

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је донета на 434. седници одржаној 3. јула 2026. године, именовани смо у Комисију за оцену докторске дисертације

**„Математички модели и методе оптимизације за решавање
варијанти проблема p -резервног центра“**

кандидаткиње **Јелене Тасић**. Менторка ове докторске дисертације је др Зорица Дражић, ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду. Након прегледа предатог рукописа, комисија подноси Наставно - научном већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидаткиње

Име и презиме: Јелена Тасић
Место и датум рођења: Крушевац, 26. мај 1993.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: jelena.tasic@matf.bg.ac.rs

Образовање

Јелена Тасић је завршила основну школу и гимназију у Крушевцу. Школске 2012/2013. године уписала је основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, студијски програм Математика, модул Примењена математика. Дипломирала је школске 2015/2016. године са просечном оценом 9,13. Школске 2016/2017. године уписала је мастер академске студије на Математичком факултету, студијски програм Математика, модул Примењена математика. Мастер академске студије завршила је 2017. године са просечном оценом 10,00 одбравивши мастер рад под насловом „Решавање граничног проблема са Риман–Лиувилевим изводом разломљеног реда методом коначних елемената“, под руководством проф. др Александре Делић. Школске 2017/2018. године уписала је докторске академске студије на Математичком факултету, студијски програм Математика. Положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 10,00.

Радно искуство

Од 2016. године запослена је на Математичком факултету Универзитета у Београду, најпре као сарадник у настави, а од 2018. године као асистент. До сада је изводила вежбе и практикуме на предметима: Увод у нумеричку математику, Дискретне структуре 2, Нумеричке методе,

Метахеуристичке методе, Одабрана поглавља оптимизације и Математика (на Хемијском факултету Универзитета у Београду).

Током 2019. године била је ангажована као истраживач на пројекту „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене“ (број пројекта 174015), који је финансирало Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, а носилац пројекта био је Математички институт САНУ.

Била је члан Организационог одбора 48. међународног симпозијума о операционим истраживањима (SYM-OP-IS 2021).

2. Библиографија кандидаткиње

Радови у часописима међународног значаја у вези са темом дисертације:

1. J. Tasić, Z. Dražić, Z. Stanimirović, "A VNS method for the conditional p-next center problem", *Computers and Operations Research*, Vol. 175, 2025, No. 106916, DOI: 10.1016/j.cor.2024.106916 (M21, IF 2025: 4.6)
2. J. Tasić, "An efficient solution approach to the p-next center problem", *Matematički Vesnik* Volume 76, Issue 1-2, 2024, pp. 66—83, DOI: [10.57016/MV-RBJS4362](https://doi.org/10.57016/MV-RBJS4362) (M22, IF 2022: 0.8)

Радови у зборницима радова са међународних научних скупова објављени у целини у вези са темом дисертације:

3. J. Tasić, Z. Stanimirović, Z. Dražić, "Variable neighborhood search for the p-next center problem with discount factor", *Proceedings of the 52nd International Symposium on Operational Research (SYM-OP-IS 2025)*, Publisher: University of Belgrade - Faculty of Organizational Science, September 7-10, 2025, Palić, Serbia, ISBN: 978-86-7680-494-8, pp. 225-230.
4. J. Tasić, Z. Stanimirović, "A variable neighbourhood search method for the p-next center problem", *Proceedings of the XLIX International Symposium on Operational Research (SYM-OP-IS 2022)*, Publisher: University of Belgrade - Faculty of Economics and Business, September 19-22, 2022, Vrnjačka Banja, Serbia, ISBN: 978-86-403-1750-4, pp. 261-266 .

Радови у зборницима радова са националних научних скупова објављени само у изводу у вези са темом дисертације:

5. J. Tasić, Z. Dražić, Z. Stanimirović, "Metaheuristic pristup za rešavanje problema p-next centra", XII Simpozijum „Matematika i primene“, 2-3. decembar 2022, Beograd, Izdavač: Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, ISBN: 978-86-7589-173-4, pp. 60.

