = 0$, гдје је ABS спектар симетричан у односу на $\varphi = 0$ (слика 7.4 (b)), за $\gamma \neq 0$ фазно-зависни енергетски бенд постаје асиметричан, чиме се омогућава појава и AJE и JDE (слика 7.4 (c)). Као и раније, при смањењу суперповодног енергијског процјепа постоји примијетна разлика између F-T и ABS метода (видјети слику 7.3(d)). CPR добијена из ABS (наранџаста крива на слици 7.4 (d)) показује ефикасност диоде $Q = 0.0054$, док CPR добијена Фурусаки-Цукада методом (црна крива на слици 7.4 (d)) показује $Q = 0.0042$.

Даље разматрамо специјалан случај Џозефсоновог споја између $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} суперпроводних електрода, односно спој типа $(\beta_L, \beta_R) = (0, \pi/4)$, у којем се појављују нове карактеристике. CPR разложена по упадном углу за хомогену магнетизацију у баријери, карактерисану са $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$, приказана на слици 7.5 (a), показује ненулту аномалну Џозефсонову струју у појединачним каналима, док струја нестаје при фазним разликама $\varphi = \pm\pi/2$. Овакво понашање потиче од симетрије која доводи до релације $I(\varphi) = -I(-\varphi + \pi)$, као што је претходно разматрано. CPR у каналима $\gamma = 0$ и $\pm\gamma = 0.25\pi$ једнака је нули јер се ови правци поклапају са нодалним линијама парам-



Слика 7.4: Сви панели одговарају d-wave Џозефсоновом споју типа $(0.15\pi, 0.15\pi)$ са нехомогеним феромагнетом у баријери, при чему су вектори магнетизација у два феромагнетна слоја супротно оријентисани ($\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$ и $\phi_R = \pi + \phi_L = 1.3\pi$). (a) CPR разложена по углу, $I(\varphi, \gamma)$, за трансверзалне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b) и (c) ABS за $\gamma = 0$ и $\gamma = \pm 0.1\pi$, респективно. Црвена и плава крива представљају ABS бендове за γ и $-\gamma$, респективно. (d) CPR за $\gamma = 0.1\pi$, при чему наранџаста и црна крива представљају резултате добијене коришћењем ABS и F-T приступа, респективно. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

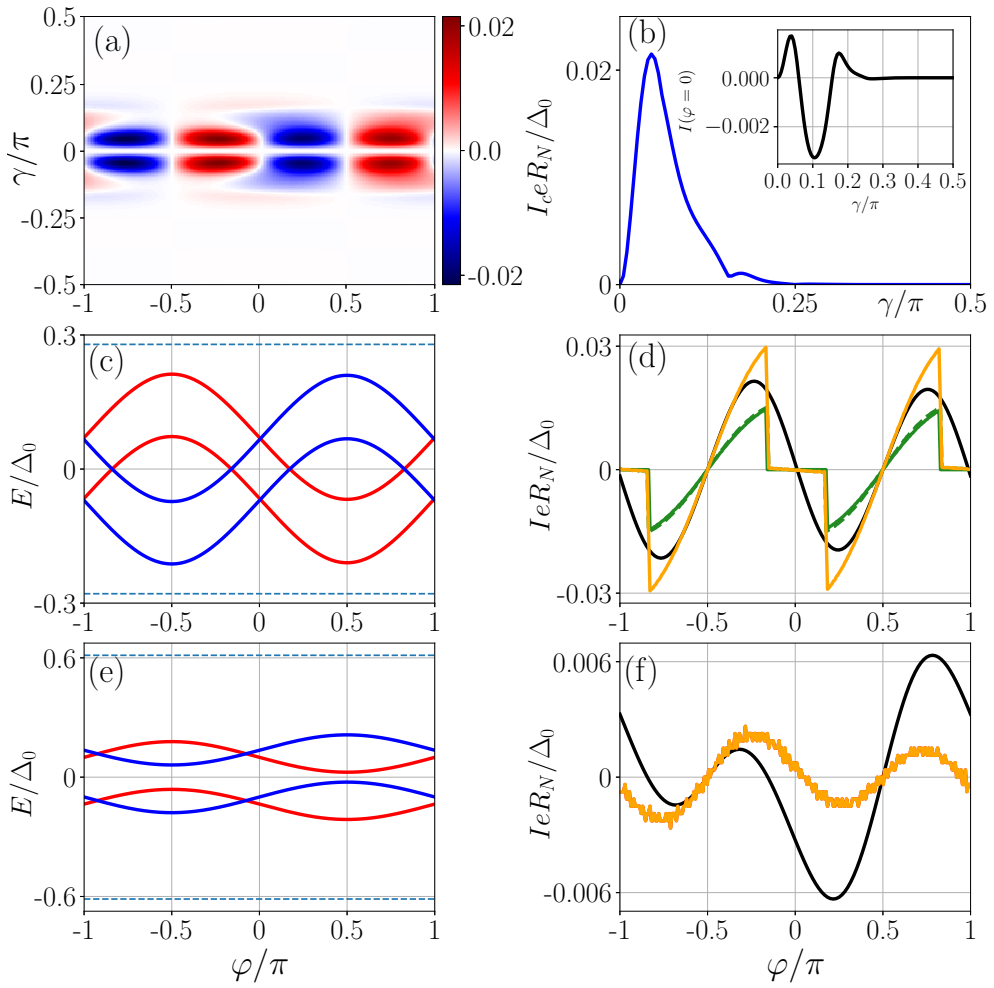
етара суперпроводног уређења у десном, односно лијевом суперпроводнику. Критичне струје у супротним смјеровима, I_c^+ и $|I_c^-|$, једнаке су (видјети слику 7.5 (b)), што резултира одсуством JDE. ABS спектар за канале $\pm\gamma = 0.095\pi$ (који одговара првом максимуму критичне струје) и $\pm\gamma = 0.115\pi$ (који одговара другом максимуму критичне струје са једне стране и највећој аномалној Џозефсоновој струји са друге стране, као што се види на слици 7.5 (b) и на њеном уметку) приказан је на сликама 7.5 (c) и (e). Зависност енергије од фазе показује анулирање извода, за све бендове, у односу на φ за $\varphi = \pm\pi/2$, што одговара нултој струји при тим фазним разликама (видјети слике 7.5 (d) и (f)), указујући на присуство само парних хармоника у синусном дијелу и непарних хармоника у косинусном дијелу Фуријеовог спектра CPR. Посљедично, присутна је мала, али коначна аномална струја, док JDE изостаје. На слици 7.5 (c), за $\pm\gamma = 0.095\pi$, појављују се три бенда на позитивним енергијама унутар енергијског процјепа за фазне разлике у близини $\varphi = \pm\pi/2$. Доњи бендови показују укрштања на нултој енергији која су симетрично позиционирана у односу на $\varphi = \pm\pi/2$, што доводи до одговарајуће CPR тестерастог облика, приказане наранџастом кривом на слици 7.5 (d). За канал $\pm\gamma = 0.115\pi$ постоје два бенда на позитивним енергијама. Горњи бенд је потиснут ка ивици суперпроводног процјепа и даје слаб допринос CPR-у, док доњи бенд не показује укрштање на нултој енергији (видјети слику 7.5 (e)). У овом режиму је очигледно да главни допринос Џозефсоновој струји потиче од ABS, док допринос стања из континуалног дијела спектра постаје релативно мали (вид јети слику 7.5 (f)). Ово понашање може се приписати релативно широком процјепу за приказани канал и одсуству укрштања бендова на нултој енергији. Такође је очигледно да CPR за $\pm\gamma = 0.115\pi$ има супротан знак синусног дијела Фуријеовог спектра у поређењу са CPR за $\pm\gamma = 0.095\pi$. Ово понашање се може тумачити као промјена основног стања



Слика 7.5: Сви панели одговарају d-wave Џозефсоновом споју типа $(0, 0.25\pi)$ са хомогеним феромагнетом у баријери, карактерисаним са $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$. (a) CPR разложена по углу, $I(\varphi, \gamma)$, за трансверзалне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b) Критична Џозефсонова струја у функцији упадног угла γ. У уметку је приказана аномална струја у функцији γ. ABS и одговарајуће CPR приказане су за: (c) и (d) $\gamma = \pm 0.095\pi$; (e) и (f) $\gamma = \pm 0.115\pi$, респективно. Црвена и плава крива представљају ABS бендове за γ и $-\gamma$, респективно. Зелена пуна, испрекидана и тачкаста крива одговарају струјама које потичу од првог, другог и трећег бенда, респективно. Наранџаста и црна крива представљају укупне CPR за дате канале, добијене коришћењем ABS и F-T приступа, респективно. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

Џозефсоновог споја у функцији трансверзалног импулса, која се манифестује минимумом који раздваја одговарајуће максимуме на слици 7.5 (b).

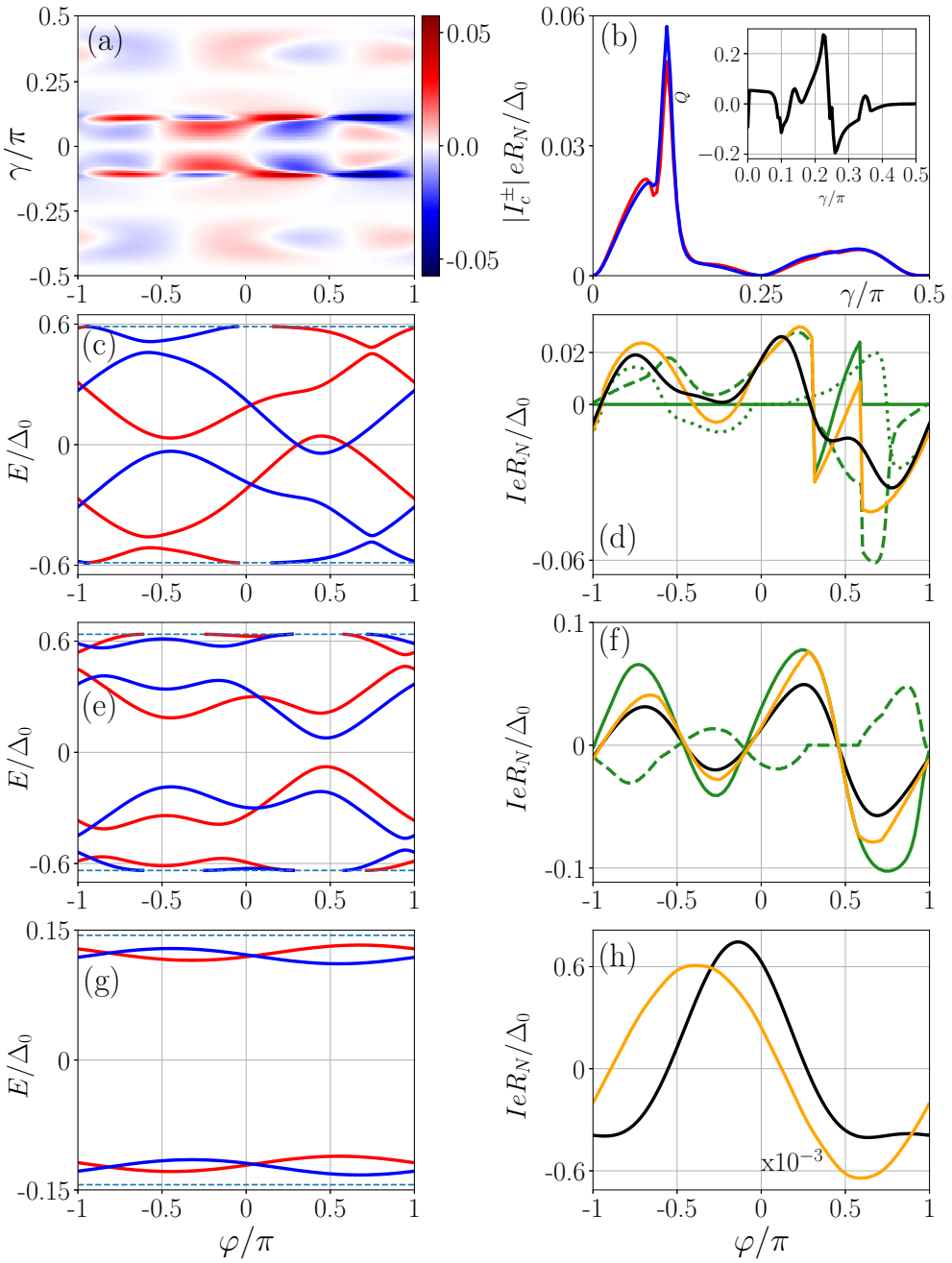
Када су магнетизације два феромагнета супротно оријентисане у Џозефсоновом споју типа $(0, \pi/4)$, аномална Џозефсонова струја остаје коначна, али релативно слаба, док су критичне струје у супротним правцима једнаке по интензитету. Ово је приказано на сликама 7.6 (a) и (b), гдје су приказане CPR разложене по углу и критична струја у функцији упадног угла γ. ABS спектри зависни од фазе и одговарајуће CPR за канале $\pm\gamma = 0.045\pi$ (који одговара максималној критичној струји) и $\pm\gamma = 0.105\pi$ (који одговара максималној аномалној струји) приказани су на сликама 7.6 (c)-(f). Енергије ABS остају спински дегенерисане и показују особине сличне претходно разматраним случајевима: изостанак нагиба у односу на фазну разлику за $\varphi = \pm\pi/2$. CPR за канале $\pm\gamma = 0.045\pi$ показује тестерасти облик усљед укрштања ABS бендова на нултој енергији у околини $\varphi = \pm\pi/2$, што доводи до неслагања између CPR добијених F-T и ABS приступима. За



Слика 7.6: Сви панели одговарају d-wave Џозефсоновом споју типа $(0, 0.25\pi)$ са нехомогеним феромагнетом у баријери, при чему су вектори магнетизације у два феромагнетна слоја супротно оријентисани ($\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = \pi - \theta_L = 0.7\pi$ и $\phi_R = \pi + \phi_L = 1.3\pi$). (a) CPR разложена по углу, $I(\varphi, \gamma)$, за трансверзалне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b) Критична Џозефсонова струја у функцији упадног угла γ. У уметку је приказана аномална струја у функцији γ. ABS и одговарајуће CPR приказане су за: (c) и (d) $\gamma = \pm 0.045\pi$; (e) и (f) $\gamma = \pm 0.105\pi$, респективно. Црвена и плава крива представљају ABS бендове за γ и $-\gamma$, респективно. Пуна и испрекидана зелена крива одговарају струјама које потичу од доњег и горњег бенда, респективно. Наранџаста и црна крива представљају укупне CPR за дати канал, добијене коришћењем ABS и F-T приступа, респективно. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

канале $\pm\gamma = 0.105\pi$, суперпроводни процјеп постаје шири ($\sim 0.6\Delta_0$), док енергије ABS не показују укрштање на нултој енергији. У овом режиму доприноси бендова из супротних трансверзалних канала готово су супротни, што резултира малом Џозефсоновом струјом коју носе ABS. Допринос континуалног дијела спектра је значајан, што доводи до неслагања између F-T и ABS приступа и повећане аномалне струје у овом каналу.

