

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена М. Тасић

**МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ И МЕТОДЕ  
ОПТИМИЗАЦИЈЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ВАРИЈАНТИ  
ПРОБЛЕМА  $p$ -РЕЗЕРВНОГ ЦЕНТРА**

докторска дисертација

Београд, 2026.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MATHEMATICS

Jelena M. Tasić

**MATHEMATICAL MODELS AND OPTIMIZATION  
METHODS FOR SOLVING VARIANTS OF  
THE  $p$ -NEXT CENTER PROBLEM**

Doctorial Dissertation

Belgrade, 2026.

**Ментор:**

др Зорица Дражић, ванредни професор  
Универзитет у Београду - Математички факултет

**Чланови комисије:**

др Зорица Станимировић, редовни професор  
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Александар Савић, редовни професор  
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Драган Урошевић, редовни професор  
Универзитет УНИОН - Рачунарски факултет

**Датум одбране:** \_\_\_\_\_

*Мојим родитељима*

## Захвалнице

*Велику захвалност дугујем мојој менторки проф. др Зорици Дражић на стручној помоћи и дивној сарадњи, као и проф. др Зорици Станимировић на бројним саветима и идејама. Захваљујем и члановима комисије на пажљивом читању дисертације и коментарима и сугестијама које су у великој мери унапредиле рад.*

*Највећу захвалност дугујем мојој породици и пријатељима који су разумевањем и подршком учинили рад на овој дисертацији неупоредиво лакшим.*

Београд, 2026.

Јелена Тасић

**Наслов:** Математички модели и методе оптимизације за решавање варијанти проблема  $p$ -резервног центра

**Сажетак:** У овој дисертацији разматран је проблем  $p$ -резервног центра (енгл. *p-next center problem, PNCP*), и три његове варијанте које нису раније разматране у литератури. Заједничко за све проблеме који су предмет дисертације је одређивање локација за успостављање услужних центара, при чему је у фокусу корисник који је у најнеповољнијој ситуацији у односу на све кориснике. У пракси то може бити корисник који је најудаљенији од здравствене станице којој припада или купац који је најудаљенији од локалног маркета. Циљ је минимизовати растојање које такав корисник прелази до свог најближег услужног центра. Како је реч о NP-тешким проблемима, стандардни решавачи као што је CPLEX за инстанце већих димензија не могу да обезбеде оптимална, а често ни допустива решења.

Проблем  $p$ -резервног центра узима у обзир реалну могућност отказа једног или више центара. У том случају се корисници који су пристигли у затворени центар преусмеравају ка (најближем) резервном центру, а циљ је да се локације за центре одреде тако да се минимизује најдуже од свих укупних растојања које прелазе корисници. У дисертацији је предложена закошена метода променљивих околина (енгл. *Skewed Variable Neighborhood Search, SVNS*) за решавање проблема  $p$ -резервног центра која у оквиру фазе локалне претраге користи хеуристику брзе размене. Добијени резултати су упоређени са резултатима из литературе. Метода је тестирана над познатим OR-LIB скупом инстанци које обухватају до 900 чворова и резултати су упоређени са најбољим резултатима из литературе.

Као проширење наведеног проблема, разматран је концепт ефикасније комуникације између центара и дефинисан проблем  $p$ -резервног центра са фактором уштеде (енгл. *p-next center problem with discount factor,  $\gamma$ PNCP*) који обухвата ову идеју. Дата је математичка формулација проблема која је решавана CPLEX решавачем. Предложена је основна метода променљивих околина (енгл. *Basic Variable Neighborhood Search, BVNS*) за решавање проблема и анализиране су могуће олакшице које се могу остварити убрзавањем комуникације између центара на скупу инстанци из литературе које имају до 900 чворова.

Како би се проблем  $p$ -резервног центра додатно прилагодио потребама из праксе, дефинисан је условљени проблем  $p$ -резервног центра (енгл. *Conditional p-next center problem, CPNCP*). Овај проблем примену налази у проширивању пословних мрежа уз задржавање постојећих центара и претпоставку да постоји могућност изненадног отказа центара. Предложен је математички модел, генерисане су инстанце које укључују до 900 чворова и инстанце проблема су решаване CPLEX решавачем. Предложена је метода променљивих околина за решавање овог проблема. Анализирана су два приступа у проширивању пословне мреже, као и потенцијалне дугорочне уштеде које се могу остварити њиховом

применом.

Дефинисан је и проблем максималног покривања  $p$ -резервног центра (енгл. *Maximal covering  $p$ -next center problem*, *MCPNCP*) са бинарним и парцијалним покривањем. Циљ је максимизација збира потражњи корисника који су покривени, односно корисника који до свог резервног центра прелазе пут краћи од задате вредности. Предложена су два математичка модела. Генерисане су инстанце које имају до 400 чворова и упоређени су предложени модели коришћењем CPLEX решавача. Предложена је закошена метода променљивих околина за решавање проблема и упоређени су резултати са резултатима CPLEX решавача.

**Кључне речи:** комбинаторна оптимизација, математичко моделирање, проблем  $p$ -резервног центра, метахеуристичке методе, метода променљивих околина

**Научна област:** Математика

**Ужа научна област:** Оптимизација

**AMS класификација:** 90C27, 90C59, 90C05

**УДК број:** дописати

**Title:** Mathematical models and optimization methods for solving variants of the  $p$ -next center problem

**Abstract:** This dissertation examines the  $p$ -next center problem (PNCP) and three of its variants that have not previously been addressed in the literature. All the problems considered involve determining locations for establishing service centers, focusing on the user in the most unfavorable position. In practice, this may be the user who is farthest from their assigned health clinic, or the customer farthest from the local market. The objective is to ensure that these users travel the shortest possible distance to a service center.

Since these are NP-hard problems, standard solvers such as CPLEX are unable to provide optimal, or often even feasible, solutions for larger instances.

The  $p$ -next center problem reflects the realistic possibility that one or more centers may suddenly fail. In such cases, users assigned to a closed center are redirected to the (nearest) backup center, and the goal is to determine the locations for centers so as to minimize the maximum of all total distances traveled by users. In this dissertation, a skewed variable neighborhood search method (SVNS) is proposed for solving the  $p$ -next center problem, which incorporates a fast interchange heuristic within the local search phase. The method is tested on the well-known OR-LIB set of instances containing up to 900 nodes, and the results are compared with the best results from the literature.

As an extension of the previous problem, the concept of facilitated communication between centers is considered, and the  $p$ -next center problem with a discount factor ( $\gamma$ PNCP) is defined to incorporate this idea. A mathematical formulation of the problem is provided and solved using the CPLEX solver. A basic variable neighborhood search (BVNS) method is proposed for solving the problem, and the potential benefits achievable through enhanced communication between centers are analyzed on a set of instances from the literature that include up to 900 nodes.

To further adapt the  $p$ -next center problem to practical needs, the conditional  $p$ -next center problem (CPNCP) is defined. This problem is applicable to the expansion of existing business networks while retaining existing centers where there is a possibility of sudden center failures. A mathematical model is proposed, instances with up to 900 nodes are generated, and the problem instances are solved using the CPLEX solver. A variable neighborhood search method is proposed for solving this problem. Two approaches to business network expansion are analyzed, along with potential long-term savings that can be achieved by their application.

The maximal covering  $p$ -next center problem (MCPNCP) with binary and partial coverage is defined. The objective is to maximize the total demand of users that are covered, that is, users whose distance to their backup center does not exceed a given radius. Two mathematical models are proposed. Instance with up to 400 nodes are generated and the proposed models are compared using the CPLEX solver. A skewed variable neighborhood search method is proposed for solving the problem, and the results are compared with those obtained by the CPLEX solver.

**Key words:** combinatorial optimization, mathematical modeling,  $p$ -next center problem, metaheuristic methods, variable neighborhood search

**Scientific field:** Mathematics

**Scientific subfield:** Optimization

**AMS Classification:** 90C27, 90C59, 90C05

**UDC number:**

# Садржај

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Увод</b>                                                       | <b>1</b>  |
| 1.1      | Математичка оптимизација . . . . .                                | 1         |
| 1.2      | Комбинаторна оптимизација . . . . .                               | 2         |
| 1.3      | Локацијски проблеми . . . . .                                     | 3         |
| 1.4      | Сложеност проблема . . . . .                                      | 6         |
| 1.5      | Егзактне методе . . . . .                                         | 7         |
| 1.6      | Метахеуристичке методе . . . . .                                  | 8         |
| 1.6.1    | Популационе метахеуристике . . . . .                              | 9         |
| 1.6.2    | Метахеуристике засноване на побољшању једног решења .             | 13        |
| 1.6.3    | Метода променљивих околина . . . . .                              | 15        |
| 1.7      | Хибридни алгоритми . . . . .                                      | 19        |
| <b>2</b> | <b>Проблем <math>p</math>-резервног центра</b>                    | <b>21</b> |
| 2.1      | Опис проблема $p$ -резервног центра . . . . .                     | 22        |
| 2.2      | Преглед релевантне литературе . . . . .                           | 24        |
| 2.3      | Математичка формулација проблема . . . . .                        | 26        |
| 2.4      | SVNS алгоритам за PNCP . . . . .                                  | 28        |
| 2.4.1    | Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене .           | 30        |
| 2.4.2    | Процедура <i>MoveEvaluation()</i> . . . . .                       | 32        |
| 2.4.3    | Процедура <i>Update()</i> . . . . .                               | 40        |
| 2.5      | Експериментални резултати . . . . .                               | 41        |
| 2.5.1    | Поређење са другим методама из литературе . . . . .               | 44        |
| <b>3</b> | <b>Проблем <math>p</math>-резервног центра са фактором уштеде</b> | <b>47</b> |
| 3.1      | Мотивација и опис проблема . . . . .                              | 47        |
| 3.2      | BVNS алгоритам за $\gamma$ PNCP . . . . .                         | 49        |
| 3.3      | Експериментални резултати . . . . .                               | 51        |
| <b>4</b> | <b>Условљени проблем <math>p</math>-резервног центра</b>          | <b>55</b> |
| 4.1      | Мотивација и опис проблема . . . . .                              | 55        |
| 4.2      | Математичка формулација проблема . . . . .                        | 58        |

|          |                                                                                |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3      | SVNS алгоритам за CPNCP . . . . .                                              | 60         |
| 4.3.1    | Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене за CPNCP . . . . .       | 61         |
| 4.3.2    | Процедура <i>MoveEvaluation()</i> за CPNCP . . . . .                           | 63         |
| 4.3.3    | Процедура <i>Update()</i> за CPNCP . . . . .                                   | 68         |
| 4.4      | Експериментални резултати . . . . .                                            | 69         |
| 4.4.1    | Генерисање инстанци . . . . .                                                  | 70         |
| 4.4.2    | Подешавање параметра . . . . .                                                 | 71         |
| 4.4.3    | Резултати тестирања за CPNCP . . . . .                                         | 73         |
| 4.4.4    | Поређење CPNCP и PNCP: две стратегије у планирању . .                          | 78         |
| 4.5      | Поређење SVNS алгоритма за CPNCP са другим методама за решавање PNCP . . . . . | 83         |
| <b>5</b> | <b>Проблем максималног покривања <math>p</math>-резервног центра</b>           | <b>84</b>  |
| 5.1      | Мотивација и опис MCPNCP . . . . .                                             | 86         |
| 5.2      | Математички модел MCPNCP . . . . .                                             | 87         |
| 5.3      | SVNS алгоритам за MCPNCP . . . . .                                             | 90         |
| 5.3.1    | Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене за MCPNCP . . . . .      | 93         |
| 5.3.2    | Процедура <i>FindBestSwap()</i> за MCPNCP . . . . .                            | 95         |
| 5.3.3    | Процедура <i>Update()</i> за MCPNCP . . . . .                                  | 106        |
| 5.4      | Експериментални резултати . . . . .                                            | 107        |
| 5.4.1    | Подешавање параметара . . . . .                                                | 107        |
| 5.4.2    | Резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма . . . . .                            | 108        |
| <b>6</b> | <b>Закључак</b>                                                                | <b>117</b> |
|          | <b>Литература</b>                                                              | <b>120</b> |
| <b>A</b> | <b>Резултати тестирања за PNCP</b>                                             | <b>129</b> |
| <b>Б</b> | <b>Резултати тестирања за <math>\gamma</math>PNCP</b>                          | <b>138</b> |
| <b>Ц</b> | <b>Резултати тестирања за CPNCP</b>                                            | <b>143</b> |
| Ц.1      | Подешавање параметра $\alpha$ . . . . .                                        | 143        |
| Ц.2      | SVNS алгоритам за CPNCP . . . . .                                              | 148        |
| Ц.3      | Поређење CPNCP и PNCP модела . . . . .                                         | 169        |
| <b>Д</b> | <b>Резултати тестирања за MCPNCP</b>                                           | <b>184</b> |

# Глава 1

## Увод

Многи реални проблеми из индустрије, инжењерства, саобраћаја, економије, телекомуникација и бројних других области могу се формулисати као оптимизациони проблеми. У таквим проблемима циљ је најчешће да се, уз задате услове и ограничења, минимизују трошкови, време, утрошени ресурси, ризик или пређени пут, односно да се максимизују профит, ефикасност, квалитет или обим производње. Иако употреба рачунара значајно олакшава њихово решавање, већина ових проблема је веома тешка за решавање јер захтева алгоритме експоненцијалне сложености. Због тога се у пракси углавном развијају методе засноване на математичком моделовању, као и метахеуристички приступи који могу да пронађу довољно добра и квалитетна решења у кратком временском року.

### 1.1 Математичка оптимизација

Математичка оптимизација је област примењене математике која се бави проучавањем проблема у којима је потребно, под задатим условима, пронаћи решење које је у одређеном смислу најбоље. Циљ је наћи решење за које одређена функција достиже минимум или максимум. Посматрана функција се назива *функција циља*, а нађено решење назива се *оптималним решењем*. Другим речима, за реалну функцију  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и дати скуп  $S \subseteq X$  треба одредити  $x^* \in S$ , тако да је  $\min_{x \in S} f(x) = f(x^*)$ . На овај начин дефинисан је проблем *минимизације*. Проблем *максимизације* функције  $f(x)$  може се решавати минимизацијом функције  $-f(x)$ . Оптимално решење  $x^*$  не мора бити јединствено и проблеми математичке оптимизације најчешће подразумевају налажење једног таквог решења. Скуп  $X$  назива се *простором решења*, а скуп  $S$  назива се *скупом допустивих решења*.

У зависности од природе скупа  $X$ , проблеми оптимизације се могу поделити на проблеме *комбинаторне (дискретне) оптимизације* код којих тај скуп садржи коначно или пребројиво много елемената и проблеме *континуалне оптимизације*

код којих је  $X = \mathbb{R}^n$ .

Специјално, када је функција циља линеарна функција, а простор допустивих решења дефинисан као  $S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ , при чему су  $g_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}$ ) линеарне функције, такав проблем се назива *проблем линеарног програмирања* (енгл. *Linear programming*). Уколико је уз то и  $S \subset \mathbb{Z}^n$ , реч је о *проблему целобројног линеарног програмирања* (енгл. *Integer linear programming*). Код *проблема мешовитог целобројног линеарног програмирања* (енгл. *Mixed integer linear programming*) захтева се целобројност само неких координата, тј. простор допустивих решења дефинисан је као  $S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, x_j \in \mathbb{Z}, j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$ .

Важан појам у математичкој оптимизацији је појам *околице* решења  $x$  који се дефинише као скуп  $N_\varepsilon(x) = \{x' \in S : d(x, x') \leq \varepsilon\}$ , где је  $d(\cdot, \cdot)$  изабрана метрика. Елементи овог скупа називају се *суседима* решења  $x$ . Каже се да је решење  $x^*$  *локални минимум* функције  $f(x)$  уколико постоји околина  $N_\varepsilon(x^*)$ , таква да је  $f(x^*) \leq f(x)$  за свако  $x \in N_\varepsilon(x^*)$ . Уколико је  $f(x^*) \leq f(x)$  за свако  $x \in S$ , каже се да је  $x^*$  *глобални минимум* функције  $f(x)$ .

## 1.2 Комбинаторна оптимизација

Комбинаторна оптимизација је грана математичке оптимизације у којој је циљ наћи оптимално решење из коначеног или пребројивог скупа допустивих решења. Многи проблеми из праксе могу се посматрати као проблеми дискретне оптимизације. Они се јављају у ситуацијама када треба изабрати одређене објекте из коначног скупа, одредити редослед извршавања неких послова, распоредити ресурсе, пројектовати структуре попут мрежа, графова и распореда итд. За разлику од континуалне оптимизације, где се простор допустивих решења описује реалним интервалима и где се често примењују методе математичке анализе, код проблема дискретне оптимизације није могуће применити ове методе, што додатно отежава решавање ових проблема.

Иако постоје алгоритми потпуне претраге, њихова примена често није погодна јер би пролазак кроз сва решења и рачунање вредности функције циља за свако од њих трајало неприхватљиво дуго чак и на најбржим рачунарима. Такође, ни егзактне методе често није могуће применити јер не постоји одговарајући математички модел или је постојећи модел превише сложен. На пример, захтев да неке или све променљиве буду целобројне значајно отежава решавање јер дискретност допустивог скупа онемогућава примену нумеричких метода заснованих на класичној математичкој анализи. Због свега наведеног, дискретна оптимизација представља једну од кључних области за развој ефикасних алгоритама и метода које омогућавају решавање сложених проблема од великог значаја у пракси.

Једна од често проучаваних класа проблема дискретне оптимизације у литератури су тзв. локацијски проблеми код којих се разматра скуп снабдевача и скуп корисника који имају извесне потребе за неком робом или услугом. Роба се транспортује од снабдевача до корисника уз одређене ресурсе (новчане, временске, организационе итд.). Циљ је организовати транспорт робе од снабдевача до корисника (утврдити који снабдевач услужује ког корисника), тако да потребе сваког корисника буду задовољене, а да при том транспорту буду утрошени минимални ресурси. Алтернативно, у фокусу оваквих проблема може бити и профит чија се максимизација разматра. Проблеми разматрани у овој дисертацији спадају у локацијске проблеме, те је њима посвећен наредни одељак.

### 1.3 Локацијски проблеми

Задатак локацијских проблема је налажење оптималних локација за неку врсту објеката, тако да одређен скуп услова буде задовољен, а да је при томе вредност функције циља што је могуће већа или мања. Овакви проблеми често се срећу у реалном животу, а будући да изградња пословне мреже представља велики финансијски, временски и организациони подухват, пажљиво планирање је неопходно. Осим тога, избор локација на којима ће бити отворени услужни објекти има дугорочне ефекте, јер се уштеда, односно губици, акумулирају кроз време. Теорија локацијских проблема се убрзано развија у складу са потребама друштва и добијени резултати се примењују у пракси. Различити фактори могу бити узети у обзир када се моделују реални проблеми овог типа, као што су број објеката које треба успоставити, капацитет сваког објекта, као и потребе корисника за робом или услугом. Осим тога, успостављање објеката може изискивати једнократне или дугорочне трошкове (закупа, одржавања). Придруживање корисника објекту може захтевати одређене ресурсе који су често пропорционални растојању, времену, или трошковима дистрибуције производа од објекта до корисника. У неким ситуацијама значајно је да сваки корисник буде што је могуће ближе свом центру, док је у другим ситуацијама циљ управо супротан. На пример, када се одређују оптималне локације за депоније, електране или било коју врсту објеката који емитују загађење, зрачење, буку или отпад у интересу корисника је да буду што даље од таквог објекта. Након успостављања центара, потребно је кориснике придружити центрима на адекватан начин.

Један од првих локацијских проблема формулисао је Алфред Вебер 1909. године [103]. Разматрана је изградња фабрике која користи сировине од два различита добављача, а производ испоручује једном потрошачу. Задатак је одредити локацију фабрике тако да транспортни трошкови до три фиксне тачке (два снабдевача и једног потрошача) буду најмањи могући. Оно што се данас подразумева под Веберовим проблемом је општији проблем у коме се одређује

координата тачке такве да је збир отежаних Еуклидских растојања од те тачке до задатих  $n$  тачака најмањи могући [31]. Једна једноставна интерпретација овог проблема је одређивање оптималне локације складишта из кога ће се опслуживати одређен број корисника, при чему тежине из формулације проблема представљају цену транспорта робе од посматраног корисника до складишта по јединици пута. Уопштавањем овог проблема долази се до једног од најпознатијих локацијских проблема, а то је локацијски проблем неограничених капацитета (енгл. *Uncapacitated facility location problem, UFLP*). Циљ овог проблема је одредити локације на којима ће се успоставити објекти који пружају неку врсту услуге, а затим сваког корисника придружити једном објекту тако да укупна цена транспорта и успостављања објеката буде најмања могућа. На сличан начин се може формулисати и локацијски проблем са капацитетима (енгл. *Capacitated facility location problem, CFLP*) код кога се подразумева да сваки корисник потражује извесну количину робе (услуге) која мора бити испоручена, као и да сваки објекат има одређену количину робе на стању (капацитет услуге који може да пружи) која не сме бити прекорачена. Више о локацијским проблемима са и без капацитета може се наћи у [24, 63, 73, 101].

Поред ових проблема, значајну пажњу у литератури привлаче и проблем  $p$ -центра (енгл. *p-center problem, PCP*), као и проблем  $p$ -медијане (енгл. *p-median problem*). Реч је о проблемима дискретне оптимизације који су пронашли бројне примене у пракси јер се овим моделима може описати планирање хитних служби као што су амбуланте, болнице, ватрогасне станице и тако даље. Проблеми се могу применити и на планирање школа, банака, бензинских пумпи и генерално услужних објеката за које је битно да се налазе што ближе корисницима. Формално речено, из датог скупа локација треба одредити  $p$  локација на којима ће бити успостављени услужни центри, а затим сваког корисника придружити њему најближем центру. Код проблема  $p$ -центра циљ је минимизација максималног растојања од корисника до њему најближег центра. Код проблема  $p$ -медијане циљ је минимизовати збир растојања од сваког корисника до његовог најближег центра. О проблемима  $p$ -центра и  $p$ -медијане више се може наћи у [16, 28, 31, 43, 59, 84, 93].

У пракси је често могуће постићи јефтинији (бржи) транспорт између појединих објеката, па се уместо директног транспорта између добављача и корисника, транспорт обавља (консолидује) кроз тзв. хаб локације. Овај концепт присутан је код Хаб локацијских проблема (енгл. *Hub locations problems, HLPs*). Циљ је одредити локације на којима ће бити успостављени хабови и затим придружити сваког корисника и сваког добављача хаб локацији или скупу хаб локација, тако да се одређена функција циља максимизује или минимизује. Уколико се свака не-хаб локација придружује једном хабу, реч је о проблему *једноструке алокације*. Уколико се свака не-хаб локација придружује скупу хабова, ради се

о проблему *вишеструке алокације*, док *r-алокацијска шема* подразумева да свака не-хаб локација користи највише  $r$  хабова за комуникацију. За више информација о Хаб локацијским проблемима погледати [2, 3].

Значајну групу проблема чине и тзв. проблеми покривања (енгл. *Covering problems*) у којима се одређују локације за објекте тако да се покрију сви корисници уз што мање трошкове транспорта, успостављања објеката (ако је дат буџет), или уз што мањи број успостављених објеката. Покривеност корисника зависи од његове удаљености од њему најближег успостављеног центра. Нарочито важан је проблем максималног покривања (енгл. *Maximal covering location problem, MCLP*) који подразумева одређивање оптималних локација за унапред задат број центара тако да је укупан број корисника које ти центри покривају највећи могући. Овај проблем уведен је 1974. године у раду [21] и од тада су предложене његове бројне модификације и проширења [33, 37, 79]. Проблем је значајан са аспекта планирања мрежа здравствених установа, ватрогасних станица, банака, пошта и других служби са циљем опслуживања што већег броја корисника, при чему могућност опслуживања корисника од стране неког центра зависи од њиховог међусобног растојања.

Када је реч о класификацији локацијских проблема, она се може вршити по различитим критеријумима. Један од њих је топологија простора и на основу ње, локацијски проблеми могу бити континуални, дискретни и мрежни. У случају континуалних проблема објекти могу бити отворени било где у простору, тј. скуп могућих локација је бесконачан. За разлику од њих, код дискретних проблема скуп могућих локација је унапред задат и коначан. Мрежни локацијски проблеми задати су на тежинском графу чији чворови представљају локације на којима се налазе корисници, као и потенцијалне локације за успостављање објеката. Други критеријум за класификацију је и број објеката које треба успоставити. Он може бити задат унапред (егзогени проблеми) или се добити као резултат оптимизације (ендогени проблеми). Такође, подела се може вршити и на основу функције циља у зависности од тога да ли се минимизује збир растојања или се минимизује максимално растојање. Укључивање капацитета објеката који пружају услугу или капацитета грана (путева) представља још један параметар за класификацију. Уколико не постоје ограничења овог типа, као ни додатни други услови (нпр. преференце корисника и слично), сваки корисник се придружује њему најближем центру. Међутим, уколико постоје ограничења која се односе на капацитете центара или проток кроз неку грану, она се морају поштовати приликом придруживања корисника центрима.

Проблеми који ће бити разматрани у овој дисертацији су проширења и модификације проблема  $p$ -центра. Сви разматрани проблеми су дискретни, егзогени проблеми без капацитета. У наставку ће бити описане неке од најпознатијих егзактних метода за решавање проблема комбинаторне оптимизације.

## 1.4 Сложеност проблема

Када се говори о ефикасности неког алгоритма, углавном се мисли на временску сложеност, јер је у пракси често време одлучујући фактор приликом одабира алгоритма за решавање неког проблема. Време потребно алгоритму за решавање неке инстанце се у већини случајева може изразити преко броја улазних података за конкретну инстанцу, а сложеност алгоритма се изражава максималним процесорским временом потребним за решавање било које инстанце произвољне димензије. Често се користи Бекман-Ландау нотација којом се време  $f(n)$  неког алгоритма потребно за решавање инстанце димензије  $n$  изражава као  $O(g(n))$ , где је  $g(\cdot)$  позитивна функција. Запис  $f(n) \in O(g(n))$  значи да постоји позитивна константа  $C > 0$ , т.д.  $f(n) \leq C \cdot g(n)$ ,  $n \geq n_0$ , за неко  $n_0 \in \mathbb{N}$ , тј. да време извршавања алгоритма за било коју инстанцу димензије  $n$  не прелази  $C \cdot g(n)$  у најгорем случају.

Уколико је проблем формулисан тако да је његово решење одговор „Да” или „Не”, такав проблем се назива проблемом одлучивања. Проблеми оптимизације се могу свести на проблеме одлучивања. На пример, за проблем  $p$ -центра, одговарајући проблем одлучивања би био: да ли је могуће успоставити тачно  $p$  центара и придружити сваког корисника њему најближем центру, тако да максимално растојање од корисника до њему најближег центра буде мање од задате вредности  $d$ ?

За проблеме одлучивања за које постоји детерминистички алгоритам који налази решење у полиномском времену  $O(p(n))$ , где је  $p(\cdot)$  полином, каже се да припадају класи  $P$  (енгл. *Polynomial*). За проблеме одлучивања који се могу решити недетерминистичким алгоритмом за полиномско време (тј. за које се у полиномском времену може проверити дато решење) каже се да припадају класи  $NP$  (енгл. *Nondeterministic Polynomial*). Јасно је да важи  $P \subseteq NP$ , док је питање да ли је  $P \neq NP$  и даље отворено.

Уколико се било која инстанца проблема  $\Pi_1$  може свести на неку инстанцу проблема  $\Pi_2$  у полиномском времену, каже се да је проблем  $\Pi_1$  сводљив на проблем  $\Pi_2$ . За неки проблем  $\Pi_2$  каже се да је  $NP$ -тежак, уколико за сваки проблем  $\Pi_1$  који припада класи  $NP$ , постоји свођење проблема  $\Pi_1$  на проблем  $\Pi_2$ . Дакле, уколико се неки  $NP$ -тежак проблем може ефикасно решити, онда се на исти начин могу решити и сви  $NP$  проблеми. Међутим, проблем који припада класи  $NP$ -тешких проблема не мора нужно припадати и класи  $NP$ . Проблеми који припадају и класи  $NP$  и класи  $NP$ -тешких проблема, чине класу  $NP$ -комплетних проблема. Детаљније о комплексности и  $NP$ -комплетним проблемима може се наћи у [38].

## 1.5 Егзактне методе

Егзактне методе су најпожељније јер гарантују оптималност добијеног решења или доказују да допустиво решење не постоји. Међутим, њихова примена у пракси на проблеме већих димензија је ограничена јер су оне често временски и меморијски веома захтевне. Код NP-тешких проблема број допустивих решења расте експоненцијално са порастом димензије проблема, због чега време које је потребно да се егзактном методом дође до решења може бити неприхватљиво дуго. Још један проблем при решавању NP-тешких проблема великих димензија може да буде недостатак меморијских ресурса рачунара. Из ових разлога, NP-тешки проблеми већих димензија се ређе решавају егзактним методама, већ се у пракси чешће примењују приближне методе које омогућавају проналажење неког приближног, довољно доброг решења у прихватљивом времену извршавања. Осим тога, реални проблеми комбинаторне оптимизације се некада не могу моделовати математичким моделима који су погодни за примену егзактних метода, а догађа се и да су модели превише компликовани.

*Метода гранања и ограничавања* (енгл. *Branch and Bound*) заснива се на идеји да се полазни проблем разбије на мање проблеме чије је решавање лакше и да се на основу добијених решења одреди решење полазног проблема. У сваком кораку се анализира један потпроблем, тачније његова релаксација која подразумева да се елиминише неко од ограничења или неки од услова који се односе на природу променљивих. Уколико потпроблем нема допустивих решења или се установи да његово решење не може поправити до тада најбољу горњу границу за функцију циља (ако је реч о проблему минимизације), тај проблем се даље не разматра. У случају да је решење потпроблема боље од до тада нађеног најбољег решења, најбоље решење се ажурира. Цео процес се често приказује стаблом, а редослед обиласка стабла, односно решавања потпроблема има утицај на цео алгоритам. Детаљније се може наћи у [105].

*Метода гранања и одсецања* (енгл. *Branch and Cut*) добија се комбиновањем методе гранања и ограничавања и методе одсецајућих равни. Приликом решавања релаксација потпроблема уводе се нови услови које се зову одсецајуће равни и њихова сврха је да унапреде релаксацију потпроблема тако да она што боље апроксимира полазни проблем. Метода је често имплементирана у комерцијалним решавачима као што је *CPLEX*. Више о методи гранања и одсецања може се наћи у [35, 74, 105].

*Метода гранања и оцењивања* (енгл. *Branch and Price*) комбинује методу гранања и ограничавања и методу генерисања колона. Свака колона у матрици ограничења одговара једној променљивој, а основна идеја методе је решавање рестрикција проблема у којима се не појављују све променљиве, већ само њихов подскуп. Нове променљиве (колоне) се по потреби додају (генеришу) како би се нађено решење побољшало. Детаљније о овој методи може се наћи у [5, 51].

## 1.6 Метакеуристичке методе

Већина локацијских проблема припада класи NP-тешких проблема, што отежава њихово решавање. Са порастом димензије оваквих проблема егзактне методе оптимизације углавном захтевају превише времена и меморије за њихово решавање. Како у науци и индустрији постоји потреба за решавањем проблема великих димензија у кратком (некада и реалном) времену, (мета)хеуристичке методе су често заступљене у решавању оваквиих проблема. Осим тога, форма модела не утиче на осмишљавање метакеуристике. Реални проблеми често имају изузетно компликоване моделе са великим бројем ограничења, па егзактне методе често не могу дати чак ни допустиво решење. Међутим, метакеуристике се врло успешно могу применити на овакве проблеме и у прихватљивом времену обезбедити решења задовољавајућег квалитета. Још један ограничавајући аспект егзактних метода могу бити стриктни услови које функција циља мора задовољити као што су рецимо конвексност или диференцијабилност. Проблеми из праксе често не задовољавају услове које захтева теорија и то је још један сценарио у коме је употреба метакеуристике пожељна, а често и неопходна, јер се оне не ослањају на теоријске претпоставке.

Метакеуристичке методе представљају групу апроксимативних техника оптимизације које обезбеђују решења проблема врло доброг квалитета у кратком времену, а да при томе не пружају гаранцију да је нађено решење оптимално. Такође, не обезбеђују ни оцену грешке добијеног решења. Упркос томе, доживеле су велику популарност и често се користе, јер споменуте оцене у пракси углавном нису неопходне. Метакеуристике подразумевају описивање корака у решавању проблема на апстрактном нивоу, а конкретизација се може вршити на различите начине у зависности од проблема који се решава. Код креирања метакеуристике идеја је осмишљавање универзалних корака, што омогућава њихову примену на велики број проблема. Први процес који мора бити обухваћен сваком метакеуристичком јесте диверзификација која подразумева посећивање различитих делова простора претраге, са циљем избегавања замке локалних оптимума. Други процес је интензификација која подразумева детаљно испитивање обећавајућих делова простора претраге (добијених диверзификацијом) и локално побољшање нађеног решења. Постизање баланса између ова два процеса је кључно за креирање добре метакеуристике. Није пожељно предуго остајање у једном делу простора, јер се повећава шанса да се претрага заглави у локалном оптимуму, док повећана диверзификација води ка насумичном претраживању које је неефикасно.

Приликом дизајнирања било које итеративне метакеуристике треба пажљиво осмислити њене елементе као што су репрезентација решења (бинарни или целобројни вектор, пермутација, матрица, стабло...), рачунање функције циља, избор почетног решења, као и дефиниција околине неког решења, начин пре-

траживања околина, оператори/кораци метахеуристике...

Многе метахеуристике користе *локалну претрагу* (енгл. *Local Search, LS*), као део процеса интензификације процеса претраживања простора решења. Локална претрага започиње од датог почетног решења, након чега се у свакој итерацији текуће решење замењује суседом из унапред дефинисане околине који побољшава вредност функције циља. Претрага се завршава уколико такав сусед не постоји, чиме се гарантује налажење локалног оптимума у коришћеној околини. Уколико је околина која се претражује велика, претрага се може ограничити на одређени део околине како би се алгоритам убрзао. Такође, избор кандидата од кога се претрага наставља може се вршити на више начина. Једна опција је да се претрага настави од првог кандидата који побољшава вредност функције циља (енгл. *first improvement*) и на овај начин се не претражује увек цела околина, док је друга често коришћена стратегија да алгоритам пређе у најбољег суседа из текуће околине (енгл. *best improvement*). Још једна опција је да се претрага текуће околине завршава након достизања највише  $k$  побољшања решења (енгл. *k-th improvement*).

Метахеуристике се могу класификовати по различитим критеријумима. Основна подела је на метахеуристике које кроз итерације побољшавају или конструишу једно решење (енгл. *single-solution based*) и популационе метахеуристике које раде над популацијом решења (енгл. *population-based*). Подела може бити и на метахеуристике инспирисане природом (процесима или појавама у природи, понашањем скупа јединки), и на оне које то нису. Такође, могу се поделити на детерминистичке и стохастичке, као и на метахеуристике са или без употребе меморије током процеса претраге.

Неке од метахуристика заснованих на побољшању једног решења које се често користе су: итерирана локална претрага, симулирано каљење, похлепна стохастичко-адаптивна метода претраге, табу претраживање и метода променљивих околина, док су генетски алгоритам, оптимизација ројем честица, оптимизација колонијом пчела и оптимизација мрављим колонијама неке од најзаступљенијих популационих метахуристика. Следи кратак опис сваке од наведених метахуристика, а више се може наћи у [42] и [92].

### 1.6.1 Популационе метахеуристике

Заједничко за популационе метахеуристике је да итеративно побољшавају популацију решења. На почетку се генерише иницијална популација, а затим се у свакој итерацији формира нова популација јединки. У наредну генерацију прелази један део старих јединки и један број јединки генерисаних у текућој генерацији које се изаберу на неки начин. Након испуњења критеријума заустављања, најбоља јединка из популације се проглашава за решење. Већина попу-

лационих метахеуристика инспирисана је процесима у природи. У наставку је дат опис неких од често коришћених метахеуристика овог типа.

- *Генетски алгоритми* (енгл. *Genetic Algorithms, GA*) развијени су седамдесетих година двадесетог века на Универзитету у Мичигену за потребе проучавања процеса адаптације у природи [50]. Након тога су модификовани и почињу да се примењују у оптимизацији и машинском учењу [54, 62, 70]. Генетски алгоритми базирани су на процесу еволуције у природи. *Јединка* генетског алгоритма је решење (или део решења) које је кодирано на одговарајући начин. Аналогно популацији јединки у природи, *популацију* генетског алгоритма представља скуп јединки. За сваку јединку се на одређен начин разматра њена прилагођеност која је мерило квалитета јединке, односно одговарајућег (дела) решења. Најчешће се у те сврхе користи вредност функције циља (дела) решења које је кодирано том јединком. Генетски алгоритам почиње генерисањем иницијалне популације које се најчешће ради на случајан начин или неком хеуристиком, а затим се у свакој итерацији генерише нова популација (генерација). Једна итерација генетског алгоритма подразумева фомирање нове популације јединки применом оператора *селекције* и операторима *варијације* (укрштање и мутација). Оператором селекције врши се одабир јединки текуће популације уз помоћу којих ће се креирати јединке нове популације. Селекција се врши у складу са вредностима функције прилагођености, при чему се фаворизују јединке које су боље прилагођене. Претпоставка је да ће такве јединке пренети добар генетски материјал у наредну генерацију, па ће самим тим наредну генерацију чинити решења бољег квалитета. Оператори селекције који се често користе су рулетска селекција и турнирска, селекција базирана на рангирању итд. Након селекције, примењује се оператор *укрштања* или оператор *мутације*, а често се примењују оба. Укрштањем решења из текуће генерације добијају се њихови потомци. Укрштање подразумева размену делова генетских кодова родитељских јединки са неком вероватноћом. Најчешће у употреби је позиционо укрштање које подразумева да се насумично одреди позиција (једнопозиционо укрштање) или више позиција (вишепозиционо укрштање), а да се затим наизменично преписују генетски кодови једног и другог родитеља између изабраних позиција. Осим укрштања генетских кодова родитеља, на нове јединке могу утицати и мутације, које насумично модификују појединачне јединке и тако уносе неопходан ниво диверзификације. Најједноставнији начин имплементације мутације је да се насумичном елементу генетског кода јединке промени вредност. Након примене оператора варијације, треба одабрати јединке које чине наредну генерацију јединки. Један начин је да се цела популација замени новим јединкама, док је друга стратегија да се део старе генерације задржи, а

да се само одређен број најлошијих јединки (у смислу функције прилагођености) замени јединкама нове генерације. Често се користи и тзв. елитистички приступ где се одређен број елитних јединки преноси у наредну генерацију, без примене генетских оператора.

Када је изабрани критеријум заустављања испуњен, претрага се завршава и решење је најбоље прилагођена јединка крајње популације.

- *Оптимизација ројем честица* (енгл. *Particle Swarm Optimization, PSO*) је мета-хеуристика која се ослања на механизам кооперације који у природи постоји међу јединкама роја (популације), а који води до повећања колективне интелигенције. Идеја је опонашање организама који живе у групи као што су јата птица или риба када су у потрази за храном. Метода је први пут предложена 1995. године у раду [60]. PSO користи популацију сачињену од одређеног броја честица којима су кодирана решења. Свака честица  $i$  има свој положај у простору који је представљен вектором  $x_i$ , као и вектор брзине  $v_i$ . Честице уче једне од других, па тако успех једне честице утиче на понашање осталих честица. Свака честица итеративно мења свој положај узимајући у обзир два фактора: најбољи положај  $p_i$  у којем се налазила честица  $i$  и најбољи положај  $p_g$  међу свим честицама роја. Утицај искуства честице и колективног искуства приликом генерисања новог вектора положаја за дату честицу контролишу се одговарајућим параметрима. Више о применама ове методе може се наћи у [81].
- *Оптимизација мрављим колонијама* (енгл. *Ant Colony Optimization, ACO*) је још једна метода која се базира на кооперацији јединки колоније која је врло изражена код мрава, будући да појединачни мрав има врло мале способности, док су мравље колоније врло организоване и способне за комплексне радње. Метода је први пут предложена у раду [23] и употребљена за решавање проблема трговачког путника. Посматрањем мрава у природи уочено је да током потраге за храном, мрави увек налазе најкраћи пут од колоније до извора хране. Мрави међусобно комуницирају тако што за собом остављају траг феромона. Сваки мрав оставља извесну количину феромона дуж путање којом се креће и иако је на почетку кретање мрава насумично, након неког времена концентрација феромона на краћим путањама до извора хране постаје већа. На тај начин мрав који наиђе на траг феромона који је оставио његов претходник, са већом вероватноћом наставља кретање краћом путањом, а самим тим и појачава траг феромона дуж те путање. Услед овакве комуникације, сви мрави убрзо почињу да се крећу истом путањом. Битан фактор је и испаравање феромона, којим се погрешне путање након неког времена елиминишу, али и уноси потребна доза диверзификације у процес претраге. Метода користи вештачке мрав-

ве за истраживање простора решења, док путања мрава представља једно решење. На почетку алгоритма иницијализује се почетни ниво трагова феромона (најчешће једнаким вредностима) на компонентама решења који се затим ажурирају током извршавања алгоритма. Метода је конструктивног типа и подразумева да се у свакој итерацији изгради путања за сваког вештачког мрава. Изградња путање ради се уз помоћ стохастичке процедуре која итеративно додаје нови елемент решења на основу трагова феромона. Након креирања путања, ажурира се матрица која садржи трагове феромона. Овом приликом појачава се траг феромона на основу конструисаног решења (или његовог дела) једног или више мрава у складу са квалитетом конструисаних решења. Једна стратегија је да се у сваком кораку конструкције за сваког мрава освежи одговарајући траг феромона, а могуће је и освежавање трага за сваког мрава након што је конструисано комплетно решење. Друга стратегија је освежавање трагова, тек када сви мрави конструишу комплетно решење. Том приликом могу се узети у обзир сви мрави, само одређен број мрава (они коју су нашли најбоља или најлошија решења), или само онај мрав који је нашао најбоље решење. Да би се спречила преурађена конвергенција свих мрава ка решењима која нису оптимална, узима се у обзир и испаравање феромона, тј. вредности у матрици феромона опадају у складу са константом испаравања која се бира на случајан начин из интервала  $(0, 1]$ . Крајње решење је најбоље генерисано решење. Детаљније о методи се може наћи у [27].