Остали радови у зборницима радова са националних научних скупова објављени само у изводу:

6. V. Brković, A. Delić, J. Tasić, "Analysis and numerical approximation of boundary value problems with fractional derivatives", Kongres mladih matematičara u Novom Sadu, pp. 17, Novi Sad, 3. - 5. Oct, 2019. <https://kmmns.pmf.uns.ac.rs/#/home>
7. J. Tasić, "Numeričke metode za rešavanje singularno-perturbovanih diferencijalnih jednačina", X Simpozijum „Matematika i primene“, 6-7. decembar 2019, Beograd, Izdavač: Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, ISBN: 978-86-7589-141-3, pp. 26.
8. J. Tasić, "Granični zadatak sa Riman-Liuvilovim izvodom razlomljenog reda i njegovo rešavanje metodom konačnih elemenata", VIII Simpozijum „Matematika i primene“, 17-18. novembar, 2017, Beograd.

Излагања на семинарима у вези са темом дисертације:

9. J. Тасић, "Metoda promenljivih okolina za uslovljeni problem p -rezervnog centra", Seminar za računarstvo i primenjenu matematiku, Matematički institut SANU, februar 2025.

3. Предмет дисертације

Предмет ове докторске дисертације су модели, методе и алгоритми за ефикасно решавање различитих варијанти проблема p -резервног центра који припадају класи НП-тешких проблема оптимизације и имају значајну примену у пракси. Истраживање обухвата четири проблема: проблем p -резервног центра, проблем p -резервног центра са фактором уштеде, условљени проблем p -резервног центра и проблем максималног покривања p -резервног центра.

Најпре је разматран проблем у литератури познат као проблем p -резервног центра (енгл. p -next center problem, PNCP). За задати скуп од n локација, проблем се састоји у идентификацији p ($p < n$) локација за успостављање центара, као и придруживању сваког корисника њему најближем центру (примарни центар). За сваког корисника неопходно је да се одреди и резервни центар који је на најкраћој удаљености од примарног центра, тако да уколико дође до непредвидивог инцидента у неком од центара и последично његовог затварања, сви корисници који су били додељени затвореном центру буду преусмерени у резервни центар. Задатак PNCP је одредити локације тачно p центара тако да максимално растојање од корисника до његовог резервног центра, пролазећи преко примарног, буде минимално. За овај проблем развијена је закошена метода променљивих околина (енгл. Skewed Variable Neighborhood Search, SVNS) која користи хеуристику брзе замене (енгл. Fast Interchange Heuristic, FIH) уз посебно креиране процедуре за евалуацију и ажурирање (енгл. Move Evaluation, ME) које доводе до смањења временске сложености алгоритма. Добијени резултати су упоређени са најбољим познатим решењима из литературе, добијеним егзактним решавачима или постојећим хеуристичким методама за PNCP.

Посебна пажња посвећена је анализи три варијанте проблема које до сада нису разматране у литератури. Мотивација је истраживање више различитих сценарија која се јављају у стварним ситуацијама додавањем нових ограничења која потичу из реалних ситуација, а које се односе на реалне карактеристике услужних центара, као и анализа различитих приступа и њихових ефеката приликом планирања сервисних мрежа. У том циљу представљен је концепт ефикасније комуникације између центара дефинисањем проблема p -резервног центра са фактором уштеде

(енгл. *p-next center problem with discount factor*, γ PNCP). Како би се проблем додатно прилагодио потребама из праксе, дефинисан је условљени проблем *p*-резервног центра (енгл. *Conditional p-next center problem* – CPNCP) који има примену при проширивању пословних мрежа уз задржавање постојећих центара и претпоставку да постоји могућност њиховог изненадног отказа. Коначно, дефинисан је и проблем максималног покривања *p*-резервног центра (енгл. *Maximal Covering p-Next Center Problem* – MCPNCP) са бинарним и парцијалним покривањем. Циљ је максимизација укупне потражње покривених корисника, односно корисника чије је растојање до резервног центра мање од задате граничне вредности.

Сва три нововедена проблема успешно су формулисана као проблеми целобројног линеарног програмирања (енгл. *Integer Linear Programming* – ILP). Применом предложених ILP модела и њиховим егзактним решавањем помоћу решавача CPLEX одређена су оптимална решења за инстанце мањих димензија за сва три проблема. За решавање инстанци већих димензија, које су биле ван домашаја егзактних метода, за сваки од разматраних проблема развијена је посебна варијанта метахеуристичке методе променљивих околина. Развијене метахеуристичке методе тестиране су на скуповима тест инстанци генерисаним тако да обухвате различите сценарије који се јављају при планирању сервисних мрежа у реалним условима.