Ефикасност диоде која је приказана на слици 6.7 (b) достиже своју максималну вриједност за конфигурацију магнетизације $\theta_L = \phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.27\pi$ и $\phi_R = 0.51\pi$. CPR разложена по углу за овај случај приказана је на слици 7.7 (a), показујући да је струја коначна на $\varphi = \pm\pi/2$ усљед претходно поменутог нарушења симетрије. Критичне струје у оба смјера, I_c^+ и $|I_c^-|$, као функције γ, приказане су на слици 7.7 (b), заједно са ефикасношћу диоде у уметку. Највећа аномална струја јавља се у каналу $\pm\gamma = 0.1\pi$, а ABS спектар за овај канал приказан је на слици 7.7 (c). Фазно зависни енергетски бендови



Слика 7.7: Сви панели одговарају d-wave Џозефсоновом споју типа $(0, 0.25\pi)$ који садржи два феромагнета са неколинеарним магнетизацијама, при чему је $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.27\pi$ и $\phi_R = 0.51\pi$. (a) CPR разложен по углу, $I(\varphi, \gamma)$, за трансверзалне канале са упадним углом $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. (b) Критична Џозефсонова струја у функцији упадног угла γ. У уметку је приказана аномална струја у функцији γ. ABS и одговарајуће CPR приказане су за: (c) и (d) $\gamma = \pm 0.1\pi$; (e) и (f) $\gamma = \pm 0.11\pi$; (g) и (h) $\gamma = \pm 0.227\pi$, респективно. Црвена и плава крива представљају ABS бендове за γ и $-\gamma$, респективно. Пуна, испрекидана и тачкаста зелена крива одговарају струјама које потичу од доњег и горњег бенда, респективно. Наранџаста и црна крива представљају укупне CPR за дати канал, добијене коришћењем ABS и F-T приступа, респективно. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

имају коначан нагиб на $\varphi = \pm\pi/2$. За одређене фазне разлике, три бенда са позитивним енергијама за $\gamma = 0.1\pi$ појављују се између укрштања на нултој енергији (црвене криве на слици 7.7 (c)). Истовремено, за $\gamma = -0.1\pi$ при истој фази не постоје ABS бендови

унутар енеретског процјепа (плаве криве на слици 7.7 (c)). Изражена асиметрија између спектара за супротне трансверзалне импулсе објашњава појаву и AJE и JDE. Доприноси појединачних бендова CPR, као и CPR добијене ABS и F-T приступима, приказани су на слици 7.7 (d). Неслагање између њих потиче од укрштања на нултој енергији и чињенице да се горњи бенд, који се налази близу ивице процјепа, за одређене вриједности φ потискује изван процјепа, при чему не доприноси CPR. За канал $\pm\gamma = 0.11\pi$ (који одговара максималној струји), ABS спектри су приказани на слици 7.7 (e). Бендови су потиснути ка вишим енергијама и нема укрштања на нултој енергији, што доводи до бољег слагања CPR-ова добијених F-T и ABS приступима и указује на значајан транспорт кроз ABS унутар процјепапа (видјети слику 7.7 (f)).

Ефикасност диоде је максимална за $\gamma = 0.227\pi$. Одговарајући ABS спектар и CPR приказани су на сликама 7.7 (g) и (h). Суперпроводни енергијски процјеп је веома мали и само један бенда остаје испод његове ивице, јако потиснут ка континуалном спектру, што објашњава мали допринос ABS укупној Џозефсоновој струји. CPR добијена F-T методом је за три реда величине већа од оне добијене ABS приступом. Велико неслагање јавља се и у ефикасности диоде: F-T приступ даје $Q = 0.297$, док ABS приступ даје $Q = 0.029$ (10 пута мање).

7.4 Закључак

У овој глави анализирали смо како оријентације измјенског поља у два феромагнетна слоја утичу на фазно-зависни енергетски спектар ABS и његове карактеристике, заједно са доприносима појединачних попречних канала укупној CPR. Спектар ABS постаје дегенерисан за супротно оријентисане магнетизације у два феромагнетна слоја, јер Рашба SOC на двије S/F границе доводи до спинског цијепања у супротним смјеровима. Показали смо да је разлика између енергетских бендова у ABS спектру за конјуговане попречне канале израженија у споју са d-wave суперпроводницима усљед анизотропије параметра уређења и могућих пресјека фазно-зависних енергетских бендова за два правца кретања квазичестица, дефинисана са $-\gamma$ и γ. Насупрот томе, фазно-зависни ABS бендови у споју са s-wave суперпроводницима, за конјуговане правце кретања квазичестица, прате једна другу и разликују се само по малом помијерању по енергији. Асиметрични фазно-зависни ABS спектри око $\varphi = 0$ указују на присуство аномалног фазног помјераја и неједнаке критичне струје у супротним смјеровима. Анализом угаоно разложених CPR, утврдили смо да, кад год се JDE појављује, различитим попречним каналима могу доминирати хармоници $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ или $\cos\varphi$. Коегзистенција ових компоненти представља неопходан услов за појаву JDE [65, 81].

Услови под којима ABS доминирају транспортом наелектрисања идентификовани су поређењем F-T технике и ABS приступа. У већини случајева, мали допринос континуумских стања доводи до доброг слагања CPR добијених примјеном ове двије методе. Уочљиве разлике појављују се првенствено у присуству пресјека ABS бендова на нултој енергији, гдје ABS приступ даје CPR тестерастог облика, док одговарајући F-T профили остају глатки. У спојевима са d-wave суперпроводницима, разлике углавном настају због ужег суперпроводног енергијског процјепа, који може постати готово затворен, чиме се појачава улога континуумског дијела спектра у транспорту наелектрисања.

Наши резултати утврђују услове засноване на симетријама и микроскопски механизам за остваривање нереципрочног транспорта наелектрисања у спин-активним Џозефсоновим спојевима [96].

Глава 8

Андрејевљева везана стања у спојевима алтермагнета и суперпроводника Рашба типа

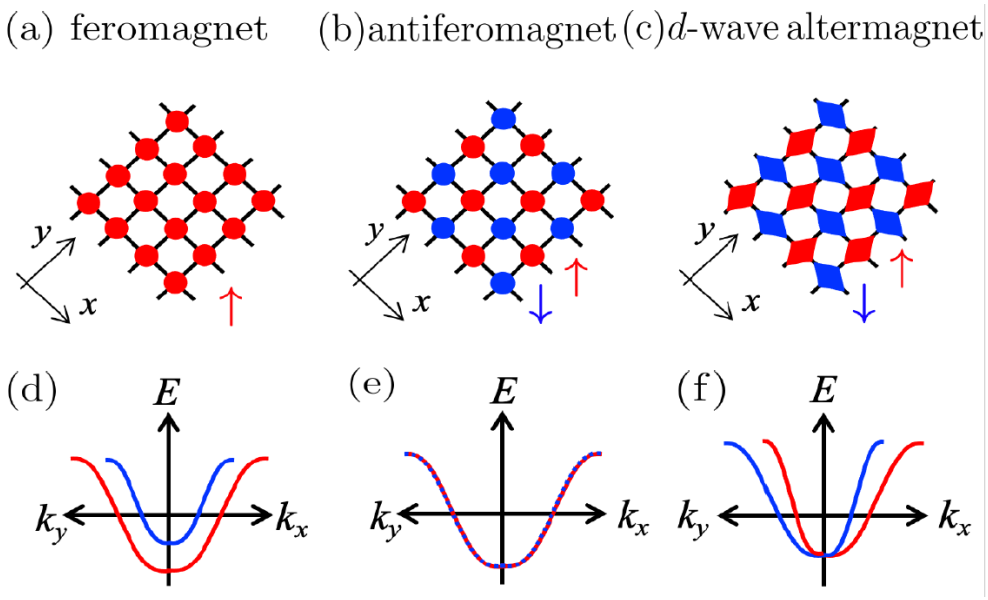
У овој глави проучаване су диференцијалне кондуктансе у спојевима који садрже d-wave алтермагнет (AM) и d-wave суперпроводник (D). Конкретно су рачунате тоталне и по упадном углу разложене кондуктансе у N/AM/D хетероструктурама, гдје је N нормални метал. Примјењивали смо Блондер-Тинкхам-Клапвијк технику за израчунавање кондуктанси претпостављајући јаку изолаторску баријеру на N/AM гранци како бисмо андрејевљевски рефлектоване квазичестице конфинирали у алтермагнетну област. Пикови на кондуктанси на одређеним вриједностима енергије, нижим од вриједности суперпроводног енергијског процјепа, указују на појаву Андрејевљевих везаних стања на AM/D граници. Кондуктансе су рачунате у случају двије оријентације алтермагнетног уређења ($d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}), и двије оријентације суперпроводног параметра уређења ($d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}). Поред тога, испитиван је утицај Рашба SOC на број и структуру Андрејевљевих везаних стања у овим спојевима, тако што смо кондуктансе израчунали и када је суперпроводна електрода Рашба типа, тј. када у њој постоје два Фермијева бенда, раздвојена у импулсном простору на двије хелицитетно различите Фермијеве површи. Осим тога испитивали смо и робусност Андрејевљевих стања у односу на промјену јачине атермагнетног спинског цијепања, тј. могуће промјене положаја пикова на кондуктансама са промјеном јачине алтермагнетног поља.

Резултати представљени у овој глави су у припреми за објављивање:

S. Djurdjević and Z. Popović, *Subgap states in hibrid junctions made of altermagnets and Rashba superconductors*

8.1 Алтермагнетизам

За разумијевање алтермагнетног уређења корисно је најприје укратко размотрити основне карактеристике феромагнета и антиферомагнета, са којима алтермагнетизам дијели поједине заједничке особине. И код феромагнета и код антиферомагнета магнетна својства материјала потичу од измјенске интеракције између електрона, али се начини на које су магнетни моменти распоређени у кристалној решетки битно разликују. Управо однос између магнетног уређења и симетрије кристалне решетке представља кључ за разумијевање алтермагнетизма [102, 103].

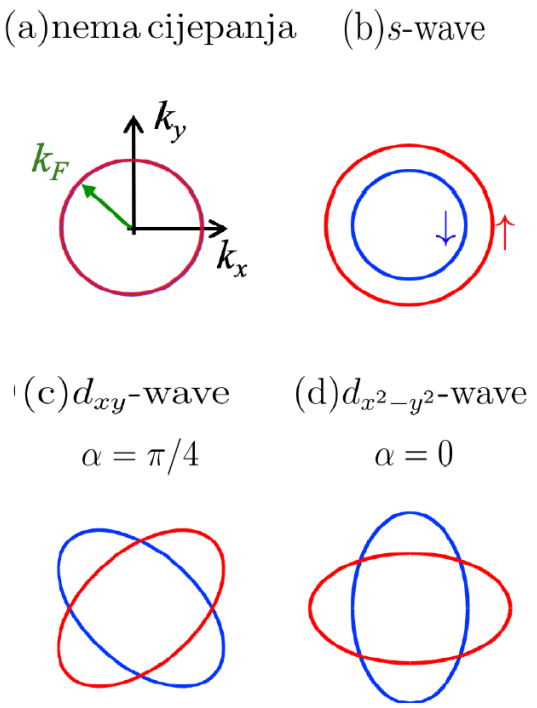


Слика 8.1: (a-c) Схематска илустрација решетрки у феромагнету (a), антиферомагнету (b), алтермагнету (c). Црвене и плаве стрелице представљају спин ↑ и ↓, респективно. (d-f) Дисперзије енергија дуж k_x и k_y праваца за одговарајућа магнетна уређења на панелима (a-c), гдје плаве и црвене криве представљају супротне спинове. Слика је прилагођена из [200].

У феромагнетима измјенско поље доводи до различите енергије различитих спинских стања на сваком чвору решетке (слика 8.1(a)), чинећи да је на Фермијевој површи једно спинско стање насељеније од другог (слике 8.1(d) и 8.2(b)). У полуметалима стања са мање насељеним спином потпуно нестају на Фермијевој површи што резултира потпуном поларизацијом спина. Дакле, феромагнети посједују ненулти укупни макроскопски магнетни момент. Могу се описати феромагнетним параметром уређења, тј. измјенским пољем. Ово измјенско поље је изотропно јер је феромагнетно стање инваријантно при унитарним симетријама кристалне решетке [200, 201].

Други тип колинеарних магнета су антиферомагнети који имају алтернирајућу поларизацију спина у реалном простору, гдје свака два сусједна чвора решетке посједују супротне спинове (слика 8.1(b)). Антиферомагнети су инваријантни при транслацијама решетке или инверзионим симетријама. Спинска дегенерација постоји због PT симетрије (енг. parity-time inversion) (слика 8.1 (e)) [200, 201].

Алтермагнетизам представља трећи облик колинеарног магнетног уређења. Алтермагнети су слични феромагнетима по томе што оба типа магнетног уређења показују спински поцијепане енергетске бендове и спински поларизоване Фермијеве површи. Међутим, спинска стања се у алтермагнетима међусобно компензују резултујући нултом магнетизацијом као и код антиферомагнета. Они посједују поље спинског цијепања које је парно



Слика 8.2: Скица Фермијевих површи за ↑ (црвени круг) и ↓ (плави круг) спинове у различитим системима, (a) нормални метал, (b) феромагнет (s-wave магнетно уређење), (c) d_{xy}-wave алтермагнет и (d) d_{xy}-wave алтермагнет [200].

у импулсном простору (енг. even-parity). За разлику од антиферомагнета, у алтермагнетима Крамерсова дегенерација је разбијена јер се подрешетке са различитим спиновима не могу пресликати једна у другу транслацијама или инверзијама, већ само ротацијама у реалном простору као што се види са слика 8.1(c) и 8.1(f) [103]. PT симетрија је нарушена комбинацијом геометрије кристалне решетке и спинског уређења. Поље спинског цијепања у алтермагнетима нема поријекло у релативистичким ефектима што их разликује од релативистичког спин-орбитног спрезања. Зато је алтермагнетно поље много веће и реда је величине 1 eV (десетак пута веће него SOC, ~ 0.1eV) [102, 200].

Постоји више од 60 материјала за које се, на основу теоријских предвиђања, вјерује да посједују алтермагнетне особине. Очекује се да су RuO_2 [99, 100, 103], Mn_5Si_3 [202], MnF_2 и MnO_2 d-wave алтермагнети [200]. Иако су теоријски предвиђени прије неколико година, експериментална потврда алтермагнета није коначна. У овој области интензивно се ради, како у истраживању особина самих алтермагнета, тако и у проучавању могућих хетероструктура у којима они учествују [109, 113, 114, 116].