- *Оптимизација пчелињим колонијама* (енгл. *Bee Colony Optimization, BCO*) први пут је предложена 2001. године у [68] и инспирисана је понашањем пчела у потрази за храном. У пчелињем друштву постоји строга подела рада међу пчелама и разликујемо неколико врста пчела: извиђаче, регрутере, сакупљачице и неопредељене пчеле. У оптимизацији постоје само пчеле регрутери и неопредељене пчеле. Свака (вештачка) пчела итеративно гради (поправља) једно решење, полазећи од празног решења. Свака итерација BCO алгоритма састоји се од  $NC$  корака који обухватају тзв. *лет унапред* и *лет уназад*. У оквиру лета унапред, свака од  $B$  пчела процењује могуће потезе и бира потез који ће направити, односно конструише (поправља) решење. Након тога, у лету уназад пчеле колективно процењују сва формирана решења (делове решења) и свака од њих доноси одлуку да ли ће остати лојална свом решењу или ће постати неопредељена. Затим се неопредељене пчеле регрутују поново, тј. преузимају решење неке од лојалних пчела. Након извршавања  $NC$  корака, ажурира се најбоље нађено решење, све пчеле се бришу и почиње наредна итерација. Претрага се завршава када је испуњен критеријум заустављања. BCO је успешно примењена у решавању транспортних, локацијских и проблема распоређивања [99].

- *Оптимизација колонијама вештачких пчела* (енгл. *Artificial Bee Colony, ABC*) такође опонаша процес налажења хране у пчелињим друштвима. Метода је први пут предложена 2005. године у [56] и подразумева изворе хране (допустива решења проблема) који имају одређену количину цветног нектара (мера квалитета одговарајућег решења), као и запослене пчеле које истражују изворе хране у околини њиховог текућег извора. Сваки извор хране има тачно једну запослену пчелу, док су све преостале пчеле посматрачи. Пчеле посматрачи или незапослене пчеле на основу информација које су добиле од запослених пчела бирају свој извор хране. Запослена пчела постаје извиђач када њен извор хране пресуши и она налази нови извор хране. ABC алгоритам почиње генерисањем иницијалне популације пчела извиђача које се најчешће ради на случајан начин. Затим у свакој ABC итерацији свака запослена пчела испитује околину свог извора, тј. разматра нова решења из околине тренутног решења. Уколико ново решење побољшава вредност функције циља, запослена пчела прелази у то решење, односно мења свој извор хране. Затим пчеле посматрачи бирају изворе хране на основу информација које су добиле од запослених пчела, пропорционално квалитету одговарајућих решења (рецимо рулетском селекцијом). Уколико се неко решење не унапређује одређен број итерација, запослена пчела га напушта и постаје извиђач, тј. са неком вероватноћом напушта свој извор и прелази у нови насумично изабрани. Претрага се завршава када је испуњен изабрани критеријум заустављања, а решење је најбољи нађени извор хране међу запосленим пчелама.

### 1.6.2 Метакхеуристике засноване на побољшању једног решења

Уопштено говорећи, ове метакхеуристике у свакој итерацији на основу текућег решења генеришу скуп решења-кандидата вршећи одређене трансформације над текућим решењем, а затим се из скупа кандидата бира решење које ће заменити текуће. Процес се понавља док изабрани критеријум заустављања није задовољен.

- *Итерирана локална претрага* (енгл. *Iterated Local Search, ILS*) је побољшана верзија локалне претраге која подразумева и дозу диверзификације [67]. Први корак алгоритма је генерисање почетног решења од кога се врши локална претрага. Добијени локални оптимум се затим мења пертурбацијом и претрага се наставља од тако добијеног измењеног решења. Пертурбација решења подразумева његову делимичну модификацију која има за циљ да се након поновног покретања локалне претраге достигне бољи локални оптимум. Једна итерација методе подразумева локалну претрагу и пертурбовање добијеног локалног оптимума који представља полазну тачку за

локалну претрагу у наредној итерацији. Степен пертурбације може бити исти током читавог извршавања алгоритма, а може се и мењати у току извршавања при одређеним условима (нпр. уколико није дошло до побољшања решења у задатом броју итерација). Када је испуњен изабрани критеријум зауставља, претрага се завршава и крајње решење је најбоље нађено решење из свих итерација.

- *Симулирано каљење* (енгл. *Simulated annealing, SA*) је метахеуристика инспирисана процесом каљења челика који подразумева загревање челика на високу температуру, а затим његово контролисано и постепено хлађење, да би се постигла оптимална кристална структура материјала. Функција циља је анологон енергији овог система. Симулирано каљење је стохастички алгоритам који под одређеним условима дозвољава прелазак алгоритма у лошије решење, у циљу избегавања замке локалних оптимума. Алгоритам започиње генерисањем почетног решења и избора почетне вредности параметра  $T$  који се назива температура и која је изабрана у складу са конкретним проблемом. Вредност овог параметра се кроз алгоритам постепено смањује. Затим се, док није задовољен изабрани критеријум заустављања, на свакој температури извршава одређен број итерација у којима се генерише насумични сусед текућег решења. Уколико је добијено решење боље од текућег, претрага се наставља од новог решења. Са друге стране, алгоритам прелази у ново решење са вероватноћом  $P$  чак и када је оно лошије од текућег. Вероватноћа  $P$  зависи од температуре и квалитета новог решења. Како температура опада (претрага одмиче), смањује се вероватноћа прихватања лошијег решења. Нека је  $x$  текуће решење, а  $x' \in N(x)$  насумично генерисани сусед. Промена енергије система означава се са  $\Delta E = f(x') - f(x)$ . У случају проблема минимизације вероватноћа прихватања лошијег решења често се дефинише као  $P = e^{\frac{-\Delta E}{T}}$ . Шема хлађења такође мора бити пажљиво осмишљена. Почетна температура не сме бити превелика, јер се у том случају у почетном делу алгоритма прихватају сва решења, а уколико је премала алгоритам се своди на локалну претрагу (прелази се у прво нађено решење које побољшава вредност функције циља). Након одређеног броја итерација, температура опада најчешће линеарно ( $T := T - \beta$ ) или геометријски ( $T := \alpha T, \alpha \in (0, 1)$ ). Могуће је конструисати и адаптивну шему хлађења, тако да се ритам хлађења мења динамички на основу информација које се добијају у току претраге. Метода је први пут предложена 1983. године у [61], а за више детаља погледати и [52, 91].
- *Похлепна стохастичко-адаптивна метода претраге* (енгл. *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure, GRASP*) предложена је први пут 1989. године у ра-

ду [34]. Свака итерација GRASP метахеуристике састоји од два корака: конструисања почетног допустивног решења насумично-похлепним алгоритмом и локалне претраге која почиње од конструисаног решења. Приликом имплементације похлепног алгоритма за конструкцију почетног решења (енгл. *Greedy Randomized Construction, GRC*), комбинују се стохастички и похлепни елементи како би се генерисала различита решења. Алгоритам додаје један по један елемент решења тако што у сваком кораку најпре формира листу кандидата који би могли постати део решења (енгл. *Candidate List, CL*). Затим се формира тзв. редукована листа кандидата коју чини одређен број најбољих елемената (у смислу утицаја на функцију циља) из CL, а онда се из редуковане листе насумично бира елемент који се додаје у решење. Овако конструисано почетно решење је улаз у процедуру локалне претраге и њоме се добија локални оптимум за текућу итерацију GRASP алгоритма. Најбоље пронађено решење током свих итерација је крајње решење претраге. Детаљније о GRASP методи може се наћи у [82, 83].

- *Табу претраживање* (енгл. *Tabu Search, TS*) је метахеуристика која користи меморију претраге, први пут предложена 1989. године у раду [39]. Локални оптимуми пронађени локалном претрагом памте се у тзв. табу листи и искључују се из процеса претраге у наредним итерацијама. Табу листа има одређену дужину (најчешће фиксну) и представља краткорочну меморију процеса претраге. Након одређеног броја итерација (табу време), решење се ослобађа из табу листе. Да би се уштедела меморија, некада се уместо решења, у табу листи памте потези који су водили до тих решења и који су у наредним итерацијама забрањени. Мана овог приступа је што се може десити да буду забрањена и нека решења која имају исту особину као и нађени локални оптимум. Решењима из табу листе се може укинути табу статус, што се контролише тзв. аспирацијском функцијом која укида табу статус решењима која испуњавају одређени услов (рецимо ако је нађено решење боље од до тада најбољег нађеног решења). Основна верзија методе се може проширити тако да, поред табу листе, обухвата и чување елемената квалитетних решења (средњерочна меморија) из неколико претходних итерација или елемената који се често појављују у решењима током целе претраге (дугорочна меморија) и у том случају реч је о тзв. реактивном табу претраживању (*Reactive Tabu Search, RTS*). За више детаља видети [40, 41, 88].

### 1.6.3 Метода променљивих околина

*Метода променљивих околина* (енгл. *Variable Neighborhood Search, VNS*) је једноставна, али врло ефикасна метахеуристика која се заснива на систематичној

промени околине у којој се врши локална претрага. Предложили су је Младеновић и Хансен 1997. године у раду [76], док су прве идеје изложене у [75]. Метода променљивих околина је временом постала једна од најпопуларнијих метахеуристика за решавање проблема дискретне и континуалне оптимизације, често надмашујући друге приступе из литературе [13, 47]. Метода се заснива на идеји да локални оптимум у некој околини није нужно локални оптимум у некој другој околини. Са друге стране, глобални оптимум је локални оптимум за сваку околину. Осим тога, уочено је да су за већину проблема локални оптимуми у односу на различите околине међусобно блиски.

*Основна метода променљивих околина* (енгл. *Basic Variable Neighborhood Search, BVNS*) комбинује ове идеје и стохастички приступ, који се постиже уз помоћ тзв. фазе размрдавања (енгл. *Shaking*). Нека је  $N = \{N_1, N_2, \dots, N_{k_{max}}\}$  скуп унапред дефинисаних околина, при чему је  $N_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq k_{max}$ ,  $k$ -та околина решења  $x$ . Главна идеја фазе размрдавања је да се испитају различите околине решења  $x$  са циљем удаљавања од већ достигнутог локалног оптимума. Ово се постиже избором насумичног решења  $x'$  из околине  $N_k(x)$  и потом локалним претраживањем почевши од решења  $x'$ . Кораци BVNS методе за решавање проблема  $\min_{x \in S} f(x)$ , приказани су Алгоритмом 1. BVNS је најзаступљенија варијанта методе променљивих околина у литератури. Поред ње, развијене су разне модификације [46, 47].

---

**Алгоритам 1 BVNS**


---

- 1: Иницијализација: изабрати околине  $N_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_{max}$  за фазу размрдавања. Одредити критеријум заустављања. Генерисати почетно решење  $x^*$ ,  $f^* \leftarrow f(x^*)$ .
  - 2: **while** критеријум заустављања није испуњен **do**
  - 3:    $k \leftarrow 1$
  - 4:   **while**  $k \leq k_{max}$  и није испуњен критеријум заустављања **do**
  - 5:     На случајан начин изабрати  $x'$  из околине  $N_k(x^*)$  ▷ размрдавање
  - 6:     Наћи  $x''$  као резултат локалне претраге почевши од решења  $x'$  ▷ локална претрага
  - 7:     **if**  $f(x'') < f^*$  **then** ▷ одлука о померању
  - 8:        $x^* \leftarrow x''$ ,  $f^* \leftarrow f(x'')$ ,  $k \leftarrow 1$ ,
  - 9:     **else**
  - 10:       $k \leftarrow k + 1$
- 

Када се у BVNS алгоритму локална претрага замени *методом променљивог спушта* (енгл. *Variable Neighborhood Descent, VND*), добија се *Општа метода променљивих околина* (енгл. *General Variable Neighborhood Search, GVNS*). VND је детерминистичка варијанта методе променљивих околина која има за циљ да претражи све околине из унапред изабраног скупа околина. Кораци VND методе за решавање проблема  $\min_{x \in S} f(x)$ , приказани су Алгоритмом 2.

---

**Алгоритам 2 VND**

---

```
1: Иницијализација: изабрати околине  $N_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, l_{max}$ 
2: Генерисати почетно решење  $x^*$ ,  $f^* \leftarrow f(x^*)$ .
3:  $l \leftarrow 1$ 
4: while  $l \leq l_{max}$  do
5:   Наћи најбоље решење  $x'$  из околине  $N_l(x^*)$  ▷ локална претрага
6:   if  $f(x') < f^*$  then ▷ одлука о померању
7:      $x^* \leftarrow x'$ ,  $f^* \leftarrow f(x')$ ,  $l \leftarrow 1$ ,
8:   else
9:      $l \leftarrow l + 1$ 
```

---

*Редуковану методу променљивих околина* (енгл. *Reduced Variable Neighborhood Search, RVNS*) карактерише одсуство локалне претраге. Овим се алгоритам значајно убрзава, али се губи на квалитету добијених решења. Стога, RVNS се најчешће користи за генерисање почетних решења од којих ће нека друга (мета)хеуристика започети претрагу.

*Закошена метода променљивих околина* (енгл. *Skewed Variable Neighborhood Search, SVNS*) под одређеним условима дозвољава прелазак у лошије решење, у циљу избегавања замки локалних оптимума. Степен деградације решења и удаљеност од текућег решења утичу на то да ли ће алгоритам претрагу наставити од добијеног лошијег решења. Претрага се може наставити из новог решења и када оно има лошију вредност функције циља од тренутно најбољег, под условом да су ова два решења довољно међусобно удаљена. Метода је посебно погодна за проблеме код којих локални оптимуми нису близу, јер у тим ситуацијама фаза размрдавања најчешће не може да обезбеди потребан ниво диверзификације да би се претрага успешно завршила. Неопходно је дефинисати растојање  $\rho(x, x')$  између два решења  $x$  и  $x'$ . Прелазак у лошије решење контролише се адекватним избором параметра методе  $\alpha$ . За мале вредности параметра  $\alpha$  утицај удаљености решења је мали и алгоритам се понаша слично као BVNS. Са друге стране, за велике вредности параметра  $\alpha$  лошија решења се прихватају често и алгоритам се понаша као насумична претрага. Вредност параметра  $\alpha$  се мора изабрати пажљиво за конкретан проблем, у складу са одабраним растојањем и то се најчешће ради експерименталним путем. Кораци SVNS методе за решавање проблема  $\min_{x \in S} f(x)$ , приказани су Алгоритмом 3.

**Алгоритам 3 SVNS**

---

- 1: Иницијализација: изабрати околине  $N_k, k = 1, 2, \dots, k_{max}$  за фазу размрдавања. Одредити критеријум заустављања. Генерисати почетно решење  $x^*, f^* \leftarrow f(x^*)$  и изабрати параметар  $\alpha$ .
  - 2:  $x \leftarrow x^*, F \leftarrow f^*$
  - 3: **while** критеријум заустављања није испуњен **do**
  - 4:    $k \leftarrow 1$
  - 5:   **while**  $k \leq k_{max}$  и није испуњен критеријум заустављања **do**
  - 6:     На случајан начин изабрати  $x'$  из околине  $N_k(x)$  ▷ размрдавање
  - 7:     Наћи  $x''$  као резултат локалне претраге počevši од решења  $x'$  ▷ локална претрага
  - 8:     **if**  $f(x'') < f^*$  **then**
  - 9:        $x^* \leftarrow x'', f^* \leftarrow f(x'')$
  - 10:    **if**  $f(x'') < F + \alpha\rho(x, x'')$  **then** ▷ одлука о померању
  - 11:       $x \leftarrow x'', F \leftarrow f(x''), k \leftarrow 1$
  - 12:    **else**
  - 13:       $k \leftarrow k + 1$
- 

*Примално-дуална метода променљивих околина* (енгл. *Primal-Dual Variable Neighborhood Search*) уз проблем који се решава изучава и њему дуални проблем. Уколико се решава проблем минимизације, свако допустиво решење прималног проблема јесте горња граница оптималног решења, док решење (релаксације) дуалног проблема јесте доња граница за оптималну вредност полазног проблема. Примално-дуални VNS решава VNS методом и оригинални и дуални проблема (или његову релаксацију све док разлика између достигнутих решења прималног и дуалног проблема не постане мања од унапред задате вредности. У једноставнијим верзијама, дуални проблем се може решити само једном, док напредније верзије методе подразумевају ажурирање доње границе оптималног решења. За више детаља видети [45].

*Метода променљивих околина са декомпозицијом* (енгл. *Variable Neighborhood Decomposition Search, VNDS*) своди главни проблем на мање потпроблеме, а затим комбинује њихова решења како би се добило решење полазног проблема. Нека је  $x' \in N_k(x^*)$  решење добијено у фази размрдавања. У фази локалне претраге поправља се само његов део  $y$  који садржи  $k$  елемената решења  $x'$ , који нису део текућег решења  $x^*$ . Нека је  $y'$  локални оптимум добијен локалном претрагом у простору решења за  $y$ , који је у општем случају мањи од простора решења полазног проблема. Тада се решење полазног проблема  $x''$  добија комбиновањем решења елемената решења  $x'$  који нису део решења  $y$  и решења  $y'$ . Кораци VNDS методе за решавање проблема  $\min_{x \in S} f(x)$ , приказани су Алгоритмом 4.

---

**Алгоритам 4 VNDS**

---

```
1: Иницијализација: изабрати околине  $N_k, k = 1, 2, \dots, k_{max}$  за фазу размрдavanja. Одредити кри-
   теријум заустављања. Генерисати почетно решење  $x^*, f^* \leftarrow f(x^*)$ .
2: while критеријум заустављања није испуњен do
3:    $k \leftarrow 1$ 
4:   while  $k \leq k_{max}$  и није испуњен критеријум заустављања do
5:     На случајан начин изабрати  $x'$  из околине  $N_k(x^*)$  ▷ размрдavanje
6:      $y \leftarrow x' \setminus x^*$ .
7:     Наћи  $y'$  као резултат локалне претраге почевши од решења  $y$  ▷ локална претрага
8:      $x'' \leftarrow ((x' \setminus y) \cup y')$ 
9:     if  $f(x'') < f^*$  then ▷ одлука о померању
10:       $x^* \leftarrow x'', f^* \leftarrow f(x''), k \leftarrow 1$ ,
11:     else
12:       $k \leftarrow k + 1$ 
```

---

*Паралелизација методе променљивих околина* (енгл. *Parallel Variable Neighborhood Search, PVNS*) се може радити на више начина, а за циљ има брже долажење до решења тако што ће се потребна израчунавања поделити на више процесора. Најједноставнији приступ подразумева да се на сваком процесору истовремено покрене VNS алгоритам на различитим инстанцама проблема. Други приступ је паралелизација локалне претраге, будући да је то временски најзахтевнији корак алгоритма. Још једна опција је истовремено покретање VNS алгоритма на сваком процесору са различитим почетним решењима (вишестартни VNS). Паралелизацију је могуће реализовати тако да се истовремено на сваком процесору извршава фаза размрдавања и локална претрага за различите вредности параметра  $k$ .

## 1.7 Хибридни алгоритми

Комбиновањем две или више метахуристичких или егзактних метода добијају се тзв. *хибридни алгоритми*. Идеја је да се на овај начин побољша квалитет добијених решења, тј. искористе предности и ублаже недостаци појединих метахуристичких (преурањена или спора конвергенција). Приликом комбиновања метахуристичких, најчешће се користи једна популациона и једна метахуристичка заснована на побољшању једног решења. Комбиновање се може радити на више начина. Један од начина је секвенцијално извршавање метахуристичких, када се алгоритми извршавају један за другим. На овај начин се једна метахуристичка може искористити за добијање почетног решења, а након ње се примењује друга метахуристичка или егзактна метода којом се то решење поправља. Други

начин је да се једна метахеуристика или нека њена компонента користи унатар друге. Рецимо, функција претраге се може заменити неким другим алогритмом.

Хибриди настали комбиновањем метахеуристике и егзактне методе (математичком програмирања) зову се *матхеуристике*. Принципи комбиновања су слични као и у случају две метахеуристике. Прва опција је да се једна метода интегрише у другу. Егзактне методе се могу користити за генерисање квалитетних почетних решења, а могу се користити и у фази претраге околина и на тај начин уметнути у метахеуристику. Са друге стране, метахеуристиком се могу добити допустива решења и ограничења која даље користи егзактна метода. Такође, могуће је декомпоновати полазни проблем на мање проблеме који се лакше решавају, затим потпроблеме решити одговарајућом методом и извршити комбиновање добијених решења. Још једна опција за хибридизацију је размена информација током независних извршавања метахеуристичког и алгоритама математичког програмирања. Детаљније о матхеуристикама може се наћи у [69].

## Глава 2

# Проблем $p$ -резервног центра

Проблем  $p$ -центра формулисао је Nakimi 1965. године [43] и од тада је детаљно проучаван услед широке примене у пракси. За дати скуп од  $n$  локација, циљ је одредити тачно  $p$  локација ( $p < n$ ) на којима ће бити успостављени центри, а затим придружити сваког корисника њему најближем центру, тако да је максимално растојање од корисника до његовог најближег центра минимално. Проблем  $p$ -центра припада класи NP-тешких проблема комбинаторне оптимизације [59] и од великог је значаја приликом планирања хитних служби као што су амбуланте и болнице, а може се применити и на планирање школа, банака, бензинских пумпи и генерално услужних објеката за које је битно да се налазе што ближе корисницима. На пример, приликом одређивања локација за болнице или полицијске станице, значајно је да чак и корисник који је најудаљенији може довољно брзо доћи до њему најближе установе. Слична ситуација је и приликом планирања локација за такси службе, паркинге, складишта итд. Корисник који је у најгориј позицији (најудаљенији од свог центра, најдуже време му је потребно да дође до центра, плаћа најскупљу цену итд.) често се у литератури назива *критични корисник*, а растојање које он прелази, које је у исто време и вредност која се минимизује, назива се *критично растојање*.

Имајући у виду комплексност овог проблема, велики број апроксимативних метода за решавање проблема  $p$ -центра предложен је у литератури. У раду [77] предложено је табу претраживање као и метода променљивих околина. Оптимизација пчелињим колонијама предложена је у раду [25], док је у раду [78] представљена локална претрага у оквиру које се посебна пажња посвећује равним деловима простора претраге. У раду [17] предложена је варијанта методе релаксације, а лексикографска локална претрага предложена је у [48]. Приступ заснован на решавању низа проблема покривања предложен је у [15].

За проблем  $p$ -центра је дефинисан велики број модификација и варијанти које су настале као одговор на потребе из реалног живота [1, 29, 32, 49, 87]. Ова глава посвећена је проширењу проблема  $p$ -центра под називом проблем  $p$ -резервног

центра (енгл. *p-next center problem, PNCP*). Циљ је да се обухвати реална могућност да изненада дође до отказа једног или више центара услед непредвиђених околности. У том случају се корисници преусмеравају на тзв. резервни центар. Проблем је први пут предложен у раду [1] и од тада је предложено неколико метахуристичких приступа за његово решавање [65, 66, 78, 85, 86, 94]. У овом поглављу ће бити описан SVNS алгоритам за решавање PNCP који је предложен и публикован у самосталном раду Ј. Тасић [94]. Алгоритам је тестиран на скупу од 285 `pmcd` инстанци димензије до 900 чворова које су коришћене и у осталим радовима у литератури на тему PNCP. Добијени резултати сведоче о ефикасности и стабилности предложеног алгоритма.

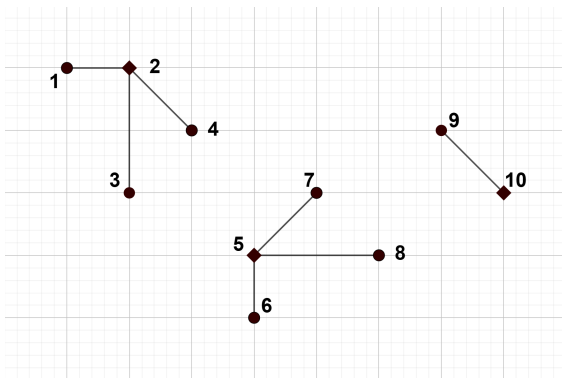
## 2.1 Опис проблема $p$ -резервног центра

Услед непредвидљивих ситуација неки центри могу престати да функционишу. Природне непогоде као што су земљотреси, поплаве, пожари, олује итд. могу узроковати нефункционалност или затварање центара. Такође, различити проблеми као што су нестанак струје, недостатак особља, технички кварови итд. могу имати исти ефекат. Сваки корисник придружен је свом најближем центру који се назива његовим *примарним центром*. Природно је претпоставити да корисник не може знати унапред да ли је неки центар затворен. Уколико корисник стигне у центар који је затворен услед насталог проблема, он наставља до свог тзв. *резервног центра*. Резервни центар је центар који је на најкраћем растојању од примарног центра и за који се подразумева да није у квару. На пример, корисник не може унапред знати да ли је неки банкомат у квару или без новца. Уколико је то случај, корисник ће продужити до резервног банкомата који је најближи примарном банкомату код кога се тренутно налази, а који је ван функције. Проблем  $p$ -резервног центра састоји се у успостављању  $p$  центара тако да максимално растојање од корисника до његовог резервног центра, уз пролазак кроз примарни центар, буде минимално. Разматрани проблем  $p$ -резервног центра је NP-тежак, као проширење проблема  $p$ -центра [59].

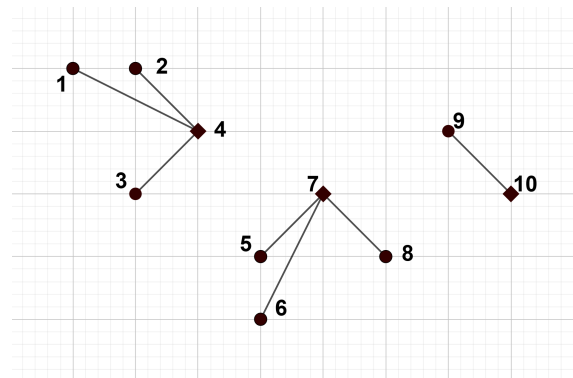
Мотивисани проблемом дистрибуције електричне енергије који је настао услед вишеструких земљотреса у Шпанији, аутори рада [1] дефинисали су 2015. године PNCP и формулисали неколико математичких модела. Модели су упоређени решавањем 132 `pmcd` инстанце које имају до 200 чворова уз помоћ Xpress Optimizer решавача и предложених модела. Предложени модели омогућавају решавање инстанци које имају до 50 чворова уз прихватљив утрошак меморије и времена.

Разлике између проблема  $p$ -центра и проблема  $p$ -резервног центра илустроване су примером на Слици 2.1. За дати скуп од  $n = 10$  локација, циљ је успоставити  $p = 3$  центра. Оптимално решење за проблем  $p$ -центра је  $\{2, 5, 10\}$  (означено са  $\blacklozenge$ ). Најдуже растојање међу свим корисницима је оно које прелазе корисници

3 и 8, а вредност функције циља је 2. За проблем  $p$ -резервног центра оптимално решење је  $\{4, 7, 10\}$  и вредност функције циља је  $2\sqrt{5}$ . Корисници 1 и 6 прелазе најдуже растојање међу свим корисницима. Растојање које прелази корисник 1 једнако збиру растојања до његовог примарног центра 4, које износи  $\sqrt{5}$ , и растојања од центра 4 до његовог резервног центра 7, које износи  $\sqrt{5}$ , што је укупно  $2\sqrt{5}$ . У случају корисника 6 укупан пређени пут једнак је збиру растојања до његовог примарног центра 7 и растојању од центра 7 до његовог резервног центра 4, што је такође укупно  $2\sqrt{5}$ .



(а) Оптимално решење за РСР.



(б) Оптимално решење за ПНСР.

Слика 2.1: Поређење оптималних решења за РСР и ПНСР на примеру са  $n = 10$  и  $p = 3$ .

Јасно је да на овом примеру оптимално решење РСР није уједно и оптимално решење ПНСР, као ни обрнуто. Ако се посматра оптимално решење РСР проблема  $\{2, 5, 10\}$  као решење ПНСР проблема, корисници 3 и 8 прелазе најдуже растојање до својих резервних центара. Корисник 3 прелази растојање до свог примарног центра 2, увећано за растојање од центра 2 до његовог резервног центра 5, што је у збиру  $2 + \sqrt{13}$ . Слично, корисник 8 прелази растојање до свог примарног центра 5, увећано за растојање од центра 5 до његовог резервног центра 2, што је у збиру исто  $2 + \sqrt{13}$ . Стога, функција циља ПНСР за оптимално решење РСР проблема је  $2 + \sqrt{13}$  што је веће од  $2\sqrt{5}$ . Аналогно, ако би се оптимално решење ПНСР  $\{4, 7, 10\}$  посматрало као решење РСР, корисници 1 и 6 прелазе највећу удаљеност до својих центара и она износи  $\sqrt{5}$ . То је уједно и вредност функције циља РСР проблема за ово решење и она је већа од 2 колико је износила вредност функције циља оптималног решења.

## 2.2 Преглед релевантне литературе

У овој секцији дат је преглед метахеуристика предложених за решавање PNCP.

- У раду [66] из 2018. године аутори су предложили похлепну стохастичко адаптивну процедуру претраге и методу променљивих околина, као и њихову хибридизацију за решавање проблема  $p$ -резервног центра. Према експерименталним резултатима на истом скупу од 132 `rmcd` инстанце које имају до 200 чворова који је коришћен у [1], хибридна метода је дошла до резултата бољег квалитета у односу на GRASP и VNS.
- Филтрирана VNS метода која се базира на различитим критеријумима за прихватање апроксимација решења, предложена је 2021. године у [86]. Филтрирана VNS метода је тестирана на скупу од 64 инстанце који је коришћен у [66], као и на скупу додатних 40 инстанци које имају до 900 чворова. За инстанце мањих димензија предложени алгоритам достиже оптимална решења у временском периоду  $t = 2n$ , где је  $n$  број чворова посматране инстанце. За решавање инстанци већих димензија, временски период је продужен на  $t = 5n$ . Филтрираном VNS методом је за све осим једне инстанце са 200 чворова пронађено исто или боље решење од решења добијеног хибридном методом из [66].
- Исте године, у раду [65] аутори предлажу три варијанте еволутивног приступа засноване на генетским алгоритмима за решавање PNCP. За потребе тестирања проширују скуп `rmcd` инстанци из [66] на скуп од 416 инстанци које имају до 900 чворова. Презентована су оптимална решења за 401 од 416 `rmcd` инстанци добијена уз помоћ решавача CPLEX коришћењем 24 нити и временским ограничењем до недељу дана. За преостале инстанце одређене су горње и доње границе решења проблема.
- У раду [78] из 2023. године предложена је хибридизација локалне претраге и комбинације две стратегије при анализи и обради „равних” потеза у процесу претраге. Прва стратегија је да се прихватају не само потези који воде ка побољшању вредности функције циља (потези „низбрдо”), већ и неки „равни” потези, тј. они који не мењају вредност функције циља. Нека су  $x$  и  $x'$  два решења са истом вредношћу функције циља. Прелазак из решења  $x$  у решење  $x'$  је „раван” потез и као такав је анализиран уз помоћ неке хеуристике. На овај начин се „равни” потези потенцијално могу упоређивати и прихватати они који су боље оцењени хеуристиком. Друга стратегија подразумева да се „равни” потези могу увек прихватати, осим онда када су забрањени као табу потези. Предложени алгоритам

је тестиран на 132 `pmcd` инстанце које имају до 200 чворова и резултати су упоређени са резултатима алгоритма из [66]. Најбоља решења (из 10 извршавања) добијена алгоритмом [78], на свим инстанцама достижу или побољшавају решења добијена алгоритмом [66].

- VNS метода за решавање PNCP која ће детаљније бити описана у Секцији 2.4 предложена је 2024. године у раду [94]. Реч је о SVNS варијанти методе која у оквиру фазе локалне претраге користи тзв. хеуристику брзе размене (енгл. *Fast Interchange Heuristic, FIH*). Метода је тестирана на скупу од 288 `pmcd` инстанци димензије до 900 чворова, међу којима су 132 инстанце димензије до 200 чворова коришћене у [1, 66, 78] и 40 додатних инстанци које имају до 900 чворова из [86], док су преостале инстанце димензије до 900 чворова из [65]. Резултати су упоређени са резултатима из [65, 66, 78, 86] и статистичком анализом установљено је да су добијени резултати значајно бољи од оних из [65, 66, 86], док у поређењу са [78] нема значајне разлике.
- У раду [107] предложено је тежинско табу претраживање (енгл. *Weighting-based Tabu Search, WTS*) као приступ за решавање PNCP. WTS разлаже PNCP на низ потпроблема и решава сваки од њих брзом процедуром заснованом на табу претраживању. Метода је тестирана на скупу од 413 `pmcd` инстанци из [65] димензије до 900 чворова. За 12 инстанци је поправљено до тада најбоље познато решење из литературе, док су за преостале инстанце достигнута најбоља позната решења из литературе. Слична идеја је коришћена за проблем  $p$ -центра у раду [106] објављеном 2023. године.
- У раду [85] дизајниран је модификовани BVNS алгоритам са унапређеном локалном претрагом и фазом размрдавања. Алгоритам користи помоћне структуре података које су на сличан начин употребљене и за решавање проблема класичног  $p$ -центра [77]. Предложени BVNS упоређен је са хибридном методом из [66] и еволутивном приступом [65] на скупу од 132 `pmcd` инстанце димензије до 200 чворова из тих радова, као и на `rndkreg` скупу од 44 инстанце са бројем чворова између 1000 и 2500 и `rnddnskreg` скупу од 48 инстанци са од 500 до 1000 чворова. BVNS је надмашио преостале две методе у смислу квалитета решења, али и у смислу стабилности. Осим тога, предложени BVNS тестиран је и на скупу 40 додатних `pmcd` инстанци које до 900 чворова из [86], на коме је поправио нека најбоља позната решења из литературе, док је у преосталим случајевима достигао сва најбоља позната решења из литературе.

## 2.3 Математичка формулација проблема

Нека је  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  скуп датих локација, при чему је свака од њих кандидат да постане центар, док ће се локације на којима нису успостављени центри сматрати корисницима. Нека је  $D = (d_{ij})_{n \times n}$  матрица растојања таква да је са  $d_{ij}$  означено растојање између локација  $i$  и  $j$ . Задатак је одредити скуп  $P$ ,  $|P| = p$ , који садржи одабране локације за успостављање центара, придружити сваког корисника њему најближем отвореном центру, а затим одредити резервни центар за сваки (примарни) центар. Центре треба изабрати тако да најдуже растојање од корисника до његовог резервног центра (уз пролазак кроз примарни центар) буде минимално. Другим речима, треба минимизовати

$$f(P) = \max_{i \in A} \left\{ \min_{j \in P} d_{ij} + \min_{k \in P, k \neq j'} d_{j'k} \right\}, \quad j' = \arg \min_{j \in P} d_{ij}.$$

У циљу формулисања проблема  $p$ -резервног центра у виду целобројног линеарног програма, неопходно је дефинисати следеће бинарне променљиве:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{уколико је на локацији } j \text{ успостављен центар, тј. } j \in P, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{уколико је } j \text{ центар који је најближи локацији } i \text{ (} j \neq i \text{),} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Треба приметити да  $x_{ij} = 1$  има различито значење у зависности од тога да ли се на локацији  $i$  налази центар или не. Уколико је на локацији  $i$  успостављен центар, онда  $x_{ij} = 1$  означава да је  $j$  резервни центар за центар  $i$ ,  $i \neq j$ . Иначе,  $x_{ij} = 1$  значи да је центар  $j$  примарни центар за корисника  $i$ . Имајући у виду наведену нотацију, PNCP може бити формулисан као следећи целобројни линеарни програм [1]:

$$\min w \tag{2.1}$$

$$\sum_{j \in A} y_j = p, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in A, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad i \in A, \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{2.4}$$

$$y_j + \sum_{k \in A, d_{ik} > d_{ij}} x_{ik} \leq 1 \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{2.5}$$

$$w \geq \sum_{k \in A, k \neq j} d_{jk} x_{jk}, \quad j \in A, \tag{2.6}$$

$$w \geq d_{ij}(x_{ij} - y_i) + \sum_{k \in A, k \neq j} d_{jk} x_{jk}, \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{2.7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in A, i \neq j, \quad (2.8)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in A. \quad (2.9)$$

Циљ (2.1) проблема је минимизовати вредност континуалне променљиве  $w$  која представља максимално растојање од корисника до његовог резервног центра (уз пролазак кроз примарни центар).

Условом (2.2) број успостављених центара је постављен на  $p$ . Сваки корисник се придружује тачно једном примарном центру и сваки центар има тачно један резервни центар (услови (2.3)). Корисник не може бити придружен локацији на којој се не налази центар (услови (2.4)). Условима (2.5) се обезбеђује да сваки корисник као примарни центар користи онај центар који му је најближи.

Услови (2.6) и (2.7) обезбеђују да променљива  $w$  има коректну вредност у оба могућа случаја: када се на посматраној локацији налази корисник или када је на тој локацији успостављен центар. Уколико је локација центар, она сама себи служи као примарни центар (растојање до примарног центра је једнако 0), и у овом случају нема двокраке путање. Условима (2.6) постиже се да вредност  $w$  не буде мања од растојања од било које локације  $j$  до њеног најближег центра различитог од  $j$ . Како променљива  $x_{jk}$  има различита значења у зависности од улоге коју има локација  $j$  (корисник или центар), збир на десној страни неједнакости (2.6) се тумачи на различите начине. Уколико је локација  $j$  корисник, збир на десној страни представља растојање од корисника  $j$  до његовог примарног центра  $k$ . Са друге стране, уколико је  $j$  центар, растојање до примарног центра је 0, па сума на десној страни представља растојање до резервног центра.

У случају престанка рада неког центра, сви корисници који користе тај примарни центар, биће преусмерени ка истом резервном центру. У овом случају, укупан пређени пут једнак је збиру растојања од корисника до примарног центра и растојања од примарног до резервног центра, што је описано условима (2.7). Заиста, уколико је  $i$  корисник чији је примарни центар  $j$ , тј.  $x_{ij} = 1$  и  $y_i = 0$ , вредност  $w$  биће већа или једнака збиру  $d_{ij}(x_{ij} - y_i) = d_{ij}$  (растојање од корисника  $i$  до његовог примарног центра) и растојању од примарног центра  $j$  до резервног центра  $k$ . У свим осталим случајевима, када је  $i$  центар, тј.  $y_i = 1$ , вредност  $x_{ij} - y_i$  биће мања или једнака 0, што имплицира да је ограничење (2.7) слабије од ограничења (2.6), и сходно томе, разматра се само растојање од центра  $i$  до његовог резервног центра.

Условима (2.8) и (2.9) дефинисана је бинарна природа променљивих у моделу.

## 2.4 SVNS алгоритам за PNCP

У овом одељку ће бити описана варијанта Методе променљивих околина за решавање проблема  $p$ -резервног центра која је предложена у самосталном раду Ј. Тасић [94]. Имајући у виду да фаза размрдавања често не може да унесе довољну количину диверзификације у процес претраге, предложена је SVNS варијанта методе која под одређеним условима допушта и прелазак у лошије решење од текућег.

**Репрезентација решења.** Приликом креирања било које метахеуристике за конкретан проблем, врло важан елемент је репрезентација решења проблема. У предложеној SVNS методи за PNCP, користи се целобројна репрезентација решења. Као што је већ речено, локације из скупа  $A$  означене су бројевима од 1 до  $n$ . Скуп допустивих решења  $S$  је скуп свих целобројних вектора  $x$  дужине  $p$  чији су елементи  $x(i), i = 1, 2, \dots, p$  индекси локација на којима су успостављени центри, тј.

$$S = \{x : |x| = p; 1 \leq x(i) \leq n, i = 1, 2, \dots, p; x(i) \neq x(j), i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Кардиналност овако дефинисаног скупа допустивих решења је  $\binom{n}{p}$ . За проблеме са Слике 2.1 скуп допустивих решења је:  $S = \{x : |x| = 3, 1 \leq x(i) \leq 10, i = 1, 2, 3, x(i) \neq x(j), i \neq j, i, j = 1, 2, 3\}$ , кардиналности  $\binom{10}{3} = 120$ .

**Рачунање функције циља.** Нека је  $x \in S$  допустиво решење. Вредност функције циља  $f(x)$  рачуна се на следећи начин.

- За сваку локацију  $a \in A$  одреди се њој најближи центар  $c$ . Нека је  $d_1$  растојање од локације  $a$  до њеног примарног центра  $c$ . Уколико је  $a$  центар, онда је  $d_1 = 0$ .
- Нека је  $d_2$  растојање од примарног центра  $c$  до њему најближег (резервног) центра  $b \in x \setminus \{c\}$ .
- Вредност функције циља  $f(x)$  дефинише се као  $\max_{a \in A} (d_1 + d_2)$ .