4. Приказ дисертације

Број страна докторске дисертације је x_i+193 и обухвата 5 поглавља, закључак, прилоге А, Б, Ц, Д и списак коришћене литературе од 107 референци. Структура рукописа је следећа:

1 Увод	1
1.1 Математичка оптимизација	1
1.2 Комбинаторна оптимизација	2
1.3 Локацијски проблеми	3
1.4 Сложеност проблема	6
1.5 Егзактне методе	7
1.6 Метахеуристичке методе	8
1.6.1 Популационе метахеуристике	9
1.6.2 Метахеуристике засноване на побољшању једног решења	13
1.6.3 Метода променљивих околина	15
1.7 Хибридни алгоритми	19
2 Проблем <i>p</i> -резервног центра	21
2.1 Опис проблема <i>p</i> -резервног центра	22
2.2 Преглед релевантне литературе	24
2.3 Математичка формулација проблема	26
2.4 SVNS алгоритам за PNCP	28
2.4.1 Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене	30
2.4.2 Процедура MoveEvaluation()	32
2.4.3 Процедура Update()	40
2.5 Експериментални резултати	41
2.5.1 Поређење са другим методама из литературе	44

3	Проблем р-резервног центра са фактором уштеде	47
3.1	Мотивација и опис проблема	47
3.2	SVNS алгоритам за γ PNCP	49
3.3	Експериментални резултати	51
4	Условљени проблем р-резервног центра	55
4.1	Мотивација и опис проблема	55
4.2	Математичка формулација проблема	58
4.3	SVNS алгоритам за CPNCP	60
4.3.1	Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене за CPNCP	61
4.3.2	Процедура MoveEvaluation() за CPNCP	63
4.3.3	Процедура Update() за CPNCP	68
4.4	Експериментални резултати	69
4.4.1	Генерисање инстанци	70
4.4.2	Подешавање параметра	71
4.4.3	Резултати тестирања за CPNCP	73
4.4.4	Поређење CPNCP и PNCP: две стратегије у планирању	78
4.5	Поређење SVNS алгоритма за CPNCP са другим методама за решавање PNCP	83
5	Проблем максималног покривања р-резервног центра	84
5.1	Мотивација и опис MCPNCP	86
5.2	Математички модел MCPNCP	87
5.3	SVNS алгоритам за MCPNCP	90
5.3.1	Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене за MCPNCP	93
5.3.2	Процедура FindBestSwap() за MCPNCP	95
5.3.3	Процедура Update() за MCPNCP	106
5.4	Експериментални резултати	107
5.4.1	Подешавање параметара	107
5.4.2	Резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма	108
6	Закључак	117
	Литература	120
	Прилог А Резултати тестирања за PNCP	129
	Прилог Б Резултати тестирања за γ PNCP	138
	Прилог Ц Резултати тестирања за CPNCP	143
	Ц.1 Подешавање параметра α	143
	Ц.2 SVNS алгоритам за CPNCP	148
	Ц.3 Поређење CPNCP и PNCP модела	169
	Прилог Д Резултати тестирања за MCPNCP	184

У првом (уводном) поглављу су презентоване основне поставке проблема математичке оптимизације, са посебним освртом на проблеме комбинаторне оптимизације и локацијске проблеме. Представљени су укратко концепти егзактних и метахеуристичких метода за њихово решавање.

У другом поглављу разматран је проблем p -резервног центра. Дати су опис и математичка формулација проблема, као и преглед литературе. За решавање овог проблема предложена је закошена метода променљивих околина, која омогућава алгоритму да пређе у решење које по квалитету није превише лошије, али је довољно удаљено од тренутног решења, чиме се повећава диверзификација претраге. У фази локалне претраге користи се хеуристика брзе размене која омогућава смањење сложености и унапређење укупне ефикасности алгоритма. Резултати предложене методе упоређени су са најбољим резултатима из литературе над постојећим скупом инстанци из *OR-Library*.