8.1.1 Минимални модел алтермагнетизма

За опис алтермагнетизма за потребе проучавамја транспортних особина суперпроводних хетероструктура најчешће се уводи минимални модел који описује главне особине алтермагнета [109, 116]. За моделовање неконвенционалног магнетног уређења које описује спинско цијепање зависно од импулса у континуалном моделу се уводи хамилтонијан [102]

$$H(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu - M_{\mathbf{k}} \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{8.1}$$

гдје је m ефективна маса електрона, μ хемијски потенцијал, док $M_{\mathbf{k}}$ представља од импулса зависно поље спинског цијепања које карактерише магнетно уређење, $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$ је јединични вектор који одређује правац поларизације спина, а $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ је вектор

Паулијевих матрица у спинском простору [102, 200]. Дисперзиона релација која одговара хамилтонијану (8.1) дата је са

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \pm M_{\mathbf{k}}, \tag{8.2}$$

одакле се види да $M_{\mathbf{k}}$ одређује спинско цијепање бендова. У овом раду ограничићемо се на дводимензионални модел код кога је поље спинског цијепања у правцу нормалном на раван материјала, тј. дуж z-осе, па је $\mathbf{n}_{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)^T$.

Симетрија $M_{\mathbf{k}}$ може се класификовати на исти начин као и симетрија суперпроводног параметра уређења. Тако се конвенционално феромагнетно стање класификује као s-wave магнетно уређење

$$M_{\mathbf{k},s} = h, \tag{8.3}$$

и није зависно од импулса. Магнетно уређење d-wave алтермагнета је дато са

$$M_{\mathbf{k},d} = \frac{J}{k_F^2}\left(\left(k_x^2 - k_y^2\right)\cos 2\alpha + 2k_x k_y \sin 2\alpha\right), \tag{8.4}$$

где α одређује оријентацију алтермагнетрног поља у односу на x-осу. Када је $\alpha = 0$ онда се говори о $d_{x^2-y^2}$-wave алтермагнету, а када је $\beta = \pi/4$ о d_{xy}-wave алтермагнету. У изразима (8.3) и (8.4) јачина измјенског поља у феромагнетима означена је са h, а јачина поља спинског цијепања у алтермагнетима са J [102, 200].

8.2 Модел N/AM/D споја и формализам

Овдје разматрамо дводимензионални спој нормални метал (N)/ алтермагнет (AM)/ d-wave суперпроводник (D) који лежи у xy-равни. x-оса је постављена нормално на границе између различитих материлала тако да нормални метал лежи у полуравни $x < 0$, а суперпроводник у полуравни $x > d$, где је d дебљина алтермагнетног слоја између њих. Хамилтонијан за овај систем у BdG форми је[1]

$$H = \begin{pmatrix} H_0(k_x, k_y) & i\sigma_y\Delta \\ -i\sigma_y\Delta & -H_0^*(-k_x, -k_y) \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

где је једночестични хамилтонијан дат са

$$H_0(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + U\delta(x) - M\sigma_z\Theta(x)\Theta(d - x) + H_R\Theta(x - d). \tag{8.6}$$

Овдје је U изолаторски потенцијал на N/AM граници, M одређује симетрију поља спинског цијепања у алтермагнету у коме је правац поларизације спина дуж z-осе [116]

$$M = J_1 k_x k_y + \frac{J_2}{2}\left(k_x^2 + k_y^2\right), \tag{8.7}$$

где су $J_1 = 2Jk_F^{-2}\sin 2\alpha$ и $J_2 = 2Jk_F^{-2}\cos 2\alpha$, а J је јачина алтермагнетног поља. Δ је суперпроводни параметар уређења који у нашем случају има d-wave симетрију [65]

[1] Матрични облик овог хамилтонијана другачији је у односу на оне коришћене у претходним главама. Међутим, ове двије репрезентације су унитарно повезане трансформацијом

$$U = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix},$$

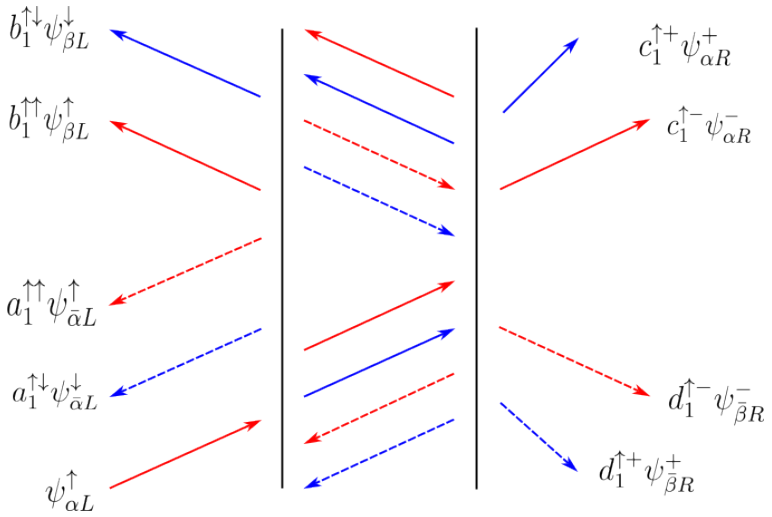
па то неће утицати на рачунате физичке величине.

$$\Delta = \Delta_0 \left(\frac{k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \cos 2\beta - 2 \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} \sin 2\beta \right) \Theta(x - d), \tag{8.8}$$

гдје је β угао између правца позитивног d-wave лобуса и x-осе. Посљедњи члан у једночестичном хамилтонијану (8.6) описује Рашба спин-орбитно спрезање у суперпроводнику дато са

$$H_R = R(k_y \sigma_x - k_x \sigma_y), \tag{8.9}$$

гдје је R јачина спин-орбитног спрезања [195, 196]. Да бисмо израчунали кондуктансе



Слика 8.3: Схематска илустрација процеса расијања у N/AM/D споју када је упадна честица електрон спина ↑ из нормалног метала. Рашба SOC је присуран у суперпроводнику.

N/AM/D споја потребно је да конструишемо таласне функције у свакој области споја. Као и раније, за конструкцију користимо елементарна пропагирајућа стања која су рјешења БдГ хамилтонијана у сваком појединачном дијелу споја. На слици 8.3 приказан је процес расијања када је упадни електрон из области N спина ↑ ($\psi_{\alpha L}^{\uparrow}$). Он се на N/AM граници рефлектује андрејевљевски у шупљине са спиновима ↑ и ↓ ($\psi_{\bar{\alpha} L}^{\uparrow}$ и $\psi_{\bar{\alpha} L}^{\downarrow}$), и нормалном рефлексијом у електроне са спиновима ↑ и ↓ ($\psi_{\beta L}^{\uparrow}$ и $\psi_{\beta L}^{\downarrow}$). Таласна функција у нормалном металу тада је

$$\psi_{1N}(x) = \psi_{\alpha L}^{\uparrow} + a_1^{\uparrow\uparrow}\psi_{\bar{\alpha} L}^{\uparrow} + a_1^{\uparrow\downarrow}\psi_{\bar{\alpha} L}^{\downarrow} + b_1^{\uparrow\uparrow}\psi_{\beta L}^{\uparrow} + b_1^{\uparrow\downarrow}\psi_{\beta L}^{\downarrow}, \tag{8.10}$$

гдје су елементарна пропагирајућа стања

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha L}^{\uparrow} &= \mathbf{e_1} e^{ik_{ex}x} e^{ik_y y}, \quad & \psi_{\alpha L}^{\downarrow} &= \mathbf{e_2} e^{ik_{ex}x} e^{ik_y y}, \\
\psi_{\bar{\alpha} L}^{\uparrow} &= \mathbf{e_3} e^{ik_{hx}x} e^{ik_y y}, \quad & \psi_{\bar{\alpha} L}^{\downarrow} &= \mathbf{e_4} e^{ik_{hx}x} e^{ik_y y}, \\
\psi_{\beta L}^{\uparrow} &= \mathbf{e_1} e^{-ik_{ex}x} e^{ik_y y}, \quad & \psi_{\beta L}^{\downarrow} &= \mathbf{e_2} e^{-ik_{ex}x} e^{ik_y y},
\end{aligned} \tag{8.11}$$

са

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.12}$$

и лонгитудиналном пројекцијом таласног вектора

$$k_{e(h)\,x} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu + (-)E) - k_y^2}, \tag{8.13}$$

гдје је $k_y = k_F \sin\theta$ трансверзална компонента таласног вектора паралелна границама. θ је угао који заклапа правац пропагације честица са x-осом. Аналогно се одређује таласна функција у N области када је упадни електрон спина $\downarrow$ и дата је са

$$\psi_{2N}(x) = \psi^{\downarrow}_{\alpha L} + a_2^{\downarrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\bar{\alpha} L} + a_2^{\downarrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\bar{\alpha} L} + b_2^{\downarrow\uparrow}\psi^{\uparrow}_{\beta L} + b_2^{\downarrow\downarrow}\psi^{\downarrow}_{\beta L}. \tag{8.14}$$

Овдје су $a_i^{\sigma\sigma'}$ и $b_i^{\sigma\sigma'}$ (гдје је $i = 1, 2$, $\sigma(\sigma') = \uparrow$ или $\downarrow$) коефицијенти за Андрејевљеву и нормалну рефлексију, респективно, у посматраним процесима расијања.

У алтермагнетној области ($0 < x < d$) таласна функција је дата са

$$\begin{aligned}\psi_{1AM}(x) = \Big(&f_1\mathbf{e_1}e^{iq_{ex}^{\uparrow+}x} + f_2\mathbf{e_2}e^{iq_{ex}^{\downarrow+}x} + f_3\mathbf{e_3}e^{iq_{hx}^{\uparrow+}x} + f_4\mathbf{e_4}e^{iq_{hx}^{\downarrow+}x} + \\ &+ f_5\mathbf{e_1}e^{iq_{ex}^{\uparrow-}x} + f_6\mathbf{e_2}e^{iq_{ex}^{\downarrow-}x} + f_7\mathbf{e_3}e^{iq_{hx}^{\uparrow-}x} + f_8\mathbf{e_4}e^{iq_{hx}^{\downarrow-}x}\Big)\, e^{ik_y y},\end{aligned} \tag{8.15}$$

гдје су таласни вектори [200]

$$\begin{aligned}q_{ex}^{\sigma\pm} = &-\frac{2\rho_\sigma mJ\sin 2\alpha}{\hbar^2k_F^2 + 2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}k_y \\ &\pm\frac{\hbar^2k_F^2}{\hbar^2k_F^2 + 2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}\sqrt{2m\left(1 + \frac{2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}{\hbar^2k_F^2}\right)(\mu + E) - \hbar^2k_y^2 + \frac{4m^2J^2}{\hbar^2k_F^4}k_y^2},\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned}q_{hx}^{\sigma\pm} = &\frac{2\rho_\sigma mJ\sin 2\alpha}{\hbar^2k_F^2 + 2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}k_y \\ &\mp\frac{\hbar^2k_F^2}{\hbar^2k_F^2 + 2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}\sqrt{2m\left(1 + \frac{2\rho_\sigma mJ\cos 2\alpha}{\hbar^2k_F^2}\right)(\mu - E) - \hbar^2k_y^2 + \frac{4m^2J^2}{\hbar^2k_F^4}k_y^2}.\end{aligned} \tag{8.17}$$

Овдје је $\rho_\uparrow = 1$, $\rho_\downarrow = -1$, а f_i ($i = 1, ..., 8$) су коефицијенти линеарне комбинације елементарних пропагирајућих стања у алтермагнету. Таласна функција за упадни електрон спина $\downarrow$, $\psi_{2AM}(x)$, добија се аналогно (8.15) само са другим вриједностима коефицијената.

Десна електрода сада је Рашба суперпроводник са Фермијевом површи која је у импулсном простору раздвојена на два хеликална бенда (слика 5.1d). Квазичестице које пропагирају у суперпроводнику за дате вриједности енергије, E, и транверзалног импулса, k_y, сада имају различите правце пропагације (слика 8.3), па ће, усљед анизотропије, осјећати различите вриједности суперпроводног параметра уређења, што ћемо означавати са $\pm$ у горњем индексу зависно од припадности квазичестица различитим хеликалним бендовима. На тај начин BdG таласна фунција у суперпроводнику је

$$\psi_{1D}(x) = c_1^{\uparrow+}\psi^{+}_{\alpha R} + c_1^{\uparrow-}\psi^{-}_{\alpha R} + d_1^{\uparrow+}\psi^{+}_{\bar{\beta} R} + d_1^{\uparrow-}\psi^{-}_{\bar{\beta} R}, \tag{8.18}$$

гдје су елементарна пропагирајућа стања дата са [74]

$$\begin{aligned}\psi^{+}_{\alpha R} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u^+ \\ -iu^+\chi_\alpha^+ \\ i\frac{(\Delta^+)^*}{|(\Delta^+)^*|}v^+\chi_\alpha^+ \\ \frac{(\Delta^+)^*}{|(\Delta^+)^*|}v^+\end{pmatrix}e^{ik_{ex}^+x}e^{ik_y y}, \quad \psi^{-}_{\alpha R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u^- \\ iu^-\chi_\alpha^- \\ -i\frac{(\Delta^-)^*}{|(\Delta^-)^*|}v^-\chi_\alpha^- \\ \frac{(\Delta^-)^*}{|(\Delta^-)^*|}v^-\end{pmatrix}e^{ik_{ex}^-x}e^{ik_y y}, \\ \psi^{+}_{\bar{\beta} R} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \widetilde{v}^+ \\ -i\widetilde{v}^+\chi_{\bar{\beta}}^+ \\ i\frac{(\tilde{\Delta}^+)^*}{|(\tilde{\Delta}^+)^*|}\widetilde{u}^+\chi_{\bar{\beta}}^+ \\ \frac{(\tilde{\Delta}^+)^*}{|(\tilde{\Delta}^+)^*|}\widetilde{u}^+\end{pmatrix}e^{-i\tilde{k}_{hx}^+x}e^{ik_y y}, \; \psi^{-}_{\bar{\beta} R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \widetilde{v}^- \\ i\widetilde{v}^-\chi_{\bar{\beta}}^- \\ -i\frac{(\tilde{\Delta}^-)^*}{|(\tilde{\Delta}^-)^*|}\widetilde{u}^-\chi_{\bar{\beta}}^- \\ \frac{(\tilde{\Delta}^-)^*}{|(\tilde{\Delta}^-)^*|}\widetilde{u}^-\end{pmatrix}e^{-i\tilde{k}_{hx}^-x}e^{ik_y y},\end{aligned} \tag{8.19}$$

Овдје су лонгитудиналне компоненте таласних вектора квазиелектрона и квазишуплина

$$k_{ex}^{\pm}=\sqrt{\left(\mp\frac{mR}{\hbar^2}+\sqrt{\left(\frac{mR}{\hbar^2}\right)^2+\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu+\sqrt{E^2-|\Delta^{\pm}|^2}\right)}\right)^2-k_y^2}, \tag{8.20}$$

$$\widetilde{k}_{hx}^{\pm}=\sqrt{\left(\mp\frac{mR}{\hbar^2}+\sqrt{\left(\frac{mR}{\hbar^2}\right)^2+\frac{2m}{\hbar^2}\left(\mu-\sqrt{E^2-\left|\widetilde{\Delta}^{\pm}\right|^2}\right)}\right)^2-k_y^2}, \tag{8.21}$$

респективно. Фазни фактори, $\chi_{\alpha}^{\pm}$ и $\chi_{\bar{\beta}}^{\pm}$, који представљају комплексне бројеве са јединичне кружнице у комплексној равни одређени су правцима пропагације одговарајућих квазичестица и дати су са [74]

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha}^{+}&=\frac{k_{ex}^{+}+ik_y}{\sqrt{k_{ex}^{+2}+k_y^2}}, \quad \chi_{\alpha}^{-}=\frac{k_{ex}^{-}+ik_y}{\sqrt{k_{ex}^{-2}+k_y^2}},\\ \chi_{\bar{\beta}}^{+}&=\frac{-\widetilde{k}_{hx}^{+}+ik_y}{\sqrt{\widetilde{k}_{hx}^{+2}+k_y^2}}, \quad \chi_{\bar{\beta}}^{-}=\frac{-\widetilde{k}_{hx}^{-}+ik_y}{\sqrt{\widetilde{k}_{hx}^{-2}+k_y^2}}.\end{aligned} \tag{8.22}$$

BCS фактори, $u^{\pm}$, $\widetilde{u}^{\pm}$, $v^{\pm}$ и $\widetilde{v}^{\pm}$, дати су као у изразима (4.19) и (4.20), с тим што је сада потребно водити рачуна о припадности одговарајућем хеликалном бенду, тј. о правцу пропагације квазичестица.