**Дефиниција околина.** Нека  $\rho(x, x')$  представља број локација у којима се решења  $x$  и  $x'$  разликују. За допустиво решење  $x$ , околина  $N_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$ , дефинише се као скуп свих допустивих решења  $x'$  која се од решења  $x$  разликују у тачно  $k$  локација, тј.

$$N_k(x) = \{x' \in S : \rho(x, x') = k\}.$$

На пример, нека су  $x = [1, 3, 6, 8, 2]$  и  $x' = [2, 1, 6, 9, 10]$  два допустива решења за  $p = 5$ . Како се решења  $x$  и  $x'$  разликују у двама локацијама, важи  $\rho(x, x') = 2$  и важи  $x' \in N_2(x)$ . У фази размрдавања коришћене су околине  $N_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_{max}$ , док је за локално претраживање коришћена околина  $N_1$ , кардиналности  $p(n - p)$ .

**Структура предложеног SVNS алгоритма.** Кораци предложене SVNS методе за решавање PNCP дати су Алгоритмом 5. Почетно решење генерисано је одабиром  $p$  различитих вредности из скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$  на случајан начин. Једна итерација SVNS алгоритма састоји се од фазе размрдавања, фазе локалне претраге и одлуке да ли се померити у ново решење и/или променити околин у наставку претраге.

У оквиру фазе размрдавања, тј. позивањем процедуре *Shaking()*, насумично се генерише допустиво решење  $x_{shake} \in N_k(x)$ . За дато  $k$ , насумично се бира  $k$  центара које треба затворити, као и  $k$  локација из скупа  $A$  које нису део решења  $x$  на којима ће бити успостављени центри. Решење добијено овом трансформацијом означено је са  $x_{shake}$  и представља почетно решење за фазу локалне претраге која се извршава позивањем процедуре *LS\_fih()* и која ће детаљно бити описана у 2.4.1. У фази локалне претраге, заснованој на процедурама *MoveEvaluation()* и *Update()*, испитују се потенцијални центри *in* који нису део текућег решења и за сваког се одређује најбољи центар тренутног решења *out* са којим би се *in* заменио. Када се одреди најбољи пар  $(in^*, out^*)$ , уколико се заменом ових локација добија решење које је боље од до тада најбољег решења нађеног у оквиру локалне претраге, позива се процедура *Update()* којом се извршава замена ових локација. Тако се добија ново решење од кога се претрага наставља. Локална претрага се завршава када побољшање вредности функције циља није могуће.

Решење  $x''$ , које је добијено процедуром *LS\_fih()*, пореди се са до тада најбољим нађеним решењем  $x^*$ . Уколико је решење  $x''$  боље од решења  $x^*$ , тј. уколико је  $f(x'') < f(x^*)$ , ажурира се тренутно најбоље решење  $x^*$  (тј.  $x^* \leftarrow x''$ ) и претрага се наставља од текућег решења  $x''$  (тј.  $x \leftarrow x''$ ). Међутим, уколико решење  $x''$  није боље, али задовољава слабији услов  $f(x'') < F + \alpha\rho(x, x'')$ , претрага се наставља од решења  $x''$  (тј.  $x \leftarrow x''$ ), без ажурирања  $x^*$  (линије 10-11 у Алгоритму 5). На овај начин, дозвољава се посећивање лошијих решења од решења  $x$ , али само уколико су она довољно различита од решења  $x$  од кога се започиње фаза размрдавања. Мера различитости  $\rho(x, x'')$  два решења  $x$  и  $x''$  дефинисана је као број локација у којима се решења  $x$  и  $x''$  разликују. Параметром  $\alpha$  контролише се ниво диверзификације који се на овај начин уноси: претрага се наставља од  $x''$  уколико је то решење нешто лошије од решења  $x$ , а растојање  $\rho(x, x'')$  је довољно велико. Ако ни овај услов није испуњен, претрага се наставља од наредне околине  $N_{k+1}$  решења  $x$ .

**Алгоритам 5** SVNS за PNCP

---

```

1: Иницијализација: изабрати околине  $N_k, k = \overline{1, k_{max}}$  за фазу размрдavanja. Одредити критеријум
   заустављања. Генерисати почетно решење  $x^*, f^* \leftarrow f(x^*)$  и изабрати параметар  $\alpha$ .
2:  $x \leftarrow x^*, F \leftarrow f^*$ 
3: while критеријум заустављања није испуњен do
4:    $k \leftarrow 1$ 
5:   while  $k \leq k_{max}$  do
6:      $x_{shake} \leftarrow Shaking(x, k)$  ▷ размрдavanje
7:      $x'' \leftarrow LS\_fih(x_{shake})$  ▷ локална претрага
8:     if  $f(x'') < f^*$  then
9:        $x^* \leftarrow x'', f^* \leftarrow f(x'')$ 
10:    if  $f(x'') < F + \alpha\rho(x, x'')$  then ▷ одлука о померању
11:       $x \leftarrow x'', F \leftarrow f(x'')$ 
12:    else
13:       $k \leftarrow k + 1$ 

```

---

**2.4.1 Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене**

Претрага околине  $N_1(x)$  решења  $x$  подразумева разматрање свих решења  $x'$  за које важи  $\rho(x, x') = 1$ , тј. свих решења  $x'$  која се од решења  $x$  разликују у само једном центру. У циљу ефикасне евалуације суседних решења, предложена локална претрага користи хеуристику брзе размене (енгл. *Fast Interchange Heuristic, FIH*). Слична техника се први пут спомиње 1983. године у [104], али примена почиње тек 1997. године, када је хеуристика употребљена при решавању проблема  $p$ -медијане у [76], а касније је примењена и за решавање проблема  $p$ -центра [77]. Хеуристика се ослања на две помоћне процедуре: *MoveEvaluation()* и *Update()*. Идеја је да се за изабрану локацију која би постала део решења на ефикасан начин, процедуром *MoveEvaluation()*, одреди најбољи кандидат за елиминисање из решења. Осим тога, као резултат *MoveEvaluation()* процедуре, добија се и вредност функције циља коју би имало ново решење добијено разменом посматраних локација. Сама размена, као и ажурирање помоћних структура, реализује се процедуром *Update()*. Осим што се *MoveEvaluation()* процедуром одређују најпогоднији кандидати за излазак из решења, у оквиру локалне претраге се врши и филтрирање кандидата који потенцијално постају део решења. На овај начин постигнуто је убрзање претраге околине  $N_1$  тренутног решења  $x$ , јер се не испитују сви његови суседи.

Псеудокод за процедуру локалне претраге *LS\_fih()* дат је Алгоритмом 6, док су помоћне процеудре *MoveEvaluation()* и *Update()* детаљно описане у 2.4.2 и 2.4.3.

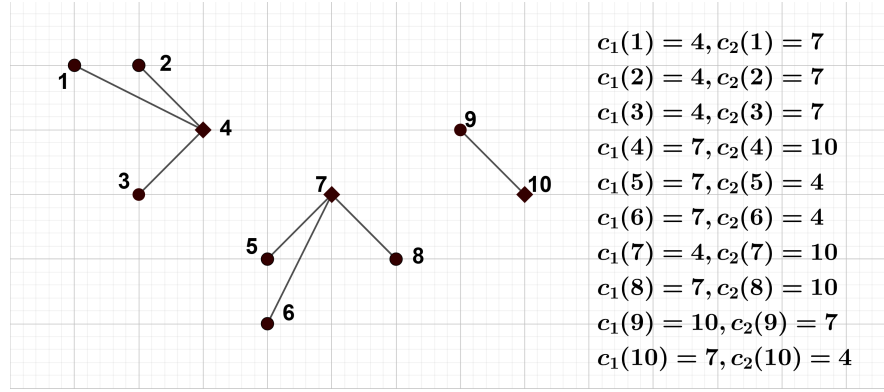
На почетку претраге неопходно је одредити два помоћна вектора дужине  $n$

која одговарају тренутном решењу  $x$ :

- $c_1(i)$  – центар најближи локацији  $i$ ,
- $c_2(i)$  – други најближи центар локацији  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Треба приметити да уколико се на локацији  $i$  налази центар, онда је  $c_1(i)$  његов резервни центар. Са друге стране, уколико је  $i$  корисник, онда је  $c_1(i)$  његов примарни центар. У случају отказа рада центра  $c_1(i)$ , корисник  $i$  наставља пут до резервног центра, што је  $c_1(c_1(i))$ . У општем случају важи  $c_1(c_1(i)) \neq c_2(i)$ .

На Слици 2.2 дат је пример једне инстанце са  $n = 10$  локација и једно решење  $x = [4, 7, 10]$  за PNCP. За корисника 8 примарни центар је центар 7, тј.  $c_1(8) = 7$ , док је резервни центар за корисника 8 центар 4, будући да је он најближи примарном центру 7, тј.  $c_1(c_1(8)) = 4$ . Са друге стране, други најближи центар кориснику 8 је центар 10, тј.  $c_2(8) = 10$ .



Слика 2.2: Вектори  $c_1$  и  $c_2$  за једно решење PNCP за  $n = 10$  и  $p = 3$ .

Претрага околине  $N_1(x)$  у циљу проналажења локалног минимума, врши се уз помоћ процедуре  $MoveEvaluation()$ . Ова процедура, за дату локацију  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , одређује центар  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , такав да решење које се добија заменом ових локација даје најмању могућу вредност функције циља.  $MoveEvaluation()$  се позива само за оне локације  $in$  којима би се потенцијално могла смањити вредност функције циља. Ово се постиже провером у линији 7 у Алгоритму 6, у којој је  $d(a, b)$  ознака за растојање између локација  $a$  и  $b$ . Фокус је на критичном кориснику  $i^*$ , тј. кориснику који прелази најдуже растојање до свог резервног центра. Уколико додавање локације  $in$  у решење може да смањи дужину путање овог корисника, онда постоји шанса да се вредност функције циља смањи, те су само такве локације анализиране. Процедура  $MoveEvaluation()$  такође одређује и вредност функције циља  $F$  коју даје решење  $x$  након потенцијалне размене  $in$  и  $out$ , али не врши размену. Размена се врши

процедуром  $Update()$  која, осим измене у решењу, ажурира и само оне вредности у векторима  $c_1$  и  $c_2$  које су неопходне да би ови вектори одговарали решењу које се добија након размене. У наредним потпоглављима следе детаљни описи  $MoveEvaluation()$  и  $Update()$  процедура.

---

**Алгоритам 6** Локална претрага за PNCP

---

```

1: procedure  $LS\_fih(x)$ 
2:    $f^* \leftarrow f(x)$ 
3:   Одредити критичног корисника  $i^*$ 
4:   while true do
5:      $w^* \leftarrow \infty$ 
6:     for сваку локацију  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
7:       if  $d(i^*, in) + d(in, c_1(in)) < d(i^*, c_1(i^*)) + d(c_1(i^*), c_1(c_1(i^*)))$  then
8:          $out, F \leftarrow MoveEvaluation(in, x, c_1, c_2)$ 
9:         if  $F < w^*$  then
10:           $w^* \leftarrow F, in^* \leftarrow in, out^* \leftarrow out$ 
11:       if  $f^* \leq w^*$  then
12:         break
13:       else
14:          $f^* \leftarrow w^*$ 
15:        $Update(x, in^*, out^*, c_1, c_2)$ 
16:       Одредити новог критичног корисника  $i^*$ 

```

---

### 2.4.2 Процедура $MoveEvaluation()$

Процедура користи помоћне векторе  $r$  и  $z$  дужине  $n$ .

- За сваки центар решења  $x$  разматрају се двокраке путање које прелазе корисници придружени том центру. У вектору  $r$  се на позицији  $j = x(l), l = 1, 2, \dots, p$  налази дужина најдуже двокраке путање међу свим корисницима који су придружени том центру.
- Услед избацивања неког центра из решења за одређен број корисника се морају одредити нове двокраке путање. У вектору  $z$  се на позицији  $j = x(l), l = 1, 2, \dots, p$  налази дужина најдуже двокраке путање међу свим корисницима који користе центар  $j = x(l), l = 1, 2, \dots, p$  под претпоставком да се центар  $j$  избацује из решења.

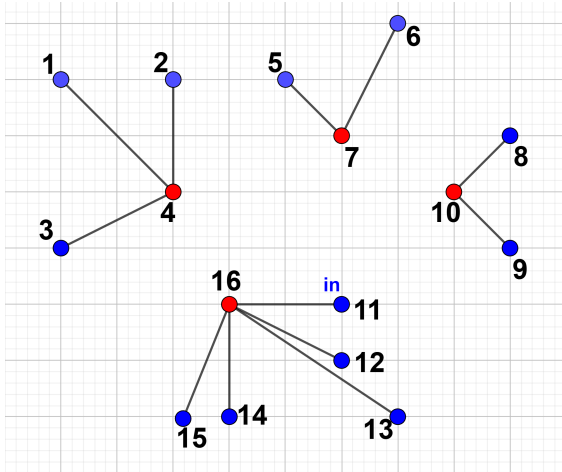
Мотивација за увођење низова  $r$  и  $z$  потиче од идеје да се функција циља не мора рачунати испочетка сваки пут када се врши замена два елемента  $in$  и  $out$ , јер на одређен део корисника ова размена неће имати никаквог утицаја. За оне кориснике на које замена  $in$  и  $out$  има утицаја, могући ефекти су:

- $in$  постаје примарни центар за неке кориснике, јер се налази на мањој удаљености од њиховог тренутног примарног центра. Нови резервни центар за ове кориснике је центар који је најближи центру  $in$ .
- $in$  постаје резервни центар неком отвореном центру, па самим тим и резервни центар за све кориснике који користе тај примарни центар. За све овакве кориснике, мења се само резервни центар.
- $out$  је био примарни центар за неке кориснике и за њих је неопходно одредити нови примарни и резервни центар.
- $out$  је био резервни центар неким корисницима и за њих је потребно одредити нови резервни центар.

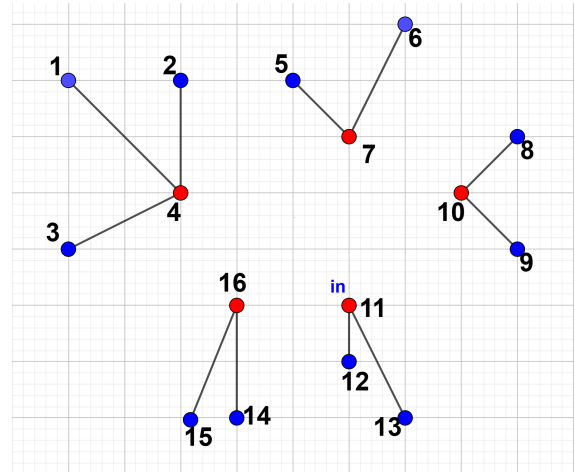
Након додавања центра  $in$  у решење, неки корисници ће почети да користе тај центар као примарни центар, јер им је нови центар  $in$  ближи од њиховог тренутног примарног центра:  $d(i, in) < d(i, c_1(i))$ ,  $i \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ ,  $i \neq in$ . Нека је скуп свих таквих корисника означен са  $X$ . Дужина пређеног пута неког од ових корисника може бити кандидат за нову вредност функције циља, па треба одредити вредност

$$f' = \max_{i \in X} \{d(i, in) + d(in, c_1(in))\}. \quad (2.10)$$

На Слици 2.3 приказан је пример на инстанци са  $n = 16$  чворова и  $p = 4$  центра, у коме се у текуће решење  $x = [4, 7, 10, 16]$  додаје центар  $in = 11$ .



(а) Текуће решење  $x = [4, 7, 10, 16]$ .



(б) Након додавања центра  $in$ .

Слика 2.3: Додавање новог центра  $in = 11$  у решење  $x = [4, 7, 10, 16]$ .

Убацивање центра  $in = 11$  у решење утиче на кориснике 12 и 13, јер им је  $in = 11$  ближи од њиховог старог примарног центра 16, те ова два корисника користе  $in$  као примарни центар. Њима се такође мења и резервни центар: уместо центра 4, нови резервни центар постаје центар 16. У овом примеру је  $X = \{12, 13\}$ , а  $f' = 2 + \sqrt{5} = 4.24$ , што је дужина пута коју прелази корисник 13 (означено испрекиданом црвеном линијом на Слици 2.4). Остали корисници потенцијално мењају свој примарни или резервни центар услед избацивања центра  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  из решења. Како центар  $out$  тек треба одредити, разматрају се ефекти избацивања сваког центра  $out' \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  и за  $out$  се проглашава онај центар чијим избацивањем се постиже најмања вредност функције циља.

За сваки центар  $out' \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  корисници који нису у скупу  $X$  могу се поделити у следеће групе:

1. Корисници на које избацивање центра  $out'$  нема никаквог утицаја, тј. не избацује им се ни примарни ни резервни центар.

Нека је са  $X_j$  означен скуп свих таквих корисника са истим примарним центром  $j$ , тј.  $j \neq out'$ ,  $c_1(j) \neq out'$  и  $X_j = \{i \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\} : c_1(i) = j, d(i, j) < d(i, in)\}$ . Иако избацивање центра  $out'$  не утиче на кориснике скупа  $X_j$ , њихов резервни центар се ипак може променити услед додавања центра  $in$  у решење, док се примарни не мења (јер су такви корисници већ обухваћени скупом  $X$ ). Зато је неопходно одредити нови резервни центар  $new\_backup\_j$  за центар  $j$  између  $in$  и  $c_1(j)$ , и за сваки скуп  $X_j, j = 1, 2, \dots, p$ , одредити вредност  $r(j) = \max_{i \in X_j} \{d(i, j) + d(j, new\_backup\_j)\}$ . Елемент вектора  $r$  са највећом вредношћу,  $\max_{j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}} r(j)$ , је кандидат за нову вредност функције циља након размене центара  $in$  и  $out'$ .

На примеру на Слици 2.4, разматра се избацивање центра  $out' = 7$ . Између осталих, корисници 1, 2, 3 и центар 4 не би били погођени избацивањем центра  $out' = 7$ . Вредност  $r(4)$  одређује се на следећи начин. Међу путањама које прелазе корисници 1, 2 и 3 до свог резервног центра 16, најдужу путању  $r(4) = \sqrt{8} + \sqrt{5} = 5.06$  прелази корисник 1. Ова путања је означена зеленом испрекиданом линијом на Слици 2.4(а). Избацивање центра  $out'$  не утиче ни на кориснике придружене центру 16 као примарном центру, па се на сличан начин одређује и  $r(16)$  као растојање које прелази корисник 15 до његовог резервног центра 11.

2. Корисници  $v$  који остају без примарног центра услед избацивања  $out'$ . За кориснике који су користили  $out'$  као примарни центар, тј.  $c_1(v) = out'$ , треба одредити нови примарни центар  $new\_primary\_v$  између  $in$  и  $c_2(v)$  на следећи

начин:

$$new\_primary\_v = \begin{cases} in, & \text{ако је } d(v, in) < d(v, c_2(v)), \\ c_2(v), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Након промене примарних центара, треба наћи и нове резервне центре за све кориснике  $v$  из ове групе. Уколико је  $in$  нови примарни центар за корисника  $v$  (тј.  $new\_primary\_v = in$ ), нови резервни центар  $new\_backup\_v$  одређује се као:

$$new\_backup\_v = \begin{cases} c_1(in), & \text{ако је } c_1(in) \neq out', \\ c_2(in), & \text{ако је } c_1(in) = out'. \end{cases}$$

Са друге стране, уколико је  $c_2(v)$  нови примарни центар за  $v$ , приликом одређивања новог резервног центра  $new\_backup\_v$  треба разматрати следеће случајеве:

2а) Ако је  $c_1(c_2(v)) \neq out'$ , онда се  $new\_backup\_v$  налази на следећи начин:

$$new\_backup\_v = \begin{cases} in, & \text{ако је } d(c_2(v), in) \leq d(c_2(v), c_1(c_2(v))), \\ c_1(c_2(v)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

2б) Ако је  $c_1(c_2(v)) = out'$ , онда се  $new\_backup\_v$  налази као:

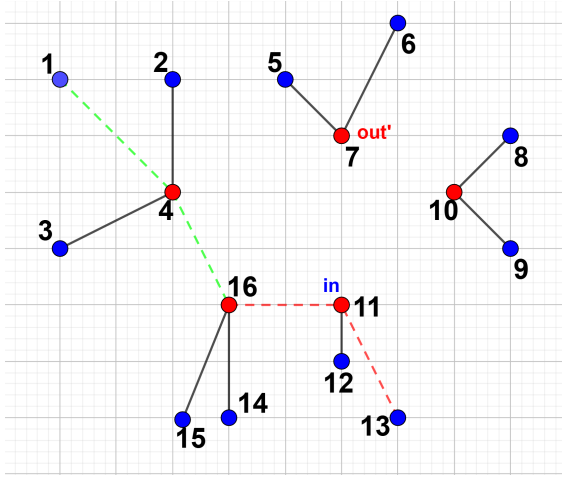
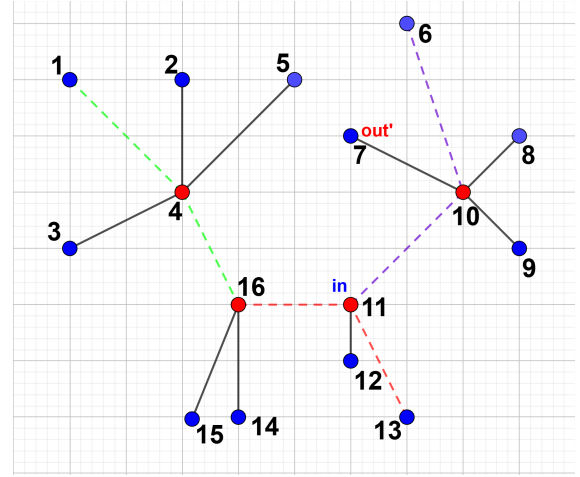
$$new\_backup\_v = \begin{cases} in, & \text{ако је } d(c_2(v), in) \leq d(c_2(v), c_2(c_2(v))), \\ c_2(c_2(v)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

На Слици 2.4(б) корисници 5 и 6 губе примарни центар  $out' = 7$ . За корисника 5 нови примарни центар је  $c_2(5) = 4$ , а резервни постаје 16. Са друге стране, за корисника 6 нови примарни центар је 10, док његов резервни постаје  $in = 11$ .

3. Корисници  $v$  чији је резервни центар  $out'$  ( $c_1(c_1(v)) = out'$ ). За кориснике који остају без резервног центра одређује се нови резервни центар  $new\_backup\_v$  на следећи начин:

$$new\_backup\_v = \begin{cases} in, & \text{ако је } d(c_1(v), in) < d(c_1(v), c_2(c_1(v))), \\ c_2(c_1(v)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

На Слици 2.4(б) се у овој ситуацији налазе корисници 8 и 9. Њихов примарни центар остаје центар 10, али након потенцијалне елиминације центра  $out' = 7$ , као резервни центар користили би центар  $in = 11$ .


 (а) Рачунање  $r(4)$  и  $r(16)$ .

 (б) Рачунање  $z(out')$ .

 Слика 2.4: Убацавање новог центра  $in = 11$  и потенцијално избацивање центра  $out' = 7$ .

Елемент вектора  $z$  на позицији која одговара центру  $out'$  добија вредност која је једнака најдужем од растојања која прелазе корисници на које избацивање  $out'$  из решења има утицаја и који су описани у случајевима 2 и 3. Када се за све кориснике  $v$  из случајева 2 и 3 одреди растојање до њиховог новог резервног центра (уз пролазак кроз нови примарни центар), може се добити вредност  $z(out')$  као максимално од добијених растојања за све разматране кориснике  $v$ . На Слици 2.4(б), у случају када је  $out' = 7$ , вредност  $z(out')$  је пређени пут корисника 6 и приказан је испрекиданом љубичастом линијом. Ово растојање добијено је упоређивањем нових путања за кориснике 5 и 6 који губе примарни центар и кориснике 8 и 9 који губе резервни центар.

За дату локацију  $in$  и фиксирани центар  $out' \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , вредност функције циља за решење  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out'\}$  које би се добило заменом локација  $(in, out')$  може се добити као

$$\max\{f', z(out'), \max_{\substack{j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}, \\ j \neq out'}} r(j)\}, \quad (2.11)$$

где је  $f'$  одређено са (2.10). Циљ је одредити најбољег кандидата  $out$  кога треба елиминисати из текућег решења  $x$ , а то је онај који минимизује израз (2.11), тј:

$$out = \arg \min_{out' \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}} \{\max\{f', z(out'), \max_{\substack{j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}, \\ j \neq out'}} r(j)\}\}.$$

Вредности  $f', z(j), r(j), j = 1, 2, \dots, n$ , могу се одредити разматрањем сваке локације само једном. Псеудокод *MoveEvaluation()* процедуре дат је Алгоритмом 7.

На почетку процедуре се врши иницијализација помоћних структура. Вредност  $f'$  једнака је најдужем од пређених путева за све кориснике који су почели да користе  $in$  као примарни центар и иницијално је постављена на нулу. Елементи вектора  $r$ , који одговарају индексима отворених центара у тренутном решењу  $x$ , попуне се растојањима која ти центри прелазе до својих резервних центара. Том приликом узима се у обзир и центар  $in$  који потенцијално може преузети улогу резервног центра за било који од постојећих центара. Последњи корак у иницијализацији је попуњавање елемената вектора  $z$  тако што се за сваки центар  $x(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , анализира сценарио у коме он остаје без резервног центра  $c_1(x(j))$  и одређује се да ли би тада нови резервни центар постао  $in$  или  $c_2(x(j))$ . Одређује се дужина путање коју у том случају прелази  $x(j)$  до свог новог резервног центра. Вредност  $z(c_1(x(j)))$  се поставља на максимално од добијених растојања које прелазе сви центри који користе  $c_1(x(j))$  као резервни центар.

---

**Алгоритам 7** *MoveEvaluation()* процедура за PNCP

---

```

1: procedure MoveEvaluation( $in, x, c_1, c_2$ )
2:   Иницијализација:
3:      $f' \leftarrow 0$ ,
4:      $r(x(j)) \leftarrow \min\{d(x(j), in), d(x(j), c_1(x(j)))\}$ ,
5:      $z(c_1(x(j))) \leftarrow \max\{z(c_1(x(j))), \min\{d(x(j), in), d(x(j), c_2(x(j)))\}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ 
6:   for svakog korisnika  $i \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
7:     if  $i \neq in$  и  $d(i, in) < d(i, c_1(i))$  then
8:        $f' \leftarrow \max\{f', d(i, in) + d(in, c_1(in))\}$ 
9:     else ▷ Аžурирање елемената вектора  $r$  и  $z$ 
10:      Аžурирати вредности  $r(c_1(i))$ 
11:      Аžурирати вредности  $z(c_1(i))$  и  $z(c_1(c_1(i)))$ 
12:   for svaki centar  $x(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  do ▷ Аžурирање  $z(x(j))$ 
13:     Аžурирати вредности  $z(x(j))$ 
14:    $g_1 \leftarrow \max\{r(x(l)) \mid l = 1, 2, \dots, p\}$ , и нека је  $l^*$  индекс нађеног максимума
15:    $g_2 \leftarrow \max\{r(x(l)) \mid l = 1, 2, \dots, p, l \neq l^*\}$ 
16:   for  $l = 1, 2, \dots, p$  do
17:     if  $x(l) = c_1(in)$  then
18:        $f' \leftarrow f' - d(in, c_1(in)) + d(in, c_2(in))$  ▷ Аžурирање  $f'$ 
19:     if  $l \neq l^*$  then
20:        $g(l) \leftarrow \max\{f', z(x(l)), g_1\}$ 
21:     else
22:        $g(l) \leftarrow \max\{f', z(x(l)), g_2\}$ 
23:    $f \leftarrow \min\{g(l) \mid l = 1, 2, \dots, p\}$ ,  $l^{**} \leftarrow \arg \min_{l \in \{1, 2, \dots, p\}} g(l)$ 
24:    $out \leftarrow x(l^{**})$ 
25:   return  $out, f$ 

```

---

Након иницијализације анализира се сваки корисник  $i \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  појединачно. Прво се проверава да ли разматрани корисник треба да користи центар  $in$  као примарни центар (линија 4 у Алгоритму 7), тј. да ли је  $in$  ближи кориснику  $i$  од његовог тренутног примарног центра  $c_1(i)$ . Уколико ово јесте случај, одређује се дужина нове путање  $i \rightarrow in \rightarrow c_1(in)$  коју прелази корисник  $i$  и упоређује се са до тада нађеним  $f'$ . У супротном, неопходно је ажурирати вредности у векторима  $r$  и  $z$ .

Ажурирање вредности вектора  $r$  приказано је Алгоритмом 8. Најпре се за текућег корисника  $i$  проверава да ли је  $in$  бољи избор за резервни центар од његовог текућег резервног центра  $c_1(c_1(i))$  и одређује се дужина путање за тог корисника као  $\min\{d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), c_1(c_1(i))), d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), in)\}$ . Вредност  $r(c_1(i))$  представља најдуже такво растојање када се узму у обзир сви корисници који користе центар  $c_1(i)$  као примарни. Стога је неопходно ажурирати ову вредност у свакој итерацији у случају да је дужина нађене путање већа од тренутне вредности уписане у  $r(c_1(i))$ .

---

**Алгоритам 8** Ажурирање вредности вектора  $r$

---

- 1:  $r(c_1(i)) \leftarrow \max\{r(c_1(i)), \min\{d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), c_1(c_1(i))), d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), in)\}\}, i \neq in$
  - 2:  $r(c_1(in)) \leftarrow \max\{r(c_1(in)), d(in, c_1(in))\}$
- 

Следећи корак је ажурирање вредности вектора  $z$  које је приказано Алгоритмом 9. Разматрају се сви могући сценарији за корисника  $i$  уколико би се из решења избацивао његов примарни центар  $c_1(i)$ , а затим и резервни центар  $c_1(c_1(i))$ . Алгоритам 9 најпре испитује да ли је за корисника  $i$  повољније да користи  $in$  или  $c_2(i)$  као примарни центар, а затим се у сваком од ова два случаја одређује и његов резервни центар. Уколико је  $in$  бољи избор за нови примарни центар, резервни ће бити или  $c_1(in)$  или  $c_2(in)$  (у случају да је  $c_1(in) = c_1(i)$  чије се избацивање разматра). Уколико је  $c_2(i)$  нови примарни центар, нови резервни ће бити или  $c_1(c_2(i))$  или  $c_2(c_2(i))$  (уколико је  $c_1(c_2(i)) = c_1(i)$  чије се избацивање разматра). На овај начин одређује се нова путања за корисника  $i$  и по потреби се ажурира елемент  $z(c_1(i))$ . На сличан начин разматра се и избацивање резервног центра  $c_1(c_1(i))$  за корисника  $i$  и ажурира се  $z(c_1(c_1(i)))$  сваки пут када се нађе дужа путања од до тада нађене најдуже путање. На овај начин се вектором  $z$  приказују последице које елиминисање сваког од центара решења  $x$  има на кориснике, тј. елемент  $z(x(j))$  садржи најдуже од свих двокраких растојања које прелазе корисници који су погођени елиминацијом центра  $x(j), j = 1, 2, \dots, p$ .

Након разматрања корисника, разматрају се и центри (линија 9 у Алгоритму 7). Наиме, избацивање неког центра  $x(j), j = 1, 2, \dots, p$  из решења има за последицу да та локација постаје корисник и треба јој је одредити двокраку путању којом се долази до резервног центра. Као што је приказано у Алгоритму 10, за сваки

---

**Алгоритам 9** Ажурирање вредности вектора  $z$  за корисника  $i$

---

- 1: Наћи  $new\_primary\_i$  између  $in$  и  $c_2(i)$ , а затим и  $new\_backup\_i$  за корисника  $i$
  - 2:  $z(c_1(i)) \leftarrow \max\{z(c_1(i)), d(i, new\_primary\_i) + d(new\_primary\_i, new\_backup\_i)\}$ ,  $i \neq in$
  - 3:  $z(c_1(in)) \leftarrow \max\{z(c_1(in)), d(in, c_2(in))\}$
  - 4: Наћи  $new\_backup\_i$  за корисника  $i$  између  $in$  и  $c_2(c_1(i))$
  - 5:  $z(c_1(c_1(i))) \leftarrow \max\{z(c_1(c_1(i))), d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), new\_backup\_i)\}$
- 

центар  $x(j)$  се најпре одреди примарни центар који може бити  $in$  или  $c_1(x(j))$ , а затим се слично као и код корисника одреди резервни центар и ажурира елемент  $z(x(j))$ , уколико је добијена путања веће дужине од тренутне вредности  $z(x(j))$ .

---

**Алгоритам 10** Ажурирање вредности вектора  $z$  за центар  $x(j)$

---

- 1: Наћи  $new\_primary\_j$  између  $in$  и  $c_1(x(j))$ , а затим и  $new\_backup\_j$
  - 2:  $z(x(j)) \leftarrow \max\{z(x(j)), d(x(j), new\_primary\_j) + d(new\_primary\_j, new\_backup\_j)\}$
- 

Након рачунања елемената вектора  $r$  и  $z$ , може се приступити одређивању вредности функције циља за решења која се добијају избацивањем сваког од центара тренутног решења  $x$ . Најпре се одреде помоћне вредности  $g_1$  и  $g_2$  (линије 11 и 12 у Алгоритму 7) које представљају две најдуже путање за кориснике који имају различите примарне центре (који нису  $in$ ), тј. припадају различитим кластерима графа. Такође, неопходно је запамтити и индекс  $l^*$  центра у чијем кластеру се нађена највећа дужина достиже. Затим се формира низ  $g(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ , који на месту  $g(l)$  садржи вредност функције циља која се добија заменом  $in$  и  $x(l)$ . За сваки центар се најпре проверава да ли је то резервни центар за  $in$ , (линија 14 Алгоритма 7). Уколико то јесте случај, вредност  $f'$  се мора модификовати у тој итерацији, јер је у току разматрање избацивања центра  $c_1(in)$ . У овој ситуацији,  $in$  као резервни центар мора користити  $c_2(in)$  и вредност  $f'$  се најпре умањује за дужину путање  $in \rightarrow c_1(in)$  које више није могућа, а затим и увећава за растојање од  $in$  до новог резервног центра  $c_2(in)$ . Након ове провере и евентуалне поправке вредности  $f'$ , елементу  $g(l)$  се додељује вредност

- $\max\{f', z(x(l)), g_1\}$ , уколико се у тренутној итерацији не разматра избацивање центра  $x(l^*)$  чијем кластеру припада корисник који прелази најдуже растојање  $g_1$ ,
- $\max\{f', z(x(l)), g_2\}$ , уколико то јесте случај.

Коначно, остаје да се одреди вредност  $f$  као најмањи елемент низа  $g(l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ , као и индекс  $l^{**}$  нађеног минимума из вектора  $g(l)$ . Најбољи кандидат за избацивање из решења  $x$  је центар  $out = x(l^{**})$ .

За анализирање свих корисника извршава се петља са  $n - p$  итерација. Затим се анализирају центри у петљи са  $p$  итерација, након чега се налази максимум низа од  $p$  елемената и затим попуњава низ  $g(l), l = 1, 2, \dots, p$ , у петљи са још  $p$  итерација. Коначно, сложеност  $MoveEvaluation()$  процедуре је  $O(n)$ .

### 2.4.3 Процедура $Update()$

Након одређивања пара локација  $(in, out)$  које треба заменити, неопходно је изменити решење  $x$  и прилагодити низове  $c_1$  и  $c_2$  новом решењу. Алгоритмом 11 приказана је процедура  $Update()$  коришћена у [94], слична оној за РСР из [77].

---

#### Алгоритам 11 $Update()$ процедура за PNCP

---

```

1: procedure  $Update(x, in, out, c_1, c_2)$ 
2:    $x \leftarrow (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$ 
3:   for svaku lokaciju  $i \in A \setminus \{in\}$  do
4:     if  $c_1(i) = out$  then
5:       if  $d(i, in) \leq d(i, c_2(i))$  then
6:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
7:       else
8:          $c_1(i) \leftarrow c_2(i)$ 
9:         Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ 
10:         $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 
11:     else
12:       if  $d(i, in) < d(i, c_1(i))$  then
13:          $c_2(i) \leftarrow c_1(i)$ 
14:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
15:       else
16:         if  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  then
17:            $c_2(i) \leftarrow in$ 
18:         else
19:           if  $c_2(i) = out$  then
20:             Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ 
21:              $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 
22:   if  $c_1(in) = out$  then
23:      $c_1(in) \leftarrow c_2(in)$ 
24:     Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $in$ 
25:      $c_2(in) \leftarrow center\_2$ 
26:   else
27:     if  $c_2(in) = out$  then
28:       Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $in$ 
29:        $c_2(in) \leftarrow center\_2$ 

```

---

## 2.5 Експериментални резултати

У овом одељку приказани су експериментални резултати добијени SVNS алгоритмом за решавање PNCP. Сва израчунавања вршена су на Intel Core i7-11700, 3.6 GHz, 16 GB RAM меморије под 64 bit Windows 10 оперативним системом. Предложени SVNS имплементиран је у језику C++.

За потребе тестирања су коришћене OR-LIB `rmed` [6] инстанце које су у литератури коришћене и за тестирање проблема  $p$ -медијане,  $p$ -центра и осталих сродних проблема. Ове инстанце садрже број чворова, број грана графа и број центара које треба успоставити. Након тога су за сваку грану наведени њени крајеви и тежина. Како би се одредиле дужине најкраћих растојања за сваки пар локација, најпре је примењен Floyd-Warshall-ов алгоритам [36].

SVNS алгоритам тестиран на је на скупу од 288 `rmed` инстанци које су подељене у 4 групе:

- мале инстанце (до 50 чворова)
- средње инстанце (од 60 до 200 чворова)
- велике инстанце (од 250 до 400 чворова)
- Additional група од 40 инстанци коришћена у [86] (од 100 до 900 чворова).

Као критеријум заустављања коришћен је максималан број итерација  $iter_{max}$ , односно максималан број позива функције за фазу размрдавања. Вредности параметара SVNS методе које су коришћене приликом тестирања дате су у Табели 2.1. Алгоритам је за сваку инстанцу покретан 20 пута са различитим насумично генерисаним почетним решењима. Насумичност је обезбеђена употребом различитих вредности за семе (енгл. *seed*) генератора случајних бројева.

Табела 2.1: Вредности параметара у SVNS алгоритму.

| Инстанце        | $iter_{max}$ | $k_{max}$ | $\alpha$ |
|-----------------|--------------|-----------|----------|
| мале            | 500          | 5         | 0.1      |
| средње          | 5000         | 5         | 0.1      |
| велике          | 1000         | 5         | 0.1      |
| Additional [86] | 1000         | 5         | 0.1      |

У Табели 2.2 приказане су просечене вредности добијене SVNS алгоритмом, при чему су инстанце груписане по брију чворова  $n$ . Свака врста Табеле 2.2 садржи:

- имена инстанци за посматрану групу,

- $n$  - број чворова,
- $\#_{\text{инст}}$  - број инстанци унутар групе,
- $avg.f$  - просечна најбоља нађена вредност функције циља,
- $avg.t$  - просечно време (у секундама) потребно да се достигне најбоље SVNS решење по први пут,
- $avg.t_{tot}$  - просечно укупно време (у секундама). Како је за сваку инстанцу алгоритам покретан 20 пута, укупно просечно време рада алгоритма за сваку групу се може добити множењем времена  $avg.t_{tot}$  са 20.
- $avg.gap$  - просечна  $gap$  вредност (у %) за посматрану групу, која се за сваку инстанцу добија по формули:  $gap = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} gap_i$ , где је  $gap_i = \frac{SVNS_i - SVNS_{best}}{SVNS_{best}} \cdot 100$  и  $SVNS_i$  решење добијено SVNS алгоритмом у  $i$ -том извршавању,  $i = 1, 2, \dots, 20$ .
- $avg.dev$  - просечна стандардна девијација добијених вредности, која се за сваку инстанцу одређује по формули:  $dev_{inst} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (gap_i - gap)^2}$ , где је  $gap_i$  процентуално одступање решења добијеног у  $i$ -том извршавању од најбоље SVNS вредности.

Из Табеле 2.2 и резултата у Прилогу А може се видети да се предложеним SVNS алгоритмом достижу квалитетна решења, уз веома кратка времена извршавања. Additional [86] инстанце са више од 400 чворова су се показале као временски најзахтевније. Из резултата у Прилогу А може се приметити да за фиксну вредност  $n$  време до проналажења најбољег решења опада са порастом броја чворова  $p$ , тј. инстанце код којих је однос  $\frac{n}{p}$  мањи су захтевније за решавање будући да је простор допустивих решења у том случају већи. Како је највећа вредност у  $avg.gap$  колони 1.77% (за Additional [86] инстанце са 400 чворова), може се закључити да SVNS вредности добијене у различитим покретањима не одступају често од најбоље нађене вредности, односно да је предложени алгоритам стабилан. До истог закључка се долази увидом у  $avg.dev$  колону, будући да је највећа вредност девијације 1.09% (за велике инстанце са 250 чворова).