У трећем поглављу уведен је проблем p -резервног центра са фактором уштеде. Предложена је математичка формулација проблема као и основна варијанта методе променљивих околина за његово решавање. Презентовани су резултати тестирања на скуповима инстанци из литературе, као и поређења резултата метахеуристичког алгоритма са резултатима егзактног решавача CPLEX који користи математичку формулацију проблема. Сprovedен је низ рачунарских експеримената ради анализе утицаја различитих фактора уштеде на добијена решења и вредности функције циља.

У четвртном поглављу дефинисан је нови условљени проблем p -резервног центра који до сада није био разматран у литератури. Дат је детаљан опис проблема и развијен математички модел целобројног линеарног програмирања који је решен применом егзактног решавача CPLEX, при чему су за инстанце мањих димензија добијена оптимална решења проблема. За добијање решења на тест примерима великих димензија који су били ван домаћаја егзактних метода развијена је закошена метода променљивих околина. Генерисани су тест примери који покривају више различитих сценарија приликом планирања сервисних мрежа у реалним ситуацијама. Анализирана су два приступа при проширивању пословне мреже, као и потенцијалне дугорочне уштеде које се могу остварити њиховом применом. Одговарајућа вредност параметра α , којим се контролише прелазак алгоритма у лошије решење, у оквиру SVNS методе одређена је на основу скупа тестова за подешавање параметара и статистичке анализе добијених резултата. Поред тога, у циљу испитивања ефеката два различита приступа у планирању сервисних мрежа, решења добијена применом SVNS методе за CPNCP упоређена су са оптималним или до сада најбољим познатим решењима проблема PNCP предложених у литератури.

У петом поглављу дефинисан је проблем максималног покривања p -резервног центра са бинарним и парцијалним покривањем. Развијена су два модела целобројног линеарног програмирања која се могу применити и на бинарно и на парцијално покривање. Ефикасност предложених модела је упоређена у смислу броја оптималних и допустивих решења које достиже CPLEX решавач. За добијање решења на тест примерима великих димензија развијена је закошена метода променљивих околина која је прилагођена специфичностима проблема са посебно развијеним процедурама које доприносе смањењу временске сложености алгоритма. Сprovedени су експерименти за подешавање параметра α који контролише прихватање лошијег решења у оквиру SVNS метахеуристике. Случајеви бинарног и парцијалног покривања разматрани су одвојено, што је довело до одређивања вредности параметра које обезбеђују најбоље перформансе SVNS методе за сваки тип покривања. Коначно, генерисане су нове инстанце на основу постојећих тест примера за сродне проблеме и добијени рачунски резултати анализирани су са аспекта квалитета решења и времена извршавања.

Закључак садржи кратак преглед нових резултата, правци могућих даљих истраживања и научни допринос овог рада.

У претходним поглављима су у циљу једноставности и прегледности дати сумирани резултати тестирања предложених метода. У Прилогу А, Прилогу Б, Прилогу Ц и Прилогу Д су табеларно представљени детаљни резултати за сваку од тест инстанци над којима су респективно тестиране све методе за проблеме p -резервног центра, p -резервног центра са фактором уштеде, условљени проблем p -резервног центра и проблем максималног покривања p -резервног центра са бинарним и парцијалним покривањем.

5. Закључак и предлог комисије

Резултати кандидаткиње Јелене Тасић представљени у дисертацији су оригинални и дају значајан теоријски и практичан допринос у области дискретне оптимизације, теорије локацијских проблема и математичког моделирања. Везано за тему дисертације, кандидаткиња је објавила један коауторски рад у часопису међународног значаја (категорије M21), један самостални рад у часопису међународног значаја (категорије M22), као и два рада у зборницима радова са међународних научних скупова објављених у целини. Поред тога, неке од резултата кандидаткиња је представила и кроз излагања на XII Симпозијуму „Математика и примене“ у Београду 2022. године, као и на Семинару за рачунарство и примењену математику 2025. године.

Докторска дисертација је урађена према одобреној пријави и представља оригинално и самостално научно дело, па констатујемо да су се стекли услови за њену јавну одбрану. На основу свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета у Београду да рукопис „Математички модели и методе оптимизације за решавање варијанти проблема p -резервног центра“, кандидаткиње Јелена Тасић, прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за јавну одбрану.

У Београду,
10. јул 2026. године

Чланови комисије:

др Александар Савић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Зорица Станимировић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Драган Урошевић, редовни професор
Универзитет УНИОН - Рачунарски факултет