Коефицијенти расијања се одређују на основу граничних услова за БдГ таласне функције који су, у овом случају, дати са

$$\psi(x)|_{x=0+}=\psi(x)|_{x=0-}\,, \tag{8.23}$$

$$\psi(x)|_{x=d+}=\psi(x)|_{x=d-}\,, \tag{8.24}$$

$$\left(1+\sigma_z\frac{J}{\mu}\cos 2\alpha\right)\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=0+}-\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=0-}=-i\sigma_z\frac{J}{\mu}\sin 2\alpha\, k_y\,\psi(x)|_{x=0}+\frac{2mU}{\hbar^2}\,\psi(x)|_{x=0}\,, \tag{8.25}$$

$$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=d+}-\left(1+\sigma_z\frac{J}{\mu}\cos 2\alpha\right)\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=d-}=i\sigma_z\frac{J}{\mu}\sin 2\alpha\, k_y\,\psi(x)|_{x=d}-i\sigma_y\frac{mR}{\hbar^2}\,\psi(x)|_{x=d}\,. \tag{8.26}$$

У овом моделу претпостављамо јаку изолаторску баријеру на граници N/AM, док границу AM/D сматрамо транспарентном. На тај начин омогућавамо да је пад напона на N/AM граници много већи него на AM/D граници [116]. У тим околностима, за израчунавање диференцијалних кондуктанси може се искористити Блондер-Тинкхам-Клапвијков формализам [167, 203, 204]

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=\frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma(\theta)\cos\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma_0(\theta)\cos\theta d\theta}, \tag{8.27}$$

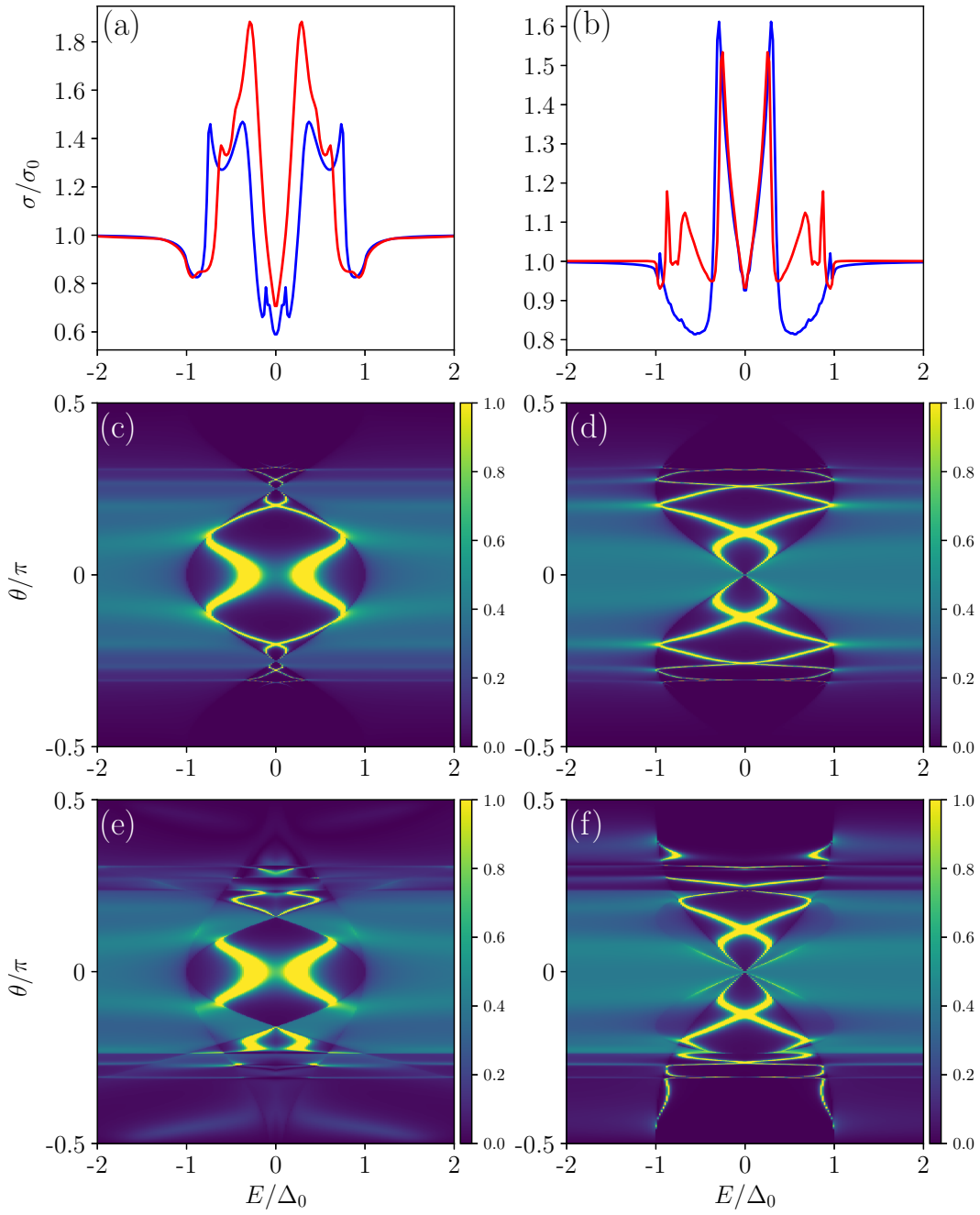
гдје је

$$\sigma(\theta) = 2 + \left|a_1^{\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|a_1^{\uparrow\downarrow}\right|^2 + \left|a_2^{\downarrow\uparrow}\right|^2 + \left|a_2^{\downarrow\downarrow}\right|^2 - \left|b_1^{\uparrow\uparrow}\right|^2 - \left|b_1^{\uparrow\downarrow}\right|^2 - \left|b_2^{\downarrow\uparrow}\right|^2 - \left|b_2^{\downarrow\downarrow}\right|^2, \tag{8.28}$$

док је

$$\sigma_0(\theta) = 2 - \left|b_{1N}^{\uparrow\uparrow}\right|^2 - \left|b_{1N}^{\uparrow\downarrow}\right|^2 - \left|b_{2N}^{\downarrow\uparrow}\right|^2 - \left|b_{2N}^{\downarrow\downarrow}\right|^2, \tag{8.29}$$

кондуктанса када је суперпроводник у нормалном стању, при чему су $b_{iN}^{\sigma\sigma'}$ коефицијенти расијања за упадне електроне спина σ.



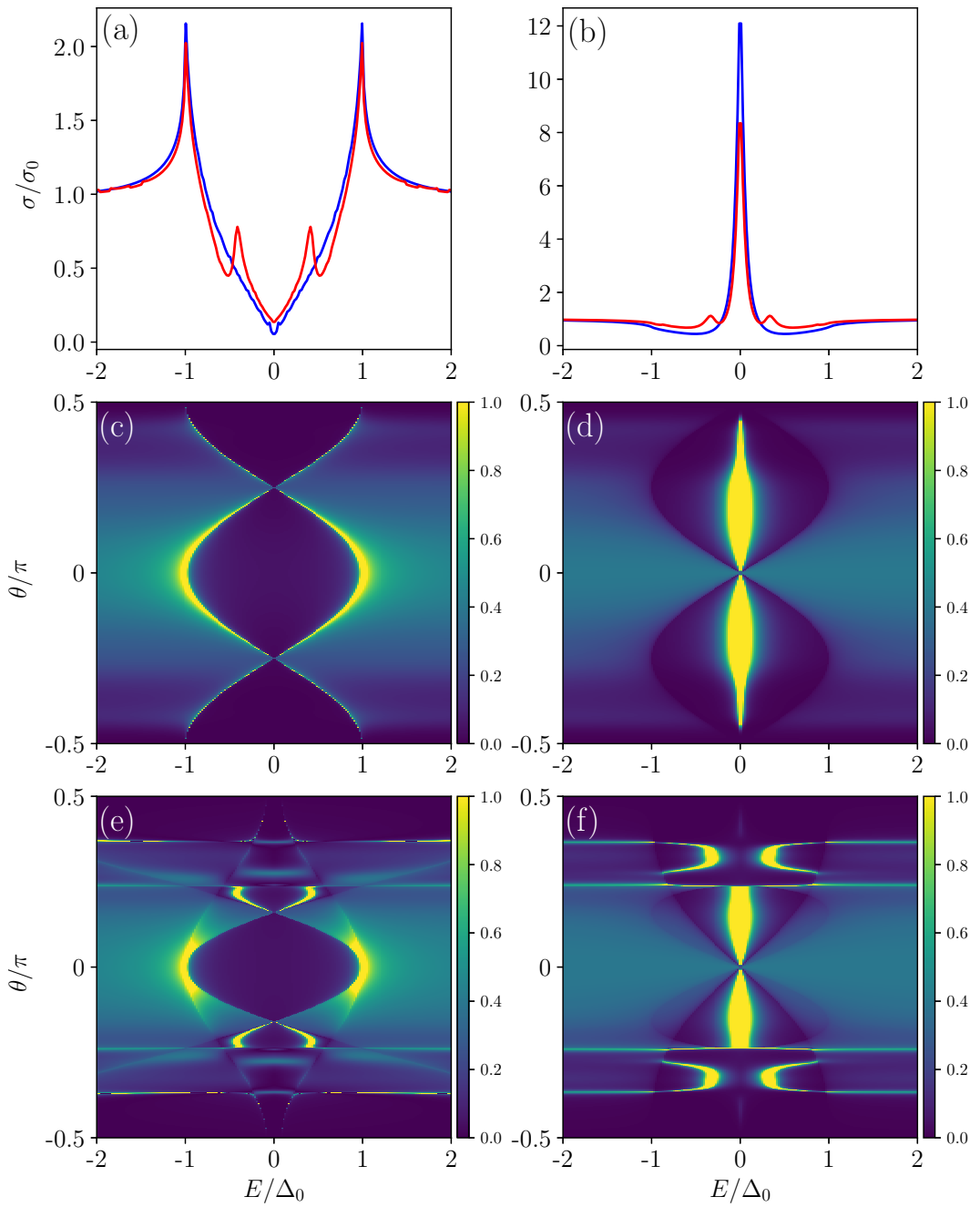
Слика 8.4: Нормализоване кондуктансе за спој са $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ (a), $\alpha = 0$ и $\beta = 0.25\pi$ (b). Плава линија односи се на случај кад Рашба SOC није присутан $\chi = 0$, а црвена кад је $\chi = 0.4$. Кондуктансе по упадном углу θ за спојеве са слика (a) и (b) за $\chi = 0$ (c) и (d), и за $\chi = 0.4$ (e) и (f). Остали параметри су $Z = 4$, $k_F d = 10$ и $J/\mu = 0.4$.

8.3 Резултати

За нумеричко израчунавање диференцијалних кондуктанси у N/AM/D спојевима уводимо бездимензионалне величине, $Z = 2mU/(\hbar^2 k_F)$ за изолаторски потенцијал на N/AM граници, и $\chi = 2mR/(\hbar^2 k_F)$ за параметризацију јачине Рашба SOC у суперпроводнику. Такође, дужина алтермагнетног слоја и јачина поља спинског цијепања параметризоване су фермијевим таласним бројем, k_F, односно Фермијевом енергијом, μ, респективно. У овој глави узимамо да је $Z = 4$ што представља јаку изолаторску баријеру на N/AM граници. На тај начин Андрејевљеве рефлексије заробљавамо у алтермагнетну област, и тиме квазичестични транспорт конфинирамо у AM [200]. Дебљина алтермагнетног слоја у свим прорачунима је $dk_F = 10$ што се сматра спојем кратке дужине јер је $k_F d \ll \mu/\Delta \sim 10^3$.

На слици 8.4 (a) и (b) приказане су нормализоване диференцијалне кондуктансе, σ/σ_0, за N/AM/D спојеве код којих је алтермагнетно уређење $d_{x^2-y^2}$, а суперпроводна електрода има $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} оријентацију параметра уређења, респективно. Плаве линије представљају кондуктансе у одсуству Рашба SOC у суперпроводнику, а црвене кад је у споју Рашба суперпроводник. Уочавају се истакнути пикови на овим графицима који указују на формирање везаних стања са енергијама нижим од енергије суперпроводног енергијског процјепа. То су Андрејевљева везана стања. Јасно се види разлика кад у споју учествује Рашба суперпроводник, или кад учествује суперпроводник у коме нема Рашба SOC-а. То је посљедица тога што Рашба SOC мијења спинску текстуру суперпроводника у импулсном простору, што доводи до промјене нумеричких вриједности коефицијената за Андрејевљеву и нормалну рефлексију. С обзиром на то да се ради о анизотропном суперпроводном уређењу, јаснија слика може се стећи на основу кондуктанси разложених по трансверзалном импулсу, тј. по упадном углу честица θ (слике 8.4 (c) (d) за $\chi = 0$ и (e) (f) за $\chi = 0.4$). Пикови кондуктанси на различитим θ појављују се на различитим енергијама, указујући да енергија везаних стања зависи од правца честице. Пикови на укупним кондуктансама јављају се на оним енергијама на којима је дисперзија $E(\theta)$ скоро равна (енг. flat) у одређеном интервалу θ. На сликама 8.4 (c) и (d) јасно се виде контуре суперпроводног процјепа, док на сликама 8.4 (e) и (f) имамо двоструке обрисе контура. То је посљедица постојања два спинска бенда у импулсном простору код Рашба суперпроводника, па квазичестице са истим трансверзалним импулсом имају различите правце, и стога, осјећају различите вриједности суперпроводног процјепа. Осим тога, постоји критична вриједност трансверзалног импулса, k_y^c након које честице које припадају бенду са хелицитетом + постају еванесцентне и не доприносе транспорту [74]. Међутим, морају се задржати у формализму, јер без обзира на то што не доприносе транспорту оне значајно утичу на вриједности коефицијената расијања у систему. Такође, дефиницију параметра уређења изразили смо преко компоненти таласног вектора, јер он постаје комплексан у случају еванесцентних честица. Друга важна разлика која се види на сликама 8.4 (e) и (f) је та да ове слике нијесу симетричне у односу на $\theta = 0$ јер Рашба SOC нарушава симетрију просторне инверзије.