Табела 2.2: Просечни резултати SVNS алгоритма за груписане pmed1-pmed40 и Additional [86] pmed инстанце.

| Инст.                    | $n$ | #инст | просечне SVNS вредности |         |               |           |               |
|--------------------------|-----|-------|-------------------------|---------|---------------|-----------|---------------|
|                          |     |       | $avg.f$                 | $avg.t$ | $avg.t_{tot}$ | $avg.gap$ | $avg.dev(\%)$ |
| мале инстанце            |     |       |                         |         |               |           |               |
| pmed1-pmed5              | 10  | 5     | 106.60                  | 0.00    | 0.00          | 0.17      | 0.41          |
| pmed1-pmed5              | 20  | 10    | 117.70                  | 0.00    | 0.02          | 0.00      | 0.00          |
| pmed1-pmed5              | 30  | 10    | 134.90                  | 0.00    | 0.03          | 0.00      | 0.01          |
| pmed1-pmed5              | 40  | 15    | 121.27                  | 0.00    | 0.04          | 0.08      | 0.30          |
| pmed1-pmed5              | 50  | 10    | 107.70                  | 0.01    | 0.05          | 0.15      | 0.16          |
| средње инстанце          |     |       |                         |         |               |           |               |
| pmed1-pmed5              | 60  | 15    | 101.07                  | 0.03    | 0.76          | 0.03      | 0.02          |
| pmed1-pmed5              | 70  | 15    | 103.33                  | 0.04    | 1.02          | 0.03      | 0.02          |
| pmed1-pmed5              | 80  | 15    | 106.73                  | 0.14    | 1.35          | 0.03      | 0.04          |
| pmed1-pmed5              | 90  | 19    | 105.42                  | 0.13    | 1.57          | 0.15      | 0.17          |
| pmed1-pmed5              | 100 | 19    | 106.58                  | 0.19    | 1.85          | 0.27      | 0.20          |
| pmed6-pmed10             | 150 | 20    | 63.65                   | 0.40    | 3.20          | 0.37      | 0.19          |
| pmed6-pmed10             | 200 | 23    | 64.30                   | 1.15    | 5.67          | 0.36      | 0.29          |
| велике инстанце          |     |       |                         |         |               |           |               |
| pmed6-pmed10             | 250 | 20    | 48.25                   | 0.61    | 1.46          | 1.43      | 1.09          |
| pmed11-pmed15            | 300 | 20    | 53.50                   | 0.37    | 1.49          | 0.74      | 0.45          |
| pmed11-pmed15            | 350 | 16    | 39.38                   | 1.21    | 2.79          | 1.94      | 1.34          |
| pmed16-pmed20            | 400 | 16    | 38.19                   | 3.06    | 7.68          | 1.10      | 0.84          |
| Additional [86] инстанце |     |       |                         |         |               |           |               |
| pmed1-pmed5              | 100 | 5     | 131.00                  | 0.05    | 0.44          | 0.14      | 0.07          |
| pmed6-pmed10             | 200 | 5     | 83.00                   | 0.29    | 1.74          | 0.43      | 0.61          |
| pmed11-pmed15            | 300 | 5     | 61.50                   | 0.68    | 3.75          | 1.08      | 0.54          |
| pmed16-pmed20            | 400 | 5     | 45.00                   | 9.16    | 30.81         | 1.77      | 0.69          |
| pmed21-pmed25            | 500 | 5     | 46.00                   | 14.30   | 50.75         | 0.95      | 0.77          |
| pmed26-pmed30            | 600 | 5     | 45.00                   | 9.79    | 62.31         | 0.38      | 0.22          |
| pmed31-pmed34            | 700 | 4     | 49.33                   | 9.90    | 92.67         | 0.98      | 0.69          |
| pmed35-pmed37            | 800 | 3     | 37.00                   | 5.74    | 221.02        | 0.00      | 0.00          |
| pmed38-pmed40            | 900 | 3     | 57.00                   | 23.33   | 199.29        | 1.67      | 0.93          |

У Табели 2.3 приказани су сумарни резултати SVNS алгоритма. За сваку групу инстанци приказан је број инстанци у групи, а затим у колони означеној са  $\%opt/\%bk$  проценат инстанци те групе за које је SVNS достигао оптимална решења (за инстанце за које су позната), тј. најбоља позната решења из литературе (узете су у обзир и методе предложене након објављивања [94]). У

колони  $avg.gap(local)$  приказано је просечно процентуално одступање добијених вредности у различитим извршавањима SVNS алгоритма од најбоље добијене вредности из свих 20 извршавања. Последња колона означена са  $avg.gap$  садржи просечно процентуално одступање најбољих вредности које је SVNS достигао од најбољих вредности из литературе. За сваку инстанцу је одређено одступање  $gap_{inst}$  по формули:

$$gap_{inst} = \frac{|best_{SVNS} - best_{known}|}{best_{known}} \cdot 100,$$

а затим је израчунат просек одступања за групу.

Табела 2.3: Сумарни резултати SVNS алгоритма.

| Инстанце        | #Инст | %opt/%bk | $avg.gap(local)(\%)$ | $avg.gap(\%)$ |
|-----------------|-------|----------|----------------------|---------------|
| мале            | 50    | 100.00   | 0.07                 | 0.00          |
| средње          | 126   | 99.21    | 0.17                 | 0.01          |
| велике          | 72    | 84.72    | 1.28                 | 0.83          |
| Additional [86] | 40    | 82.50    | 0.69                 | 1.66          |

За свих 50 малих инстанци позната су оптимална решења. На овом скупу SVNS достиже сва оптимална решења ( $avg.gap = 0\%$ ) у скоро свим извршавањима ( $avg.gap(local) = 0.07\%$ ). За 122 од 126 средњих инстанци у литератури су позната оптимална решења и SVNS достиже 121 оптималну вредност (само за инстанцу rmed8.200.30 SVNS алгоритмом добија се вредност 70, а оптимална је 69). За преостале 4 инстанце SVNS алгоритмом добијена су решења које се поклапају са најбољим познатим из литературе. Оптимално решење познато је за 71 од 72 велике инстанце, а SVNS алгоритмом достигнуто је за 61 инстанцу, а за осталих 11 пронађена су допустива решења високог квалитета. За 7 од 40 инстанци из Additional групе [86], SVNS не налази најбоље познате вредности из литературе, али у тим ситуацијама налази квалитетна допустива решења која у просеку одступају за 1.66% од најбољих познатих решења из литературе.

### 2.5.1 Поређење са другим методама из литературе

У свим радовима из литературе коришћене су rmed инстанце. Међутим, у различитим радовима број тестираних инстанци, као и критеријуми заустављања нису исти, а разликује се и презентација добијених резултата. Све ово отежава директно поређење метода. У Табели 2.4 дат је приказ резултата за rmed инстанце за PNCP из литературе (укључени су и радови објављени након [94]). За сваки рад на ову тему, приказана је година објављивања, број решаваних rmed

инстанци, критеријум заустављања који се користи у предложеној методи, као и информације о добијеним резултатима које су доступне у раду.

Табела 2.4: Преглед литературе за PNCP инстанце.

| Референца | Година | # инстанци | Критеријум заустављања  | Резултати                                                                                                                                                 |
|-----------|--------|------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [85]      | 2023   | 264        | max CPU=1800s           | најбоље, просечно и најгоре решење, CPU до првог достизања најбољег решења, # извршавања која налазе најбоље решење (од 20)                               |
| [94]      | 2023   | 285        | max 5000 итерација      | најбоље решење, # извршавања која налазе најбоље решење (од 20), укупно CPU време, CPU до првог достизања најбољег решења, gap, st.dev.                   |
| [78]      | 2023   | 132        | max CPU=CPU из [66]     | најбоље решење, просечно време до првог достизања најбољег решења, # извршавања која налазе боље решење од решења из [66] и [1] (од 10), st.dev, avg.dev. |
| [107]     | 2022   | 413        | max CPU=60s             | % извршавања која налазе најбоље решење, нормализовано CPU време до првог достизања најбољег решења                                                       |
| [86]      | 2021   | 104        | max CPU=5n              | најбоље, просечно и најгоре решење, CPU до првог достизања најбољег решења, # извршавања која налазе најбоље решење (од 20), gap                          |
| [65]      | 2021   | 413        | max CPU=7 дана          | најбоље решење, CPU до првог достизања најбољег решења                                                                                                    |
| [66]      | 2018   | 132        | број генерисаних решења | најбоље решење, CPU, gap                                                                                                                                  |
| [1]       | 2015   | 132        | max CPU=4h              | просечне вредности, CPU                                                                                                                                   |

У наведеним радовима коришћене су укупно 453 инстанце, које су подељене у 5 група и у Табели 2.5 се може видети које групе инстанци су решаване у сваком од наведених радова.

Табела 2.5: PNCP инстанце.

| Група   | # инст | Инст. име               | Инст. димензија       | Референце                                   |
|---------|--------|-------------------------|-----------------------|---------------------------------------------|
| Група 1 | 64     | pmed1-pmed4,pmed6-pmed8 | $10 \leq n \leq 200$  | [1], [65], [66], [85] [86],[78] [94], [107] |
| Група 2 | 68     | pmed1-pmed4             | $50 \leq n \leq 100$  | [1], [65], [66], [85],[78], [94], [107]     |
| Група 3 | 113    | pmed5,pmed9-pmed19      | $10 \leq n \leq 400$  | [65],[94], [107]                            |
| Група 4 | 168    | pmed20-pmed40           | $350 \leq n \leq 900$ | [65], [107]                                 |
| Група 5 | 40     | Additional [86] pmed    | $100 \leq n \leq 900$ | [85], [86], [94]                            |

У Табели 2.6 за сваки рад дати су: број најбољих познатих решења које достиже свака од метода (колона #best) за сваку од 5 група инстанци као и проценат достигнутих најбољих решења (колона %best). Уколико у наведеном раду одређена група инстанци није тестирана, наведена је ознака „-“. Резултати

у врсти SVNS за PNCP добијени су Алгоритмом из 2.4, док су резултати у врсти SVNS за CPNCP добијени Алгоритмом који је описан у 4.3 и који се може користити и за решавање PNCP.

Табела 2.6: Поређење SVNS резултата са резултатима из литературе.

|                    | Група 1 |       | Група 2 |       | Група 3 |       | Група 4 |       | Група 5 |       |
|--------------------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
|                    | #best   | %best | #best   | %best | #best   | %best | #best   | %best | #best   | %best |
| SVNS за CPNCP [96] | 64      | 100   | 68      | 100   | 109     | 96.46 | 149     | 88.69 | 38      | 95    |
| [85]               | 64      | 100   | 68      | 100   | -       | -     | -       | -     | 40      | 100   |
| SVNS за PNCP [94]  | 63      | 98.44 | 68      | 100   | 102     | 90.27 | -       | -     | 33      | 82.5  |
| [78]               | 60      | 93.75 | 68      | 100   | -       | -     | -       | -     | -       | -     |
| [107]              | 64      | 100   | 68      | 100   | 113     | 100   | 168     | 100   | -       | -     |
| [86]               | 50      | 78.12 | -       | -     | -       | -     | -       | -     | 29      | 72.5  |
| [65]               | 63      | 98.44 | 68      | 100   | 112     | 99.2  | 158     | 95.05 | -       | -     |
| [66]               | 46      | 71.88 | 52      | 76.47 | -       | -     | -       | -     | -       | -     |
| [1]                | 52      | 81.25 | 56      | 82.34 | -       | -     | -       | -     | -       | -     |

Из Табеле 2.6 може се видети да предложени SVNS за PNCP [94] не достиже најбоље познато решење за 19 од 285 инстанци на којима је тестиран. Треба напоменути да су резултати публиковани у [65] добијени након 7 дана за поједине инстанце. Осим тога, иако се у радовима [85] и [107] налазе најбоља позната решења за 100% тестираних инстанци, ниједан од ових радова не обухвата све групе инстанци, а као што се може видети у Табели 2.6, управо су се Групе 3, 4 и 5 показале као тешке за решавање.

На основу приказаних резултата, може се закључити да се предложени SVNS алгоритам за решавање PNCP показао као поуздан и стабилан метод. У ситуацијама када оптимално решење није нађено, добијена су квалитетна решења у кратком временском периоду. Такође, метода се показала као конкурентна приликом поређења са другим методама из литературе, тј. као успешнија од већине раније предложених метода.

## Глава 3

# Проблем $p$ -резервног центра са фактором уштеде

У овој глави описана је верзија проблема  $p$ -резервног центра која подразумева олакшану комуникацију између центара и названа је проблем  $p$ -резервног центра са фактором уштеде (енгл. *p-next center problem with discount factor*,  $\gamma$ PNCP). Ова верзија PNCP први пут је предложена у раду Ј. Тасић, З. Дражић, З. Станимировић [95] у коме је  $\gamma$ PNCP формулисан као проблем целобројног линеарног програмирања и предложена је основна метода променљивих околина за његово решавање. Алгоритам је тестиран на скупу од 90 `pmcd` инстанци.

### 3.1 Мотивација и опис проблема

Са аспекта ефикасности, логично је омогућити бржи (јефтинији) транспорт на деоницама које повезују центре, у односу на транспорт између корисника и центара. У пракси се најчешће центри успостављају у близини брзих и поузданих саобраћајница, што олакшава комуникацију између центара у односу на комуникацију између центара и корисника. Један пример где је бржи транспорт између центара нарочито важан је превоз пацијената у тешком здравственом стању до одговарајуће здравствене установе. Наиме, пацијент долази до најближе здравствене установе (тј. до примарног центра) уобичајеним начином и брзином превоза. Међутим, та установа није у могућности да му пружи потребну услугу (амбуланта је пуна, не поседује одговарајућу опрему, медицински апарати су у квару и слично). Како се ради о хитном случају, пацијент се из примарног центра до друге здравствене установе (тј. резервног центра) транспортује возилом хитне помоћи, које захваљујући првенству пролаза и ротацији може знатно брже стићи до резервног центра. Корисник притом није могао да користи такав вид превоза од куће до прве установе, нити је унапред могао зна-

ти да му у примарном центру неће бити пружена помоћ. Слично томе, између болнице у једном месту (тј. примарног центра) и болнице у другом месту (резервног центра), изградњом хелидрома може се омогућити транспорт пацијената хеликоптером, чиме се додатно скраћује време превоза између центара.

Имајући у виду овај практични аспект, у PNCP модел је уведен фактор уштеде  $\gamma \in (0, 1)$ , којим се постиже смањење времена (трошкова) на деоницама које повезују центре. Као и код PNCP и у случају  $\gamma$ PNCP фокус је на кориснику који се налази у најлошијој ситуацији, тј. прелази најдуже укупно растојање до свог резервног центра, али се при рачунању укупног растојања узима у обзир јефтинији транспорт од примарног до резервног центра. Проблем  $\gamma$ PNCP, као варијанта PNCP, припада класи NP-тешких проблема.

Уколико је  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  задати скуп локација (свака од тих локација је кандидат за успостављање центра) и  $D = (d_{ij})_{n \times n}$  матрица растојања између поменутих локација, задатак је одредити скуп  $P$  који садржи  $p$  локација на којима ће бити успостављени центри. Сваки корисник се придружује најближем центру који постаје његов примарни центар, а такође се и за сваки центар одређује резервни центар, у који се корисник преусмерава уколико примарни центар изненада престане да функционише. Узимајући у обзир фактор уштеде  $\gamma$ , растојање коју корисник  $i$  прелази у најгорем случају је растојање до његовог примарног центра увећано за растојање од примарног до резервног центра помножено фактором  $\gamma$ . Скуп центара  $P$  треба одредити тако да је најдуже овакво растојање које прелазе корисници најмање могуће. Другим речима циљ је:

$$\min_{P \subset A, |P|=p} f(P), \quad (3.1)$$

где је

$$f(P) = \max_{i \in A} \left\{ \min_{j \in P} d_{ij} + \min_{j' \in \arg \min_{j \in P} d_{ij}} \min_{k \in P, k \neq j'} \gamma \cdot d_{j'k} \right\}. \quad (3.2)$$

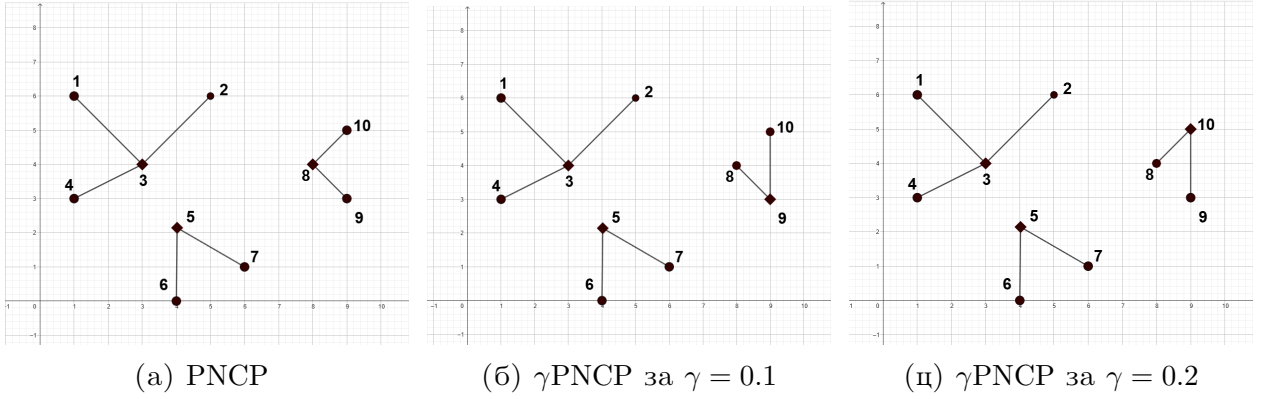
Математичка формулација  $\gamma$ PNCP као проблема целобројног линеарног програмирања изведена је из формулације за PNCP приказане у Секцији 2.3, уз увођење фактора уштеде  $\gamma$  у услове (2.6) и (2.7), који постају:

$$w \geq \sum_{k \in A, k \neq j} \gamma d_{jk} x_{jk}, \quad j \in A, \quad (3.3)$$

$$w \geq d_{ij}(x_{ij} - y_i) + \sum_{k \in A, k \neq j} \gamma d_{jk} x_{jk}, \quad i, j \in A, i \neq j. \quad (3.4)$$

На Слици 3.1 приказан је ефекат употребе фактора уштеде на примеру мале инстанце са  $n = 10$  чворова и  $p = 3$ . Центри су означени са  $\blacklozenge$ , док су корисници означени са  $\bullet$ .

На Слици 3.1(а) приказано је оптимално решење  $\{3, 5, 8\}$  за PNCP чија је вредност функције циља  $\sqrt{2} + \sqrt{20} = 5.89$ , што је дужина пута коју прелазе корисници 9 и 10. Када се укључи фактор уштеде и за исту инстанцу реши  $\gamma$ PNCP за  $\gamma = 0.1$ , добија се оптимално решење  $\{3, 5, 9\}$  приказано на Слици 3.1(б). У овом случају критични корисник 1 прелази растојање:  $d_{13} + \gamma d_{35} = 2\sqrt{2} + 0.1 \cdot \sqrt{5} = 3.05$ . На Слици 3.1(ц) приказано је оптимално решење  $\gamma$ PNCP за  $\gamma = 0.2$  за исту инстанцу. У том случају је најбоље центре успоставити на локацијама  $\{3, 5, 10\}$ , док је вредност функције циља  $\sqrt{8} + 0.2 \cdot \sqrt{5} = 3.28$ , што је дужина пута коју прелазе корисници 1 и 2. На овом примеру се може видети да увођење параметра  $\gamma$  у модел мења и локације центара у оптималном решењу, а очекивано и вредност функције циља је значајно мања када су центри повезани деоницама које се брже прелазе. Ово одговара сценарију у коме се центри успостављају у близини аутопута, насупрот ситуацији када се налазе у градским језгрима, и пружа увид у могућу уштеду која би се таквим планирањем остварила.



Слика 3.1: Поређење оптималних решења за (а) PNCP, (б)  $\gamma$ PNCP за  $\gamma = 0.1$  и (ц)  $\gamma$ PNCP за  $\gamma = 0.2$  на малој инстанци.

## 3.2 BVNS алгоритам за $\gamma$ PNCP

У овом поглављу биће описана имплементација алгоритма предложеног за решавање  $\gamma$ PNCP заснованог на основној варијанти VNS методе. Кључни кораци BVNS методе за решавање  $\gamma$ PNCP приказани су Алгоритмом 12. Главне идеје и структуре алгоритма су у основи преузете из SVNS алгоритма за решавање PNCP из 2.4.

Репрезентација решења, дефиниција околина и генерисање почетног решења су идентични као и 2.4. Коришћена је целобројна репрезентација решења, тј. решење је представљено целобројним вектором  $x$  дужине  $p$ , чији елементи представљају индексе локација на којима треба успоставити центре. Да би реше-

ње било допустиво, елементи вектора  $x$  морају бити различити. Околина  $N_1(x)$  решења  $x$  садржи сва допустива решења  $x'$  која се од решења  $x$  разликују у једном елементу. Аналогно се дефинишу околине  $N_k(x), k = 2, 3, \dots, k_{max}$ . Иницијално решење генерисано је насумично, док је за критеријум заустављања узет максималан број позивања функције за фазу размрдавања. Приликом фазе размрдавања, генерише се насумично решење  $x' \in N_k(x), k = 1, 2, \dots, k_{max}$ , које има  $k$  различитих центара од тренутног решења  $x$ . Затим се од тако добијеног решења  $x'$  започиње локална претрага у околини  $N_1(x')$ .

Једна од суштинских разлика BVNS алгоритма за  $\gamma$ PNCP у односу на SVNS имплементацију за PNCP је у рачунању вредности функције циља. Нека је  $c$  центар најближи локацији  $a$ , и нека је  $b$  центар најближи центру  $c$ . За задату вредност  $\gamma$  и решење  $x$ , вредност функције циља се рачуна као  $f(x) = \max_{a \in A} d_1 + \gamma \cdot d_2$ , где је  $d_1 = d(a, c)$  ако је  $a$  корисник и  $d_1 = 0$  ако је  $a$  центар, док је  $d_2 = d(c, b)$ .

Ослањајући се на помоћне низове  $c_1$  и  $c_2$  дужине  $n$  у којима се за сваку локацију памте њен најближи, односно други најближи центар, као и векторе  $z$  и  $r$  описане у 2.4.2, адаптиране су одговарајуће процедуре *Update()* и *MoveEvaluation()* по узору на процедуре представљене Алгоритмима 11 и 7 коришћене за PNCP. Процедуром *Update()* за задато решење  $x$  и пар локација  $(in, out)$  од којих  $in \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  постаје део решења, а центар  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  се затвара, модификује се решење  $x$  и ажурирају помоћни низови  $c_1$  и  $c_2$ . Дакле, формира се решење  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$  и врше неопходне измене у низовима  $c_1$  и  $c_2$ , тако да они одговарају новом решењу. Осим у фази локалне претраге, *Update()* процедура користи се и у фази размрдавања.

---

#### Алгоритам 12 BVNS за $\gamma$ PNCP

---

- 1: Иницијализација: изабрати околине  $N_k, k = \overline{1, k_{max}}$  за фазу размрдавања. Одreditи критеријум заустављања. Generisati почетно решење  $x^* \in S, f^* \leftarrow f(x^*)$ .
  - 2: **while** критеријум заустављања није испуњен **do**
  - 3:    $k \leftarrow 1$
  - 4:   **while**  $k \leq k_{max}$  **do**
  - 5:      $x' \leftarrow Shaking(x^*, k)$  ▷ размрдавање
  - 6:      $x'' \leftarrow LS\_fih(x')$  ▷ локална претрага
  - 7:     **if**  $f(x'') < f^*$  **then** ▷ одлука о померању
  - 8:        $x^* \leftarrow x'', f^* \leftarrow f(x'')$
  - 9:     **else**
  - 10:        $k \leftarrow k + 1$
- 

Процедура *MoveEvaluation()* за задато решење  $x$  и локацију  $in$  која није део решења  $x$  (тј.  $in \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ ), а која постаје центар, одређује центар  $out$  чијим затварањем би се добила најбоља вредност функције циља за решење

$(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$ . Треба напоменути да је током адаптације Алгоритама 7 за решавање  $\gamma$ PNCP било неопходно узимање у обзир параметра  $\gamma$  приликом одређивања дужине растојања  $f'$ , као и приликом адаптације Алгоритама 8, 9 и 10 за одређивање вредности у помоћним векторима  $r$  и  $z$ . Употреба ове процедуре омогућава да се на ефикасан начин (сложеност је  $O(n)$ ) одреди најбољи сусед из дела околине  $N_1(x)$  решења  $x$ , под претпоставком да се локација  $in$  додаје у решење.

У фази размрдавања, полазећи од задатог решења  $x^*$  и њему одговарајућих вектора  $c_1$  и  $c_2$ , *Shaking()* процедуром се на случајан начин бира  $k$  елемената из  $x^*$ ,  $k$  елемената који нису део решења  $x^*$  и позива се функција *Update()*  $k$  пута. На тај начин добија се решење  $x' \in N_k(x^*)$  и њему прилагођени вектори  $c_1$  и  $c_2$ . Процедура *LS\_fih()* обухвата претрагу околине  $N_1$  решења  $x'$ , при чему се не разматрају сви суседи од  $x'$ . Критични корисник у контексту  $\gamma$ PNCP дефинисан је као корисник  $i^* = \arg \max_{i \in A \setminus \{x'(1), x'(2), \dots, x'(p)\}} \{d(i, c_1(i)) + \gamma \cdot d(c_1(i), c_1(c_1(i)))\}$ . Растојање које овај корисник прелази представља вредност функције циља за тренутно решење. Уколико оваквих корисника има више, насумично се одабере један критични корисник  $i^*$  који ће се анализирати. Функција *MoveEvaluation()* позива се само за оне локације које би, уколико би постале део решења, скратиле путању коју прелази  $i^*$ . Другим речима, разматрају се само оне локације  $in \in A$  које нису део решења  $x'$ , а које задовољавају  $d(i^*, in) \leq d(i^*, c_1(i^*))$  и  $d(i^*, in) + \gamma \cdot d(in, c_1(in)) < d(i^*, c_1(i^*)) + \gamma \cdot d(c_1(i^*), c_1(c_1(i^*)))$ . На овај начин врши се филтрирање кандидата тако што се решења из околине  $N_1(x')$  која не задовољавају овај услов ни не разматрају, чиме се додатно убрзава процес претраге.

У случају проналаска решења са мањом вредношћу функције циља, процедура *LS\_fih()* поново покушава да побољша новодобијено решење, понављајући алгоритам у  $N_1$  околини тог новог решења. Локална претрага се понавља све док има побољшања и резултат је локални минимум  $x''$ . Уколико  $x''$  побољшава вредност функције циља тренутно најбољег решења  $x^*$ , у наредној итерацији BVNS алгоритма даља претрага се наставља од њега (тј.  $x^* \leftarrow x''$ , линије 7-8 Алгоритама 12). У супротном, претрага се наставља у наредној околини до тада најбољег пронађеног решења  $x^*$ . Када бројач околина  $k$  достигне своју максималну дозвољену вредност  $k_{max}$ , он се ресетује на 1. Описани кораци се понављају све док критеријум заустављања не буде испуњен.

### 3.3 Експериментални резултати

Тестирање предложеног BVNS алгоритма за решавање  $\gamma$ PNCP вршено је у истом окружењу описаном на почетку секције 2.5. Коришћено је 50 малих *pmcd* инстанци са  $n \leq 50$  чворова и 40 инстанци из Additional [86] скупа са  $100 \leq n \leq 900$  чворова. Свака инстанца решавана је за три вредности параметра

$\gamma \in \{0.1, 0.4, 0.6\}$ , тако што је предложени BVNS покренут 20 пута за сваку инстанцу полазећи од различитих насумично генерисаних решења. Вредности параметара за BVNS алгоритам приказане су у Табели 3.1.

Табела 3.1: Вредности параметара за BVNS алгоритам.

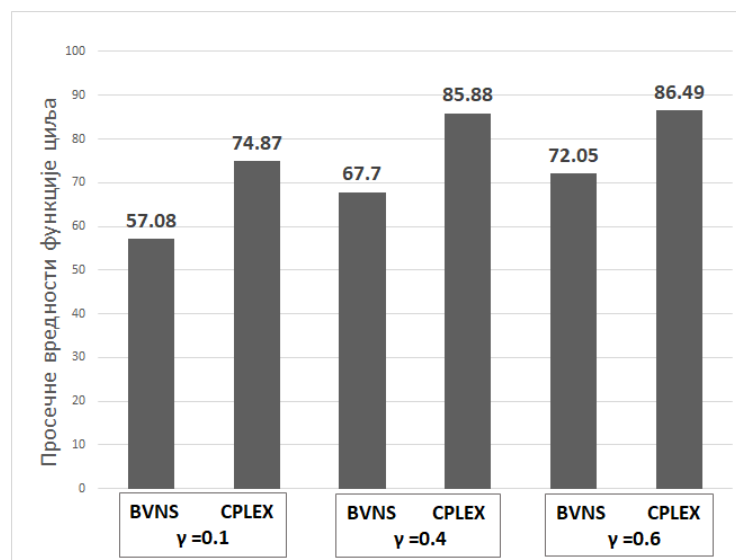
| Група инстанци   | $iter_{max}$ | $k_{max}$ | $\gamma$            |
|------------------|--------------|-----------|---------------------|
| pmed $n \leq 50$ | 500          | 5         | $\{0.1, 0.4, 0.6\}$ |
| Additional [86]  | 5000         | 5         | $\{0.1, 0.4, 0.6\}$ |

Квалитет резултата добијених предложеним BVNS алгоритмом оцењен је њиховим поређењем са оптималним и субоптималним решењима добијеним егзактним решавачем CPLEX 22.1.0 који је коришћен за тестирање математичке формулације описане у Секцији 3.1. Време за рад решавача ограничено је на 2 сата по инстанци. Комплетни резултати се могу наћи у Прилогу Б, док су сумарни резултати приказани у Табели 3.2. Прве три колоне Табеле 3.2 односе на инстанце и приказују групу инстанци, број чворова које инстанце у групи имају, као и број инстанци у групи. У четвртој колони је дата вредност фактора уштеде  $\gamma$ . Наредне три колоне односе се на резултате добијене CPLEX решавачем:  $\#opt$  колона садржи број инстанци за које је CPLEX пронашао оптимално решење, у колони  $\#feas$  приказан је број инстанци за које је пронађено само допустиво решење, док је у колони  $avg.t(s)$  приказано просечно време рада CPLEX решавача (у секундама) за посматрану групу. Последње две колоне садрже информације о резултатима BVNS алгоритма: у колони  $\%bk$  налази се проценат инстанци за које је BVNS достигао оптимално решење, или најбоље познато решење за инстанце за које оптимално решење није познато. Последња колона садржи просечно време извршавања BVNS алгоритма, такође у секундама. Како је за сваку инстанцу алгоритам покретан 20 пута, укупно просечно време рада алгоритма за сваку групу се може добити множењем времена  $avg.t$  са 20.

Табела 3.2: Сумарни резултати добијени CPLEX решавачем и BVNS алгоритмом на скупу малих pmed инстанци ( $n \leq 50$ ) и Additional [86] скупу инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ).

| Инст             | $n$                   | #Инст | $\gamma$ | CPLEX   |          |            | BVNS   |            |
|------------------|-----------------------|-------|----------|---------|----------|------------|--------|------------|
|                  |                       |       |          | $\#opt$ | $\#feas$ | $avg.t(s)$ | $\%bk$ | $avg.t(s)$ |
| pmed $n \leq 50$ | $n \leq 50$           | 50    | 0.1      | 50      | -        | 56.35      | 100%   | 0.04       |
| Additional [86]  | $100 \leq n \leq 900$ | 40    | 0.1      | 0       | 16       | 7200.00    | 100%   | 17.45      |
| pmed $n \leq 50$ | $n \leq 50$           | 50    | 0.4      | 50      | -        | 18.90      | 100%   | 0.03       |
| Additional [86]  | $100 \leq n \leq 900$ | 40    | 0.4      | 2       | 16       | 6602.00    | 100%   | 12.67      |
| pmed $n \leq 50$ | $n \leq 50$           | 50    | 0.6      | 50      | -        | 11.73      | 98%    | 0.03       |
| Additional [86]  | $100 \leq n \leq 900$ | 40    | 0.6      | 3       | 16       | 6170.63    | 100%   | 79.48      |

Може се приметити да је CPLEX решавач нашао оптимална решења за све мале инстанце, међутим на Additional [86] скупу се није показао тако добро. Оптимална решења нађена су за 3 инстанце у случају када је  $\gamma = 0.6$ , за 2 инстанце када је  $\gamma = 0.4$ , док у случају  $\gamma = 0.1$  није пронађено ниједно оптимално решење. Осим тога, CPLEX није успео да пронађе ни допустиво решење за чак 24 инстанце у случају  $\gamma = 0.1$ , тј. за 22 инстанце за  $\gamma = 0.4$  и 21 инстанцу за  $\gamma = 0.6$ . Са друге стране, BVNS није достигао само једно познато оптимално решење (за инстанцу `rmed3_50_20` и  $\gamma = 0.6$ ), док је у скоро свим случајевима када оптимална решења нису позната достигао боља решења од CPLEX решавача. На Слици 3.2 приказане су просечне вредности функције циља достигнуте BVNS алгоритмом и CPLEX решавачем за инстанце из Additional [86] скупа за које нису позната оптимална решења. Може се уочити да су BVNS алгоритмом значајно поправљене вредности добијене CPLEX решавачем на овим инстанцама за све посматране вредности фактора уштеде  $\gamma$ .



Слика 3.2: Просечне вредности функције циља достигнуте CPLEX решавачем и BVNS алгоритмом на инстанцама из Additional [86] скупа за које нису познате оптималне вредности.

Како је  $\gamma$ PNCP значајан проблем са аспекта уштеде која се постиже када су везе између центара ефикасне, у Табели 3.3 приказани су просечни резултати BVNS алгоритма за три разматране вредности параметра  $\gamma$ . Инстанце су груписане по броју чворова, а затим су за сваку групу израчунате просечне вредности функције циља, као и просечна времена извршавања алгоритма. Како је у случају  $\gamma = 1$  (тј. када нема убразања транспорта између центара) реч о PNCP

проблему, у Табели 3.3 су приказане и просечне најбоље познате вредности за PNCP. Треба приметити да су ове вредности горња ограничења вредности функција циља за  $\gamma$ PNCP за  $\gamma < 1$ . Табела 3.3 организована је на следећи начин: у првој колони дат је број чворова  $n$ , затим #Inst - број инстанци у групи, а потом просечна вредност најбољих познатих вредности функције циља за PNCP у колони UB. Након тога следе просечни резултати BVNS алгоритма добијени за три различите вредности фактора уштеде  $\gamma$ :  $avg.f$  - просечна вредност функције циља,  $avg.t$  - просечно време извршавања BVNS алгоритма (у секундама), као и  $sav(\%)$  - просечна уштеда која се постиже увођењем фактора уштеде  $\gamma$  у односу на UB вредност (у процентима). Може се закључити да се остварује просечна уштеда од 17.23%, уколико се комуникација између центара убрза 40% (тј. уколико је  $\gamma = 0.6$  уместо  $\gamma = 1$ ). У случајевима када је  $\gamma = 0.4$  и  $\gamma = 0.1$ , просечне уштеде су 25.20% и 37.32%, редом.

Табела 3.3: Резултати добијени BVNS алгоритмом на скупу малих `rmcd` инстанци ( $n \leq 50$ ) и на Additional [86] скупу инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ).

| $n$          | #Inst | UB     | BVNS $\gamma = 0.1$ |         |           | BVNS $\gamma = 0.4$ |         |           | BVNS $\gamma = 0.6$ |         |           |
|--------------|-------|--------|---------------------|---------|-----------|---------------------|---------|-----------|---------------------|---------|-----------|
|              |       |        | $avg.f$             | $avg.t$ | $sav(\%)$ | $avg.f$             | $avg.t$ | $sav(\%)$ | $avg.f$             | $avg.t$ | $sav(\%)$ |
| 10           | 5     | 106.60 | 50.68               | «0.01   | 53.99     | 72.88               | «0.01   | 33.99     | 85.84               | «0.01   | 21.87     |
| 20           | 10    | 117.70 | 68.46               | 0.01    | 42.73     | 89.04               | 0.01    | 25.10     | 99.36               | 0.01    | 16.27     |
| 30           | 10    | 134.90 | 85.96               | 0.03    | 36.20     | 102.50              | 0.02    | 23.99     | 115.06              | 0.02    | 14.77     |
| 40           | 15    | 121.27 | 79.13               | 0.04    | 36.22     | 95.39               | 0.04    | 22.62     | 105.20              | 0.04    | 14.16     |
| 50           | 10    | 107.70 | 70.35               | 0.07    | 34.91     | 85.02               | 0.06    | 21.49     | 92.26               | 0.06    | 14.60     |
| 100          | 5     | 131.00 | 94.00               | 2.02    | 29.61     | 107.12              | 1.78    | 19.70     | 114.60              | 1.73    | 14.26     |
| 200          | 5     | 82.60  | 55.38               | 8.10    | 35.35     | 63.64               | 7.10    | 25.33     | 69.36               | 6.09    | 17.66     |
| 300          | 5     | 58.60  | 39.70               | 19.10   | 33.96     | 44.52               | 16.29   | 25.44     | 47.20               | 15.46   | 20.68     |
| 400          | 5     | 44.40  | 31.08               | 34.69   | 31.64     | 35.28               | 29.09   | 21.42     | 37.28               | 29.87   | 16.74     |
| 500          | 5     | 41.00  | 27.62               | 56.53   | 33.39     | 31.32               | 48.35   | 24.13     | 34.24               | 46.83   | 16.93     |
| 600          | 5     | 43.60  | 24.40               | 84.31   | 43.17     | 27.68               | 72.31   | 35.29     | 32.06               | 67.26   | 26.13     |
| 700          | 4     | 42.50  | 23.28               | 66.30   | 38.74     | 25.95               | 59.69   | 31.11     | 31.05               | 55.38   | 20.18     |
| 800          | 3     | 37.00  | 25.47               | 47.35   | 31.54     | 28.13               | 43.15   | 24.19     | 29.60               | 46.35   | 20.10     |
| 900          | 3     | 45.67  | 23.40               | 67.36   | 40.79     | 26.73               | 56.02   | 33.04     | 32.53               | 53.45   | 23.23     |
| <b>Total</b> |       |        | <b>37.32</b>        |         |           | <b>25.20</b>        |         |           | <b>17.23</b>        |         |           |

## Глава 4

# Условљени проблем $p$ -резервног центра

Ова глава посвећена је модификацији проблема  $p$ -резервног центра под називом условљени проблем  $p$ -резервног центра (енгл. *Conditional  $p$ -next center problem, CPNCP*). Овај проблем има за циљ да истовремено обухвати реалну могућност изненадног колапса центара и потребе за ширењем постојећег система услед повећаног обима посла. Резултати описани у овој глави публиковани су у раду Ј. Тасић, З. Дражић, З. Станимировић [96]. У раду [96] се по први пут у литератури разматра проблем који обједињује наведена два аспекта која се јављају у пракси. У циљу егзактног решавања CPNCP развијен је модел целобројног линеарног програмирања помоћу ког су се употребом CPLEX решавача добила оптимална решења проблема на тест примерима мањих димензија. За решавање тест примера већих димензија предложен је хеуристички приступ заснован на методи променљивих околина са имплементацијом процедуре брзе размене у оквиру фазе локалне претраге. Алгоритам је тестиран на скупу од 716 модификованих инстанци генерисаних на основу познатих *pned* инстанци за PNCP из литературе. Добијени резултати показују ефикасност и стабилност алгоритма, а такође пружају и информације о томе колика уштеда или губитак могу настати коришћењем две различите стратегије у планирању приликом ширења пословне мреже.

### 4.1 Мотивација и опис проблема

Када се проблем  $p$ -центра примењује у пракси, често се дешава да пређе у своју условљену варијанту, која подразумева да је изван број центара већ успостављен, а да је потребно у постојећи систем додати одређен број нових центара, уз задржавање постојећих. На пример, ово се често догађа када се при-

ликом ширења неке пословне мреже укаже потреба за повећањем броја услужних центара, што не значи да ће се постојеће локације затворити. Тако се долази до формулације условљеног проблема  $p$ -центра (енгл. *Conditional p-center problem*, *CPSP*) у којој се одређују локације за  $p$  нових центара, уз даље коришћење већ успостављених  $q$  центара. Сваки корисник се затим придружује њему најближем од укупно  $p + q$  центара, а циљ је да максимално растојање од корисника до њему најближег центра буде минимално. Проблем се често у литератури назива и проблем  $(p, q)$ -центра (енгл. *(p, q)-center problem*), а на сличан начин се може дефинисати и условљени проблем  $p$ -медијане, што је учињено у [30].

Условљени проблем  $p$ -центра је први пут предложен у литератури у [64] у облику где се анализира додавање само једне нове услужне локације у постојећи систем ( $p = 1, q \geq 1$ ), а иста варијанта проблема разматрана је и у [44]. Након тих радова, 1990. године објављен је рад [19] у коме се разматра условљени проблем  $p$ -центра и условљени проблем  $p$ -медијане у Еуклидском простору, а затим је публикован рад [20] 1993. године у коме је разматрана уопштена варијанта CPSP у равни. Адаптирана је метода релаксације која је коришћена за РСР и извршено је тестирање на инстанцама које имају до 200 насумично генерисаних локација. Условљени проблем  $p$ -центра и условљени проблем  $p$ -медијане на графу уведени су 1980. године у раду [72], али је детаљно разматран само случај додавања једне нове услужне локације у систем. У раду [29] из 1989. године предложена је егзактна метода за решавање CPSP у равни и на мрежи. Први корак у предложеној методи је сортирање свих корисника у опадајући поредак по растојањима до њима најближих центара. За оптимално решење важи да је првих  $r$  корисника алоцирано неком од нових  $p$  центара. Задатак је одредити  $r$  и метода предложена у [29] укључује бинарну претрагу и решавање једног проблема  $p$ -центра у свакој итерацији. У раду је доказана сложеност овог алгорита која је  $P(n)O(\log(n))$ , где је  $n$  број корисника, а  $P(n)$  сложеност алгорита који се користи за решавање РСР. У раду [11] предложена је метода за решавање условљеног проблема  $p$ -центра и условљеног проблема  $p$ -медијане. Метода је заснована на решавању једног (неусловљеног) проблема  $(p + 1)$ -центра, тј. (неусловљеног) проблема  $(p + 1)$ -медијане. Побољшање ове методе предложено је у [7] у коме су приказани резултати добијени уз помоћ CPLEX решавача на ртед скупу инстанци које имају до 700 чворова.