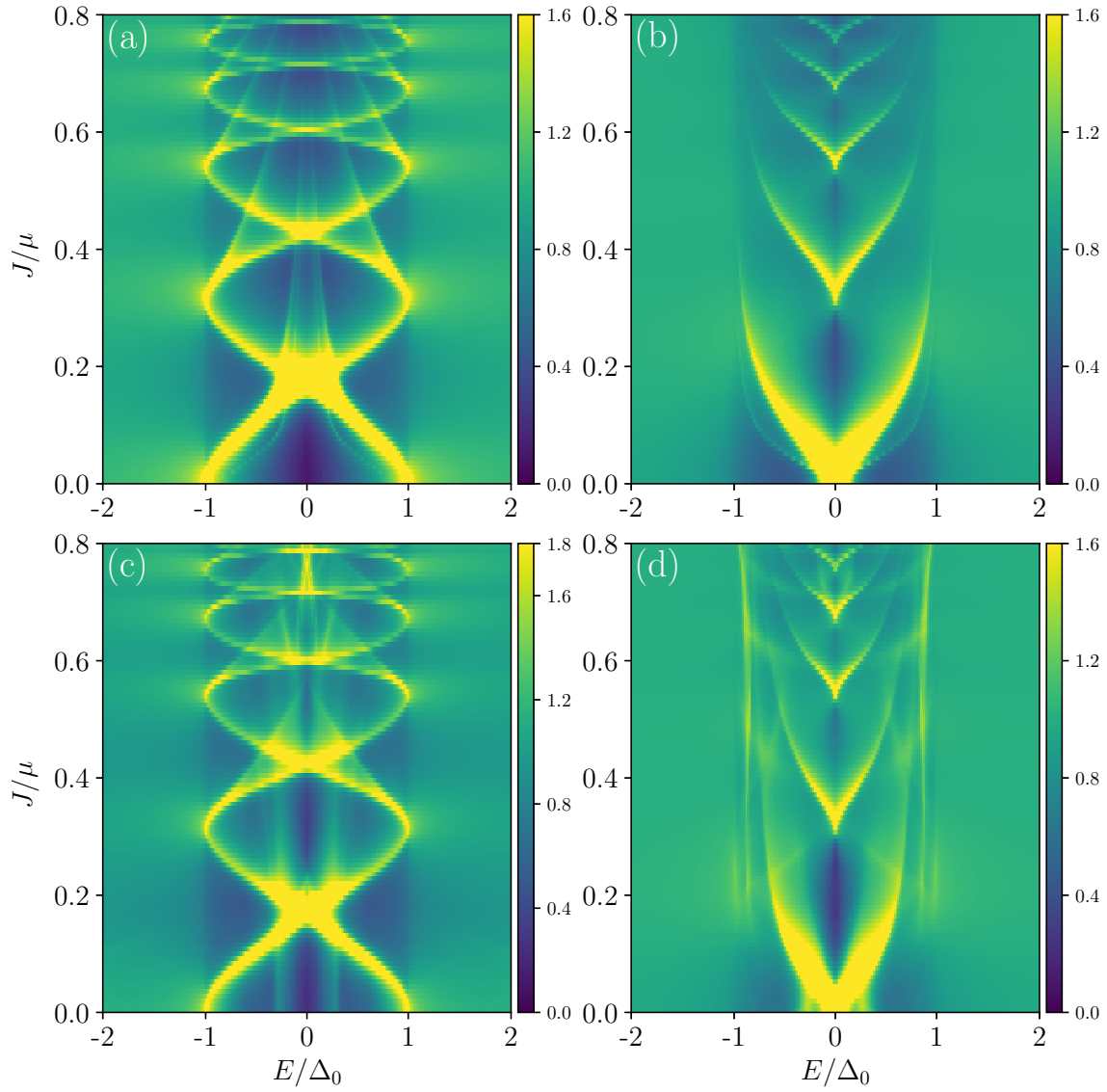
На слици 8.5 (a) и (b) приказане су нормализоване диференцијалне кондуктансе, σ/σ_0, за N/AM/D спојеве код којих је алтермагнетно уређење d_{xy}, а суперпроводна електрода има $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} оријентацију параметра уређења, респективно. Плаве линије представљају кондуктансе у одсуству Рашба SOC у суперпроводнику, а црвене кад је спрезање ненулто. Сада се за $d_{x^2-y^2}$ оријентацију суперпроводника добија очекивани V облик нормализоване кондуктансе у одсуству Рашба SOC [200], док се у присуству спин-орбитног спрезање ипак јављеју пикови на енергијама унутар суперпроводног процјепа (слика 8.4 (c)). Кад је ријеч о d_{xy} оријентацији суперпроводника јавља се снажан пик кондуктансе на нултој енергији што указује на појаву ZESABS. Међутим, у присуству Рашба SOC поред овог истакнутог пика јављају се и други, мањи пикови на ненултим енергијама унутар процјепа (слика 8.5



Слика 8.5: Нормализоване кондуктансе за спој са $\alpha = 0.25\pi$ и $\beta = 0$ (a), $\alpha = 0.25\pi$ и $\beta = 0.25\pi$ (b). Плава линија односи се на случај кад Рашба SOC није присутан $\chi = 0$, а црвена кад је $\chi = 0.4$. Кондуктансе по упадном углу θ за спојеве са слика (a) и (b) за $\chi = 0$ (c) и (d), и за $\chi = 0.4$ (e) и (f). Остали параметри су $Z = 4$, $k_F d = 10$ и $J/\mu = 0.4$.

(b)). Јаснија слика стиче се посматрајући кондуктансе разложене по упадним угловима честица. На слици 8.5 (c) види се да се пикови на кондуктанси појављују на ивицама процепа кад је $\chi = 0$. Међутим, за $\chi = 0.4$ јасно се виде покови и унутар гепа на слици 8.5 (e). Слично се види и на сликама 8.5 (d) и (e) гдје се појављује раван бенд на нултој енергији. Поред њега, у присуству SOC јављају се и везана стања на ненултим енергијама.

Даље је испитивана зависност ABS у односу на јачину поља спинског цијепања у алтермагнетном слоју. На сликама 8.6 и 8.7 приказана је зависност нормализованих кондуктанси од јачине алтермагнетног поља. Слика 8.6 показује осциловање пикова кондуктанси са J. Тако се види да је број стања када је оријентација суперпроводника $d_{x^2-y^2}$ већи него



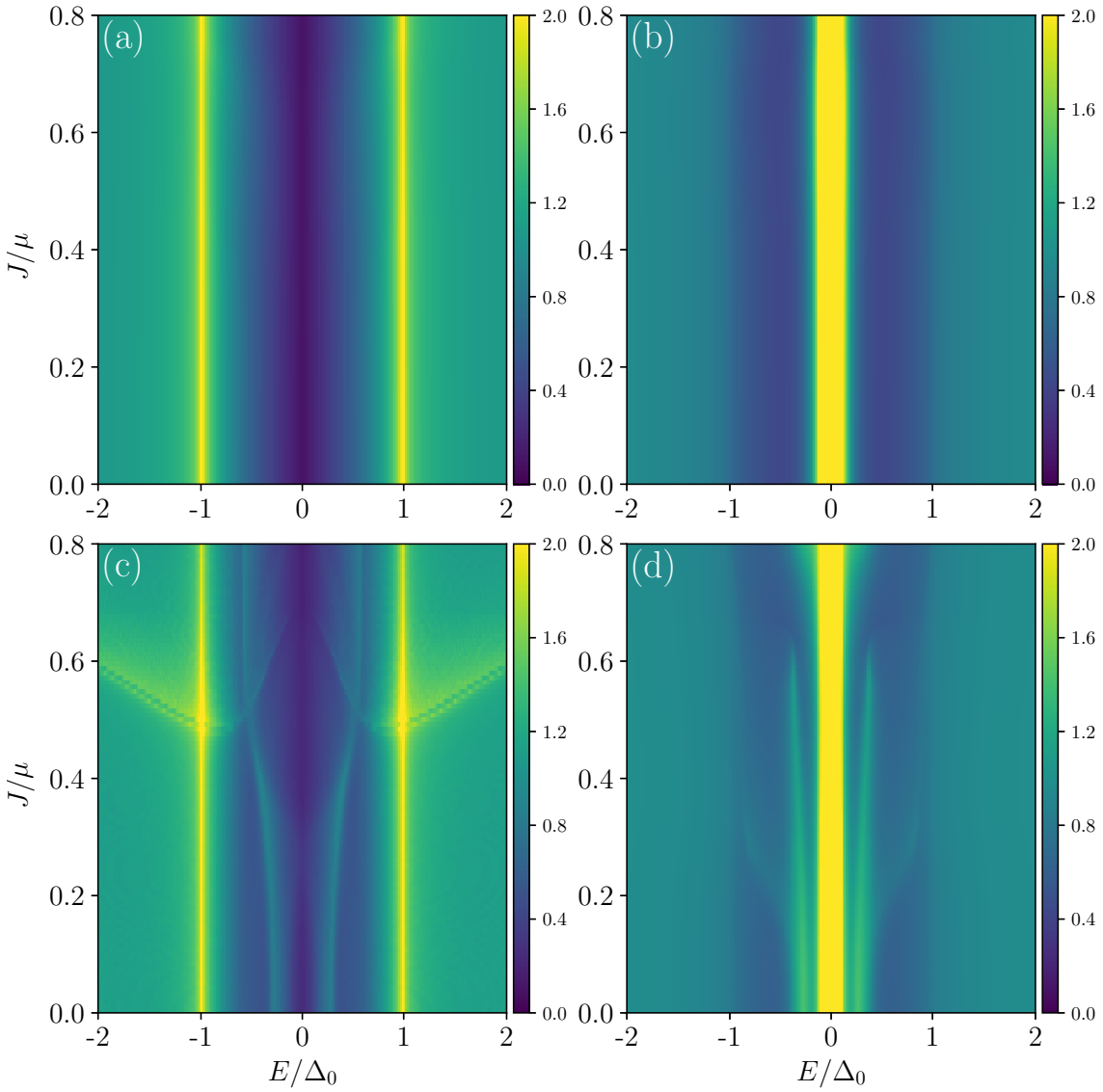
Слика 8.6: Нормализоване кондуктансе у зависности од јачине алермагнетног поља J/μ за $\alpha = 0$ и: (a) $\beta = 0$, $\chi = 0$, (b) $\beta = 0.25\pi$, $\chi = 0$, (c) $\beta = 0$, $\chi = 0.4$, (d) $\beta = 0.25\pi$, $\chi = 0.4$. Остали параметри су $Z = 4$, $k_F d = 10$.

кад је суперпроводник d_{xy}. Појава везаних стања нулте енергије је могућа али је јако осјетљива на вриједност J. Овакве особине постоје и у присуству Рашба SOC и у њеном одсуству, осим што се у случају споја са Рашба суперпроводником јавља већи број пикова.

У случају када је оријентација алтермагнета $\alpha = 0$ зависност енергија на којима се јављају пикови кондуктанси од J, значајно је другачија. Наиме, на слици 8.7 види се да је у случају $d_{x^2-y^2}$ оријентације суперпроводника V облик кондуктанси робустан на промјену J. Такође, у случају d_{xy} оријентације суперпроводника пик кондуктансе на нултој енергији је робустан и остаје доминантан на свим вриједностима J. У присуству Рашба SOC у суперпроводнику ове особине су задржане с тим што су се јавила и друга стања унутар суперпроводног гапа чија енергија се мијења са промјеном J.

Поменуте особине могу се објаснити акумулацијом фазе приликом проласка честице кроз алтермагнетни слој. Акумулација фазе пропорционална је са $(k^+_{e\uparrow} - k^-_{e\uparrow} + k^-_{h\downarrow} - k^+_{h\downarrow})d$, гдје је d дебљина алтермагнетног слоја. Ова акумулација фазе потиснута је у d_{xy} оријентисаном алтермагнету, док је значајна у $d_{x^2-y^2}$ алтермагнетном уређењу што објашњава осцилаторни карактер енергија везаних стања са јачином поља спинског цијепања. Међутим, појава додатних везаних стања када се ради о споју у коме учествује Рашба су-

перпроводник указује на то да акумулација фазе није везана само за акумулацију усљед проласка кроз алтермагнет, него и за ротације у спинском простору које доводе до различитих акумулација у различитим правцима квазичестица усљед раздвојених спинских бендова и спина фиксираног за вектор импулса (енг. спин-моментум лоцкинг).



Слика 8.7: Нормализоване кондуктансе у зависности од јачине алермагнетног поља J/μ за $\alpha = 0.25\pi$ и: (a) $\beta = 0$, $\chi = 0$, (b) $\beta = 0.25\pi$, $\chi = 0$, (c) $\beta = 0$, $\chi = 0.4$, (d) $\beta = 0.25\pi$, $\chi = 0.4$. Остали параметри су $Z = 4$, $k_F d = 10$.

8.4 Закључак

Анализом диференцијалних кондуктанси у спојевима типа N/AM/D показано је да електронска транспортна својства значајно зависе од међусобног утицаја алтермагнетног спинског цијепања, анизотропије суперпроводног d-wave параметра уређења и Рашба спин-орбитног спрезања у суперпроводној електроди. У одсуству Рашба SOC-а у суперпроводној електроди, понашање Андрејевљевих везаних стања одређено је првенствено оријентацијом параметра уређења и акумулацијом фазе при проласку квазичестица кроз алтермагнетни слој. Због тога се код $d_{x^2-y^2}$ оријентације алтермагнета јавља изражена

зависност енергија везаних стања од јачине поља спинског цијепања, J, док су за d_{xy} оријентацију ове промјене знатно слабије.