У раду [18] предложен је итеративни алгоритам за решавање CPSP, који представља модификацију приступа из рада [29]. Први корак исти је као у [29], али се вредност  $r$  одређује на другачији начин. У свакој итерацији се горња граница оптималног решења поправља решавањем једног  $p$ -центар потпроблема. Иницијално се решава потпроблем са само једним корисником и то је први корисник из низа корисника сортираног у опадајућем поретку по растојањима до њима најближих центара. У свакој наредној итерацији додаје се следећи кори-

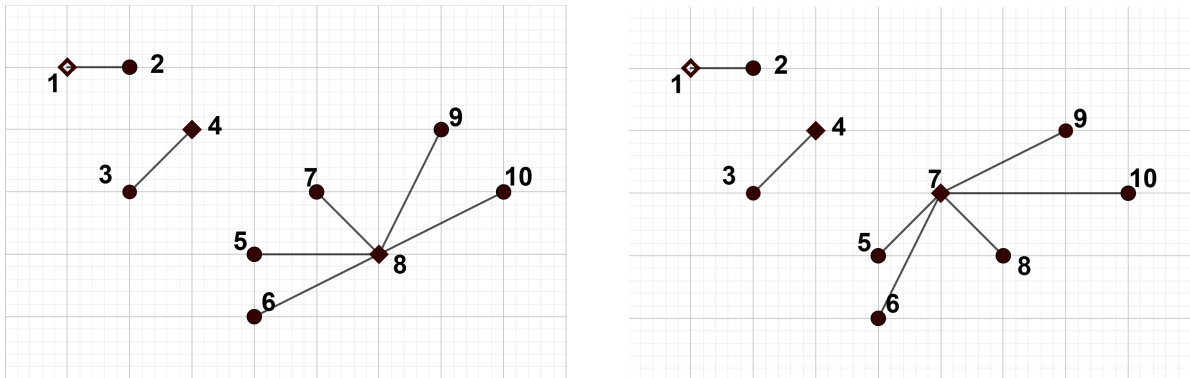
сник из опадајућег поретка. На овај начин се решава највише  $n$  проблема РСР, али са мањим бројем корисника од иницијалног проблема (између 1 и  $r + 1$ ), док у методи [29] потпроблеми могу имати више од  $r + 1$  корисника.

Метахеуристички приступ заснован на методи променљивих околина, вишестартним принципима, као и техникама агрегације и неким егзактним методама предложен је 2016. године у раду [53]. Експеримент је урађен на скупу TSP инстанци за проблем трговачког путника које имају до 71009 чворова.

Планарне варијанте РСР и СРСР у којима се центри могу отворити на било којој локацији (тачки) у равни разматране су у раду [14]. Предложена је и унапређена варијанта алгорита из [18] која је тестирана на скупу TSP инстанци.

Проблем  $p$ -центра, као и све његове модификације и проширења примењују се често у ралним ситуацијама, рецимо за планирање здравствених установа свих нивоа (амбуланте, диспанзери, клинички центри, болнице), апотека, али и служби безбедности као што су полицијске и ватрогасне станице, касарне итд. Како је успостављање оваквих објеката скоро увек скупо и временски захтевно, најчешће је једноставније додавање потребног броја објеката у постојећу организацију, када се укаже потреба, уместо изградње целог система испочетка. Са друге стране, све ове организације нису увек у стању да пруже услугу или одговоре на потребе корисника. Недовољно капацитета, људства или техничких средстава може бити проблем. Такође, непогоде као што су земљотреси, пожари, поплаве или урагани могу онеспособити једну или више услужних локација. Због ових разлога, корисници се не могу ослонити искључиво на своју примарну установу (рецимо амбуланту) и некада се морају преусмерити до резервне установе (рецимо здравственог центра). Узимањем у обзир оба споменута аспекта долази се до формулиације условљеног проблема  $p$ -резервног центра, као варијанте проблема  $p$ -резервног центра, код које су неки центри већ успостављени. Циљ је одредити локације за задати број нових центара, на такав начин да је максимално растојање од корисника до његовог најближег резервног центра минимално. Проблем се још назива и проблем  $(p, q)$ -резервног центра (енгл.  $(p, q)$ -next center problem). Како је проблем PNCP NP-тежак и CPNCP је такође NP-тежак.

Наредни пример приказан на Слици 4.1 илуструје разлике између CPNCP и СРСР. Нека је дат скуп локација  $\{1, 2, \dots, 10\}$  и нека је скуп унапред успостављених центара  $Q = \{1\}$  и  $p = 2$ .



(а) Оптимално решење за CPCR,  $Q = \{1\}$ . (б) Оптимално решење за CPNCP,  $Q = \{1\}$ .

Слика 4.1: Поређење оптималних решења за CPCR и CPNCP на малој инстанци.

Постојећи центар налази се на локацији 1 и означен је са  $\diamond$ . Оптимално решење CPCR дато је на Слици 4.1(а) и подразумева да се додатни центри отварају на локацијама 4 и 8 (означени са  $\blacklozenge$ ). Критични корисници који прелазе најдуже растојање су корисници 6, 9 и 10 и путање које прелазе су дужине  $\sqrt{5}$ , колика је и вредност функције циља за CPCR. Са друге стране, ако се у обзир узме и могућност отказа центара, тј. разматра CPNCP на истој мрежи, оптимално решење се добија отварањем додатних центара на локацијама 4 и 7 (Слика 4.1(б)). Корисник 10, чији је примарни центар 7, а резервни центар 4, прелази максимално укупно растојање дужине  $3 + \sqrt{5}$ . Како се оптимална решења CPCR и CPNCP разликују, може се закључити да узимање у обзир могућности колапса центара има велики утицај на избор локација за центре. Исти пример разматран је и у 2.1 и на Слици 2.1 приказана су оптимална решења за PСР и PNСР на истом примеру. Како једини претходно отворен центар на локацији 1, није део решења PNСР на Слици 2.1(б), то значи да иницијално отворени центри утичу на локације накнадно отворених центара. Имајући у виду наведено, може се закључити да иако у свим проблемима постоје сличности и неке исте претпоставке, увођење нових фактора које намеће пракса, резултира потпуно другачијим оптималним локацијама центара и вредностима функције циља, чак и на малим примерима, што говори у прилог потреби да се разматра CPNCP.

## 4.2 Математичка формулација проблема

Нека је  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  дати скуп свих локација, тј. корисника, постојећих центара и кандидата за нове центре. Нека је  $Q \subset A$ ,  $|Q| = q$ , скуп већ успостављених центара и нека је  $D = (d_{ij})_{n \times n}$  матрица растојања, где  $d_{ij}$  представља растојање (време, цену транспорта) између локација  $i$  и  $j$ . Под претпоставком да се

обим посла увећава и да постоји потреба да се постојећа мрежа од  $q$  центара прошири, циљ је одредити скуп  $P$  који садржи локације додатних  $p$  центара, а затим сваког корисника придружити њему најближем од укупно  $p + q$  центара. Како су у фокусу системи и службе које су оспособљене за реорганизацију у складу са проблемима који се могу догодити на терену, претпоставка је да је за сваки центар одређен резервни центар на који се преусмеравају корисници уколико је то неопходно. Дакле, уколико се по доласку корисника у примарни центар испостави да корисник не може бити услужен, он наставља пут до резервног центра. Циљ CPNCP је минимизовати максимални укупан пређени пут међу свим корисницима, односно минимизовати вредност

$$f(P) = \max_{i \in A} \left\{ \min_{j \in Q} d_{ij}, \min_{j \in P} d_{ij} \right\} + \min_{j' = \operatorname{argmin}_{j \in Q} \{ \min_{k \in Q, k \neq j'} d_{j'k}, \min_{k \in P, k \neq j'} d_{j'k} \}} \left\{ \min_{j \in Q} d_{ij}, \min_{j \in P} d_{ij} \right\},$$

по свим скуповима  $P$ ,  $P \subset A, |P| = p, P \cap Q = \emptyset$ . За формулисање CPNCP као проблема линеарног програмирања, дефинисане су бинарне променљиве, слично као за PNCP:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{уколико је на локацији } j \text{ успостављен центар, тј. } j \in Q \cup P, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{уколико је } j \text{ центар који је најближи локацији } i \text{ (различит од } i), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Увођењем неопходних измена у PNCP модел [1], CPNCP се може формулисати на следећи начин:

$$\min w \tag{4.1}$$

$$\sum_{j \in A} y_j = p + q, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j \in A, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad i \in A, \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{4.4}$$

$$y_j + \sum_{k \in A, d(i,k) > d(i,j)} x_{ik} \leq 1, \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{4.5}$$

$$w \geq \sum_{k \in A, k \neq j} d(j,k) x_{jk}, \quad j \in A, \tag{4.6}$$

$$w \geq d(i,j)(x_{ij} - y_i) + \sum_{k \in A, k \neq j} d(j,k) x_{jk}, \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{4.7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in A, i \neq j, \tag{4.8}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in A \setminus Q, \quad (4.9)$$

$$y_j = 1, \quad j \in Q. \quad (4.10)$$

Циљ је минимизација континуалне променљиве  $w$  која представља максимално растојање од корисника до његовог резервног центра, уз пролазак кроз примарни центар. Условом (4.2) укупан број успостављених центара се поставља на  $p + q$ . Услови (4.3)-(4.7) имају исто значење као у PNCP моделу. Условима (4.8) и (4.9) описује се бинарна природа променљивих, док се условима (4.10) индикатори који одговарају већ отвореним центрима постављају на вредност 1.

### 4.3 SVNS алгоритам за CPNCP

У овом поглављу ће бити описана закошена метода променљивих околина за решавање CPNCP која је предложена у раду Ј.Тасић, З. Дражић, З. Станимировић [96].

**Репрезентација решења.** Решење је представљено целобројним низом дужине  $p$  који садржи индексе локација на којима треба успоставити нове центре. Нека је  $Q$ ,  $|Q| = q$  скуп који садржи индексе локација на којима се налазе унапред задати центри. Скуп допустивих решења  $S$  може се дефинисати на следећи начин:

$$S = \{x : |x| = p; 1 \leq x_i \leq n, i = \overline{1, p}; x_i \notin Q \mid i = \overline{1, p}; x_i \neq x_j, i \neq j, i, j = \overline{1, p}\}.$$

На Слици 4.2 приказана је репрезентација једног допустивог решења  $x$  за инстанцу са 20 локација  $A = \{1, 2, \dots, 20\}$  и успостављеним центрима на локацијама  $Q = \{1, 19\}$ . Циљ је успоставити још  $p = 8$  центара, а затим сваког корисника придружити најближем од укупно 10 успостављених центара. Скуп допустивих решења за овај пример је  $S = \{x : |x| = 8; 1 \leq x_i \leq 20, x_i \neq 1, x_i \neq 19, x_i \neq x_j, i, j = \overline{1, 8}, i \neq j\}$ , а кардиналност овог скупа је  $\binom{18}{8} = 43758$ .

$$A = \{1, 2, \dots, 20\}, p = 8, Q = \{1, 19\}, q = 2.$$

$$x : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 6 & 9 & 11 & 12 & 14 \\ \hline \end{array}, |x| = p = 8.$$

Слика 4.2: Репрезентација решења

**Рачунање функције циља.** За дато решење  $x$  вредност функције циља рачуна се на сличан начин као у случају SVNS за PNCP (описано у Секцији 2.4). Разлика је у томе што се приликом алоцирања корисника разматрају и постојећи

отворени центри из скупа  $Q$ , као и  $p$  нових центара из вектора  $x$  чије се отварање анализира. Треба приметити да се приликом одређивања примарног центра за посматраног корисника  $a \in A$ , може десити да се више центара налази на истој минималној удаљености од корисника  $a$ . Другим речима, за корисника  $a$  може постојати више кандидата за примарни центар. У том случају, гледају се растојања од потенцијалних примарних центара до њихових резервних центара и корисник  $a$  за примарни центар бира онај центар са минималном дужином двокраке путање до резервног центра. Оваквим избором корисник  $a$  постиже најкраћи укупни пређени пут, у ситуацијама када је приморан да путује до резервног центра.

**Дефиниција околина.** ОкоLINE су дефинисане на исти начин као за SVNS методу за PNCP у Секцији 2.4. У фази локалне претраге користи се околина  $N_1$  која садржи сва решења која се од текућег решења разликују у једном центру, док се у фази размрдавања користе околине  $N_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_{max}$ , које садрже сва решења која се од тренутног разликују у тачно  $k$  центара.

**Структура предложеног SVNS алгоритма.** Основна структура алгоритма за решавање CPNCP је иста као и за SVNS за PNCP који је приказан Алгоритмом 5 из Секције 2.4, док су детаљи имплементације коришћених процедура приказани у наредним секцијама. Иницијално решење бира се насумично, а као критеријум заустављања коришћен је максималан број позива функције за фазу размрдавања. У фази размрдавања се на случајан начин генерише сусед  $x_{shake}$  из  $k$ -те околине текућег решења  $x$ . Прецизније, на случајан начин се бира  $k$  локација из скупа  $A \setminus (Q \cup \{x(1), x(2), \dots, x(p)\})$  на којима ће бити успостављени центри, као и  $k$  центара из текућег решења  $x$  који ће бити затворени. На овај начин се формира решење  $x_{shake}$  које представља почетно решење за локалну претрагу.

### 4.3.1 Локалана претрага заснована на хеуристици брзе размене за CPNCP

Како вектор решења садржи само индексе  $p$  нових центара које је потребно додати у мрежу, локална претрага околине  $N_1$  почиње од решења  $x_{shake}$  и подразумева разматрање суседа који имају један центар другачији од овог решења (док је  $p - 1$  центара исто). Претрага користи хеуристику брзе размене која се ослања на помоћне процедуре *MoveEvaluation()* и *Update()*. Будући да се неке идеје и технике ослањају на оне из Секције 2.4.1, акценат у овом потпоглављу биће на изменама које су учињене да би се оне могле применити на проблем CPNCP. Помоћни низови  $c_1$  и  $c_2$  дефинисани у 2.4.1 дефинишу се на исти начин и за потребе решавања CPNCP, с тим да се најближи, као и други најближи

центар за сваку локацију одређује из скупа  $\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q$ . Као и у Алгоритму 6, и приликом имплементације локалне претраге за CPNCP идеја је да се не претражује читава  $N_1$  околина решења  $x$ , у потрази за суседом који даје најмању вредност функције циља, што се може постићи на следећи начин:

- Не разматрају се сви кандидати  $in$  који могу постати центри, већ се врши њихово филтрирање и даље се анализирају само они чије би отварање могло смањити укупно растојање које прелази критични корисник  $i^*$  (слично као у линији 7 Алгоритма 6). Растојање  $i^* \rightarrow c_1(i^*) \rightarrow c_1(c_1(i^*))$  које критични корисник прелази се може смањити у следећим случајевима:
  1. уколико је  $in$  на мањем или истом растојању до критичног корисника као и његов тренутни примарни центар, а путања  $i^* \rightarrow in \rightarrow c_1(in)$  краћа је од путање  $i^* \rightarrow c_1(i^*) \rightarrow c_1(c_1(i^*))$  ( $in$  постаје примарни центар за критичног корисника);
  2. уколико  $in$  постаје резервни центар за критичног корисника, а путања  $i^* \rightarrow c_1(i^*) \rightarrow in$  је краћа од путање  $i^* \rightarrow c_1(i^*) \rightarrow c_1(c_1(i^*))$ ;
  3. уколико су  $c_1(i^*)$  и  $c_2(i^*)$  подједнако удаљени од  $i^*$ , али центар  $in$  постаје резервни центар за  $c_2(i^*)$  и путања  $i^* \rightarrow c_2(i^*) \rightarrow in$  је краћа од путање  $i^* \rightarrow c_1(i^*) \rightarrow c_1(c_1(i^*))$  коју је критични корисник користио до тада.
- За овако изабране кандидате  $in$  позива се процедура  $MoveEvaluation()$  којом се одређује центар текућег решења са којим би размена дала најмању могућу вредност функције циља, како би се одредио пар  $(in^*, out^*)$  за који је вредност функције циља за решење  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in^*\}) \setminus \{out^*\}$  најмања могућа и та вредност се пореди са до тада нађеним најбољим решењем.
- Приликом одређивања критичног корисника, уколико их има више, насумично се бира онај у односу на кога се филтрирају кандидати пре позивања  $MoveEvaluation()$ .

Кораци имплементирани локалне претраге приказани су Алгоритмом 13.

**Алгоритам 13** Локална претрага за CPNCP

---

```

1: procedure Local Search( $x$ )
2:    $f^* \leftarrow f(x)$ 
3:   Одредити критичног корисника  $i^*$ . Уколико их има више, на случајан начин изабрати једног.
4:   while true do
5:      $w^* \leftarrow \infty$ 
6:     for сваку локацију  $in \notin (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q)$  do
7:       if  $in$  смањује укупан пређени пут критичног корисника  $i^*$  then
8:          $out, F \leftarrow MoveEvaluation(in, x, c_1, c_2)$ 
9:         if  $F < w^*$  then
10:            $w^* \leftarrow F, in^* \leftarrow in, out^* \leftarrow out$ 
11:       if  $f^* \leq w^*$  then
12:         break
13:       else
14:          $f^* \leftarrow w^*$ 
15:          $Update(x, in^*, out^*, c_1, c_2)$ 
16:       Одредити критичног корисника  $i^*$ . Уколико их има више, на случајан начин изабрати једног.
```

---

**4.3.2 Процедура  $MoveEvaluation()$  за CPNCP**

За опис  $MoveEvaluation()$  процедуре за CPNCP биће коришћене исте ознаке као у Секцији 2.4.2. Псеудокод  $MoveEvaluation()$  процедуре за CPNCP дат је Алгоритмом 14.

За задати центар  $in$  који постаје део решења  $x$ ,  $MoveEvaluation()$  процедуром израчунавају се вредности функције циља за решења  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out'\}$  за сваки од  $p$  центара  $out'$  тренутног решења  $x$ . Ове вредности смештају се у вектор  $g(\cdot)$  дужине  $p$  из кога се на крају изабере најмања вредност функције циља и одговарајући центар је онај који треба избацити из решења. Вредности функције циља за решења  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out'\}$ ,  $out' \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  одређују се као:

$$\max\{f', z(out'), \max_{\substack{j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q, \\ j \neq out'}} r(j)\}.$$

Елементи вектора  $r$  и  $z$  одређују се тако што се сваки од  $n - p - q$  корисника разматра само једном. Након иницијализације ових вектора, која се врши наредбама у линији 2 Алгоритма 14, разматра се један по један корисник. Уколико текући корисник почиње да користи  $in$  као примарни центар ( $in$  је ближи кориснику од дотадашњег примарног центра или је  $in$  једнако удаљен као дотадашњи примарни центар, али је укупна путања преко центра  $in$  краћа од дотадашње,

линија 4 у Алгоритму 14), укупна дужина путање тог корисника се по потреби уписује у  $f'$ . За све остале кориснике којима  $in$  није постао примарни центар, приступа се ажурирању елемената вектора  $r$  (описано Алгоритмом 8 из Секције 2.4.2), као и вектора  $z$  које је описано Алгоритмом 15.

---

**Алгоритам 14** *MoveEvaluation()* процедура за CPNCP

---

```

1: procedure MoveEvaluation( $in, x, c_1, c_2$ )
2:   Иницијализација:
    $f' \leftarrow 0$ ,
    $x_q \leftarrow \{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q$ ,
    $r(x_q(j)) \leftarrow \min\{d(x_q(j), in), d(x_q(j), c_1(x_q(j)))\}$ ,
    $z(c_1(x_q(j))) \leftarrow \max\{z(c_1(x_q(j))), \min\{d(x_q(j), in), d(x_q(j), c_2(x_q(j)))\}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p + q$ 
3:   for svakog korisnika  $i \in A \setminus (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q)$  do
4:     if  $i \neq in$  and  $(d(i, in) < d(i, c_1(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_1(i))$  and  $d(in, c_1(in)) < d(c_1(i), c_1(c_1(i))))$  then
5:        $f' \leftarrow \max\{f', d(i, in) + d(in, c_1(in))\}$ 
6:     else
7:       Ажурирати вредности  $r(c_1(i))$  Алгоритмом 8
8:       Ажурирати вредности  $z(c_1(i))$  и  $z(c_1(c_1(i)))$  Алгоритмом 15
9:   for svaki centar  $x(j), j = 1, 2, \dots, p$  do
10:    Ажурирати вредност  $z(x(j))$  Алгоритмом 16
11:   Наћи  $g_1 \leftarrow \max\{r(x_q(l)) \mid l = 1, 2, \dots, p + q\}$ , и нека је  $l^*$  индекс нађеног максимума
12:   Наћи  $g_2 \leftarrow \max_{l \neq l^*} \{r(x_q(l)) \mid l = 1, 2, \dots, p + q\}$ 
13:   for  $l = 1, 2, \dots, p$  do
14:     if  $x(l) = c_1(in)$  then
15:        $f' \leftarrow f' - d(in, c_1(in)) + d(in, c_2(in))$  ▷ Ажурирање  $f'$ 
16:     if  $l \neq l^*$  then
17:        $g(l) \leftarrow \max\{f', z(x(l)), g_1\}$ 
18:     else
19:        $g(l) \leftarrow \max\{f', z(x(l)), g_2\}$ 
20:   Наћи:  $f \leftarrow \min\{g(l) \mid l = 1, 2, \dots, p\}$ 
21:   Наћи центар који треба eliminisati:  $out \leftarrow x(l^{**})$ , где је  $l^{**}$  индекс нађеног минимума
22:   return  $out, f$ 

```

---

Приликом ажурирања вредности  $r(c_1(i))$ , за разматраног корисника  $i$  се одреди укупна дужина његове путање, узимајући у обзир могућност да се као резервни центар може користити и  $in$ . Добијена вредност се пореди са дотадашњом вредношћу  $r(c_1(i))$ . Уколико је нађена путања дужа од до тада нађене најдуже

путање међу путањама корисника који су придружени центру  $c_1(i)$ , вредност  $r(c_1(i))$  се ажурира.

Затим се ажурирају елементи  $z(c_1(i))$  и  $z(c_1(c_1(i)))$  за корисника  $i$  на начин описан Алгоритмом 15. Уколико је  $c_1(i)$  центар који се избацује, онда кориснику  $i$  треба одредити нови примарни центар који може бити  $in$  или  $c_2(i)$ .

- Нови примарни центар ће бити  $in$  уколико је  $in$  ближи кориснику  $i$  од центра  $c_2(i)$  или уколико су ова два центра једнако удаљена од корисника  $i$ , али је укупно растојање преко центра  $in$  краће (из центра  $in$  се прелази краће растојање до резервног центра, у односу на растојање до резервног центра које се прелази из  $c_2(i)$ ).

Резервни центар за корисника  $i$  је у овом случају  $c_1(in)$ , осим уколико то није управо  $c_1(i)$  (проверава се линијом 3 у Алгоритму 15), чије се избацивање разматра, када је резервни центар  $c_2(in)$ .

- Уколико је нови примарни центар за корисника  $i$  центар  $c_2(i)$ , нови резервни центар се бира између центара  $in$  или  $c_1(c_2(i))$ , уколико је  $c_1(c_2(i)) \neq c_1(i)$ . Линијама 9 - 13 у Алгоритму 15, описан је избор новог резервног центра у овом случају. Уколико су  $c_1(c_2(i))$  и  $c_1(i)$  исти центар, онда се нови резервни бира између центра  $in$  и центра  $c_2(c_2(i))$  (линије 14 - 18 у Алгоритму 15).

Описаним поступком је одређена нова путања за корисника  $i$ , уколико се из решења уклања његов примарни центар  $c_1(i)$ . Дужина ове путање упоређује се са  $z(c_1(i))$ , и та вредност се по потреби ажурира (линија 19 у Алгоритму 15). Уколико је  $i = in$ , ажурира се вредност  $z(c_1(in))$ . У том случају, услед избацивања центра  $c_1(in)$ , центар  $in$  би као резервни центар почео да користи  $c_2(in)$  (линија 20 у Алгоритму 15). Овиме је завршено ажурирање  $z(c_1(i))$  за све вредности  $i \in A \setminus (\{x(1), x(2), \dots, x(n)\} \cup Q)$ .

Следећи корак је ажурирање вредности  $z(c_1(c_1(i)))$ , тј. разматрање сценарија у коме се из решења избацује резервни центар корисника  $i$ . Нови резервни центар се у том случају бира између центара  $in$  и  $c_2(c_1(i))$ , у зависности који је од њих ближи примарном центру  $c_1(i)$ .

Овиме је разматрање корисника завршено и може се приступити ажурирању вредности  $z(x(j))$  које је приказано Алгоритмом 16. Уколико се центар  $x(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  гаси, ту локацију надаље треба посматрати као корисника и стога јој одредити примарни и резервни центар. Примарни центар за  $x(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  може постати центар  $in$  или центар  $c_1(x(j))$ .

---

**Алгоритам 15** Ажурирање вредности вектора  $z$  за кориснике

---

Наћи  $new\_primary\_i$  између  $in$  и  $c_2(i)$ , а затим и  $new\_backup\_i$  за корисника  $i$  на следећи начин:

- 1: **if**  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  or  $d(i, in) = d(i, c_2(i))$  and  $d(in, c_1(in)) < d(c_2(i), c_1(c_2(i)))$  **then**
- 2:    $new\_primary\_i \leftarrow in$
- 3:   **if**  $c_1(new\_primary\_i) = c_1(i)$  **then**
- 4:      $new\_backup\_i \leftarrow c_2(new\_primary\_i)$
- 5:   **else**
- 6:      $new\_backup\_i \leftarrow c_1(new\_primary\_i)$
- 7: **else**
- 8:    $new\_primary\_i \leftarrow c_2(i)$
- 9:   **if**  $c_1(new\_primary\_i) \neq c_1(i)$  **then**
- 10:    **if**  $d(new\_primary\_i, in) > d(new\_primary\_i, c_1(new\_primary\_i))$  **then**
- 11:      $new\_backup\_i \leftarrow c_1(new\_primary\_i)$
- 12:    **else**
- 13:      $new\_backup\_i \leftarrow in$
- 14: **else**
- 15:   **if**  $d(new\_primary\_i, in) > d(new\_primary\_i, c_2(new\_primary\_i))$  **then**
- 16:      $new\_backup\_i \leftarrow c_2(new\_primary\_i)$
- 17:    **else**
- 18:      $new\_backup\_i \leftarrow in$
- 19:  $z(c_1(i)) \leftarrow \max\{z(c_1(i)), d(i, new\_primary\_i) + d(new\_primary\_i, new\_backup\_i)\}, i \neq in$
- 20:  $z(c_1(in)) \leftarrow \max\{z(c_1(in)), d(in, c_2(in))\}$

Наћи  $new\_backup\_i$  за корисника  $i$  између  $in$  и  $c_2(c_1(i))$  на следећи начин:

- 21: **if**  $d(c_1(i), in) < d(c_1(i), c_2(c_1(i)))$  **then**
- 22:    $new\_backup\_i \leftarrow in$
- 23: **else**
- 24:    $new\_backup\_i \leftarrow c_2(c_1(i))$
- 25:  $z(c_1(c_1(i))) \leftarrow \max\{z(c_1(c_1(i))), d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), new\_backup\_i)\}$

---

- Уколико је  $in$  на мањој удаљености од  $x(j)$  него  $c_1(x(j))$ , као примарни центар ће се користити  $in$ . Резервни центар ће бити  $c_1(in)$  или  $c_2(in)$ , уколико је  $c_1(in) = x(j)$  (линије 2-7 у Алгоритму 16). Уколико су  $in$  и  $c_1(x(j))$  на једнаком растојању од  $x(j)$ , неопходно је израчунати укупна растојања која би  $x(j)$  прелазио у случају да користи сваки од ових центара као примарни (линије 9-18 у Алгоритму 16), и одредити се за краћу опцију (линије 19-21 у Алгоритму 16).
- Уколико је  $c_1(x(j))$  ближи  $x(j)$  него  $in$ , онда  $c_1(x(j))$  постаје примарни центар за  $x(j)$ , а резервни центар се бира између центара  $in$  и  $c_1(c_1(x(j)))$ , уколико  $c_1(c_1(x(j)))$  није управо  $x(j)$ . Уколико то јесте случај, резервни центар бира се између  $in$  и  $c_2(c_1(x(j)))$ .

Описаним поступком одређена је путања коју ће прелазити  $x(j)$  до резервног центра и може се ажурирати вредност  $z(x(j))$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

---

**Алгоритам 16** Ажурирање вредности вектора  $z$  за центре

---

Наћи  $new\_primary\_j$  између  $in$  и  $c_1(x(j))$ , а затим и  $new\_backup\_j$  на следећи начин:

```

1: if  $d(x(j), in) \leq d(x(j), c_1(x(j)))$  then
2:   if  $d(x(j), in) < d(x(j), c_1(x(j)))$  then
3:      $new\_primary\_j \leftarrow in$ 
4:     if  $c_1(new\_primary\_j) \neq x(j)$  then
5:        $new\_backup\_j \leftarrow c_1(new\_primary\_j)$ 
6:     else
7:        $new\_backup\_j \leftarrow c_2(new\_primary\_j)$ 
8:   else
9:      $new\_primary\_j \leftarrow in$ 
10:    if  $c_1(new\_primary\_j) \neq x(j)$  then
11:       $new\_backup\_j \leftarrow c_1(new\_primary\_j)$ 
12:    else
13:       $new\_backup\_j \leftarrow c_2(new\_primary\_j)$ 
14:     $new\_primary\_j\_2 \leftarrow c_1(x(j))$ 
15:    if  $c_1(new\_primary\_j\_2) \neq x(j)$  then
16:       $new\_backup\_j\_2 \leftarrow c_1(new\_primary\_j\_2)$ 
17:    else
18:       $new\_backup\_j\_2 \leftarrow c_2(new\_primary\_j\_2)$ 
19:    if  $d(new\_primary\_j\_2, new\_backup\_j\_2) < d(new\_primary\_j, new\_backup\_j)$  then
20:       $new\_backup\_j \leftarrow new\_backup\_j\_2$ 
21:       $new\_primary\_j \leftarrow new\_primary\_j\_2$ 
22:  else
23:     $new\_primary\_j \leftarrow c_1(x(j))$ 
24:    if  $c_1(new\_primary\_j) \neq x(j)$  then
25:      if  $d(new\_primary\_j, in) > d(new\_primary\_j, c_1(new\_primary\_j))$  then
26:         $new\_backup\_j \leftarrow c_1(new\_primary\_j)$ 
27:      else
28:         $new\_backup\_j \leftarrow in$ 
29:    else
30:      if  $d(new\_primary\_j, in) > d(new\_primary\_j, c_2(new\_primary\_j))$  then
31:         $new\_backup\_j \leftarrow c_2(new\_primary\_j)$ 
32:      else
33:         $new\_backup\_j \leftarrow in$ 
34:  $z(x(j)) \leftarrow \max\{z(x(j)), d(x(j), new\_primary\_j) + d(new\_primary\_j, new\_backup\_j)\}$ 

```

---

### 4.3.3 Процедура $Update()$ за CPNCP

$Update()$  процедура коришћена приликом решавања CPNCP, разликује се од оне коришћене за PNCP, стога је дата у целини Алгоритмом 17.

---

#### Алгоритам 17 $Update()$ процедура за CPNCP

---

```

1: procedure UPDATE( $x, in, out, c_1, c_2$ )
2:    $x \leftarrow (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$ 
3:    $menjالي\_backup = \emptyset$ 
4:   for svaki centar  $j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q$  do
5:     Izračunati  $c_1(j)$  i  $c_2(j)$ 
6:     Ukoliko je došlo do promene u vektoru  $c_1$ , dodati centar  $j$  u vektor  $menjالي\_backup$ 
7:   for svakog korisnika  $i \in A \setminus (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup Q)$  do
8:     if length( $menjالي\_backup$ ) > 0 then
9:       Popravka1( $i, in, c_1(i), D, x, c_1, c_2, menjالي\_backup$ )
10:      Popravka2( $i, in, c_2(i), D, x, c_1, c_2, menjالي\_backup$ )
11:     if  $c_1(i) = out$  then
12:       if  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_2(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_2(i), c_1(c_2(i))))$  then
13:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
14:       else
15:          $c_1(i) \leftarrow c_2(i)$ 
16:         Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ . Ukoliko ima više kandidata na istom
           растојанју, изабрати оног са најближим резервним центром.
17:          $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 
18:     else
19:       if  $d(i, in) < d(i, c_1(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_1(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_1(i), c_1(c_1(i))))$  then
20:          $c_2(i) \leftarrow c_1(i)$ 
21:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
22:       else
23:         if  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_2(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_2(i), c_1(c_2(i))))$  then
24:            $c_2(i) \leftarrow in$ 
25:         else
26:           if  $c_2(i) = out$  then
27:             Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ . Ukoliko ima više kandidata na
               istom растојанју, изабрати оног са најближим резервним центром.
28:              $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 

```

---

Најпре се ажурира вектор  $x$  тако што му се додаје центар  $in$ , а елиминише центар  $out$ . Након тога се одређују вредности у низовима  $c_1$  и  $c_2$  које се односе на центре ажурираног решења  $x$  и меморише се сваки центар  $j$  чији се резервни центар променио услед размене пара  $(in, out)$ . Затим се разматрају корисници. Најпре се, уколико постоје центри којима је резервни центар промењен, позива

процедура  $Popravka1()$  која за текућег корисника проверава да ли постоји бољи избор за примарни центар међу центрима који су једнако удаљени као и његов тренутни примарни центар, али је услед потенцијалне промене резервног центра неки други центар сада бољи избор. Затим се позива процедура  $Popravka2()$  којом се спроводи аналогна анализа и по потреби измена вредности у вектору  $c_2$ . Псеудокодови ових процедура дати су Алгоритмима 18 и 19. У остатку алгоритма се разматрају случајеви слични као у Алгоритму 11 из 2.4.1 уз измењене услове у линијама 12, 19 и 23 тако да се обухвате и ситуације када се два центра налазе на једнаком растојању од текућег корисника. Тада се разматра растојање од центара до њихових резервних центара и предност даје оном центру са краћим укупним растојањем.

---

**Алгоритам 18**  $Popravka1()$  за  $Update()$  процедуру за CPNCP

---

```

1: procedure  $Popravka1(i, in, current\_c1\_i, D, x, c_1, c_2, menjali\_backup)$ 
2:    $new\_c1\_i \leftarrow current\_c1\_i$ 
3:   for  $j \in menjali\_backup$  do
4:     if  $j \neq current\_c1\_i$  and  $j \neq in$  then
5:       if  $d(i, new\_c1\_i) = d(i, j)$  and  $d(new\_c1\_i, c_1(new\_c1\_i)) > d(j, c_1(j))$  then
6:          $new\_c1\_i \leftarrow j$ 
7:   if  $new\_c1\_i = c_2(i)$  then
8:      $c_2(i) \leftarrow current\_c1\_i$ 
9:    $c_1(i) \leftarrow new\_c1\_i$ 

```

---



---

**Алгоритам 19**  $Popravka2()$  за  $Update()$  процедуру за CPNCP

---

```

1: procedure  $Popravka2(i, in, current\_c2\_i, D, x, c_1, c_2, menjali\_backup)$ 
2:    $new\_c2\_i \leftarrow current\_c2\_i$ 
3:   for  $j \in menjali\_backup$  do
4:     if  $j \neq current\_c2\_i$  and  $j \neq in$  and  $j \neq c_1(i)$  then
5:       if  $d(i, new\_c2\_i) = d(i, j)$  and  $d(new\_c2\_i, c_1(new\_c2\_i)) > d(j, c_1(j))$  then
6:          $new\_c2\_i \leftarrow j$ 
7:    $c_2(i) \leftarrow new\_c2\_i$ 

```

---

## 4.4 Експериментални резултати

Тестирање SVNS алгоритма за решавање CPNCP вршено је у истом окружењу као и тестирање за PNCP и  $\gamma$ PNCP, које је описано на почетку 2.5. Како CPNCP није раније разматран у литератури, неопходно је било креирати инстанце за експериментална тестирања.

#### 4.4.1 Генерисање инстанци

Генерисано је укупно 716 инстанци за проблем CPNCP, на основу rmed инстанци које су коришћене за решавање PNCP у литератури. Инстанце су генерисане пратећи два различита приступа и груписане су на основу броја чворова  $n$  на:

- мале инстанце (од 20 до 50 чворова)
- средње инстанце (од 60 до 200 чворова)
- велике инстанце (од 250 до 400 чворова)
- веома велике инстанце (од 800 до 900 чворова)
- Additional група од 40 инстанци коришћена за PNCP у [86] (од 100 до 900 чворова).

Првим приступом генерисане су инстанце до  $n = 100$  чворова, за које су позната оптимална решења. Идеја за овај приступ преузета је из рада [53] у коме су аутори решавали CPSP, а инстанце су генерисане адаптацијом инстанци за PCP. Идеја је да се за унапред задате центре изабере оптимално решење проблема  $q$ -резервног центра, тако да су инстанце добијене коришћењем матрица растојања из rmed инстанци, а фиксни центри су преузети из оптималног решења добијеног уз помоћ ILP формулације проблема из [1]. Оваква претпоставка је у складу са реалним планирањем мреже, јер је природно да се иницијална мрежа са релативно мало отворених центара направи тако да се критични корисник налази што ближе свом центру, као што је природно и да се та тежња задржи и када обим посла порасте и постоји потреба за додавањем нових центара. На пример, инстанца за проблем (20, 5)-резервног центра добија се налажењем оптималног решења за проблем 5-резервног центра и на нађеним локацијама налазе се унапред задати центри. Вредности параметра  $q$  мењају се са кораком 5 за сваку инстанцу, као што је урађено у [53].

Како за rmed инстанце са  $n > 100$  чворова нису доступна сва оптимална решења за PNCP, било је неопходно променити приступ за генерисање инстанци за CPNCP. Други приступ је такође преузет из [53] и подразумева да се за локације фиксних центара насумично изабере  $q$  локација из решења  $(p + q)$ -резервног центра које је добијено SVNS методом из 2.4.

Имена инстанци су облика rmedX\_n\_(p+q)\_q, и из њих се може видети укупан број чворова  $n$ , укупан број центара  $p + q$  и број унапред успостављених центара  $q$ . Рецимо, инстанца rmed2\_100\_20\_5 је добијена на основу инстанце rmed2\_100\_20 за PNCP, садржи  $n = 100$  чворова, унапред је успостављено  $q = 5$  центара, а циљ је одредити локације за још  $p = 15$  центара, тако да их буде укупно  $p + q = 20$ .

#### 4.4.2 Подешавање параметра

Кључни параметар за SVNS методу јесте параметар  $\alpha$  који утиче на квалитет добијених решења уносећи додатни ниво диверзификације у процес претраге. Са идејом да се испита робусност методе, овај параметар није биран посебно за сваку групу инстанци, већ је урађено прелиминарно тестирање ради избора јединствене вредности параметра  $\alpha$  која ће бити коришћена за све инстанце.

За прелиминарано тестирање насумично је изабрано 115 од 716 (око 20 %) инстанци из скупова са малим, средњим и великим инстанцама. За сваку инстанцу и сваку вредност параметра  $\alpha$  из скупа  $\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5\}$ , алгоритам је покренут 20 пута. Бележене су вредности најбољег добијеног решења међу 20 извршавања ( $best$ ), укупан број покретања (од 20) за који је достигнута вредност  $best$  ( $\#best$ ), као и просечно време потребно да се вредност  $best$  достигне први пут у току извршавања ( $t_{best}$ ).

Комплетни резултати прелиминарног тестирања могу се наћи у Прилогу Ц, док су у Табели 4.1 дати просечни резултати израчунати за сваку од 4 групе инстанци. Најбоље добијене вредности су подебљане, па се може видети да се вредност  $\alpha = 0$  најлошије показала (алгоритам се у том случају понаша као BVNS). То је једина вредност за коју алгоритам није достигао оптимална решења у свих 20 извршавања за све инстанце са  $n \leq 50$  чворова. Нешто боље показала се вредност  $\alpha = 0.5$ . За инстанце са  $50 < n \leq 100$  чворова, једино су за  $\alpha = 0.1$  достигнута најбоља позната решења за све инстанце у свим извршавањима. Уз то, за  $\alpha = 0.1$  су и просечна времена потребна да се  $best$  вредности нађу по први пут најкраћа. За инстанце са  $100 < n \leq 200$  чворова, за вредност  $\alpha = 0$ , нису достигнута најбоља позната решења у свим случајевима. Нешто боље показала се вредност  $\alpha = 0.5$ , док су најбољи резултати постигнути коришћењем вредности  $\alpha = 0.1$  и  $\alpha = 0.2$ . У последној групи инстанци са  $200 < n \leq 400$ , најбоље резултате дала је вредност  $\alpha = 0.1$ , док за  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0.5$  SVNS постиже најлошије резултате. Како алгоритам даје најлошије резултате за  $\alpha = 0$ , може се закључити да је SVNS погоднији за решавање CPNCP од BVNS.

Ради потпуног увида у добијене резултате иницијалног тестирања, извршена је статистичка анализа уз помоћ Фридмановог теста, као што је предложено у [26]. Овај тест заснован је на рангирању резултата SVNS метода за различите вредности параметра  $\alpha$  за сваку инстанцу. Вредност параметра за коју се добија најбоља  $best$  вредност добија ранг 1, друга најбоља добија ранг 2 итд. Уколико се за више вредности параметра  $\alpha$  добија иста  $best$  вредност, за те вредности се гледа  $\#best$  и вредност за коју се више пута достиже  $best$  добија бољи (нижи) ранг. Уколико се и  $\#best$  вредности поклапају, гледа се време  $t_{best}$ .

Табела 4.1: Поређење различитих вредности параметра  $\alpha$ .

| Инстанце           | # Инст. | $\alpha$ | $best_{avg}$  | $\#best_{avg}$ | $t\_best_{avg}$ |
|--------------------|---------|----------|---------------|----------------|-----------------|
| $n \leq 50$        | 15      | 0        | <b>102.73</b> | 19.73          | < 0.01          |
|                    |         | 0.1      | <b>102.73</b> | <b>20.00</b>   | < 0.01          |
|                    |         | 0.2      | <b>102.73</b> | <b>20.00</b>   | < 0.01          |
|                    |         | 0.3      | <b>102.73</b> | <b>20.00</b>   | < 0.01          |
|                    |         | 0.5      | <b>102.73</b> | <b>20.00</b>   | < 0.01          |
| $50 < n \leq 100$  | 40      | 0        | <b>96.78</b>  | 17.78          | 0.18            |
|                    |         | 0.1      | <b>96.78</b>  | <b>20.00</b>   | <b>0.10</b>     |
|                    |         | 0.2      | <b>96.78</b>  | 19.98          | 0.10            |
|                    |         | 0.3      | <b>96.78</b>  | 19.65          | 0.12            |
|                    |         | 0.5      | <b>96.78</b>  | 19.28          | 0.16            |
| $100 < n \leq 200$ | 34      | 0        | 61.85         | 16.18          | 0.93            |
|                    |         | 0.1      | <b>61.76</b>  | 19.50          | 0.53            |
|                    |         | 0.2      | <b>61.76</b>  | <b>19.56</b>   | 0.64            |
|                    |         | 0.3      | <b>61.76</b>  | 18.35          | 0.70            |
|                    |         | 0.5      | <b>61.76</b>  | 17.47          | 0.75            |
| $200 < n \leq 400$ | 26      | 0        | 44.15         | 12.04          | 3.95            |
|                    |         | 0.1      | <b>43.77</b>  | <b>18.23</b>   | <b>2.27</b>     |
|                    |         | 0.2      | 43.88         | 17.12          | 2.40            |
|                    |         | 0.3      | 44.12         | 15.77          | 2.61            |
|                    |         | 0.5      | 44.27         | 15.61          | 3.14            |

Просечне вредности рангова за Фридманов тест дате су у Табели 4.2. Тестирана је нулта хипотеза: Не постоји значајна разлика у понашању SVNS алгорита за различите вредности параметра  $\alpha$ , а добијене разлике у резултатима су случајне. Њена алтернатива је: Бар за једну вредност параметра  $\alpha$  SVNS даје значајно другачије резултате. Препоручени праг значајности теста је 0.05.

Табела 4.2: Просечни рангови за Фридманов тест.

| $\alpha$     | 0    | 0.1         | 0.2  | 0.3  | 0.5  |
|--------------|------|-------------|------|------|------|
| $rank_{avg}$ | 4.32 | <b>2.27</b> | 2.30 | 2.64 | 3.46 |

За  $N = 115$  инстанци из тестног скупа и  $k = 5$  вредности параметра  $\alpha$  које се упоређују, одређује се вредност  $\chi^2 = 138$ , по формули

$$\chi^2 = \frac{12N}{k(k+1)} \left( \sum_{i=1}^k rank_{avg_i}^2 - \frac{k(k+1)^2}{4} \right). \quad (4.11)$$

Нулта хипотеза се одбацује уколико израчуната  $\chi^2$  вредност није мања од критичне вредности за  $\chi^2$  расподелу са  $df = k - 1 = 4$  степени слободе и нивоом значајности 0.05, која износи 9.49 [89]. Како овај услов јесте испуњен, нулта хипотеза се може одбацити, тј. постоје значајне разлике између поређених вредности параметра  $\alpha$ . Да би се установило која вредност параметра  $\alpha$  обезбеђује значајно другачије резултате, мора се применити неки накнадни (енгл. *post hoc*) тест. Коришћен је Nemenyi тест према коме две методе дају статистички значајне разлике у резултатима уколико се њихови просечни рангови разликују за барем  $CD = q\sqrt{\frac{k(k+1)}{6N}}$ , где је  $q$  критична вредност Nemenyi теста, која је у овом случају  $q = 2.728$  [26]. За овај тест, добија се  $CD = 0.5688$ , па се може закључити да  $\alpha = 0$  даје значајно лошије резултате од  $\alpha = 0.5$ . Даље, SVNS са  $\alpha = 0.5$  даје значајно лошије резултате него са вредностима  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.2$  и  $\alpha = 0.3$ , док три средње вредности не дају значајно другачије резултате. Како је за  $\alpha = 0.1$  добијен најмањи просечан ранг, то је вредност која је коришћена за детаљно тестирање SVNS алгорита.

### 4.4.3 Резултати тестирања за CPNCP

Критеријум заустављања предложеног SVNS алгорита за решавање CPNCP је постављен на максимални број итерација, као и у случају алгорита за решавање PNCP и  $\gamma$ PNCP. За мале инстанце, овај број је 500, док је за све остале групе 5000. Осим тога, максималан број околина за фазу размрдавања је  $k_{max} = 5$  за све инстанце, осим за поједине инстанце из Additional [86] групе за које  $p + q = 5$ , па је  $k_{max} = 3$ .

За сваку од 716 генерисаних инстанци, описани SVNS алгоритам покренут је 20 пута, полазећи од различитих насумично генерисаних иницијалних решења. Комплетни резултати предложеног SVNS алгорита могу се наћи у Додатку Ц.2, док ће у овде бити приказани сумарни резултати.

Математичка формулација представљена у Одељку 4.2 решена је уз помоћ IBM ILOG CPLEX 22.1.0 решавача. CPLEX решавач користи 16 логичких процесора и зауставља се или када пронађе оптимално решење или када достигне максимално време од 7200s по нити. Време извршавања CPLEX решавача приказано за једну инстанцу је збир времена извршавања прикупљених са свих нити (резултат који враћа уграђена функција `plex.getTime()` класе `IloCplex`).

У Табели 4.3 приказани су просечни резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на свих 716 инстанци. Инстанце су груписане према броју чворова  $n$ , а затим су израчунате просечне вредности за сваку групу и сваку од посматраних вредности. Свака врста Табеле 4.3 садржи:

- имена `rmcd` инстанци за посматрану групу,

- $n$  - број чворова,
- $p$  - број центара које треба отворити,
- $q$  - број унапред отворених центара,
- $\#_{\text{инст}}$  - број инстанци унутар групе.

Следеће четири колоне садрже просечне вредности добијене CPLEX решавачем:

- $\#_{\text{opt}}$  - број инстанци за које је нађено оптимално решење,
- $\#_{\text{feas.only}}$  - број инстанци за које CPLEX није нашао оптимално решење у задатом времену, али јесте нашао допустиво решење,
- $\#_{\text{oom}}$  - број инстанци за које није нађено ни допустиво решење услед недостатка меморије,
- $\text{avg.t}$  - просечно време (у секундама) које је било потребно CPLEX решавачу да заврши рад. Вредности у овој колони су означене са \* уколико за бар једну инстанцу посматране групе није нађено оптимално решење. Слично, вредности са \*\* означавају да су само инстанце за које је нађено допустиво и/или оптимално решење узете у обзир. Уколико CPLEX није нашао ни допустиво решење ни за једну инстанцу посматране групе, у колони  $\text{avg.t}$  налази се ознака —.

Наредне четири колоне се односе на резултате SVNS алгоритма и садрже:

- $\#_{\text{opt}}/\#_{\text{bk}}$  - број оптималних (уколико су позната) или најбољих познатих решења из посматране групе која је SVNS достигао,
- $\text{avg.t}$  - просечно време (у секундама) потребно да се достигне најбоље SVNS решење по први пут,
- $\text{avg.t}_{\text{tot}}$  - просечно укупно време (у секундама). Како је за сваку инстанцу алгоритам покретан 20 пута, укупно просечно време рада алгоритма за сваку групу се може добити множењем времена  $\text{avg.t}_{\text{tot}}$  са 20.
- $\text{gap}$  - просечна  $\text{gap}$  вредност (у %) за посматрану групу, где је  $\text{gap}$  - просечно одступање SVNS решења добијеног у једном извршавању, од најбољег SVNS решења из свих 20 извршавања. За групе за које је SVNS достигао сва оптимална (или најбоља позната) решења у групи, вредности у колони  $\#_{\text{opt}}/\#_{\text{bk}}$  су подебљане.

- $avg.dev$  - просечан однос вредности функције циља коју достижу CPLEX и SVNS. За сваку инстанцу израчуната је девијација (у %) по формули:

$$\frac{obj_{CPLEX} - obj_{SVNS}}{obj_{SVNS}} \cdot 100\%,$$

где су  $obj_{CPLEX}$  и  $obj_{SVNS}$  вредности функције циља коју достижу CPLEX и SVNS, редом. Затим је за сваку групу инстанци израчунат просек. Треба приметити да су вредности девијације позитивне у ситуацијама када су допустива решења која налази SVNS боља од оних које налази CPLEX, док су супротном негативне. Када SVNS и CPLEX налазе исте вредности, девијација је 0%.

Из Табеле 4.3 може се видети да је SVNS достигао оптимална решења за све мале инстанце, док за једну инстанцу из скупа средњих инстанци није успео да достигне оптимално решење. Са друге стране, за 4 средње инстанце SVNS је нашао боље решење од допустивог решења које је нашао CPLEX. Са порастом димензије проблема, разлике у добијеним резултатима SVNS алгоритма и CPLEX решавача постају очигледније. За велике инстанце SVNS алгоритам достигао је сва оптимална решења која је CPLEX нашао. Од 6 инстанци за које је CPLEX нашао допустива решења, SVNS налази боља решења за 3 инстанце, иста решења као CPLEX за 2 инстанце, док је за једну инстанцу решење које је нашао SVNS лошије од решења нађеног CPLEX-ом.

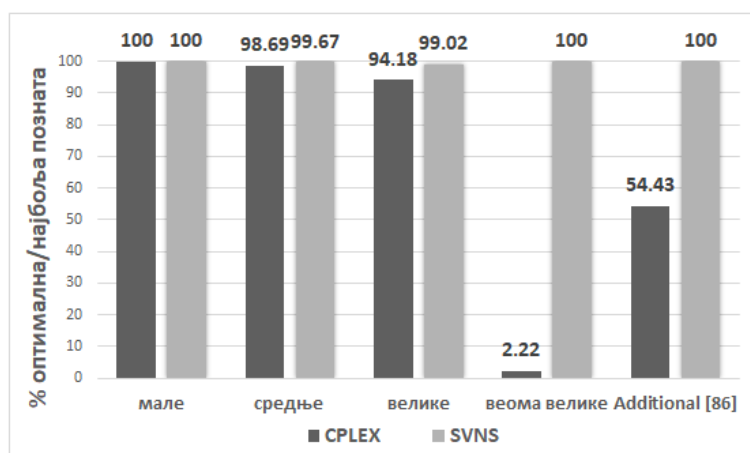
За веома велике инстанце, CPLEX је нашао само 4 оптимална решења, док у преосталим случајевима није нађено ни допустиво решење услед недостатка меморије. Са друге стране, SVNS је на овом скупу достигао сва 4 оптимална решења нађена CPLEX решавачем. Осим тога, SVNS се показао као врло стабилан, јер је за чак 171 инстанцу од 180 инстанци из ове групе, просечно одступање нађених вредности 0%.

На Additional [86] скупу који има 79 инстанци, CPLEX је нашао оптимално решење за 43 инстанце, док је за 14 инстанци пронашао само допустиво решење. За преостале 22 инстанце, услед недостатка меморије, CPLEX није успео да нађе чак ни допустиво решење. Са друге стране, SVNS је достигао сва оптимална решења пронађена CPLEX решавачем. За све преостале инстанце, допустива решења пронађена SVNS алгоритмом су бољег квалитета од решења која је пронашао CPLEX, осим за једну инстанцу где су CPLEX и SVNS пронашли исто допустиво решење.

Табела 4.3: Просечни резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма за груписане pmed1-pmed40 и Additional [86] pmed инстанце.

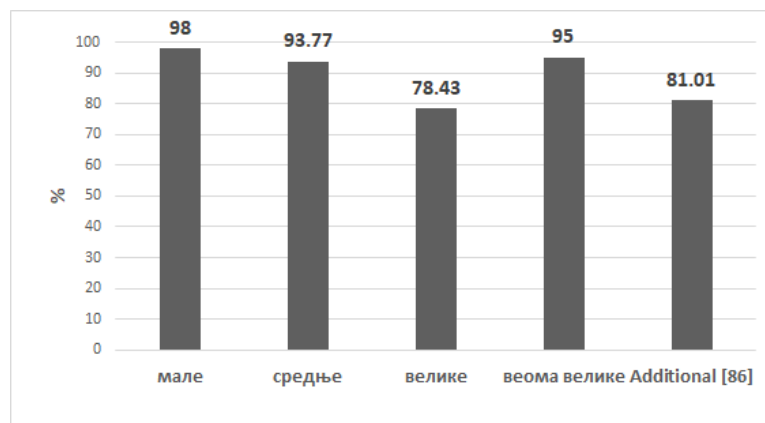
| Инст.                         | $n$ | $p$       | $q$    | #инст | просечне CPLEX вредности |            |      |            | просечне SVNS вредности |       |                      |        |            |
|-------------------------------|-----|-----------|--------|-------|--------------------------|------------|------|------------|-------------------------|-------|----------------------|--------|------------|
|                               |     |           |        |       | #opt                     | #feas.only | #oom | avg.t      | #opt/#bk                | avg.t | avg.t <sub>tot</sub> | agap   | avg.dev(%) |
| мале инстанце                 |     |           |        |       |                          |            |      |            |                         |       |                      |        |            |
| pmed1-pmed5                   | 20  | 5         | 5      | 5     | <b>5</b>                 | 0          | 0    | 0.07       | <b>5</b>                | 0.00  | 0.01                 | 0.00   | 0.00       |
|                               | 30  | 5         | 5      | 5     | <b>5</b>                 | 0          | 0    | 0.26       | <b>5</b>                | 0.00  | 0.02                 | 0.00   | 0.00       |
|                               | 40  | [5,15]    | [5,15] | 20    | <b>20</b>                | 0          | 0    | 0.35       | <b>20</b>               | 0.00  | 0.04                 | 0.00   | 0.00       |
|                               | 50  | [5,15]    | [5,15] | 20    | <b>20</b>                | 0          | 0    | 0.81       | <b>20</b>               | 0.01  | 0.06                 | < 0.01 | 0.00       |
| средње инстанце               |     |           |        |       |                          |            |      |            |                         |       |                      |        |            |
| pmed1-pmed5                   | 60  | [5,25]    | [5,10] | 25    | <b>25</b>                | 0          | 0    | 1.13       | <b>25</b>               | 0.01  | 0.83                 | 0.00   | 0.00       |
|                               | 70  | [5,25]    | [5,10] | 25    | <b>25</b>                | 0          | 0    | 5.81       | <b>25</b>               | 0.03  | 1.03                 | 0.00   | 0.00       |
|                               | 80  | [5,25]    | [5,10] | 25    | <b>25</b>                | 0          | 0    | 17.57      | <b>25</b>               | 0.08  | 1.23                 | 0.02   | 0.00       |
|                               | 90  | [5,45]    | [5,15] | 40    | <b>40</b>                | 0          | 0    | 25.16      | <b>40</b>               | 0.09  | 1.87                 | 0.02   | 0.00       |
|                               | 100 | [5,45]    | [5,15] | 50    | <b>50</b>                | 0          | 0    | 72.04      | 49                      | 0.15  | 2.08                 | 0.10   | -0.02      |
| pmed6-pmed10                  | 150 | [10,75]   | [5,20] | 60    | <b>60</b>                | 0          | 0    | 1691.89    | <b>60</b>               | 0.18  | 4.78                 | 0.07   | 0.00       |
|                               | 200 | [10,95]   | [5,20] | 80    | 76                       | 4          | 0    | 5441.34*   | <b>80</b>               | 0.76  | 8.69                 | 0.17   | 0.22       |
| велике инстанце               |     |           |        |       |                          |            |      |            |                         |       |                      |        |            |
| pmed11-pmed12                 | 250 | [27,88]   | [2,9]  | 22    | 18                       | 4          | 0    | 13680.85*  | 21                      | 2.43  | 10.91                | 0.74   | 0.11       |
|                               | 300 | [54,148]  | [2,15] | 26    | <b>26</b>                | 0          | 0    | 161.76     | <b>26</b>               | 0.14  | 20.53                | 0.00   | 0.00       |
| pmed16-pmed17                 | 350 | [36,118]  | [2,12] | 24    | 22                       | 2          | 0    | 6433.69*   | <b>24</b>               | 4.24  | 22.61                | 1.04   | 0.79       |
|                               | 400 | [72,198]  | [2,20] | 30    | <b>30</b>                | 0          | 0    | 615.67     | <b>30</b>               | 3.67  | 55.38                | 0.45   | 0.00       |
| веома велике инстанце         |     |           |        |       |                          |            |      |            |                         |       |                      |        |            |
| pmed35-pmed37                 | 800 | [144,398] | [2,40] | 63    | 4                        | 0          | 59   | 2569.40**  | <b>63</b>               | 3.65  | 312.63               | 0.00   | 0.00**     |
| pmed38-pmed40                 | 850 | [81,288]  | [2,29] | 54    | 0                        | 0          | 54   | -          | <b>54</b>               | 10.28 | 230.15               | 0.28   | -          |
|                               | 900 | [162,448] | [2,40] | 63    | 0                        | 0          | 63   | -          | <b>63</b>               | 14.07 | 428.04               | 0.06   | -          |
| Additional [86] pmed инстанце |     |           |        |       |                          |            |      |            |                         |       |                      |        |            |
| pmed1-pmed5                   | 100 | [3,31]    | [2,3]  | 6     | <b>6</b>                 | 0          | 0    | 2655.45    | <b>6</b>                | 0.06  | 1.79                 | 0.00   | 0.00       |
| pmed6-pmed10                  | 200 | [3,65]    | [2,6]  | 8     | 7                        | 1          | 0    | 18406.39*  | <b>8</b>                | 0.27  | 5.31                 | 0.07   | 0.30       |
| pmed11-pmed15                 | 300 | [3,98]    | [2,10] | 10    | 7                        | 3          | 0    | 25490.66*  | <b>10</b>               | 1.06  | 12.17                | 0.32   | 5.14       |
| pmed16-pmed20                 | 400 | [3,131]   | [2,13] | 11    | 8                        | 2          | 1    | 14312.88** | <b>11</b>               | 5.30  | 28.35                | 1.07   | 6334.52**  |
| pmed21-pmed25                 | 500 | [3,165]   | [2,16] | 11    | 6                        | 3          | 2    | 19698.17** | <b>11</b>               | 4.77  | 46.06                | 0.77   | 4.41**     |
| pmed26-pmed30                 | 600 | [3,198]   | [2,20] | 14    | 6                        | 1          | 7    | 13446.20** | <b>14</b>               | 1.63  | 67.42                | 0.00   | 0.30**     |
| pmed31-pmed34                 | 700 | [3,138]   | [2,14] | 9     | 3                        | 3          | 3    | 16044.66** | <b>9</b>                | 5.78  | 51.88                | 0.12   | 14.52**    |
| pmed35-pmed37                 | 800 | [3,78]    | [2,8]  | 5     | 0                        | 1          | 4    | 25111.60** | <b>5</b>                | 1.77  | 47.15                | 0.00   | 0.00**     |
| pmed38-pmed40                 | 900 | [3,88]    | [2,9]  | 5     | 0                        | 0          | 5    | -          | <b>5</b>                | 21.66 | 54.93                | 2.38   | -          |

На Слици 4.3 графички је приказан проценат успешности SVNS алгоритма и CPLEX решавача у налажењу оптималних, тј. најбољих познатих решења за све групе инстанци.

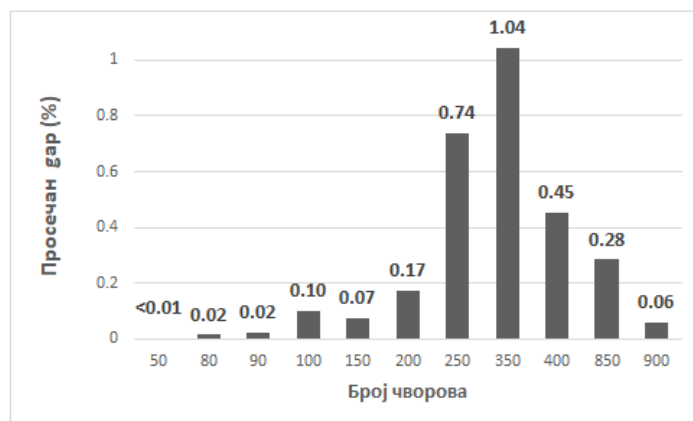


Слика 4.3: Проценат успешности CPLEX решавача и SVNS алгоритма при налажењу оптималних/најбољих познатих решења.

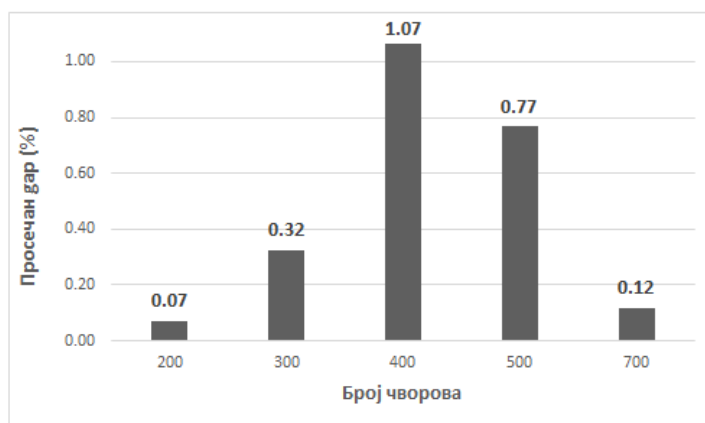
На Сликама 4.4 - 4.6 графички су приказани подаци о стабилности SVNS алгоритма и квалитету добијених решења. На Слици 4.4 је за сваку групу инстанци приказан проценат инстанци за које је  $gap = 0$ , тј. за које је најбоље решење достигнуто у сваком од 20 извршавања. За преостале инстанце  $gap$  вредности у просеку не прелазе 1.07% и његове просечне вредности за свако  $n$  се могу видети на Сликама 4.5 и 4.6.



Слика 4.4: Проценат инстанци код којих је  $gap = 0\%$ .



Слика 4.5: Просечне  $agar$  вредности за мале, средње, велике и веома велике инстанце код којих је  $agar > 0\%$ .



Слика 4.6: Просечне  $agar$  вредности за Additional [86] pmed инстанце код којих је  $agar > 0\%$ .

#### 4.4.4 Поређење CPNCP и PNCP: две стратегије у планирању

У овом одељку биће упоређене две стратегије у планирању неке пословне мреже. Први сценарио који се разматра подразумева да је иницијално успостављено  $q$  центара (решавањем проблема  $q$ -резервног центра), и да је, услед повећања обима посла, одлучено да се укупан број центара повећа на  $p+q$ , при чему се нова мрежа центара гради испочетка. Локације  $p+q$  центара добијају се решавањем проблема  $(p+q)$ -резервног центра. Овај сценарио ретко одговара реалним ситуацијама, јер успостављање (изградња, опремање) центара најчешће

није јефтино (краткотрајно, практично). Друга стратегија подразумева да се задржи  $q$  претходно успостављених центара који су добијени решавањем проблема  $q$ -резервног центра, а да се локације за додатних  $p$  центара одреде решавањем проблема  $(p, q)$ -резервног центра.

У циљу поређења ова два сценарија на мањим инстанцама (за које су позната оптимална решења), за иницијалне центре за другу стратегију у планирању узето је оптимално решење проблема  $q$ -резервног центра (ово је уједно и први приступ у генерисању инстанци за CPNCP), а затим је у такву мрежу додато још  $p$  центара решавањем CPNCP. Јасно је да се у овој ситуацији другом стратегијом не може постићи мања вредност функције циља у односу на ону која се добија решавањем проблема  $(p+q)$ -резервног центра. На пример, за малу инстанцу `rmed1_40_10_5`, фиксни центри одређени су решавањем проблема 5-резервног центра и добијено решење подразумева да се центри успостављају на локацијама  $\{0, 10, 28, 37, 38\}$ . Затим је решаван условљени проблем  $(5, 5)$ -резервног центра да би се нашле локације за 5 додатних центара. Решење CPNCP проблема за ову инстанцу је  $\{17, 19, 20, 25, 31\}$ , а вредност функције циља је 116. Уколико би се читав мрежа градила испочетка, тј. решавао проблем 10-резервног центра за ову инстанцу, оптимално решење подразумева да се центри граде на локацијама  $\{6, 13, 14, 17, 20, 24, 28, 34, 37, 38\}$ , а одговарајућа вредност функције циља је 111. Треба приметити да центри на локацијама 0 и 10, који су фиксни приликом решавања CPNCP, нису део решења када се решавањем PNCP успоставља 10 центара. Дакле, другим приступом се може добити иста вредност функције циља, са потенцијално неким различитим центрима или лошија вредност функције циља.

Разлике у добијеним вредностима функције циља (ако постоје) корисне су за одабир одговарајуће стратегије у планирању, при чему се узима у обзир и цена отварања (премештања) центара, као и кумулативна уштеда која се остварује скраћивањем (појефтињењем, убрзањем) пређеног пута који прелази критични корисник. Овакав увид омогућава сагледавање оба аспекта и доношење праве одлуке за развој пословања. Такође, на овај начин се добија увид који су то центри који би се у погодном тренутку у будућности могли затворити и заменити неким другим центрима, као што су рецимо центри 0 и 10 на примеру инстанце `rmed1_40_10_5`. На тај начин се ширење мреже може радити у етапама, у односу на ресурсе који за то постоје.

У Табели 4.4 дато је поређење ове две стратегије у планирању. Колона CPLEX за PNCP садржи резултате добијене применом прве стратегије, када се цела мрежа од  $p + q$  центара гради од почетка решавањем проблема  $(p + q)$ -резервног центра. Колоне означене са SVNS за CPNCP односе се на резултате друге стратегије када се најпре успостави  $q$  центара, а затим се постојећа мрежа прошири за још  $p$  центара. Како је циљ поређење вредности функција циља

које се добијају, у Табели 4.4 су наведене само колоне *best* које садрже најбоље резултате за обе методе. Уз то, дат је и број извршавања SVNS алгорита у којима је најбоља вредност и достигнута (колона *#best* за SVNS). Од 50 малих инстанци, за 15 се добија иста вредност функције циља пратећи обе стратегије, док се за преосталих 35 вредности разликују. Међутим, може се приметити да чак и када оба приступа воде до исте вредности функције циља, центри у одговарајућим решењима се не морају налазити на истим локацијама. На пример, за инстанцу pmed1\_20\_10\_5, оптимално решење проблема 10-резервног центра је  $\{1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 16, 17\}$ , а вредност функције циља је 95. Када се за ову инстанцу реши проблем 5-резервног центра и добијени центри  $\{2, 6, 10, 11, 16\}$  узму за унапред задате, а затим SVNS алгоритмом реши проблем (5, 5)-резервног центра, добијају се решења  $\{1, 4, 13, 15, 17\}$ ,  $\{3, 5, 15, 17, 19\}$ ,  $\{1, 9, 14, 15, 17\}$  итд, која дају исту вредност функције циља 95. Треба приметити да се иницијално задати центри 2 и 6 не појављују у оптималном решењу добијеном CPLEX решавачем. Дакле, могуће је проширити мрежу без губитака чак и на више начина, што даје простор да се укључе додатни фактори у избор локација за нове центре. Са друге стране, на примеру инстанце pmed2\_40\_10\_5, може се видети да се резултати различитих приступа могу значајно разликовати: 112 за PNCP и 135 за CPNCP. У овом случају унапред задати центри онемогућавају да се постигне мање критично растојање и за ову инстанцу има смисла размотрити затварање једног или више постојећих центара.

Табела 4.4: Резултати CPLEX решавача за PNCP и SVNS алгорита за CPNCP на скупу малих инстанци које су генерисане првим приступом.

| Инстанца       | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX за PNCP | SVNS за CPNCP |              |
|----------------|-----|-----|-----|---------------|---------------|--------------|
|                |     |     |     | <i>best</i>   | <i>best</i>   | <i>#best</i> |
| pmed1_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 95            | 95            | 20           |
| pmed1_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 95            | 95            | 20           |
| pmed1_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 111           | 116           | 20           |
| pmed1_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 89            | 89            | 20           |
| pmed1_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 89            | 89            | 20           |
| pmed1_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 89            | 89            | 20           |
| pmed1_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 110           | 112           | 20           |
| pmed1_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 89            | 91            | 20           |
| pmed1_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 89            | 94            | 20           |
| pmed1_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 89            | 91            | 20           |
| pmed2_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 99            | 100           | 20           |
| pmed2_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 110           | 128           | 20           |
| pmed2_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 112           | 135           | 20           |

Табела 4.4: (Наставак) Резултати CPLEX решавача за PNCP и SVNS алгоритма за CPNCP на скупу малих инстанци које су генерисане првим приступом.

| Инстанца       | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX за PNCP | SVNS за CPNCP |              |
|----------------|-----|-----|-----|---------------|---------------|--------------|
|                |     |     |     | <i>best</i>   | <i>best</i>   | <i>#best</i> |
| pmed2_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 96            | 98            | 20           |
| pmed2_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 96            | 98            | 20           |
| pmed2_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 96            | 96            | 20           |
| pmed2_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 140           | 145           | 20           |
| pmed2_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 99            | 99            | 19           |
| pmed2_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 99            | 104           | 20           |
| pmed2_50_20_15 | 50  | 15  | 15  | 99            | 99            | 20           |
| pmed3_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 77            | 92            | 20           |
| pmed3_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 122           | 122           | 20           |
| pmed3_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 105           | 122           | 20           |
| pmed3_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 77            | 85            | 20           |
| pmed3_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 77            | 85            | 20           |
| pmed3_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 77            | 82            | 20           |
| pmed3_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 125           | 128           | 20           |
| pmed3_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 87            | 87            | 20           |
| pmed3_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 87            | 88            | 20           |
| pmed3_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 87            | 93            | 20           |
| pmed4_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 125           | 125           | 20           |
| pmed4_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 122           | 126           | 20           |
| pmed4_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 122           | 126           | 20           |
| pmed4_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 85            | 91            | 20           |
| pmed4_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 85            | 91            | 20           |
| pmed4_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 85            | 85            | 20           |
| pmed4_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 126           | 141           | 20           |
| pmed4_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 91            | 99            | 20           |
| pmed4_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 91            | 108           | 20           |
| pmed4_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 91            | 105           | 20           |
| pmed5_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 91            | 91            | 20           |
| pmed5_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 120           | 126           | 20           |
| pmed5_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 127           | 137           | 20           |
| pmed5_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 91            | 91            | 20           |
| pmed5_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 91            | 97            | 20           |
| pmed5_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 91            | 96            | 20           |
| pmed5_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 121           | 121           | 20           |
| pmed5_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 89            | 90            | 20           |
| pmed5_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 89            | 91            | 20           |
| pmed5_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 89            | 90            | 20           |

За инстанце већих димензија ( $n > 100$ ), које су генерисане пратећи други приступ,  $q$  фиксних центара бирано је насумично из решења проблема  $(p + q)$ -резервног центра, добијеног SVNS алгоритмом [94] који је описан у Секцији 2.4. Треба напоменути да ова решења нису нужно оптимална. На овај начин се и даље пореде два приступа у проширивању пословне мреже и то први у коме се већа мрежа гради испочетка (PNCP се решава хеуристиком) и други у коме се иницијални центри задржавају, уз додавање потребног броја нових центара (CPNCP се решава хеуристиком). Треба нагласити да у овом случају јесте могуће да се решавањем CPNCP добију боље вредности функције циља у односу на ону добијену решавањем PNCP (будући да оне не морају бити оптималне) и да се на тај начин поправи PNCP решење, имајући у виду да решење CPNCP јесте и решење PNCP.

У Табели 4.5 дати су просечни резултати поређења два приступа у планирању проширења пословне мреже за Additional [86] скуп инстанци. Упоредени су резултати SVNS алгоритма за PNCP и резултати SVNS алгоритма за CPNCP. Комплетни резултати налазе се у Додатку Ц.3. Инстанце су груписане према броју чворова у Табели 4.5 и за сваку групу дата су имена инстанци, подаци о инстанцама, као и број инстанци у свакој групи. Затим су приказани просечни резултати SVNS алгоритма за PNCP:  $\#opt/\#bk$  колона садржи број достигнутих оптималних, односно најбољих познатих решења за инстанце посматране групе, а затим у колони  $\%opt/bk$  исти параметар изражен у процентима. За SVNS алгоритам за CPNCP дат је такође број достигнутих оптималних, односно најбољих познатих решења у колони  $\#opt/\#bk$ , док се у последњој колони означеној са  $avg\_savings(\%)$  налази просечно процентуално смањење (могућа уштеда) функције циља уколико се користи CPNCP модел уместо PNCP.

Табела 4.5: Просечни резултати SVNS алгоритма [94] за PNCP и SVNS алгоритма за CPNCP на групама инстанци које су генерисане другим приступом.

| Инстанца      | $n$ | $p$     | $q$    | #инст | SVNS [94] за PNCP |               | SVNS за CPNCP |                   |
|---------------|-----|---------|--------|-------|-------------------|---------------|---------------|-------------------|
|               |     |         |        |       | $\#opt/\#bk$      | $\%opt/bk$    | $\#opt/\#bk$  | $avg.savings(\%)$ |
| pmed1-pmed5   | 100 | [3,31]  | [2,3]  | 6     | 6                 | <b>100.00</b> | 6             | 0.00              |
| pmed6-pmed10  | 200 | [3,65]  | [2,6]  | 8     | 8                 | <b>100.00</b> | 8             | 0.00              |
| pmed11-pmed15 | 300 | [3,98]  | [2,10] | 10    | 8                 | 80.00         | 10            | 0.42              |
| pmed16-pmed20 | 400 | [3,131] | [2,13] | 11    | 8                 | 72.73         | 11            | 1.70              |
| pmed21-pmed25 | 500 | [3,165] | [2,16] | 11    | 9                 | 81.82         | 11            | 0.52              |
| pmed26-pmed30 | 600 | [3,198] | [2,20] | 14    | 14                | <b>100.00</b> | 14            | 0.00              |
| pmed31-pmed34 | 700 | [3,138] | [2,14] | 9     | 9                 | <b>100.00</b> | 9             | 0.00              |
| pmed35-pmed37 | 800 | [3,78]  | [2,8]  | 5     | 5                 | <b>100.00</b> | 5             | 0.00              |
| pmed38-pmed40 | 900 | [3,88]  | [2,9]  | 5     | 4                 | 80.00         | 5             | 0.83              |

Из Табеле 4.5 може се видети да се SVNS алгоритмом за CPNCP може по-

стићи мања вредност функције циља у односу на PNCP за 8 од 79 инстанци, док је за преосталу 71 инстанцу достигнута иста вредност.

Приказано поређење две стратегије приликом ширења пословне мреже говори у прилог да треба сагледати и остале факторе, као што су трошкови успостављања центара, временски период у коме је неопходно извести проширење итд. Уколико трошкови отварања центра нису велики, PNCP модел може донети уштеду кроз време. Уколико, пак премештање центара није јефтино, онда треба изабрати CPNCP модел проширења. Осим тога, поређење нуди информације који би се иницијално отворени центри у погодном тренутку могли заменити, уколико то није могуће извршити одмах.

## 4.5 Поређење SVNS алгоритма за CPNCP са другим методама за решавање PNCP

Како се SVNS за решавање CPNCP може применити и за решавање PNCP једноставном рестрикцијом  $q = 0$ , резултати SVNS алгоритма за  $(p, 0)$ -резервни центар упоређени су са резултатима PNCP из литературе у 2.5.1.

У Табели 2.6 приказан је број достигнутих најбољих познатих решења за сваку методу и сваку групу инстанци из литературе.

Из Табеле 2.6 види се да SVNS за CPNCP [96] не достиже најбоље познато решење за 25 инстанци од 453 на којима је тестиран. Иако се у радовима [85] и [107] налазе најбоља позната решења за 100% тестираних инстанци, ниједан од ових радова не обухвата све групе инстанци, а као што се може видети у Табели 4.3, управо су се Групе 3, 4 и 5 показале као тешке за решавање CPLEX решавачем.

Приказани подаци указују на то да су резултати добијени SVNS алгоритмом за CPNCP упоредиви са најбољим резултатима из литературе који су добијени методама развијеним посебно за PNCP.

## Глава 5

# Проблем максималног покривања $p$ -резервног центра

У овој глави дефинисан је проблем максималног покривања  $p$ -резервног центра (енгл. *Maximal covering  $p$ -next center problem*, *MCPNCP*). Реч је о модификацији PNCP која подразумева дефинисану потражњу (робе или услуге) за сваког корисника и користи концепт потпуне или делимичне покривености корисника. Корисник се сматра потпуно покривеним уколико путања до његовог резервног центра (уз пролазак кроз примарни центар) није већа од унапред задате вредности, а делимично покривеним када степен покривености опада са повећањем удаљености, све док се не достигне задата максимална удаљеност, након чега се корисник сматра непокривеним. Циљ је одредити локације за тачно  $p$  центара, тако да је збир потражњи покривених корисника највећи могући. Проблем је први пут предложен у раду Ј. Тасић, З. Дражић, З. Станимировић [97] у коме су представљени математички модели, као и метахеуристика за решавање овог проблема, будући да је реч о NP-тешком проблему. Генерисано је 189 инстанци које имају до 400 чворова на основу *rmcd* инстанци и анализирани су резултати предложених модела добијени егзактним решавачем CPLEX, као и метахеуристичког приступа.

Нека је дат скуп корисника који имају дефинисане потражње и скуп потенцијалних локација за центре. Проблем максималног покривања (енгл. *Maximal covering location problem*, *MCLP*) подразумева одређивање локација за успостављање унапред задатог броја центара, као и придруживање сваког корисника њему најближем центру, тако да је збир потражњи покривених корисника највећи могући. Покривање може бити бинарно или парцијално. У случају бинарног покривања корисник је *покривен* уколико растојање до његовог најближег центра није веће од унапред задатог растојања (које се назива радијус покривања). У супротном корисник *није покривен*. У пракси се оваква дефиниција често испоставља као превише строга. Наиме, бинарно покривање је осетљиво на мале про-

мене радијуса покривања, које се у пракси често дешавају. Уколико је растојање од корисника до њему најближег центра само мало веће од радијуса покривања, такав корисник се не сматра покривеним. Са становишта пружаоца услуга, непружање услуга оваквим корисницима резултирало би непотребним губитком прихода. Концепт *парцијалног (делимичног) покривања* дефинисан у [22] подразумева да се степен покривености неког корисника може изразити као нерастућа, најчешће део по део линеарна функција растојања које тај корисник прелази до свог најближег центра. Корисници који се налазе на растојању мањем од радијуса покривања сматрају се покривеним у потпуности. Како растојање расте, степен покривености опада пратећи изабрану функцију. На овај начин компаније могу пружати услуге бар делу корисника изван радијуса покривања, уколико би неки од њих прихватили дуже време чекања услуге у замену за повољнију цену.

У раду [9] формулисан је генералисани MCLP. Слично као код делимичног покривања, уводи се  $k$  различитих зона покривености на основу различитих радијуса покривања. Функција покривености је нерастућа део по део константна функција. Корисници који припадају првој зони су у потпуности покривени, док корисници изван  $k$ -те зоне нису покривени. Парцијално покривање је даље изучавано у раду [10], где је разматрано неколико типова нерастућих функција покривања. У [58] предложена је метода за решавање MCLP са парцијалним покривањем базирана на Лагранжовој релаксацији. У [4] решаван је MCLP у равни са праволинијским растојањима и правоугаоним зонама потражње под претпоставком делимичног покривања. Варијанта MCLP са парцијалним покривањем за ватрогасне станице у Кини, под претпоставком да међу њима има кооперације, предложена је у раду [102].

Концепт парцијалног покривања користи се и у другим локацијским проблемима. Код проблема хаба покривања пар чворова сматра се покривеним уколико дужина путање од полазног до крајњег чвора преко једног или више хаба чворова није већа од унапред задатог радијуса покривања. Парцијално покривање је уведено у проблем  $p$ -хаб максималног покривања у раду [80], док су у раду [55] предложени нови модели за проблеме  $p$ -хаб максималног покривања са једноструком и вишеструком алокацијом за концепт бинарног и делимичног покривања. Концепт парцијалног покривања је такође инкорпориран у  $p$ -хаб модел максималног покривања са  $r$ -алокацијском шемом у раду [90]. Проблем парцијалног покривања за локацијски проблем неограничених капацитета, који је дефинисан у [100], подразумева да није неопходно да се потражња свих корисника задовољи из центара. Модел хијерархијског лоцирања и алокација са парцијалним покривањем за здравствене услуге предложен је у [57]. Концепт парцијалног покривања коришћен је у пројектовању мобилних бежичних сензорских мрежа у [12]. Детаљније о типовима покривања у моделима за локацијске проблеме може се наћи у [8] и [37].