Увођењем Рашба SOC-а у суперповодник долази до цијепања спинских канала у импулсном простору и појаве додатних квазичестичних стања, што се у кондуктансама манифестује појавом нових пикова унутар суперпроводног енергијског процјепа. Дисперзија енергија везаних стања у зависности од упадног угла постаје сложенија, јер различити хелицитетни канали могу имати различите вриједности ефективног суперпроводног процјепа. Посљедица тога је сложенија структура кондуктансе и појава додатних везаних стања, укључујући стања на ненултим енергијама у системима у којима без SOC-а доминирају V-облик или нултоенергетска Андрејевљева везана стања. Добијени резултати показују да Рашба SOC представља додатни механизам контроле спектра Андрејевљевих везаних стања, чије дјеловање зависи од међусобне оријентације алтермагнетног и суперпроводног параметра уређења.

Глава 9

Закључна разматрања

У овој дисертацији проучаване су транспортне особине дводимензионалних хетероструктура суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима. Посебна пажња посвећена је Џозефсоновим спојевима са d-wave суперпроводницима, у којима комбинација анизотропије параметра уређења, магнетне структуре и Рашба спин-орбитног спрезања омогућава контролу транспорта наелектрисања. У завршном дијелу дисертације разматран је и транспорт у хетероструктурама са алтермагнетним материјалом, гдје су анализирани утицаји алтермагнетног спинског цијепања, d-wave анизотропије и Рашба спин-орбитног спрезања на Андрејевљева везана стања и диференцијалну кондуктансу.

Након уводне главе 1, у глави 2 дат је преглед BCS теорије суперпроводљивости, Богољубов-де Женовог формализма, као и основе разумијевања ефекта близине у суперпроводним хетероструктурама. Глава 3 посвећена је конструкцији Макмиланове Гринове функције и извођењу формуле за Џозефсонову струју како би се генерализовао Фурусаки-Цукада приступ на спојеве са анизотропним суперпроводним уређењем и спински активним материјалима.

У глави 4 показано је да се стање Џозефсоновог споја са феромагнетним двослојем може контролисати промјеном кристалне оријентације d-wave суперпроводних електрода и релативне мисоријентације измјенских поља у феромагнетним слојевима. Поред стабилних 0 и π стања, у спојевима са $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} оријентисаним суперпроводним електродама нађена је коегзистенција 0 и π стања, као и $\pi/2$ стање. Такође, контролом међусобне оријентације магнетизација у тачкама фазног прелаза споја могуће је остварити троструко дегенерисано стање са фазним разликама минимума слободне Џозефсонове енергије на вриједностима 0, π и $\pi/2$ [33].

У глави 5 анализиран је утицај Рашба спин-орбитног спрезања на транспорт у d-wave суперпроводник/феромагнет/d-wave суперпроводник Џозефсоновом споју. Показано је да су за појаву аномалног и диодног Џозефсоновог ефекта истовремено потребни Рашба SOC на S/F границама, ненулта компонента измјенског поља нормална на раван споја и несиметрична оријентација суперпроводних кристала, $\beta_L \neq \pm\beta_R$. Анализа CPR показала је да се велика диодна ефикасност јавља усљед постојања више хармонијских компоненти, минимално $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$. Када су њихове амплитуде упоредивих редова величине, добијена је диодна ефикасност већа од 30%. Показано је и да се прелаз између 0-оликог и π-оликог стања може остварити промјеном измјенског поља или Рашба SOC-а, при чему фазни прелази могу бити континуални или праћени скоком фазе. Добијени резултати такође указују на могућност температурно индукованих 0-π-оликих фазних прелаза [81].

Ова анализа је у глави 6 проширена на Џозефсонове спојеве са два феромагнетна слоја уз Рашба SOC на S/F границама. Систематском анализом симетрија хамилтонијана споја идентификовани су услови за појаву AJE и JDE и спојеви су класификовани у три класе. Показано је да за s-wave суперпроводнике, као и за d-wave суперпроводнике са $\beta_L = -\beta_R$,

појава AJE и JDE захтијева некопланарну оријентацију двије магнетизације и z-осе, као и то да њихове z-компоненте немају једнаке интензитете и супротне знакове. За спојеве са $\beta_L = \beta_R$ оријентисаним суперпроводним електродама AJE и JDE су забрањени кад је оријентација измјенских поља таква да су им поларни углови једнаки, а азимутални једнаки или се разликују за π. За преостале оријентације d-wave електрода, $\beta_L \neq \pm\beta_R$, AJE и JDE се могу појавити када бар један феромагнетни слој има ненулту компоненту измјенског поља нормалну на раван споја. Сви услови добијени анализом симетрија потврђени су нумеричким прорачунима. У испитиваним конфигурацијама показано је да ефикасност Џозефсонове диоде може да буде већа од 40% [96].

За посебан случај споја између $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} суперпроводника показано је да додатне симетрије могу забранити JDE за копланарне оријентације магнетизација и z-осе. У том случају CPR садржи хармонике облика $\sin 2n\varphi$ и $\cos(2n-1)\varphi$, што омогућава разумијевање коегзистенције 0-оликих и π-оликих стања. Аномална Џозефсонова струја нестаје на фазном прелазу између ових стања, док њена промјена знака може служити као индикатор прелаза [96].

Анализа Андрејевљевих везаних стања у глави 7 дала је додатни увид у микроскопско поријекло нереципрочног транспорта. Асиметрија ABS спектра око $\varphi = 0$ повезана је са аномалним фазним помјерајем и неједнаким критичним струјама у супротним смјеровима. У случајевима у којима се појављује JDE, различитим попречним каналима могу доминирати различити хармоници у CPR, а коегзистенција $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ и $\cos\varphi$ компоненти представља кључни услов за појаву диоде. Поређењем ABS и Фурусаки–Цукада приступа за израчунавање CPR показано је да ABS доминанантно доприносе транспорту, кад год ABS бендови нијеси близу пресјека са нултом енергијом (енг. zero energy crossing) или кад d-wave енергијски процјеп није готово затворен [96].

У глави 8 разматран је транспорт у алтермагнет/суперпроводник спојевима. Показано је да диференцијална кондуктанса у N/AM/D споју значајно зависи од алтермагнетног уређења, оријентације d-wave параметра уређења и Рашба спин-орбитног спрезања. У одсуству Рашба SOC-а, понашање Андрејевљевих везаних стања првенствено је одређено оријентацијом параметра уређења и фазом коју квазичестице акумулирају при проласку кроз алтермагнетни слој. Зависност енергија ABS од јачине алтермагнетног поља посебно је изражена за $d_{x^2-y^2}$ оријентацију, док је за d_{xy} оријентацију знатно слабија. Увођењем Рашба SOC-а долази до формирања хеликалних спинских бендова у суперповоднику појаве додатних стања, што се у кондуктанси манифестује појавом нових пикова унутар суперпроводног енергијског процјепа. Тиме је показано да Рашба SOC представља додатни механизам за контролу ABS спектра и транспортног одзива суперпроводник/алтермагнет хетероструктура.

На крају, резултати представљени у овој дисертацији показују да се сложена транспортна својства дводимензионалних суперпроводних хетероструктура могу разумјети и контролисати кроз међусобни утицај симетрије параметра уређења, магнетне структуре и спин-орбитног спрезања. Добијени резултати пружају опис механизама који одређују фазну структуру, нереципрочни транспорт и спектар Андрејевљевих везаних стања, чиме доприносе бољем разумијевању транспортних појава у спин-активним суперпроводним хетероструктурама.

Додатак А

Симетрије хамилтонијана

За Џозефсонове спојеве са s-wave или $(\beta_L, \beta_R) = (0, 0)$ оријентисаним d-wave суперпроводним електродама, и у одсуству измјенског и SOC поља, једночестични хамилтонијан је дат изразом

$$H = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \tau_z + \hat{\Delta} \Theta(-x) \Theta(x - d), \tag{A.1}$$

при чему постоји 16 трансформација симетрије $UH(\varphi)U^\dagger = H(-\varphi)$. Ове трансформације су наведене у Табели А1.

Увођењем додатних елемената у спојеве, као што су феромагнетно измјенско поље произвољне оријентације у два слоја, Рашба SOC на S/F границама и произвољно оријентисане d-wave суперпроводне електроде, може доћи до нарушавања симетрије. То доводи до појаве ненулте Џозефсонове струје при нултој фазној разлици између суперпроводних кондензата. Табела А1 показује како ове трансформације утичу на елементе хамилтонијана споја. Анализа ових трансформација и њихових посљедица дата је у главном тексту. Додатне трансформације коришћене у одјељцима 6.2 и 7 наведене су у табели А2.

Табела А1: Табела трансформација $UHU^\dagger$ и начин на који се мијењају варијабле од којих зависи хамилтонијан при овим трансформацијама. Додатне колоне са десне стране односе се на случај кад Рашба SOC на лијевој и десној S/F граници нијесу једнаки.

U	φ	β_L	β_R	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$R_L = -R_R = R$	R_L	R_R
T	$-\varphi$	β_L	β_R	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	R	R_L	R_R
P_x	$-\varphi$	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$-R$	R_R	R_L
$\sigma_x T$	$-\varphi$	β_L	β_R	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
$\sigma_y T$	$-\varphi$	β_L	β_R	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
$\sigma_z T$	$-\varphi$	β_L	β_R	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	R	R_L	R_R
$P_y T$	$-\varphi$	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
$P_x\sigma_x$	$-\varphi$	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	R	$-R_R$	$-R_L$
$P_x\sigma_y$	$-\varphi$	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	R	$-R_R$	$-R_L$
$P_x\sigma_z$	$-\varphi$	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$-R$	R_R	R_L
$P_x P_y$	$-\varphi$	β_R	β_L	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	R	$-R_R$	$-R_L$
$P_y\sigma_x T$	$-\varphi$	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	R	R_L	R_R
$P_y\sigma_y T$	$-\varphi$	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	R	R_L	R_R
$P_x P_y\sigma_z$	$-\varphi$	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	R	$-R_R$	$-R_L$
$P_y\sigma_z T$	$-\varphi$	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
$P_x P_y\sigma_x$	$-\varphi$	β_R	β_L	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	$-R$	R_R	R_L
$P_x P_y\sigma_y$	$-\varphi$	β_R	β_L	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	$-R$	R_R	R_L

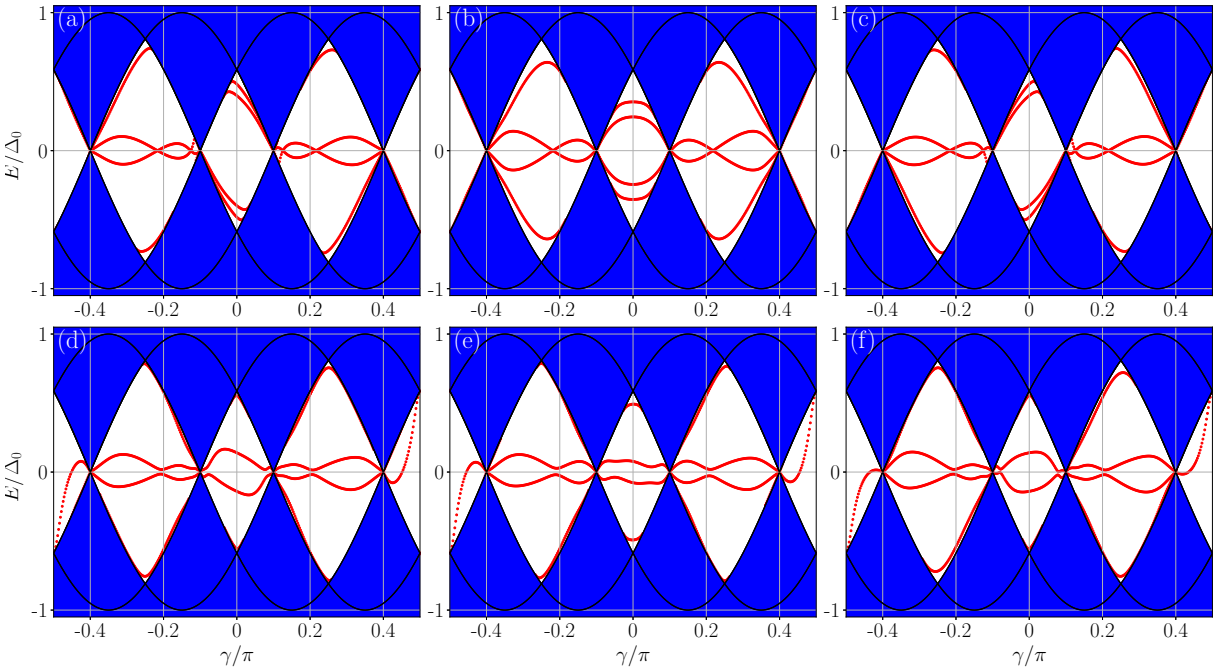
Табела А2: Табела додатних трансформација $UHU^\dagger$ и начин на који се мијењају варијабле од којих зависи хамилтонијан при овим трансформацијама. Додатне колоне са десне стране односе се на случај кад Рашба SOC на лијевој и десној S/F граници нијесу једнаки.

U	φ	β_L	β_R	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$R_L=-R_R=R$	R_L	R_R
σ_x	φ	β_L	β_R	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
σ_y	φ	β_L	β_R	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
σ_z	φ	β_L	β_R	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	R	R_L	R_R
P_y	φ	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i\phi_L}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i\phi_R}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
P_xT	φ	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$-R$	R_R	R_L
$P_y\sigma_x$	φ	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	R	R_L	R_R
$P_y\sigma_y$	φ	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos(\pi-\theta_L)$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	$h\cos(\pi-\theta_R)$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	R	R_L	R_R
$P_y\sigma_z$	φ	$-\beta_L$	$-\beta_R$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi+\phi_L)}$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi+\phi_R)}$	$-R$	$-R_L$	$-R_R$
$P_x\sigma_xT$	φ	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{i(\pi-\phi_R)}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{i(\pi-\phi_L)}$	R	$-R_R$	$-R_L$
$P_x\sigma_yT$	φ	$-\beta_R$	$-\beta_L$	$h\cos\theta_R$	$h\sin\theta_R e^{-i\phi_R}$	$h\cos\theta_L$	$h\sin\theta_L e^{-i\phi_L}$	R	$-R_R$	$-R_L$

Додатак Б

Додатни нумерички резултати

Зависности енергија ABS од упадног угла за оријентацију d-wave електрода $(\beta_L, \beta_R) = (0.15\pi, 0.15\pi)$ и хомогену феромагнетну баријеру приказане су на сликама Б.1 (a)-(c) за фазне разлике $\varphi = -0.5\pi$, 0 и 0.5π, респективно. У овом режиму не уочавају се ни AJE ни JDE. Приказани бендови потврђују симетрију честица–шупљина, задовољавајући релацију $E(\gamma, \varphi) = -E(-\gamma, \varphi)$. Будући да AJE није присутан, такође важи релација $E(\gamma, \varphi) = E(-\gamma, -\varphi)$, што се може провјерити поређењем слика Б.1 (a) и (c). Посљедично, важи и релација $E(\gamma, \varphi) = -E(\gamma, -\varphi)$. Као резултат ових релација, ABS спектри зависни од фазе за γ и $-\gamma$ показују огледалну симетрију (видјети слике 7.3 (c1), (e1) и (g1), гдје AJE није присутан), при чему се пресјеци бендова јављају на $\varphi = 0$.



Слика Б.1: Енергије ABS у функцији упадног угла γ за d-wave Џозефсонов спој типа $(0.15\pi, 0.15\pi)$ за: (a)-(c) хомогену феромагнетну баријеру са $\theta_L = \theta_R = 0.3\pi$ и $\phi_L = \phi_R = 0.3\pi$, и (d)-(f) нехомогену феромагнетну баријеру са $\theta_L = 0.3\pi$, $\phi_L = 0.3\pi$, $\theta_R = 0.13\pi$ и $\phi_R = 1.16\pi$. Панели (a) и (d) израчунати су за $\varphi = -0.5\pi$, (b) и (e) за $\varphi = 0$, а (c) и (f) за $\varphi = 0.5\pi$. Преостали параметри су исти као на слици 6.2.

На сликама Б.1 (d)-(e) приказане су енергије ABS бендова у функцији γ за случај нехомогене феромагнетне баријере, гдје се појављују и AJE и JDE. У овом случају очувана остаје само симетрија честица–шупљина, док су остале симетрије нарушене. Као резултат тога, губи се огледална симетрија фазно зависних трака за γ и $-\gamma$, а сваки њихов пресјек

постаје помјерен у односу на $\varphi = 0$.

Бијеле области на панелима представљају суперпроводни енергеијски процјеп у функцији правца кретања квазичестица. Правци у којима се процјеп затвара јасно су уочљиви и поклапају се са нодалним линијама Δ и $\widetilde{\Delta}$. Присуство јако смањених вриједности енергијског процјепа доводи до тога да бендови буду потиснути изван гепа. То је главни разлог због којег, у случају d-wave суперпроводника, стања која носе струју нијесу доминантно одређена ABS-овима; значајан допринос такође потиче од стања у континуалном дијелу спектра изнад енергије процјепа. Стога израчунавање Џозефсонове струје користећи само ABS није довољно, док F-T метода пружа потпунији опис јер укључује и ABS и стања изнад суперпроводног процјепа.

Литература

[1] A. I. Buzdin, Rev. Mod. Phys. **77**, 935 (2005).

[2] F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, Rev. Mod. Phys. **77**, 1321 (2005).

[3] I. Žutić, J. Fabian, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004).

[4] M. Eschrig, Physics Today **64**, 43 (2011).

[5] J. Linder and J. W. A. Robinson, Nature Physics **11**, 307 (2015).

[6] M. Eschrig, Reports on Progress in Physics **78**, 104501 (2015).

[7] A. S. Mel'nikov, S. V. Mironov, A. V. Samokhvalov, and A. I. Buzdin, Phys. Usp. **65**, 1248 (2022).

[8] R. Cai, I. Žutić, and W. Han, Advanced Quantum Technologies **6**, 2200080 (2023).

[9] S. De Franceschi, L. Kouwenhoven, C. Schönenberger, and W. Wernsdorfer, Nature Nanotechnology **5**, 703 (2010).

[10] M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf, Science **339**, 1169 (2013).

[11] T. Golod and V. M. Krasnov, Nature Communications **13**, 3658 (2022).

[12] S. Alam, M. S. Hossain, S. R. Srinivasa, and A. Aziz, Nature Electronics **6**, 185 (2023).

[13] B. Josephson, Physics Letters **1**, 251 (1962).

[14] A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, and E. Il'ichev, Rev. Mod. Phys. **76**, 411 (2004).

[15] A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii, and S. V. Panyukov, JETP Lett. (Engl. Transl.); (United States) **35:4** (1982).

[16] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B **56**, 892 (1997).

[17] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Y. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov, and J. Aarts, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001).

[18] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis, and R. Boursier, Phys. Rev. Lett. **89**, 137007 (2002).

[19] Y. Blum, A. Tsukernik, M. Karpovski, and A. Palevski, Phys. Rev. Lett. **89**, 187004 (2002).

[20] Z. Pajović, M. Božović, Z. Radović, J. Cayssol, and A. Buzdin, Phys. Rev. B **74**, 184509 (2006).

[21] E. C. Gingrich, B. M. Niedzielski, J. A. Glick, Y. Wang, D. L. Miller, R. Loloee, J. Pratt, W. P., and N. O. Birge, Nature Physics **12**, 564 (2016).

[22] B. M. Niedzielski, T. J. Bertus, J. A. Glick, R. Loloee, W. P. Pratt, and N. O. Birge, Phys. Rev. B **97**, 024517 (2018).

[23] A. E. Madden, J. C. Willard, R. Loloee, and N. O. Birge, Superconductor Science and Technology **32**, 015001 (2018).

[24] D. J. Van Harlingen, Rev. Mod. Phys. **67**, 515 (1995).

[25] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B **53**, 9371 (1996).

[26] Y. Asano, Phys. Rev. B **63**, 052512 (2001).

[27] T. Löfwander, V. S. Shumeiko, and G. Wendin, Superconductor Science and Technology **14**, R53 (2001).

[28] E. Il'ichev, M. Grajcar, R. Hlubina, R. P. J. IJsselsteijn, H. E. Hoenig, H.-G. Meyer, A. Golubov, M. H. S. Amin, A. M. Zagoskin, A. N. Omelyanchouk, and M. Y. Kupriyanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 5369 (2001).

[29] G. Testa, E. Sarnelli, A. Monaco, E. Esposito, M. Ejrnaes, D.-J. Kang, S. H. Mennema, E. J. Tarte, and M. G. Blamire, Phys. Rev. B **71**, 134520 (2005).

[30] Z. Radović, L. Dobrosavljević-Grujić, and B. Vujičić, Phys. Rev. B **60**, 6844 (1999).

[31] R. Zikic and L. Dobrosavljević-Grujić, Phys. Rev. B **75**, 100502(R) (2007).

[32] R. Zikic, L. Dobrosavljević-Grujić, and B. Vujičić, Superconductor Science and Technology **22**, 075022 (2009).

[33] S. Djurdjević and Z. Popović, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2021**, 083I02 (2021), https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2021/8/083I02/39678438/ptab077.pdf .

[34] S. Yip, Phys. Rev. B **52**, 3087 (1995).

[35] M. Sigrist, Progress of Theoretical Physics **99**, 899 (1998).

[36] S. Kashiwaya and Y. Tanaka, Reports on Progress in Physics **63**, 1641 (2000).

[37] A. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **101**, 107005 (2008).

[38] A. Zazunov, R. Egger, T. Jonckheere, and T. Martin, Phys. Rev. Lett. **103**, 147004 (2009).

[39] A. A. Reynoso, G. Usaj, C. A. Balseiro, D. Feinberg, and M. Avignon, Phys. Rev. Lett. **101**, 107001 (2008).

[40] Y. Tanaka, T. Yokoyama, and N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **103**, 107002 (2009).

[41] J.-F. Liu and K. S. Chan, Phys. Rev. B **82**, 125305 (2010).

[42] A. A. Reynoso, G. Usaj, C. A. Balseiro, D. Feinberg, and M. Avignon, Phys. Rev. B **86**, 214519 (2012).

[43] A. Brunetti, A. Zazunov, A. Kundu, and R. Egger, Phys. Rev. B **88**, 144515 (2013).

[44] T. Yokoyama, M. Eto, and Y. V. Nazarov, Phys. Rev. B **89**, 195407 (2014).

[45] F. Konschelle, I. V. Tokatly, and F. S. Bergeret, Phys. Rev. B **92**, 125443 (2015).

[46] F. S. Bergeret and I. V. Tokatly, Europhysics Letters **110**, 57005 (2015).

[47] B. Lu, K. Yada, A. A. Golubov, and Y. Tanaka, Phys. Rev. B **92**, 100503(R) (2015).

[48] K. N. Nesterov, M. Houzet, and J. S. Meyer, Phys. Rev. B **93**, 174502 (2016).

[49] M. A. Silaev, I. V. Tokatly, and F. S. Bergeret, Phys. Rev. B **95**, 184508 (2017).

[50] M. Minutillo, D. Giuliano, P. Lucignano, A. Tagliacozzo, and G. Campagnano, Phys. Rev. B **98**, 144510 (2018).

[51] M. Alidoust, C. Shen, and I. Žutić, Phys. Rev. B **103**, L060503 (2021).

[52] H. Meng, X. Wu, Y. Ren, and J. Wu, Phys. Rev. B **106**, 174502 (2022).

[53] J. Hu, C. Wu, and X. Dai, Phys. Rev. Lett. **99**, 067004 (2007).

[54] A. Rasmussen, J. Danon, H. Suominen, F. Nichele, M. Kjaergaard, and K. Flensberg, Phys. Rev. B **93**, 155406 (2016).

[55] K. Misaki and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **103**, 245302 (2021).

[56] M. Davydova, S. Prembabu, and L. Fu, Science Advances **8**, eabo0309 (2022).

[57] Y. Zhang, Y. Gu, P. Li, J. Hu, and K. Jiang, Phys. Rev. X **12**, 041013 (2022).

[58] J. J. He, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, New Journal of Physics **24**, 053014 (2022).

[59] K. Iang and J. Hu, Nature Physics **18**, 1145 (2022).

[60] M. Nadeem, M. S. Fuhrer, and X. Wang, Nature Reviews Physics **5**, 558 (2023).

[61] H. Vakili, M. Ali, and A. A. Kovalev, Phys. Rev. B **110**, 104518 (2024).

[62] A. S. Osin, A. Levchenko, and M. Khodas, Phys. Rev. B **109**, 184512 (2024).

[63] F. Ando, Y. Miyasaka, T. Li, J. Ishizuka, T. Arakawa, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Yanase, and T. Ono, Nature **584**, 373 (2020).

[64] C. Baumgartner, L. Fuchs, A. Costa, S. Reinhardt, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, P. E. F. Junior, D. Kochan, J. Fabian, N. Paradiso, and C. Strunk, Nature Nanotechnology **17**, 39 (2022).

[65] Y. Tanaka, B. Lu, and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **106**, 214524 (2022).

[66] T. H. Kokkeler, A. A. Golubov, and F. S. Bergeret, Phys. Rev. B **106**, 214504 (2022).

[67] C. Baumgartner, L. Fuchs, A. Costa, J. Picó-Cortés, S. Reinhardt, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, P. E. Faria Junior, D. Kochan, J. Fabian, N. Paradiso, and C. Strunk, Journal of Physics: Condensed Matter **34**, 154005 (2022).

[68] H. Wu, Y. Wang, Y. Xu, J. Liu, Q. Zhang, S. Zhao, H. Chen, Z. Lin, P. Li, T. Cao, X. Zhang, P. Jarillo-Herrero, and L. He, Nature **604**, 653 (2022).

[69] B. Pal, A. Chakraborty, P. K. Sivakumar, M. Davydova, A. K. Gopi, A. K. Pandeya, J. A. Krieger, Y. Zhang, M. Date, S. Ju, N. Yuan, N. B. M. Schröter, L. Fu, and S. S. P. Parkin, Nature Physics **18**, 1228 (2022).

[70] B. Turini, S. Salimian, M. Carrega, A. Iorio, E. Strambini, F. Giazotto, V. Zannier, L. Sorba, and S. Heun, Nano Letters **22**, 8502 (2022).

[71] K. R. Jeon, J. K. Kim, J. Yoon, G. H. Lee, K. M. Song, S. J. Kim, J. H. Park, Y. J. Shin, S. Lee, M. S. Choi, T. Y. Kim, and C. S. Hwang, Nature Materials **21**, 1008 (2022).

[72] A. Costa, C. Baumgartner, S. Reinhardt, M. Fuchs, L. Lu, K. Watanabe, T. Taniguchi, and C. Schönenberger, Nature Nanotechnology **18**, 1266 (2023).

[73] B. Lu, S. Ikegaya, P. Burset, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **131**, 096001 (2023).

[74] A. Costa, J. Fabian, and D. Kochan, Phys. Rev. B **108**, 054522 (2023).

[75] D. Kochan, A. Costa, I. Zhumagulov, and I. Žutić, Phenomenological theory of the supercurrent diode effect: The Lifshitz invariant (2023), arXiv:2303.11975 [cond-mat.supr-con] .

[76] N. Lotfizadeh, W. F. Schiela, B. Pekerten, P. Yu, B. Heiba Elfeky, W. M. Strickland, A. Matos-Abiague, and J. Shabani, Communications Physics **7**, 120 (2024).

[77] J. Wang, Y. Jiang, J. J. Wang, and J.-F. Liu, Phys. Rev. B **109**, 075412 (2024).

[78] D. Debnath and P. Dutta, Phys. Rev. B **109**, 174511 (2024).

[79] A. Costa, O. Kanehira, H. Matsueda, and J. Fabian, Phys. Rev. B **111**, L140506 (2025).

[80] N. L. Schulz, D. Nikolić, and M. Eschrig, Phys. Rev. B **112**, 104514 (2025).

[81] S. Djurdjević and Z. Popović, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2025**, 103I01 (2025), https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2025/10/103I01/64236500/ptaf124.pdf .

[82] B. Zhang, Z. Li, V. Aguilar, P. Zhang, M. Pendharkar, C. Dempsey, J. S. Lee, S. D. Harrington, S. Tan, J. S. Meyer, M. Houzet, C. J. Palmstrom, and S. M. Frolov, SciPost Phys. **18**, 013 (2025).

[83] D. Wang, Q.-H. Wang, and C. Wu, Josephson diode effect: a phenomenological perspective (2025), arXiv:2506.23200 [cond-mat.supr-con] .

[84] G. Behner, A. R. Jalil, D. Grützmacher, and T. Schäpers, Phys. Rev. B **113**, 035440 (2026).

[85] J. Cayao and M. Sato, Phys. Rev. Res. **8**, 013326 (2026).

[86] J. Bardeen and J. L. Johnson, Phys. Rev. B **5**, 72 (1972).

[87] I. O. Kulik and A. N. Omel'Yanchuk, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **21**, 96 (1975).

[88] A. Furusaki and M. Tsukada, Solid State Communications **78**, 299 (1991).

[89] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **67**, 3836 (1991).

[90] A. Furusaki, Superlattices and Microstructures **25**, 809 (1999).

[91] T. Mizushima and K. Machida, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **376**, 20150355 (2018).

[92] J. A. Sauls, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **376**, 20180140 (2018).

[93] J. Cayao, N. Nagaosa, and Y. Tanaka, Phys. Rev. B **109**, L081405 (2024).

[94] S. Mondal, P.-H. Fu, and J. Cayao, Phys. Rev. B **112**, 144506 (2025).

[95] G.-Q. Wang, J.-J. Miao, and W.-Q. Chen, Phys. Rev. B **112**, 014508 (2025).

[96] S. Djurdjević and Z. Popović, Phys. Rev. B **114**, 144503 (2026).

[97] M. Naka, S. Hayami, H. Kusunose, Y. Yanagi, and Y. Motome, Nature Communications **10**, 4305 (2019).