## 5.1 Мотивација и опис MCPNCP

Мотивација за укључивање концепта покривености у PNCP потиче из реалних животних ситуација. Идеја је да се узму у обзир потражње корисника, као и ограничења у пружању услуга корисницима у смислу радијуса покривања, тј. услуга може бити пружена само уколико је корисник довољно близу центра који га опслужује. Са друге стране, задржава се коришћење резервних центара уведено у PNCP, уколико је примарни центар ван функције услед непредвиђених околности. Тако се долази до формулације проблема максималног покривања  $p$ -резервног центра (енгл. *Maximal covering  $p$ -next center problem*, MCPNCP). Циљ MCPNCP је одређивање оптималних локација за тачно  $p$  центара, тако да се максимизује збир захтева покривених корисника. У овом проблему, корисник се сматра *покривеним* ако растојање које тај корисник прелази до свог резервног центра, пролазећи кроз примарни центар, није веће од задатог радијуса покривања (бинарни критеријум покривености), а док се делимична покривеност корисника дефинише слично као у [80] користећи део по део константну функцију покривености. Овде се растојање може односити на путне трошкове или време потребно да се корисник услужи чак и у случају отказа примарног центра. Примарни и резервни центри за сваког корисника одређују се на исти начин као у PNCP. Како проблеми из праксе намећу потребу и за парцијалним покривањем, разматране су обе варијанте покривања у оквиру MCPNCP.

Предложени MCPNCP може се применити у планирању хитних служби које се формирају унутар кризних штабова у ванредним ситуацијама. Као и у RCP и PNCP моделима, који се често примењују у системима хитних служби, претпоставка је да један центар може опслужити захтеве свих корисника који су му придружени, неvezано од тога да ли има улогу примарног или резервног центра за посматране кориснике. Међутим, ова претпоставка не важи у ситуацијама када наступи катастрофа великих размера (земљотрес, цунами, експлозија, епидемија итд.), где је неопходно обухватити што већи број пацијената имајући у виду могуће отказивање центра хитне службе услед оштећења или преоптерећења. Овде се пацијенти који се налазе у корисничком чвору сматрају покривеним ако им је медицинска услуга пружена у оквиру задатог временског интервала (бинарно покривање). Како се време повећава, степен покривености, односно број пацијената који добијају адекватну медицинску помоћ, опада (парцијално покривање).

Предложени MCPNCP се може користити за моделовање система хитне медицинске помоћи, где је време одзива кључно за преживљавање пацијента. На пример, у случајевима срчаног удара, možданог удара, тровања, обилног крварења и сличних животно угрожавајућих стања, важно је да пацијент добије медицинску помоћ у оквиру задатог временског ограничења. Како се време одзива хитне службе повећава, стопа преживљавања се смањује, а након одређеног

временског прага стопа преживљавања је практично једнака нули.

Још једна примена MCPNCP модела јесте у пројектовању ИТ система са архитектуром „топлог стања приправности” (енгл. *warm standby*), који се користе у банкарским и финансијским системима, пословним базама података, телекомуникационим системима, инфраструктури у облаку (енгл. *cloud*) итд. Ови системи су пројектовани да обезбеде високу доступност одржавањем секундарног (резервног) сервера који је спреман да преузме захтеве корисника у случају отказа примарног сервера. Ако је комуникација дуж путање корисник  $\rightarrow$  примарни сервер  $\rightarrow$  секундарни сервер унутар задатог временског интервала, корисник се сматра покривеним. Међутим, корисник може прихватити и дуже време одзива, што доводи до смањења степена покривености. Коначно, након одређеног временског ограничења, сматра се да нема одзива система и неопходно је његово поновно покретање.

MCPNCP се такође може користити за моделовање ланаца снабдевања, где кориснички чворови представљају малопродајне објекте, од којих сваки захтева одређену количину робе како би ефикасно пословао. Сваки малопродајни објекат се снабдева из њему најближег складишта (примарног центра). У случају да то складиште из неког разлога не може да обезбеди потребну робу (на пример, ако је ван функције или је остало без залиха), продавница се снабдева из резервног складишта. Продавница се сматра покривеном ако је њена потражња задовољена у оквиру задатог временског интервала, који је пропорционалан растојању. Ако је ово време дуже од задатог временског ограничења, малопродајни објекат се сматра делимично покривеним, а након одређеног времена степен покривености се поставља на нулу.

## 5.2 Математички модел MCPNCP

Нека је  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  скуп датих локација и  $D = (d_{ij})_{n \times n}$  матрица растојања, где је  $d_{ij}$  растојање (време, трошак) између локација  $i$  и  $j$ . Свака од локација из скупа  $A$  представља корисника, али истовремено и могућу локацију за успостављање центра. Позитивна вредност  $T_i > 0$  додељена је сваком чвору  $i \in A$ , и представља количину робе (услуге) коју корисник на локацији  $i \in A$  потражује. Неопходно је одредити скуп  $P \subset A$  који садржи тачно  $p$  локација на којима ће бити успостављени центри, а затим придружити сваког корисника њему најближем (примарном) центру. За сваки центар неопходно је одредити резервни центар (тј. центар који је најближи разматраном примарном центру). Претпоставка је да корисник, уколико при доласку у свој примарни центар сазна да не може бити опслужен, наставља до резервног центра. Скуп  $P$  треба одредити тако да је сума потражњи покривених корисника највећа могућа. Нека је  $\delta_{ij}^k = d(i, j) + d(j, k)$  за било које три локације  $i, j, k \in A, j \neq k$ . Ако је  $i = j$ , онда

важи  $\delta_{jj}^k = d(j, j) + d(j, k) = d(j, k)$ . Нека је  $j \in P$  примарни центар за корисника  $i \in A \setminus P$ , а центар  $k \in P, k \neq j$  његов резервни центар. У случају бинарног покривања, корисник  $i$  сматра се потпуно покривеним уколико растојање  $\delta_{ij}^k$  које прелази корисник  $i$  до свог резервног  $k$  центра, пролазећи кроз примарни центар  $j$ , није веће од унапред дефинисаног радијуса покривања  $\beta$ . У овом случају, потражња  $T_i$  корисника  $i$  у потпуности је задовољена. Уколико је  $\delta_{ij}^k > \beta$ , корисник  $i$  (који има потражњу  $T_i$ ) није покривен. Имајући у виду наведено, може се дефинисати бинарни параметар  $a_{ij}^k$  која указује на то да ли је корисник  $i$  покривен уколико користи путању  $i \rightarrow j \rightarrow k$  или не:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{ако } \delta_{ij}^k \leq \beta, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{за } i, j, k \in A, j, k \in P \text{ и } j \neq k. \quad (5.1)$$

Да би се разматрани MCPNCP формулисао као проблем целобројног линеарног програмирања, неопходно је дефинисати следеће бинарне променљиве:

$$\begin{aligned} y_j &= \begin{cases} 1, & \text{ако је на локацији } j \text{ центар, тј. ако } j \in P, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad j \in A, \\ x_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{ако је } j \text{ најближи центар локацији } i \text{ (} i \neq j \text{),} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i, j \in A, i \neq j, \\ y_{ij}^k &= \begin{cases} 1, & \text{ако је } j \text{ најближи центар локацији } i, \\ & \text{а } k \text{ је центар најближи центру } j, k \neq i, j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i, j, k \in A. \end{aligned}$$

Ако је  $x_{ij} = 1$  при чему је на локацији  $i$  корисник, тада је центар  $j$  примарни центар за корисника  $i$ . Ако је на локацији  $i$  успостављен центар, тада  $x_{ij} = 1$  значи да је  $j$  његов резервни центар. Променљива  $y_{ij}^k$  има вредност 1 уколико је успостављена двокрака путања  $i \rightarrow j \rightarrow k$  од локације  $i$  до резервног центра  $k$  преко примарног центра  $j$ .

Треба приметити да дефиниција променљивих  $y_{ij}^k$  дозвољава случај када је  $i = j$ , тј. путање  $j \rightarrow j \rightarrow k$ . У том случају,  $y_{jj}^k = 1$  означава да је центар отворен на локацији  $j$  и да он сам себи служи као примарни центар, док је његов резервни центар  $k$ , при чему је  $k \neq j$ . Проблем максималног покривања  $p$ -резервног центра са бинарним покривањем може се формулисати као проблем целобројног линеарног програмирања (означен као ILP1) на следећи начин :

$$\max \sum_i \sum_j \sum_{k \neq i, j} T_i a_{ij}^k y_{ij}^k \quad (5.2)$$

$$\sum_j y_j = p, \quad (5.3)$$

$$\sum_{j \in A, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad i \in A, \quad (5.4)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i, j \in A, i \neq j, \quad (5.5)$$

$$y_j + \sum_{k \in A, d(i,k) > d(i,j)} x_{ik} \leq 1, \quad i, j \in A, i \neq j, \quad (5.6)$$

$$y_{ij}^k \leq x_{ij}, \quad i, j, k \in A, i \neq j, k \neq i, j \quad (5.7)$$

$$y_{ij}^k \leq x_{jk}, \quad i, j, k \in A, k \neq i, j \quad (5.8)$$

$$y_{jj}^k \leq y_j, \quad j, k \in A, j \neq k \quad (5.9)$$

$$y_{ij}^k \leq 1 - y_i, \quad i, j, k \in A, i \neq j \quad (5.10)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in A, \quad (5.11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in A, i \neq j, \quad (5.12)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j \in A, k \neq i, j. \quad (5.13)$$

Циљ је да се максимизује збир потражњи свих корисника који су покривени (5.2). Условом (5.3) број успостављених центара поставља се на  $p$ . Услови (5.4) и (5.5) обезбеђују да је свака локација придружена тачно једном отвореном центру који служи као примарни центар. Примарни центар за сваку локацију је њему најближи успостављени центар, што је дефинисано условима (5.6).

Услови (5.7) - (5.10) обезбеђују да су променљиве  $y_{ij}^k$  коректно дефинисане. Двокрака путања  $i \rightarrow j \rightarrow k$  се успоставља (тј.  $y_{ij}^k = 1$ ) само ако је корисник  $i$  придружен центру  $j$  ( $x_{ij} = 1$ ) и ако је центар  $j$  придружен свом најближем центру  $k$  ( $x_{jk} = 1$ ), што је обезбеђено условима (5.7)-(5.8).

Треба приметити да променљиве  $x_{ij}$  имају различито значење у зависности од тога да ли је  $i$  корисник или је  $i$  центар, као и да променљива  $x_{ij}$  није дефинисана у случају  $i = j$ . Са друге стране, променљиве  $y_{ij}^k$  јесу дефинисане у случају  $i = j$  (центар је сам себи примарни центар). Због тога су потребни додатни услови над променљивама  $y_{ij}^k$  како би се спречиле недозвољене ситуације. За сваког корисника, двокрака путања је јединствена: јединствени примарни центар је центар најближи кориснику, а јединствени резервни центар је центар најближи његовом примарном центру. Услови (5.7) обезбеђују да је овај захтев испуњен за сваког корисника у погледу његовог примарног центра, док услови (5.8) обезбеђују да је испуњен у погледу његовог резервног центра.

Променљива  $y_{jj}^k$ ,  $k \neq j$ , може имати вредност 1 само ако је  $j$  центар, што значи да центар  $j$  као резервни центар користи центар  $k$ . Ако  $j$  није центар, променљива  $y_{jj}^k$  поставља се на 0. Ово је обезбеђено условима (5.9). Наиме, ако  $j$  није центар, тада је  $y_j = 0$ , и последично је  $y_{jj}^k = 0$ . Коначно, условима (5.10) спречава се постојање двокраке путање за локације на којима су успостављени центри. Ако је центар отворен на локацији  $i$ , десна страна неједнакости (5.10) је 0, па се променљива  $y_{ij}^k$  за  $i \neq j$  поставља на 0. Услови (5.11)-(5.13) одражавају бинарну природу променљивих  $x_{ij}$ ,  $i \neq j$ , и  $y_{ij}^k$ ,  $k \neq i, j$ .

Даљим разматрањем предложеног модела ILP1 уочено је да се број услова у

моделу може смањити. Услови (5.7) могу се заменити следећим условима:

$$\sum_{k \in A, k \neq j} y_{ij}^k = x_{ij}, \quad i, j \in A, i \neq j. \quad (5.14)$$

Наиме, ако корисник  $i$  користи центар  $j$ ,  $i \neq j$ , као примарни центар, постоји тачно један центар  $k$ ,  $k \neq j$ , такав да је успостављена двокрака путања  $i \rightarrow j \rightarrow k$ . Услови (5.14) еквивалентни су условима (5.7), имајући у виду услове (5.4) и (5.5). Модел (5.2)-(5.6), (5.14), (5.8)-(5.13) означен је као ILP2.

У случају делимичног покривања, степен покривености дефинисан је део по део константном опадајућом функцијом која узима вредности из интервала  $(0, 1)$ , као у [80]. Поред радијуса покривања  $\beta$ , користи се и параметар  $\eta$ , ( $\beta \leq \eta$ ), који представља критичну удаљеност коју корисник прелази након које услуга више не може бити пружена. Прецизније, ако је растојање  $\delta_{ij}^k \leq \beta$ , потражња  $T_i$  корисника  $i$  који користи путању  $i \rightarrow j \rightarrow k$  је у потпуности покривена. Ако је  $\delta_{ij}^k > \eta$ , корисник  $i$  не може бити услужен. У случају када важи  $\beta < \delta_{ij}^k \leq \eta$ , сматра се да је потражња корисника  $i$  делимично покривена, а потражња  $T_i$  множи се коефицијентом покривености који је дат функцијом  $\phi$  ( $\phi : R^+ \rightarrow [0, 1]$ ). Према томе, параметар  $b_{ij}^k$  за парцијално покривање може се дефинисати на следећи начин:

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{ако } \delta_{ij}^k \leq \beta, \\ \phi(\delta_{ij}^k), & \text{ако } \beta < \delta_{ij}^k \leq \eta, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (5.15)$$

за  $i, j, k \in A$ ,  $j, k \in P$ ,  $j \neq k$  и неку нерастућу функцију  $\phi(\delta_{ij}^k)$ .

Оба предложена модела, ILP1 и ILP2, за бинарно покривање могу се једноставно прилагодити случају парцијалног покривања заменом параметара  $a_{ij}^k$  параметрима  $b_{ij}^k$  у дефиницији функције циља.

Предложени MCPNCP са бинарним покривањем је NP-тежак, јер је његов специјалан случај еквивалентан проблему MCLP, за који је доказано да је NP-тежак на општем графу у [71]. Прецизније, ако се растојања између сваког пара отворених центара поставе на нулу, растојање које корисник прелази до резервног центра преко примарног центра у MCPNCP своди се на растојање од корисника до његовог најближег отвореног центра, као у MCLP. Слично се може закључити да је MCPNCP са делимичним покривањем такође NP-тежак, будући да је MCLP са парцијалним покривањем NP-тежак [9].

### 5.3 SVNS алгоритам за MCPNCP

У овом поглављу описана је имплементација закошене методе променљивих околина за решавање MCPNCP.

**Репрезентација решења** Решење је представљено целобројним вектором  $x$  дужине  $p$  који садржи индексе локација на којима треба успоставити центре. Скуп допустивих решења  $S$  садржи све такве векторе. Уколико је дат скуп локација  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  скуп допустивих решења је

$$S = \{x : |x| = p; 1 \leq x(i) \leq n, i = 1, 2, \dots, p; x(i) \neq x(j), i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

**Рачунање функције циља.** Нека је са  $T_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , означена потражња корисника на локацији  $i \in A$ . Нека је  $x \in S$  једно допустиво решење. Вредност функције циља  $f(x)$  рачуна се на следећи начин.

- За сваку локацију  $i \in A$  одредити примарни центар  $j$  као

$$j = \arg \min_{j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}} d(i, j).$$

Уколико је на локацији  $i$  успостављен центар (тј.  $i \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ ), онда је  $j = i$  и важи  $d(i, j) = 0$ .

- За сваку локацију  $i \in A$  одредити резервни центар. Ако је  $j$  примарни центар за локацију  $i$ , онда се њен резервни центар  $k$  одређује као  $k = \arg \min_{k \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}, k \neq j} d(j, k)$ .
- Уколико постоји више кандидата за примарни центар за локацију  $i$  (тј. више центара се налази на истој удаљености од локације  $i$ ), за примарни центар изабрати онај центар са најближим резервним центром.
- Одредити укупно растојање које прелази корисник  $i$  до свог резервног центра  $k$  уз пролазак кроз примарни центар  $j$  (дужину двокраке путање  $i \rightarrow j \rightarrow k$ ) као  $\delta_i = d(i, j) + d(j, k)$ .
- Одредити вредност функције циља  $f(x)$  сабирањем потражњи  $T_i$  покривених корисника  $i \in A$ , тј, у случају бинарног покривања

$$f(x) = \sum_{i \in A} a_{ij}^k T_i = \sum_{i \in A, \delta_i \leq \beta} T_i,$$

а у случају парцијалног покривања

$$f(x) = \sum_{i \in A} b_{ij}^k T_i.$$

Параметри  $a_{ij}^k$  и  $b_{ij}^k$  дефинисани су са (5.1) и (5.15), респективно.

**Почетно решење.** Почетно решење SVNS алгоритма добијено је случајним избором  $p$  локација скупа  $A$  на којима треба успоставити центре.

**Дефиниција околина.** Околина  $N_l(x)$ ,  $l = 1, 2, \dots, l_{\max}$  где је  $l_{\max} \leq p/2$  представља скуп свих решења  $x'$  добијених затварањем тачно  $l$  центара решења  $x$  и отварањем  $l$  нових центара који нису били део решења  $x$ .

**Структура предложеног SVNS алгоритма.** Кораци SVNS алгоритма коришћеног за решавање MCPNCP дати су Алгоритмом 20. Након иницијализације и генерисања почетног решења, итеративним путем се поправља генерисано решење до испуњења критеријума заустављања. Као критеријум заустављања коришћен је максималан број итерација SVNS алгоритма.

---

**Алгоритам 20** SVNS за MCPNCP

---

- 1: Inicijalizacija: izabrati okoline za fazu razmrđavanja  $N_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, l_{\max}$ . Generisati početno rešenje  $x^* \in S$ ,  $f^* \leftarrow f(x^*)$  i izabrati parametar  $\alpha$ .
  - 2:  $x \leftarrow x^*$ ,  $F \leftarrow f^*$ ,  $iter \leftarrow 0$
  - 3: **while**  $iter \leq iter\_max$  **do**
  - 4:    $l \leftarrow 1$
  - 5:   **while**  $l \leq l_{\max}$  and  $iter \leq iter\_max$  **do**
  - 6:      $x' \leftarrow Shaking(x, l)$  ▷ razmrđavanje
  - 7:      $iter \leftarrow iter + 1$
  - 8:      $x'' \leftarrow LS(x')$  ▷ lokalna pretraga
  - 9:     **if**  $f(x'') > f^*$  **then**
  - 10:        $x^* \leftarrow x''$ ,  $f^* \leftarrow f(x'')$
  - 11:     **if**  $f(x'') + \alpha\rho(x, x'') > F$  **then** ▷ odluka o pomeranju
  - 12:        $x \leftarrow x''$ ,  $F \leftarrow f(x'')$
  - 13:     **else**
  - 14:        $l \leftarrow l + 1$
- 

Свака итерација алгоритма започиње фазом размрдавања у оквиру које се на случајан начин генерише сусед  $x'$  из околине  $N_l(x)$  текућег решења  $x$ . Ово се постиже процедуром  $Shaking(x, l)$  у оквиру које се насумично изабере  $l$  центара који престају да буду део решења, као и  $l$  локација на којима треба отворити нове центре и позове процедура  $Update()$   $l$  пута. Ниво диверзификације који се постиже размрдавањем одређен је параметром  $l$  који је на почетку алгоритма постављен на 1. Вредност параметра  $l$  се повећава у итерацијама у којима се текуће решење  $x$  не ажурира. Након фазе размрдавања приступа се локалном претраживању које почиње од решења  $x'$  генерисаног у фази размрдавања. Локална претрага ослања се на хеуристику брзе размене и биће описана у 5.3.1.

Након завршетка локалне претраге, пореди се њоме добијено решење  $x''$  са до тада најбољим решењем  $x^*$  и по потреби ажурира  $x^*$ . На крају се одлучује о наставку претраге, тј. разматра се ажирирање текућег решења  $x$  (линија 11). Услов у линији 11 слабији је од услова у линији 9, па се претрага свакако наставља од решења  $x''$  уколико је оно боље од до тада нађеног најбољег решења  $x^*$ . У супротном, услов у линији 11 дозвољава наставак претраге од решења  $x''$  и уколико је то решење лошије од решења  $x^*$ , а при том је  $x''$  довољно далеко од  $x$ , и није значајно лошијег квалитета (у смислу функције циља) од решења  $x$ .

### 5.3.1 Локална претрага заснована на хеуристици брзе размене за МСРНСР

У фази локалне претраге испитује се околина  $N_1$  текућег решења. Како околина  $N_1(x)$  садржи сва решења која се од решења  $x$  разликују у једном центру, имплементација локалне претраге захтева: (а) разматрање  $p(n - p)$  решења и за свако од тих решења одређивање примарног и резервног центра за сваког корисника; (б) израчунавање растојања коју прелази сваки корисник; и (в) израчунавање вредности функције циља коришћењем (5.2). Како придруживање  $n$  корисника центрима захтева  $np$  операција, испитивање целе околине  $N_1(x)$  захтева  $O(n^2p^2 - np^3) \approx O(n^2p^2)$ . Како би се смањила сложеност локалне претраге и убрзало израчунавање вредности функције циља за суседе решења  $x$ , урађено је следеће:

- 1) Многа решења из околине  $N_1(x)$  не побољшавају вредност функције циља. Уместо да се евалуира свако решење добијено заменом сваког корисника  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  са сваким центром  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , користи се процедура *FindBestSwap()*. За дату локацију  $in$  која није део решења  $x$  и која је кандидат да постане центар, ова процедура проналази најбољи центар  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  који треба уклонити из  $x$  тако да је вредност функције циља решења  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$  највећа могућа, Осим центра  $out$ , процедура одређује и вредност функције циља за решење које би се добило овом заменом. На тај начин избегавају се замене које не доводе до побољшања вредности функције циља.
- 2) Вредност функције циља се не рачуна од почетка сваки пут када се деси замена локација, тј. промена једног центра у текућем решењу. За свако решење  $x$  користе се помоћни целобројни вектори  $c_1$  и  $c_2$  дужине  $n$ . Елементи  $c_1(i)$  и  $c_2(i)$  односе се на чвор  $i = 1, 2, \dots, n$  и садрже индекс најближег, односно другог најближег центра чвору  $i$ . Ако је  $i$  корисник, његов примарни центар је  $c_1(i)$ , а резервни центар је  $c_1(c_1(i))$ . Ако је  $i$  центар, он сам себи служи као примарни центар, а  $c_1(i)$  је његов резервни центар. Коришћењем

ових помоћних структура избегава се поновно придруживање свих корисника њиховим примарним и резервним центрима приликом израчунавања функције циља. За ажурирање елемената низова  $c_1$  и  $c_2$  користи се процедура  $Update()$ .

Кораци процедуре за локалну претрагу дати су Алгоритмом 21. Итеративним путем се налази најбољи пар центара који треба разменити у тренутном решењу  $x$  како би се побољшала вредност његове функције циља. Овај корак се спроводи помоћу процедуре  $FindBestSwap()$ .

---

**Алгоритам 21**  $LS()$  за MCPNCP

---

```

1: Input:  $x$ 
2:  $f^* \leftarrow f(x)$ 
3: while true do
4:    $w^* \leftarrow 0$ 
5:   for svaku lokaciju  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
6:      $out, F \leftarrow FindBestSwap(x, in, c_1, c_2)$ 
7:     if  $F > w^*$  then
8:        $w^* \leftarrow F, in^* \leftarrow in, out^* \leftarrow out$ 
9:   if  $f^* \geq w^*$  then
10:    break
11:  else
12:     $f^* \leftarrow w^*$ 
13:     $Update(x, in^*, out^*, c_1, c_2)$ 

```

---

Процедура  $FindBestSwap()$  представља језгро локалне претраге. За дату локацију  $in$  која није део решења  $x$ , процедура  $FindBestSwap()$  враћа најбољег кандидата  $out$  који треба уклонити из тренутног решења  $x$ , као и резултујућу вредност функције циља  $F$  која одговара таквој замени. Треба напоменути да  $FindBestSwap()$  не прави никакве измене у тренутном решењу нити у низовима  $c_1$  и  $c_2$ . Након одређивања оптималног пара  $in^* \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  и  $out^* \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , вредност функције циља  $w^* = f((\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in^*\}) \setminus \{out^*\})$  се пореди са тренутном најбољом вредношћу  $f^*$ . Само уколико је дошло до побољшања вредности функције циља  $f^*$ , извршава се процедура  $Update()$ . Ова процедура врши измене у решењу  $x$  заменом корисника  $in^* \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  и центра  $out^* \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ . Елементи вектора  $c_1$  и  $c_2$  се ажурирају само за кориснике погођене овом заменом. Сложеност процедуре  $Update()$  износи  $O(np)$ . Локална претрага се извршава све док је могуће пронаћи пар локација за замену које доводе до побољшања. Као резултат, процедура  $LS()$  враћа добијени локални оптимум и вредност његове функције циља.

### 5.3.2 Процедура $FindBestSwap()$ за MCPNCP

За дато решење  $x$  и локацију  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ ,  $FindBestSwap()$  процедура одређује најбољи центар  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  који треба уклонити из  $x$  када  $in$  постаје део решења. Другим речима, вредност  $f((\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\})$  треба бити највећа могућа. Треба нагласити да процедура  $FindBestSwap()$  одређује вредност функције циља решења које би се добило заменом  $(in, out)$ , али не врши саму размену центара у решењу  $x$ .

Приликом имплементирања  $FindBestSwap()$  процедуре коришћене су следеће помоћне променљиве:

- $w$  је збир потражњи свих покривених корисника који су придружени центру  $in$  као примарном центру.
- $r$  је вектор дужине  $n$  такав да је  $r(x(j)), j = 1, 2, \dots, p$ , збир потражњи  $T(i)$  свих покривених корисника  $i$  који су придружени центру  $x(j)$  као примарном центру. Вектор  $r$  се формира разматрањем  $p + 1$  центара (свих центара из  $\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}$ ).
- $z$  је вектор дужине  $n$  такав да је  $z(x(j)), j = 1, 2, \dots, p$ , збир потражњи свих корисника који су додељени центру  $x(j)$  као примарном или резервном центру, и који су покривени ако се центар  $x(j)$  уклони из решења.

За фиксирано  $in \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  и за свако  $out \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$ , неопходно је ажурирати вредности  $w$ ,  $r$  и  $z$  тако да прате промене које би настале додавањем  $in$  скупу центара и уклањањем  $out$  из скупа од  $p + 1$  центара  $\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}$ . Вредност функције циља решења  $(\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$  рачуна као

$$f((\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}) = w' + z(out) + r',$$

где се  $w'$  и  $r'$  добијају на следећи начин:

$$w' = \begin{cases} w, & \text{ако } c_1(in) \neq out \\ w - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq in, c_1(i)=in}}^n T(i) \left( a_{i,in}^{out} - a_{i,in}^{c_2(in)} \right), & \text{ако } c_1(in) = out \end{cases} \quad (5.16)$$

$$r' = \sum_{\substack{i=1 \\ x(i) \neq out}}^p r(x(i)) - \sum_{\substack{i=1 \\ c_1(x(i))=out \\ d(x(i),in) > d(x(i),out)}}^p \left( r(x(i)) - ind_i \cdot a_{in,in}^i T(in) \right), \quad (5.17)$$

при чему је

$$ind_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } c_1(in) = x(i) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.18)$$

Ако је  $c_1(in) = out$ , за све кориснике  $i$  који су придружени центру  $in$  као примарном центру, потребно је одредити нову руту  $i \rightarrow in \rightarrow c_2(in)$ . У зависности од тога да ли је корисник  $i$  покривен или не овом новом рутом (у односу на дати радијус покривања  $\beta$ ), вредност  $w$  треба ажурирати као што је приказано у (5.16). У случају парцијалног покривања, узима се у обзир ниво покривања и  $a_{ij}^k$  се замењује са  $b_{ij}^k$  у (5.16).

Приликом израчунавања  $r'$ , неопходно је изоставити потражње центара  $x(i)$  који су користили центар  $out$  као резервни центар (тј.  $c_1(x(i)) = out$ ). Могуће је да је вредност  $T(in)$  такође одузета из  $r'$  овим изостављањем. Ово се дешава уколико је  $c_1(in)$  баш центар  $x(i)$  који је користио  $out$  као резервни центар. С друге стране, ако је растојање од  $in$  до његовог резервног центра довољно мало да је  $in$  покривен, вредност  $T(in)$  треба узети у обзир приликом израчунавања  $r'$ . Да би се избегло непотребно одузимање  $T(in)$  у описаном случају, уведен је индикатор  $ind_i$ . У случају парцијалног покривања, узима се одговарајући проценат од  $T(in)$ , што се постиже заменом  $a_{ij}^k$  са  $b_{ij}^k$  у (5.17).

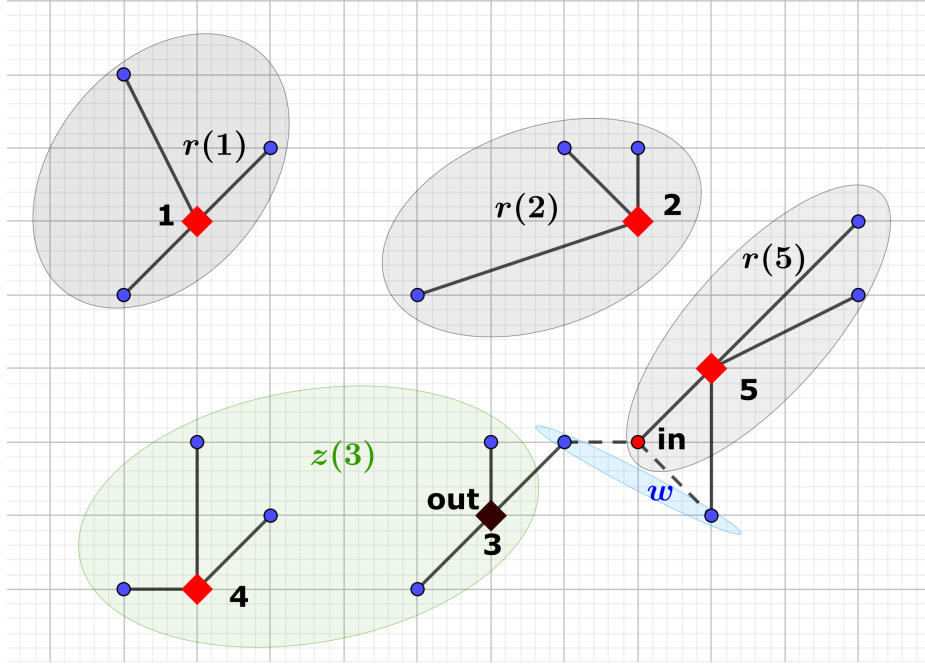
На крају, центар  $out$  за који се достиже највећа вредност функције циља  $f((\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\})$  идентификује се као центар који треба уклонити из решења  $x$ .

Слика 5.1 приказује мали пример рачунања вредности функције циља када је  $p = 5$ . Тренутно решење је  $x = [1, 2, 3, 4, 5]$  и центар  $out = 3$  треба да се елиминише из решења (означен квадратима), док је локација  $in$  предвиђена да постане центар. Након што  $in$  уђе у решење и постане центар, резервни центри за локације  $[1, 2, 3, 4, 5]$  мењају се на следећи начин:

| центар               | 1 | 2 | 3    | 4 | 5    |
|----------------------|---|---|------|---|------|
| $c_1(\text{центар})$ | 4 | 5 | 5    | 3 | 2    |
| нови резервни центар | 4 | 5 | $in$ | 3 | $in$ |

Битно је нагласити да у овом кораку вредности вектора  $c_1$  нису промењене. У примеру приказаном на Слици 5.1, постоје два корисника који почињу да користе нови центар  $in$  као примарни центар (нове алокације ка центру  $in$  означене су испрекиданом линијом). Резервни центар за  $in$  је 5, и уколико су та два корисника покривена рутом  $\text{корисник} \rightarrow in \rightarrow 5$ , њихови захтеви треба да се додају у  $w$ .

Како центар  $out = 3$  није резервни центар за нови центар  $in$ , следи  $w' = w$ . Приликом рачунања  $r'$ , вредности  $r(3)$  и  $r(4)$  не треба узимати у обзир, јер је



Слика 5.1: Пример рачунања вредности функције циља процедуром *FindBestSwap()*

$3 = out$ , а резервни центар за центар 4 је такође  $3 = out$  ( $d(4, in) > d(4, 3)$ ). Центри 1, 2 и 5 нису погођени уклањањем центра  $out$ , па се вредности  $r(1)$ ,  $r(2)$  и  $r(5)$  укључују у  $r'$ . Како је  $in$  постао центар, двокрака путања ( $in \rightarrow 5 \rightarrow 2$ ) више није потребна и потражња центра  $in$  треба да се дода у  $r'$  уколико је покривен ( $in$  је обухваћен приликом рачунања  $r(5)$ ). Вредност  $z(3)$  укључује потражње свих покривених корисника за које је центар  $out = 3$  био примарни или резервни центар. Центар  $out = 3$  је служио као примарни центар самом себи и као резервни центар за центар 4. Коначно, вредност циљне функције након замене  $out = 3$  и  $in$  рачуна се као  $f((\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{3\}) = w' + r(1) + r(2) + r(5) + z(3)$ .

Кораци предложене процедуре *FindBestSwap()* приказани су Алгоритмом 22. Вредност  $w$  и елементи вектора  $r$  и  $z$  могу се одредити разматрањем сваке локације само једном. Стога је временска сложеност процедуре *FindBestSwap()* једнака  $O(n)$ .

За израчунавање вредности  $r$ , за сваку локацију се утврђује да ли је улазак центра  $in$  у решење довео до промене њеног примарног или резервног центра (променљиве  $new\_primaryR$  и  $new\_backupR$ ). Приликом рачунања вредности  $z$ , разматрају се два сценарија: када локација изгуби свој примарни центар и када изгуби свој резервни центар. У оба случаја неопходно је одредити нову двокраку путању за посматрану локацију (променљиве  $new\_primaryZ$  и  $new\_backupZ$ ).

---

**Алгоритам 22** *FindBestSwap()* за MCPNCP

---

```

1: procedure FindBestSwap( $x, in, c_1, c_2$ )
2:    $F \leftarrow 0, w \leftarrow 0, r, z \leftarrow$  nula vektor dužine  $n$ 
3:   for svaki centar  $j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
4:      $new\_backupR\_j \leftarrow Closest(in, c_1(j))$   $\triangleright$  Odrediti novi rezervni centar za centar  $j$  rešenja  $x$ 
5:     if  $d(j, new\_backupR\_j) \leq \beta$  then
6:        $r(j) \leftarrow r(j) + T(j)$ 
7:     if  $new\_backupR\_j = c_1(j)$  then  $\triangleright$  Izbacivanje centra  $c_1(j)$ 
8:        $new\_backupZ\_j \leftarrow Closest(in, c_2(i))$ 
9:       if  $d(j, new\_backupZ\_j) \leq \beta$  then
10:         $z(c_1(j)) \leftarrow z(c_1(j)) + T(j)$ 
11:       $new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j \leftarrow Elimination\_of\_j()$   $\triangleright$  Izbacivanje centra  $j$ 
12:      if  $d(j, new\_primaryZ\_j) + d(new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j) \leq \beta$  then
13:         $z(j) \leftarrow z(j) + T(j)$ 
14:   for svakog korisnika  $i \notin \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
15:      $new\_primaryR\_i \leftarrow Closest(in, c_1(i))$   $\triangleright$  Odrediti primarni i rezervni centar za korisnika  $i$ 
16:     if  $new\_primaryR\_i = in$  then
17:        $w \leftarrow w + T(i)$ 
18:     else if  $i = in$  then  $\triangleright i = in$  jeste centar
19:       if  $d(in, c_1(in)) \leq \beta$  then
20:          $r(c_1(i)) \leftarrow r(c_1(i)) + T(i)$ 
21:       if  $d(in, c_2(in)) \leq \beta$  then
22:          $z(c_1(i)) \leftarrow z(c_1(i)) + T(i)$ 
23:     else if  $i \neq in$  then  $\triangleright i$  nije centar
24:        $new\_primaryR\_i, new\_backupR\_i \leftarrow Determine\_new\_primary\_and\_backup\_i()$ 
25:       if  $d(i, new\_primaryR\_i) + d(new\_primaryR\_i, new\_backupR\_i) \leq \beta$  then
26:          $r(new\_primaryR\_i) \leftarrow r(new\_primaryR\_i) + T(i)$ 
27:        $new\_primaryZ\_i, new\_backupZ\_i \leftarrow Elimination\_of\_primary\_of\_i()$ 
28:       if  $d(i, new\_primaryR\_i) + d(new\_primaryR\_i, new\_backupR\_i) \leq \beta$  then
29:          $z(new\_primaryR\_i) \leftarrow z(new\_primaryR\_i) + T(i)$ 
30:        $new\_primaryZ\_i, new\_backupZ\_i \leftarrow Elimination\_of\_backup\_of\_i()$ 
31:       if  $d(i, new\_primaryZ\_i) + d(new\_primaryZ\_i, new\_backupZ\_i) \leq \beta$  then
32:          $z(new\_backupR\_i) \leftarrow z(new\_backupR\_i) + T(i)$ 
33:   Izračunati  $w', r'$ 
34:    $out \leftarrow \operatorname{argmin}\{w' + r' + z(j)\}$ 
35:    $F \leftarrow w' + r' + z(out)$ 
36:   return  $out, F$ 

```

---

Приликом ажурирања  $r$  и  $z$ , у случају бинарног покривања, вредности  $T_j$  се додају уколико дужина одговарајуће путање није већа од датог радијуса покривања  $\beta$ , док се у случају парцијалног покривања захтев  $T_j$  множи степеном

покривања дефинисаним у (5.15). Следи детаљно објашњење рачунања вредности вектора  $r$  и  $z$  из Алгоритма 22.

### Рачунање вредности вектора $r$ и $z$ када се разматрају центри

Приликом рачунања вредности вектора  $r$  (линије 4-6 у Алгоритму 22) за посматрани центар  $j$ , најпре се одређује резервни центар и уписује у променљиву  $new\_backupR\_j$ . Центар  $j$  је сам себи примарни центар, а као резервни центар користи  $c_1(j)$  или нови центар  $in$ , уколико му је он ближи. Кораци процедуре  $Closest()$ , којом се одређује нови резервни центар, дати су Алгоритмом 23.

---

#### Алгоритам 23 Процедура $Closest()$ за центре

---

```

1: procedure  $Closest(center, a, b)$ 
2:   if  $d(center, a) < d(center, b)$  then
3:     return  $a$ 
4:   else
5:     return  $b$ 

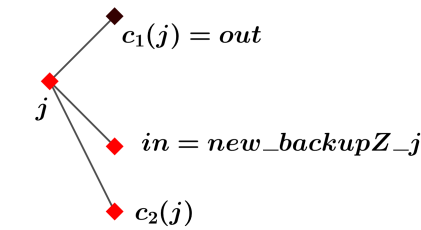
```

---

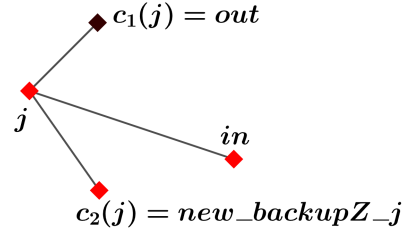
За рачунање вредности вектора  $z$  треба размотрити случај када се сам центар  $j$  елиминише из решења, као и случај када се елиминише његов резервни центар.

► Избацивање резервног центра  $c_1(j)$  за центар  $j$ , линије 7-10 Алгоритма 22:

Уколико је  $c_1(j)$  резервни центар за центар  $j$ , након његовог елиминисања из решења неопходно је одредити нови резервни центар за центар  $j$  (променљива  $new\_backupZ\_j$ ). Кандидати су нови центар  $in$  (Слика 5.2а) и други најближи центар  $c_2(j)$  (Слика 5.2б). Уколико је  $j$  покривен након преусмеравања на  $new\_backupZ\_j$ , вредност  $z(c_1(j))$  треба увећати потражњом центра  $j$ .