[98] S. Hayami, Y. Yanagi, and H. Kusunose, Journal of the Physical Society of Japan **88**, 123702 (2019).

[99] K.-H. Ahn, A. Hariki, K.-W. Lee, and J. Kuneš, Phys. Rev. B **99**, 184432 (2019).

[100] L. Smejkal, R. González-Hernández, T. Jungwirth, and J. Sinova, Science Advances **6**, eaaz8809 (2020).

[101] L.-D. Yuan, Z. Wang, J.-W. Luo, E. I. Rashba, and A. Zunger, Phys. Rev. B **102**, 014422 (2020).

[102] L. Šmejkal, J. Sinova, and T. Jungwirth, Physical Review X **12**, 040501 (2022).

[103] L. Šmejkal, J. Sinova, and T. Jungwirth, Physical Review X **12**, 031042 (2022).

[104] S. Bhowal and N. A. Spaldin, Phys. Rev. X **14**, 011019 (2024).

[105] T. Jungwirth, R. M. Fernandes, J. Sinova, and L. Smejkal, Altermagnets and beyond: Nodal magnetically-ordered phases (2024), arXiv:2409.10034 [cond-mat.mtrl-sci] .

[106] S. Lee, S. Lee, S. Jung, J. Jung, D. Kim, Y. Lee, B. Seok, J. Kim, B. G. Park, L. Šmejkal, C.-J. Kang, and C. Kim, Phys. Rev. Lett. **132**, 036702 (2024).

[107] T. Osumi, S. Souma, T. Aoyama, K. Yamauchi, A. Honma, K. Nakayama, T. Takahashi, K. Ohgushi, and T. Sato, Phys. Rev. B **109**, 115102 (2024).

[108] J. Krempaský, L. Šmejkal, S. W. D'Souza, M. Hajlaoui, G. Springholz, K. Uhlířová, F. Alarab, P. C. Constantinou, V. Strocov, D. Usanov, W. R. Pudelko, R. González-Hernández, A. B. Hellenes, Z. Jansa, H. Reichlová, Z. Šobáň, R. D. Gonzalez Betancourt, P. Wadley, J. Sinova, D. Kriegner, J. Minár, J. H. Dil, and T. Jungwirth, Nature **626**, 517 (2024).

[109] C. Sun, A. Brataas, and J. Linder, Phys. Rev. B **108**, 054511 (2023).

[110] M. Papaj, Phys. Rev. B **108**, L060508 (2023).

[111] Z. P. Niu and Z. Yang, Journal of Physics D: Applied Physics **57**, 395301 (2024).

[112] Y. Nagae, A. P. Schnyder, and S. Ikegaya, Phys. Rev. B **111**, L100507 (2025).

[113] J. A. Ouassou, A. Brataas, and J. Linder, Phys. Rev. Lett. **131**, 076003 (2023).

[114] C. W. J. Beenakker and T. Vakhtel, Phys. Rev. B **108**, 075425 (2023).

[115] B. Lu, K. Maeda, H. Ito, K. Yada, and Y. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **133**, 226002 (2024).

[116] W. Zhao, Y. Fukaya, P. Burset, J. Cayao, Y. Tanaka, and B. Lu, Phys. Rev. B **111**, 184515 (2025).

[117] H. K. Onnes, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **11**, 168 (1909).

[118] H. K. Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **120b, 122b, 124c** (1911).

[119] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Die Naturwissenschaften **21**, 787 (1933).

[120] F. London and H. London, Proc. R. Soc. Lond. A **149**, 71 (1935).

[121] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).

[122] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).

[123] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).

[124] N. N. Bogolyubov, Sov. Phys. JETP **7**, 41 (1958).

[125] L. P. Gor'kov, Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.); (United States) **9:6** (1959).

[126] L. P. Gor'kov, Sov. Phys. JETP **10**, 593 (1960).

[127] R. Holm and W. Meissner, Zeitschrift für Physik **74**, 736 (1932).

[128] L. N. Cooper, Phys. Rev. Lett. **6**, 689 (1961).

[129] P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 (1964).

[130] A. F. Andreev, Soviet Physics JETP **19**, 1228 (1964), original: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 46, 1823 (1964).

[131] J. G. Bednorz and K. A. Müller, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **64**, 189 (1986).

[132] M. K. Wu, J. R. Ashburn, C. J. Torng, P. H. Hor, R. L. Meng, L. Gao, Z. J. Huang, Y. Q. Wang, and C. W. Chu, Physical Review Letters **58**, 908 (1987).

[133] A. P. Drozdov, M. I. Eremets, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin, Nature **525**, 73 (2015).

[134] A. P. Drozdov, P. P. Kong, V. S. Minkov, S. P. Besedin, M. A. Kuzovnikov, S. Mozaffari, L. Balicas, F. F. Balakirev, D. E. Graf, V. B. Prakapenka, E. Greenberg, D. A. Knyazev, M. Tkacz, and M. I. Eremets, Nature **569**, 528 (2019).

[135] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1996).

[136] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, revised edition ed. (Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1983).

[137] J. B. Ketterson and S.-N. Song, *Superconductivity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[138] V. V. Schmidt, *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications*, edited by P. Müller and A. V. Ustinov (Springer, Berlin, Heidelberg, 1997).

[139] J. G. Valatin, Il Nuovo Cimento **7**, 843 (1958).

[140] C. Timm, *Theory of superconductivity* (2012).

[141] M. Sigrist and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **63**, 239 (1991).

[142] C. C. Tsuei and J. R. Kirtley, Rev. Mod. Phys. **72**, 969 (2000).

[143] H. Ding, T. Yokoya, J. C. Campuzano, T. Takahashi, M. Randeria, M. R. Norman, T. Mochiku, K. Kadowaki, and J. Giapintzakis, Nature **382**, 51 (1996).

[144] W. N. Hardy, D. A. Bonn, D. C. Morgan, R. Liang, and K. Zhang, Phys. Rev. Lett. **70**, 3999 (1993).

[145] N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*, International Series of Monographs on Physics (Oxford University Press, Oxford, 2001).

[146] P.-G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (W. A. Benjamin, New York, 1966).

[147] J.-X. Zhu, *Bogoliubov-de Gennes Method and Its Applications*, Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin; New York, 2016).

[148] K. Halterman, O. T. Valls, and C.-T. Wu, Phys. Rev. B **92**, 174516 (2015).

[149] P. de Gennes and D. Saint-James, Physics Letters **4**, 151 (1963).

[150] C. Bruder, Phys. Rev. B **41**, 4017 (1990).

[151] Y. Tanaka and S. Tamura, Journal of Superconductivity and Novel Magnetism **34**, 1677 (2021).

[152] Y. Tanaka, S. Tamura, and J. Cayao, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2024**, 08C105 (2024).

[153] P. De Gennes and E. Guyon, Physics Letters **3**, 168 (1963).

[154] G. Deutscher and P. G. de Gennes, in *Superconductivity*, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969) pp. 1005–1034.

[155] N. R. Werthamer, Phys. Rev. **132**, 2440 (1963).

[156] J. J. Hauser, H. C. Theuerer, and N. R. Werthamer, Phys. Rev. **136**, A637 (1964).

[157] A. B. Pippard and W. L. Bragg, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **216**, 547 (1953).

[158] M. Stone, Phys. Rev. B **54**, 13222 (1996).

[159] T. Matsubara, Progress of Theoretical Physics **14**, 351 (1955).

[160] P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).

[161] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1136 (1964).

[162] E. A. Demler, G. B. Arnold, and M. R. Beasley, Phys. Rev. B **55**, 15174 (1997).

[163] L. Trifunovic and Z. Radović, Phys. Rev. B **82**, 020505(R) (2010).

[164] B. Lu and Y. Tanaka, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **376**, 20150246 (2018), https://royalsocietypublishing.org/rsta/article-pdf/doi/10.1098/rsta.2015.0246/1406806/rsta.2015.0246.pdf .

[165] S. Kashiwaya and Y. Tanaka, Reports on Progress in Physics **63**, 1641 (2000).

[166] C.-R. Hu, Phys. Rev. Lett. **72**, 1526 (1994).

[167] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. Lett. **74**, 3451 (1995).

[168] S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi, and K. Kajimura, Phys. Rev. B **53**, 2667 (1996).

[169] K. K. Likharev, Rev. Mod. Phys. **51**, 101 (1979).

[170] A. Barone and G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect* (John Wiley & Sons, 1982).

[171] F. Tafuri, ed., *Fundamentals and Frontiers of the Josephson Effect*, Springer Series in Materials Science (Springer Cham, 2019).

[172] P. W. Anderson and J. M. Rowell, Phys. Rev. Lett. **10**, 230 (1963).

[173] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **67**, 3836 (1991).

[174] R. Aguado, La Rivista del Nuovo Cimento **40**, 523 (2017).

[175] S. Graser, P. J. Hirschfeld, T. Kopp, R. Gutser, B. M. Andersen, and J. Mannhart, Nature Physics **6**, 609 (2010).

[176] V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 486 (1963).

[177] I. O. Kulik and A. N. Omel'yanchuk, Sov. J. Low Temp. Phys. (Engl. Transl.); (United States) **4:3** (1978).

[178] I. O. Kulik, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics **30**, 944 (1969).

[179] S. Kawabata, Y. Tanaka, A. A. Golubov, A. S. Vasenko, and Y. Asano, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **324**, 3467 (2012), fifth Moscow international symposium on magnetism.

[180] Y. V. Nazarov and Y. M. Blanter, *Quantum Transport: Introduction to Nanoscience* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).

[181] W. L. McMillan, Physical Review **175**, 559 (1968).

[182] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).

[183] J. Cayao and A. M. Black-Schaffer, Phys. Rev. B **98**, 075425 (2018).

[184] A. Costa, P. Högl, and J. Fabian, Phys. Rev. B **95**, 024514 (2017).

[185] A. Sugimoto and I. Iguchi, Journal of Physics Communications **1**, 025009 (2017).

[186] I. Iguchi, W. Wang, M. Yamazaki, Y. Tanaka, and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B **62**, R6131(R) (2000).

[187] W. Wang, M. Yamazaki, K. Lee, and I. Iguchi, Phys. Rev. B **60**, 4272 (1999).

[188] L. Y. Yang, Z. M. Zheng, H. L. Yu, and Y. J. Zhao, The European Physical Journal B **39**, 377 (2004).

[189] Z. Popović, R. Zikic, and L. Dobrosavljević-Grujić, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2015**, 103I01 (2015).

[190] Z. Popović, P. Miranović, and R. Zikic, physica status solidi (b) **255**, 1700554 (2018).

[191] Z. Popović and P. Miranović, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2018**, 043I01 (2018).

[192] B. Mühlschlegel, Zeitschrift für Physik **155**, 313 (1959).

[193] T. Lindström, J. Johansson, T. Bauch, E. Stepantsov, F. Lombardi, and S. A. Charlebois, Phys. Rev. B **74**, 014503 (2006).

[194] A. Huck, A. van Otterlo, and M. Sigrist, Phys. Rev. B **56**, 14163 (1997).

[195] E. Rashba, Soviet Physics, Solid State **2**, 1109 (1960).

[196] Y. A. Bychkov and E. I. Rashba, JETP Lett. **39**, 66 (1984).

[197] P. F. Bagwell, Phys. Rev. B **46**, 12573 (1992).

[198] C. W. J. Beenakker, in *Transport Phenomena in Mesoscopic Systems*, edited by H. Fukuyama and T. Ando (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992) pp. 235–253.

[199] M. Alipourzadeh and Y. Hajati, Phys. Rev. B **111**, 214515 (2025).

[200] Y. Fukaya, B. Lu, K. Yada, Y. Tanaka, and J. Cayao, Journal of Physics: Condensed Matter **37**, 313003 (2025).

[201] W. Nolting and A. Ramakanth, *Quantum Theory of Magnetism*, 3rd ed. (Springer, Berlin, 2009).

[202] L. Han, X. Fu, R. Peng, X. Cheng, J. Dai, L. Liu, Y. Li, Y. Zhang, W. Zhu, H. Bai, Y. Zhou, S. Liang, C. Chen, Q. Wang, X. Chen, L. Yang, Y. Zhang, C. Song, J. Liu, and F. Pan, Science Advances **10**, eadn0479 (2024), https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.adn0479 .

[203] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).

[204] L. A. B. Olde Olthof, S.-I. Suzuki, A. A. Golubov, M. Kunieda, S. Yonezawa, Y. Maeno, and Y. Tanaka, Phys. Rev. B **98**, 014508 (2018).

Биографија

Стеван Ђурђевић је рођен 29. јула 1988. године у Приједору, Република Српска, БиХ. Основну школу и Гимназију "Стојан Церовић" (природно-математички смјер) завршио је у Никшићу (Црна Гора) као добитник награде "Луча". Током основног и средњег образовања био је учесник такмичења из физике на регионалном, републичком и савезном нивоу, гдје је постизао запажене резултате.

На Физичком факултету Универзитета у Београду, на смјеру Теоријска и експериментална физика, дипломирао је 2016. године са просјечном оцјеном 8,93. Мастер студије физике завршио је 2017. године на истом смјеру Физичког факултета са просјечном оцјеном 10,00.

Докторске студије физике у оквиру уже научне области Физика кондензоване материје и статистичка физика уписао је школске 2017/2018. године на Физичком факултету Универзитета у Београду. Све испите предвиђене планом и програмом на докторским студијама кандидат је положио са просјечном оценом 10,00.

Од 2017. године запослен је на Природно-математичком факултету Универзитета Црне Горе гдје држи рачунске вјежбе на основним студијама из Физичке механике, Молекуларне физике и термодинамике, Теоријске механике и Специјалне теорије релативности, Теоријске електродинамике, Квантне механике 1 и 2, Оптике, на мастер студијама вјежбе из Теорије фазних прелаза. Такође држи и рачунске вјежбе из Физике за студенте Електротехничког и Машинског факултета. Осам година је аутор задатака на Државном такмичењу из Физике у Црној Гори, а био је и лидер тима Црне Горе на Међународним физичким олипијадама 2021, 2022, 2024. и 2026. године.

Учествовао је у два међународна, два билатерална и једном националном научноистраживачком пројекату. До сада је објавио шест радова у међународним часописима, и учествовао је на више међународних конференција и научних школа.

образац изјаве о ауторству

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Стеван Ђурђевић

Број индекса 2017/8011

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Транспортне особине дводимензионалних спојева d-wave суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 21. 9. 2026.

_____

образац изјаве о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Стеван Ђурђевић

Број индекса 2017/8011

Студијски програм Статистичка физика и физика кондензоване материје

Наслов рада Транспортне особине дводимензионалних спојева d-wave суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима

Ментор проф. др Зорица Поповић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 21. 9. 2026.

_____

образац изјаве о коришћењу

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Транспортне особине дводимензионалних спојева d-wave суперпроводника са феромагнетним и алтермагнетним материјалима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 21. 9. 2026.

1. **Ауторство.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.