(а) Нови резервни центар је  $in$



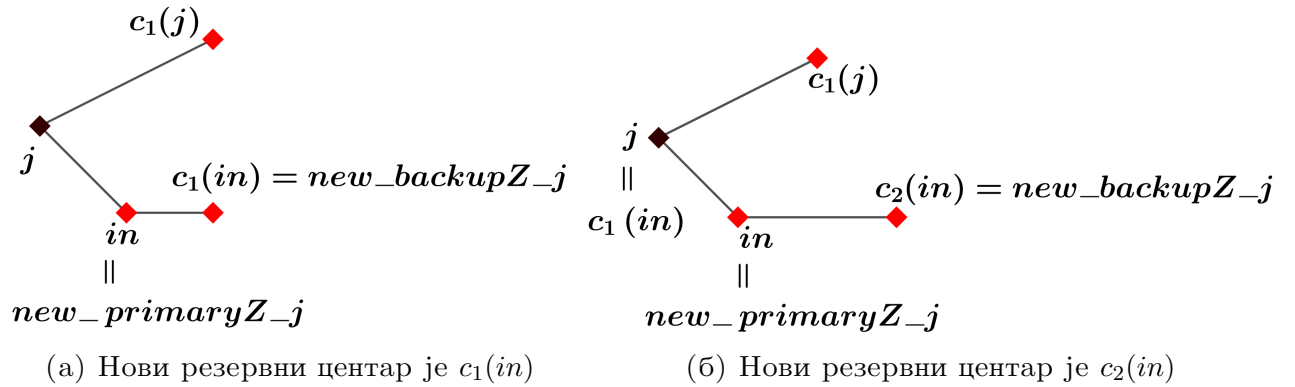
(б) Нови резервни центар је  $c_2(j)$

Слика 5.2: Одређивање новог резервног центра за центар  $j$ , ако се избацује  $c_1(j)$

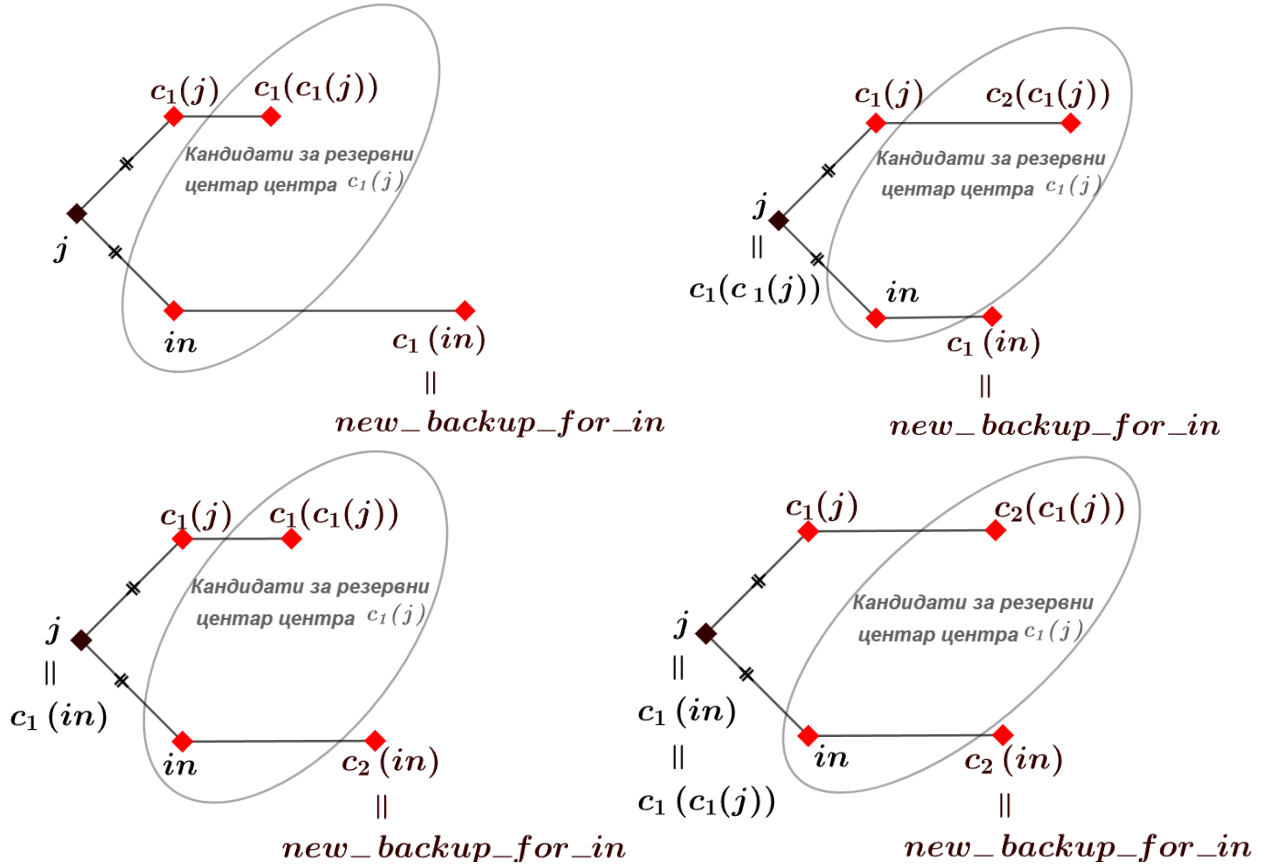
► Избацивање центра  $j$ , линије 11–13 у Алгоритму 22:

У овом случају  $j$  престаје да буде центар, па је неопходно одредити двокраку путању за ову локацију ( $new\_primaryZ\_j$  и  $new\_backupZ\_j$ ). Неопходно је водити рачуна да, уколико постоји више центара који се налазе на истом најкраћем растојању од  $j$ , за примарни центар се бира онај са најкраћом двокраком путањом. Такође, може се догодити да нови примарни центар локације  $j$  као резервни центар користи управо  $j$  који се избацује. Процедуром  $Elimination\_of\_j()$  одређују се нови примарни и резервни центар, а њени кораци су дати Алгоритмом 24.

- Најједноставнији случај се дешава када је  $in$  најближи центар локацији  $j$ , те  $in$  постаје нови примарни центар за  $j$  (линије 2–4 у Алгоритму 24). Приликом одређивања новог резервног центра за  $j$ , треба имати у виду да је можда баш  $j$  резервни центар за центар  $in$ . Уколико то није случај,  $new\_backupZ\_j$  је  $c_1(in)$  (Слика 5.3а), иначе је  $c_2(in)$  (Слика 5.3б). Ово се обавља процедуром  $DetermineBackup2()$ .
- Даље, треба детаљно разматрати случај када су  $in$  и  $c_1(j)$  једнако удаљени од локације  $j$  (Слика 5.4, линије 5–18 у Алгоритму 24). Овде је неопходно узети у обзир да резервни центар за  $in$  и/или за  $c_1(j)$  може бити баш  $j = out$ , те се мора променити. Имајући ово на уму, прво се одређују (потенцијално нови) резервни центри за  $in$  (променљива  $new\_backup\_for\_in$ ) и  $c_1(j)$  (променљива  $new\_backup\_for\_C1$ ). Уколико је неопходно бирати између три центра кандидата, користи се процедура  $DetermineBackup3()$ , која је описана Алгоритмом 26. Коначно, бира се најкраћа од путања  $j \rightarrow in \rightarrow new\_backup\_for\_in$  и  $j \rightarrow c_1(j) \rightarrow new\_backup\_for\_C1$ .

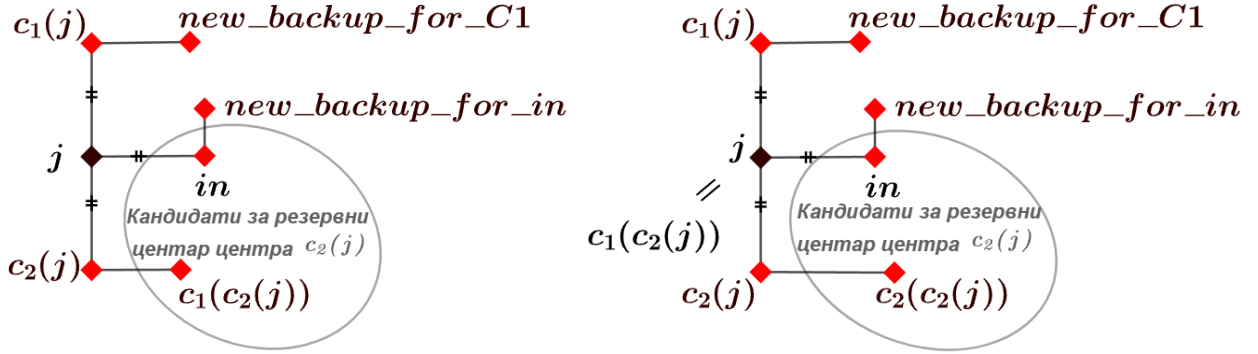


Слика 5.3: Одређивање двокраке путање за локацију  $j$ :  $in$  је ближи од  $c_1(j)$  и постаје примарни центар



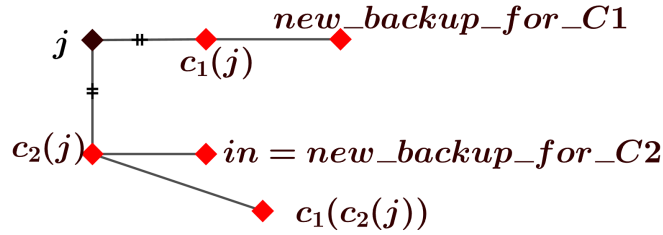
Слика 5.4: Одређивање двокраке путање за локацију  $j$ :  $in$  и  $c_1(j)$  на једнаком растојању од  $j$

Коначно, центар  $c_2(j)$  се може налазити на истом растојању од  $j$  као и центри  $in$  и  $c_1(j)$ , али након потенцијалне промене резервног центра за  $in$  и  $c_1(j)$  (уколико је то био  $j$ ),  $c_2(j)$  постаје бољи избор за примарни центар јер се тако постиже најкраћа двокрака путања (Слика 5.5, линије 14–18 у Алгоритму 24). Потенцијално нови резервни центар за  $c_2(j)$  (променљива  $new\_backup\_for\_C2$ ) се одређује као и краћа од путања  $j \rightarrow new\_primaryZ\_j \rightarrow new\_backupZ\_j$  и  $j \rightarrow c_2(j) \rightarrow new\_backup\_for\_C2$ .



Слика 5.5: Одређивање двокраке путање за локацију  $j$ :  $in$ ,  $c_1(j)$  и  $c_2(j)$  на једнаком растојању од  $j$

- Последњи случај је када  $in$  није ближи локацији  $j$  од  $c_1(j)$  (линије 19–37 у Алгоритму 24). Овде такође постоји могућност да је резервни центар за  $c_1(j)$  баш  $j$ , и/или случај када су  $c_1(j)$  и  $c_2(j)$  једнако удаљени од  $j$ , али променом резервног центра за  $c_1(j)$ , центар  $c_2(j)$  постаје нови примарни центар за  $j$  (Слика 5.6).



Слика 5.6: Одређивање двокраке путање за локацију  $j$ :  $in$  на већем растојању него  $c_1(j)$  и  $c_2(j)$  од  $j$ , а  $c_1(j)$  и  $c_2(j)$  су на једнаком растојању од  $j$

Након одређивања двокраке путање за  $j$ , у ситуацији када  $j$  престаје да буде део решења, уколико је чвор  $j$  покривен, његова потражња се додаје променљивој  $z(j)$  (линије 12–13 у Алгоритму 22).

---

**Алгоритам 25** Процедура *DetermineBackup2()*

---

```

1: procedure DetermineBackup2(out, primary, second)
2:   if primary  $\neq$  out then
3:     return primary
4:   else
5:     return second

```

---

---

**Алгоритам 24** *Elimination\_of\_j()* процедура

---

```

1: procedure Elimination_of_j()
2:   if  $d(j, in) < d(j, c_1(j))$  then
3:      $new\_primaryZ\_j \leftarrow in$ 
4:      $new\_backupZ\_j \leftarrow DetermineBackup2(j, c_1(in), c_2(in))$ 
5:   else if  $d(j, in) = d(j, c_1(j))$  then
6:      $new\_backup\_for\_in \leftarrow DetermineBackup2(j, c_1(in), c_2(in))$ 
7:      $new\_backup\_for\_C1 \leftarrow DetermineBackup3(j, c_1(c_1(j)), in, c_2(c_1(j)))$ 
8:     if  $d(j, in) + d(in, new\_backup\_for\_in) < d(j, c_1(j)) + d(c_1(j), new\_backup\_for\_C1)$  then
9:        $new\_primaryZ\_j \leftarrow in$ 
10:       $new\_backupZ\_j \leftarrow new\_backup\_for\_in$ 
11:    else
12:       $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_1(j)$ 
13:       $new\_backupZ\_j \leftarrow new\_backup\_for\_C1$ 
14:    if  $d(j, new\_primaryZ\_j) = d(j, c_2(j))$  then
15:       $new\_backup\_for\_C2 \leftarrow DetermineBackup3(j, c_1(c_2(j)), in, c_2(c_2(j)))$ 
16:      if  $d(j, c_2(j)) + d(c_2(j), new\_backup\_for\_C2) < d(j, new\_primaryZ\_j) +$ 
 $d(new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j)$  then
17:         $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_2(j)$ 
18:         $new\_backupZ\_j \leftarrow new\_backup\_for\_C2$ 
19:    else if  $d(j, in) > d(j, c_1(j))$  then
20:      if  $d(j, c_1(j)) < d(j, c_2(j))$  then
21:         $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_1(j)$ 
22:         $new\_backupZ\_j \leftarrow DetermineBackup3(j, c_1(c_1(j)), in, c_2(c_1(j)))$ 
23:      else if  $d(j, c_1(j)) = d(j, c_2(j))$  then
24:         $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_1(j)$ 
25:         $new\_backupZ\_j \leftarrow DetermineBackup3(j, c_1(c_1(j)), in, c_2(c_1(j)))$ 
26:      if  $d(j, c_2(j)) + d(c_2(j), in) < d(j, new\_primaryZ\_j) + d(new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j)$ 
then
27:         $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_2(j)$ 
28:         $new\_backupZ\_j \leftarrow in$ 
29:      else
30:        if  $c_1(c_2(j)) \neq j$  then
31:          if  $d(j, c_2(j)) + d(c_2(j), c_1(c_2(j))) < d(j, new\_primaryZ\_j) +$ 
 $d(new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j)$  then
32:             $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_2(j)$ 
33:             $new\_backupZ\_j \leftarrow c_1(c_2(j))$ 
34:          else
35:            if  $d(j, c_2(j)) + d(c_2(j), c_2(c_2(j))) < d(j, new\_primaryZ\_j) +$ 
 $d(new\_primaryZ\_j, new\_backupZ\_j)$  then
36:               $new\_primaryZ\_j \leftarrow c_2(j)$ 
37:               $new\_backupZ\_j \leftarrow c_2(c_2(j))$ 

```

---

---

**Алгоритам 26** *DetermineBackup3()*

---

```

1: procedure DetermineBackup3(out, primary, in, second)
2:   if primary  $\neq$  out then
3:     return Closest(in, primary)
4:   else
5:     return Closest(in, second)

```

---

Кораци помоћних процедура: *Determine\_new\_primary\_and\_backup\_i()*, *Elimination\_of\_primary\_of\_i()* и *Elimination\_of\_backup\_of\_i()* коришћених у Алгоритму 22, приказани су редом Алгоритмима 27, 28 и 29.

---

**Алгоритам 27** Процедура *Determine\_new\_primary\_and\_backup\_i*

---

```

1: procedure Determine_new_primary_and_backup_i()
2:   new_backup_C1  $\leftarrow$  Closest(in,  $c_1(c_1(i))$ )
3:   new_backup_C2  $\leftarrow$  Closest(in,  $c_1(c_2(i))$ )
4:   if  $d(i, c_1(i)) + d(c_1(i), \textit{new\_backup\_C1}) \leq d(i, c_2(i)) + d(c_2(i), \textit{new\_backup\_C2})$  then
5:     new_primaryR_i  $\leftarrow$   $c_1(i)$ 
6:     new_backupR_i  $\leftarrow$  new_backup_C1
7:   else
8:     new_primaryR_i  $\leftarrow$   $c_2(i)$ 
9:     new_backupR_i  $\leftarrow$  new_backup_C2

```

---



---

**Алгоритам 28** Процедура *Elimination\_of\_primary\_of\_i()*

---

```

1: procedure Elimination_of_primary_of_i()
2:   if new_primaryR_i =  $c_1(j)$  then ▷ Eliminacija primarnog centra (slučaj  $c_1(i)$ )
3:     new_primaryZ_i  $\leftarrow$  Closest(in,  $c_2(i)$ )
4:     if new_primaryZ_i = in then
5:       new_backupZ_i  $\leftarrow$  DetermineBackup2( $c_1(j)$ ,  $c_1(\textit{in})$ ,  $c_2(\textit{in})$ )
6:     else if new_primaryZ_i =  $c_2(i)$  then
7:       new_backupZ_i  $\leftarrow$  DetermineBackup3( $c_1(i)$ ,  $c_1(c_2(i))$ , in,  $c_2(c_2(i))$ )
8:   else if new_primaryR_i =  $c_2(j)$  then ▷ Eliminacija primarnog centra (slučaj  $c_2(i)$ )
9:     new_primaryZ_i  $\leftarrow$  Closest(in,  $c_1(i)$ )
10:    if new_primaryZ_i = in then
11:      new_backupZ_i  $\leftarrow$  DetermineBackup2( $c_2(j)$ ,  $c_1(\textit{in})$ ,  $c_2(\textit{in})$ )
12:    else if new_primaryZ_i =  $c_1(i)$  then
13:      new_backupZ_i  $\leftarrow$  DetermineBackup3( $c_2(i)$ ,  $c_1(c_1(i))$ , in,  $c_2(c_1(i))$ )

```

---

---

**Алгоритам 29** Процедура *Elimination\_of\_backup\_of\_i()*

---

```
1: procedure Elimination_of_backup_of_i()
2:    $new\_primaryZ\_i \leftarrow Closest(in, new\_primaryR\_i)$ 
3:   if  $new\_primaryZ\_i = in$  then
4:      $new\_backupZ\_i \leftarrow DetermineBackup2(new\_backupR\_i, c_1(in), c_2(in))$ 
5:   if  $new\_primaryZ\_i = c_1(i)$  then
6:      $new\_backupZ\_i \leftarrow DetermineBackup3(new\_backupR\_i, c_1(c_1(i)), in, c_2(c_1(i)))$ 
7:   if  $new\_primaryZ\_i = c_2(i)$  then
8:      $new\_backupZ\_i \leftarrow DetermineBackup3(new\_backupR\_i, c_1(c_2(i)), in, c_2(c_2(i)))$ 
```

---

### 5.3.3 Процедура $Update()$ за МСРНСР

Процедура  $Update()$  коришћена у 2.4.3 и 4.3.3 прилагођена је карактеристикама проблема МСРНСР. Обухваћени су случајеви разматрани у 5.3.2 и разрешени су на исти начин. Кораци  $Update()$  процедуре за МСРНСР дати су Алгоритмом 30.

---

#### Алгоритам 30 $Update()$ процедура за МСРНСР

---

```

1: procedure UPDATE( $x, in, out, c_1, c_2$ )
2:    $x \leftarrow (\{x(1), x(2), \dots, x(p)\} \cup \{in\}) \setminus \{out\}$ 
3:    $menjالي_backup \leftarrow \emptyset$ 
4:   for svaki centar  $j \in \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
5:     Израчунати  $c_1(j)$  и  $c_2(j)$ . Уколико постоји више кандидата на истом растојању, изабрати оног
     са најближим резервним центром.
6:     Уколико је дошло до промене у вектору  $c_1$ , додати центар  $j$  у вектор  $menjالي_backup$ 
7:   for svakog korisnika  $i \in A \setminus \{x(1), x(2), \dots, x(p)\}$  do
8:     if length( $menjالي_backup$ ) > 0 then
9:       Поправка1( $i, in, c_1(i), D, x, c_1, c_2, menjالي_backup$ )
10:      Поправка2( $i, in, c_2(i), D, x, c_1, c_2, menjالي_backup$ )
11:     if  $c_1(i) = out$  then
12:       if  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_2(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_2(i), c_1(c_2(i))))$  then
13:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
14:       else
15:          $c_1(i) \leftarrow c_2(i)$ 
16:       Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ . Уколико има више кандидата на истом
       растојању, изабрати оног са најближим резервним центром.
17:        $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 
18:     else
19:       if  $d(i, in) < d(i, c_1(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_1(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_1(i), c_1(c_1(i))))$  then
20:          $c_2(i) \leftarrow c_1(i)$ 
21:          $c_1(i) \leftarrow in$ 
22:       else
23:         if  $d(i, in) < d(i, c_2(i))$  or  $(d(i, in) = d(i, c_2(i)) \text{ and } d(in, c_1(in)) < d(c_2(i), c_1(c_2(i))))$  then
24:            $c_2(i) \leftarrow in$ 
25:         else
26:           if  $c_2(i) = out$  then
27:             Наћи други најближи центар  $center\_2$  за локацију  $i$ . Уколико има више кандидата на
             истом растојању, изабрати оног са најближим резервним центром.
28:              $c_2(i) \leftarrow center\_2$ 
29:         if  $d(i, c_1(i)) = d(i, c_2(i))$  and  $d(c_2(i), c_1(c_2(i))) < d(c_1(i), c_1(c_1(i)))$  then
30:           Заменили улоге центрима  $c_1(i)$  и  $c_2(i)$ 

```

---

## 5.4 Експериментални резултати

За потребе експеримента, полазећи од `rmed` инстанци које су коришћене за PNCP, генерисано је 189 инстанци за MCPNCP. Било је неопходно генерисати потражње за сваког корисника, као и параметре покривености за случај бинарног и парцијалног покривања. Потражње су генерисане коришћењем униформне расподеле у интервалу  $[10, 50]$ . За сваку разматрану `rmed` инстанцу, вредност параметра радијуса покривања  $\beta$  постављена је на  $0.65\beta'$ , где је  $\beta'$  најбоље познато решење PNCP из литературе ([65, 85, 96]) за исту инстанцу. Параметари  $a_{ij}^k$  и  $b_{ij}^k$  за сваку инстанцу дефинисани су на следећи начин:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{ако } \delta_{ij}^k \leq 0.65\beta', \\ 0.75, & \text{ако } 0.65\beta' < \delta_{ij}^k \leq 0.7\beta', \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}, \quad b_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{ако } \delta_{ij}^k \leq 0.65\beta', \\ 0.75, & \text{ако } 0.65\beta' < \delta_{ij}^k \leq 0.7\beta', \\ 0.5, & \text{ако } 0.7\beta' < \delta_{ij}^k \leq 0.75\beta', \\ 0.25, & \text{ако } 0.75\beta' < \delta_{ij}^k \leq 0.8\beta', \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad i \in A, j, k \in P, j \neq k.$$

Инстанце су подељене у четири групе према броју чворова:

- мале: 50 `rmed1-rmed5` инстанци са  $n \leq 50$  чворова,
- средње: 83 `rmed1-rmed5` инстанце са  $50 < n \leq 100$  чворова,
- велике: 24 `rmed6-rmed8` инстанце са  $100 < n \leq 200$  чворова,
- веома велике: 32 `rmed11-rmed12` инстанце са  $200 < n \leq 300$  и `rmed16-rmed17` инстанце са  $300 < n \leq 400$  чворова.

Тестирање је рађено у окружењу описаном на почетку Секције 2.5.

### 5.4.1 Подешавање параметара

Параметар  $\alpha$  којим се контролише прихватање лошијег решења у SVNS методи је подешаван коришћењем насумично одабраног подскупа инстанци. Одабрано је 38 инстанци свих димензија проблема (приближно 20% укупног броја инстанци). За сваку инстанцу из разматраног подскупа инстанци и сваку разматрану вредност параметра  $\alpha$ , посматрано је најбоље решење добијено у 20 извршавања, као и просечно процесорско време потребно да се најбоље решење достигне по први пут. На основу тога извршено је рангирање разматраних вредности параметра  $\alpha$ . Бољи (нижи) ранг добија вредност параметра  $\alpha$  за коју се постиже већа вредност функције циља, а уколико се за две или више вредности параметра  $\alpha$  добија иста вредност функције циља, упоређују се времена која су

била потребна да се најбоља вредност достигне по први пут. Вредност параметра за коју је просечно процесорско време потребно да се достигне најбоље решење краће добија нижи ранг. Специјално, уколико се најдуже и најкраће време разликују за мање од 0.01 секунде, све вредности параметра добијају исти ранг који је у том случају једнак аритметичкој средини рангова које би изједначене вредности иначе добиле.

Како су разматрана два различита проблема, параметар  $\alpha$  је одређен за сваки од њих појединачно. За бинарно покривање тестирано је шест различитих вредности параметра  $\alpha$ :  $\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ . За парцијално покривање, веће вредности параметра  $\alpha$  су се боље показале па је тестирано седам вредности  $\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$  на истом подскупу инстанци. Просечне вредности додељених рангова приказане су у Табели 5.1. Најмањи просечан ранг добијен је за  $\alpha = 0.2$  у случају бинарног покривања, док је за проблем парцијалног покривања најмањи просечан ранг добијен за  $\alpha = 0.5$ .

Табела 5.1: Просечни рангови

|                 | бинарно покривање |      |             |      |      |      | парцијално покривање |      |      |      |      |             |      |
|-----------------|-------------------|------|-------------|------|------|------|----------------------|------|------|------|------|-------------|------|
| $\alpha$        | 0                 | 0.1  | 0.2         | 0.3  | 0.4  | 0.5  | 0                    | 0.1  | 0.2  | 0.3  | 0.4  | 0.5         | 0.6  |
| <i>avg.rank</i> | 3.68              | 3.13 | <b>2.97</b> | 3.42 | 3.34 | 3.08 | 4.03                 | 4.18 | 4.42 | 4.05 | 3.87 | <b>3.66</b> | 3.76 |

#### 5.4.2 Резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма

ILP1 и ILP2 формулације представљене у Секцији 5.2 тестиране су коришћењем IBM ILOG CPLEX 22.1.0 решавача. CPLEX решавач се зауставља када пронађе оптимално решење или када достигне максимално процесорско време од 2 сата. Предложени SVNS алгоритам покренут је 20 пута на свакој разматраној инстанци, и за бинарно и за парцијално покривање.

Како би се повећала робусност алгоритма, подразумевана вредност SVNS параметра  $l_{\max}$  постављена је на минималан број центара  $p$  међу свим тестираним инстанцама, који износи 5. Ова вредност параметра  $l_{\max}$  је преузета из имплементације за PNCP, а показало се да води dobrim перформансама SVNS алгоритма и у случају проблема MCPNCP. Параметар за критеријума заустављања *iter\_max* зависи од величине разматраног скупа инстанци и износи: *iter\_max* = 1000 за инстанце малих димензија, *iter\_max* = 3000 за инстанце средњих димензија и *iter\_max* = 5000 за инстанце великих и веома великих димензија. На основу резултата тестова приликом подешавања параметра приказаних у Секцији 5.4.1, изабране су вредности  $\alpha = 0.2$  за проблем бинарног покривања и  $\alpha = 0.5$  за проблем парцијалног покривања.

*Резултати на малим и средњим инстанцама*

У Табели 5.2 приказани су сумарни резултати CPLEX решавача добијени коришћењем ILP1 и ILP2 формулација, као и предложеног SVNS алгоритма за MCPNCP са бинарним и парцијалним покривањем на скупу од 50 малих rmed1–rmed5 инстанци и скупу од 83 инстанце средње величине. Комплетни резултати могу се наћи у Прилогу Д.

Инстанце су груписане према њиховој димензији  $n$ . Приказани резултати представљају просечне вредности за инстанце у свакој групи. Сваки ред Табеле 5.2 садржи:

- $n$  - укупан број локација,
- $p$  - број центара које треба успоставити,
- #Инст - број инстанци у групи.

Наредне четири колоне односе се на резултате CPLEX решавача добијене уз помоћ ILP1 формулације:

- $f.val$  - просечна вредност функције циља нађених решења,
- #opt - број инстанци у групи за које је пронађено оптимално решење,
- $t$  - просечно време извршавања (у секундама),
- %cov. - просечан број покривених корисника (у процентима).

Резултати CPLEX решавача добијени уз помоћ ILP2 формулације приказани су на исти начин у наредним колонама. Последње четири колоне садрже резултате добијене SVNS алгоритмом:

- $f_{best}$  - просечна вредност функције циља најбољег SVNS решења,
- $t_{best}$  - просечно време потребно да се најбоље решење достигне по први пут (у секундама),
- gap (у %) - просечно процентуално одступање за посматрану групу. За појединачну инстанцу одступање се одређује тако што се одреди просечна разлика између најбоље вредности функције циља добијене у појединачном извршавању и најбоље вредности функције циља добијене из 20 SVNS извршавања.

- $\sigma$  (у %) - просечно средњеквадратно одступање. За појединачну инстанцу одређује се као  $\sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (gap_i - agap)^2}$ , где  $gap_i$  означава процентуално одступање између најбоље вредности функције циља добијене у  $i$ -том извршавању и најбоље вредности функције циља добијене из 20 SVNS извршавања за ту инстанцу, док је  $agap$  просек  $gap_i$  вредности за ту инстанцу.

На основу резултата приказаних у Табели 5.2 може се закључити да CPLEX са обе формулације проналази оптимална решења за бинарно покривање за све мале и средње инстанце, док SVNS достиже сва ова оптимална решења. Укупно време извршавања CPLEX решавача значајно је краће када се користи ILP2 формулација у поређењу са одговарајућим временом када је коришћена ILP1 формулација. Ово је очекивано, будући да ILP2 формулација има мањи број ограничења од ILP1. Предложени SVNS је достигао сва оптимална решења у свих 20 извршавања за све инстанце са  $n \in \{10, 20, 30, 40, 60, 90\}$  чворова, што се може видети по вредностима у колонама  $gap$  и  $\sigma$ , које су једнаке 0%. SVNS није достигао оптимално решење у свих 20 извршавања само за по једну инстанцу из скупова са  $n \in \{50, 70, 100\}$ , као и за две инстанце са  $n = 80$  чворова.

Занимљиво је да у појединим случајевима ILP1 и ILP2 формулације проналазе различита оптимална решења са истом вредношћу функције циља. Рецимо, за инстанцу `rmed2_40_10`, уз помоћ ILP1 формулације CPLEX решавач долази до решења  $x_{ILP1}$  са 27 покривених локација (67%), док уз помоћ ILP2 формулације проналази решење  $x_{ILP2}$  са 26 (65%) покривених локација. За оба решења, вредност функције циља је  $f(x_{ILP1}) = f(x_{ILP2}) = 850$ . Слично, у случају инстанце `rmed6_150_20`, CPLEX са ILP1 формулацијом пронашао је само допустиво решење са 128 (85%) покривених локација и  $f(x_{ILP1}) = 3905$ , док је са ILP2 формулацијом пронашао оптимално решење са мањим бројем покривених локација (127, 84%), али са већом вредношћу функције циља  $f(x_{ILP2}) = 3926$ .

Табела 5.2 такође садржи сумарне резултате за MCPNCP са парцијалним покривањем на инстанцама мањих и средњих димензија. Доњи део Табеле 5.2, који се односи на резултате за парцијално покривање, слично је организован као и горњи део који се односи на бинарно покривање. CPLEX са ILP1 формулацијом није обезбедио оптимална решења за све инстанце у случају парцијалног покривања што се може видети у колони  $\#opt$ . Такође, вредности у колони  $f.val$  означене су симболом „\*” уколико вредности функције циља нису оптималне за све инстанце у датој групи. У случају парцијалног покривања, ILP2 формулација се такође боље показала у односу на ILP1. CPLEX са ILP2 моделом је достигао оптимална решења за све мале и средње инстанце, док је уз помоћ ILP1 CPLEX решавач пронашао оптимална решења за 128 од 133 инстанце. CPLEX са ILP1 формулацијом није успео да докаже оптималност добијеног решења за инстанцу `rmed3_80_10`, иако добијено допустиво решење има исту вредност функције циља као и решење за које је доказао оптималност користећи ILP2.

Табела 5.2: Бинарно и парцијално покривање: просечни резултати добијени CPLEX решавачем и SVNS алгоритмом на малим и средњим инстанцама

| бинарно покривање    |     |               | CPLEX ILP1 |          |      |         |       | CPLEX ILP2 |      |         |       |            | SVNS       |      |          |  |
|----------------------|-----|---------------|------------|----------|------|---------|-------|------------|------|---------|-------|------------|------------|------|----------|--|
| Инст.                | $n$ | $p$           | #Инст.     | $f.val.$ | #opt | $t$     | %cov. | $f.val.$   | #opt | $t$     | %cov. | $f_{best}$ | $t_{best}$ | gap  | $\sigma$ |  |
| pmed1-pmed5          | 10  | 5             | 5          | 205.80   | 5    | 0.03    | 68.00 | 205.80     | 5    | 0.02    | 68.00 | 205.80     | 0.00       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 20  | {5,10}        | 10         | 423.80   | 10   | 0.65    | 67.00 | 423.80     | 10   | 0.32    | 67.00 | 423.80     | 0.00       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 30  | {5,10}        | 10         | 703.70   | 10   | 3.70    | 72.80 | 703.70     | 10   | 1.51    | 72.80 | 703.70     | 0.00       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 40  | {5,10,20}     | 15         | 899.00   | 15   | 9.55    | 72.20 | 899.00     | 15   | 3.11    | 72.07 | 899.00     | 0.01       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 50  | {10,20}       | 10         | 1160.90  | 10   | 34.40   | 76.60 | 1160.90    | 10   | 4.75    | 76.60 | 1160.90    | 0.03       | 0.00 | 0.01     |  |
|                      | 60  | {10,20,30}    | 15         | 1425.87  | 15   | 93.12   | 79.67 | 1425.87    | 15   | 5.78    | 79.80 | 1425.87    | 0.03       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 70  | {10,20,30}    | 15         | 1688.53  | 15   | 148.57  | 77.47 | 1688.53    | 15   | 75.70   | 77.47 | 1688.53    | 0.08       | 0.01 | 0.02     |  |
|                      | 80  | {10,20,30}    | 15         | 1914.40  | 15   | 286.54  | 78.27 | 1914.40    | 15   | 184.19  | 78.27 | 1914.40    | 0.15       | 0.00 | 0.01     |  |
|                      | 90  | {10,20,30,50} | 19         | 2223.58  | 19   | 508.83  | 80.90 | 2223.58    | 19   | 376.43  | 80.90 | 2223.58    | 0.14       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 100 | {10,20,30,50} | 19         | 2487.16  | 19   | 849.94  | 81.53 | 2487.16    | 19   | 490.06  | 81.53 | 2487.16    | 0.20       | 0.01 | 0.01     |  |
| парцијално покривање |     |               | CPLEX ILP1 |          |      |         |       | CPLEX ILP2 |      |         |       |            | SVNS       |      |          |  |
| Инст.                | $n$ | $p$           | #Инст.     | $f.val.$ | #opt | $t$     |       | $f.val.$   | #opt | $t$     |       | $f_{best}$ | $t_{best}$ | gap  | $\sigma$ |  |
| pmed1-pmed5          | 10  | 5             | 5          | 210.55   | 5    | 0.09    |       | 210.55     | 5    | 0.04    |       | 210.55     | 0.00       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 20  | {5,10}        | 10         | 455.02   | 10   | 0.88    |       | 455.02     | 10   | 0.47    |       | 455.02     | 0.00       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 30  | {5,10}        | 10         | 756.65   | 10   | 7.18    |       | 756.65     | 10   | 3.03    |       | 756.65     | 0.01       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 40  | {5,10,20}     | 15         | 955.03   | 15   | 62.37   |       | 955.03     | 15   | 5.84    |       | 955.03     | 0.01       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 50  | {10,20}       | 10         | 1227.28  | 10   | 66.44   |       | 1227.28    | 10   | 7.39    |       | 1227.28    | 0.06       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 60  | {10,20,30}    | 15         | 1481.83  | 15   | 158.63  |       | 1481.83    | 15   | 9.61    |       | 1481.83    | 0.04       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 70  | {10,20,30}    | 15         | 1766.95  | 15   | 312.02  |       | 1766.95    | 15   | 161.47  |       | 1766.95    | 0.08       | 0.00 | 0.00     |  |
|                      | 80  | {10,20,30}    | 15         | 2009.22* | 14   | 1225.19 |       | 2009.22    | 15   | 437.11  |       | 2009.22    | 0.13       | 0.01 | 0.02     |  |
|                      | 90  | {10,20,30,50} | 19         | 2319.76* | 18   | 2075.66 |       | 2320.91    | 19   | 1050.79 |       | 2320.91    | 0.25       | 0.02 | 0.03     |  |
|                      | 100 | {10,20,30,50} | 19         | 2588.07* | 16   | 3658.61 |       | 2591.41    | 19   | 1078.56 |       | 2591.41    | 0.46       | 0.00 | 0.00     |  |

У просеку, укупно време извршавања CPLEX решавача краће је уколико се користи ILP2 модел у поређењу са ILP1 моделом.

Предложени SVNS достигао је сва оптимална решења добијена CPLEX решавачем и ILP2 моделом у значајном краћем времену. Алгоритам се показао као стабилан, што се може закључити из *gap* вредности SVNS решења које су једнаке 0% за 126 од 133 инстанце.

### Резултати на великим инстанцама

Резултати добијени помоћу CPLEX решавача и модела ILP1 и ILP2, као и предложеног SVNS алгоритма за бинарно и делимично покривање на 24 велике инстанце приказани су у Табелама 5.3 и 5.4.

Табела 5.3: Бинарно покривање: резултати добијени CPLEX решавачем и SVNS алгоритмом на великим инстанцама

| бинарно покривање |         | CPLEX ILP1 |         |      | CPLEX ILP2 |         |      | SVNS        |              |            |       |          |
|-------------------|---------|------------|---------|------|------------|---------|------|-------------|--------------|------------|-------|----------|
| Инст.             | $n$ $p$ | $f.val.$   | $t$     | %cov | $f.val.$   | $t$     | %cov | $f_{best}$  | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed6             | 150 20  | 3905*      | 7201.03 | 85   | 3926       | 2628.73 | 84   | 3926        | 2            | 1.57       | 0.23  | 0.08     |
|                   | 150 30  | 3686       | 6528.93 | 80   | 3686       | 1211.23 | 80   | 3686        | 4            | 4.76       | 0.28  | 0.19     |
|                   | 150 50  | 3787       | 991.063 | 85   | 3787       | 2219.83 | 85   | 3787        | 19           | 7.88       | 0.02  | 0.07     |
|                   | 150 80  | 3989*      | 7211.49 | 92   | 3989       | 499.536 | 92   | 3989        | 20           | 0.30       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 200 30  | 3795*      | 7208.80 | 63   | 4884*      | 7209.12 | 81   | <b>4890</b> | 4            | 7.72       | 0.16  | 0.14     |
|                   | 200 50  | 4743*      | 7204.92 | 76   | 4739*      | 7204.97 | 77   | 4743        | 3            | 8.87       | 0.08  | 0.11     |
|                   | 200 80  | 5287*      | 7204.92 | 88   | 5287*      | 7203.94 | 88   | 5287        | 3            | 14.50      | 0.26  | 0.12     |
|                   | 200 100 | 5744*      | 7209.87 | 93   | 5744*      | 7202.46 | 93   | 5744        | 20           | 0.73       | 0.00  | 0.00     |
| pmed7             | 150 20  | 3425*      | 7200.86 | 75   | 3457       | 3398.95 | 76   | 3457        | 20           | 1.05       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 150 30  | 3445*      | 7201.15 | 74   | 3457       | 1865.24 | 75   | 3457        | 17           | 0.68       | 0.05  | 0.12     |
|                   | 150 50  | 4095*      | 7202.12 | 89   | 4098       | 1451.56 | 89   | 4098        | 6            | 2.03       | 0.04  | 0.03     |
|                   | 150 80  | 4150*      | 7200.83 | 97   | 4150*      | 7200.57 | 97   | 4150        | 20           | 0.23       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 200 30  | 4115*      | 7204.74 | 68   | 4785*      | 7208.28 | 78   | <b>4790</b> | 20           | 5.57       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 200 50  | 4823*      | 7207.35 | 77   | 4830       | 2985.86 | 78   | 4830        | 12           | 7.63       | 0.06  | 0.08     |
|                   | 200 80  | 5183*      | 7205.91 | 85   | 5183       | 1484.83 | 86   | 5183        | 7            | 13.31      | 0.08  | 0.11     |
|                   | 200 100 | 5575*      | 7212.61 | 92   | 5575       | 4896.79 | 92   | 5575        | 20           | 0.98       | 0.00  | 0.00     |
| pmed8             | 150 20  | 3593*      | 7201.02 | 82   | 3593       | 2348.67 | 82   | 3593        | 20           | 0.94       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 150 30  | 3613       | 2268.30 | 79   | 3613       | 1235.98 | 79   | 3613        | 20           | 0.70       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 150 50  | 4017*      | 7202.50 | 90   | 4017       | 2553.56 | 90   | 4017        | 14           | 4.02       | 0.06  | 0.09     |
|                   | 150 80  | 4254*      | 7202.42 | 95   | 4254       | 557.574 | 95   | 4254        | 20           | 0.16       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 200 30  | 3913*      | 7204.74 | 69   | 4953*      | 7207.61 | 85   | 4953        | 19           | 6.00       | 0.11  | 0.48     |
|                   | 200 50  | 5275*      | 7213.51 | 88   | 5645*      | 7204.60 | 95   | 5645        | 17           | 10.39      | 0.03  | 0.08     |
|                   | 200 80  | 5707*      | 7212.02 | 98   | 5707*      | 7203.30 | 98   | 5707        | 20           | 0.43       | 0.00  | 0.00     |
|                   | 200 100 | 5785*      | 7225.32 | 98   | 5785*      | 7203.38 | 98   | 5785        | 20           | 0.20       | 0.00  | 0.00     |

У случајевима када CPLEX није могао да докаже оптималност пронађеног решења, вредност функције циља означена је симболом „\*”. Најбољи SVNS резултати су бољег квалитета од допустивих решења која је CPLEX пронашао са обе ILP1 и ILP2 формулације. У ситуацијама када су SVNS алгоритмом достигнута боља решења, вредности у Табелама 5.3 и 5.4 су подебљане.

Табела 5.4: Парцијално покривање: резултати добијени CPLEX решавачем и SVNS алгоритмом на великим инстанцама

| парцијално покривање |     |     | CPLEX ILP1 |         | CPLEX ILP2 |         | SVNS           |              |            |       |          |
|----------------------|-----|-----|------------|---------|------------|---------|----------------|--------------|------------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$     | $f.val.$   | $t$     | $f_{best}$     | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed6                | 150 | 20  | 3290.50*   | 7200.94 | 3735.00*   | 7200.94 | <b>4057.75</b> | 8            | 1.40       | 0.36  | 0.29     |
|                      | 150 | 30  | 3838.00*   | 7201.04 | 3893.25    | 4875.02 | 3893.25        | 11           | 3.18       | 0.10  | 0.18     |
|                      | 150 | 50  | 3882.25*   | 7201.12 | 3890.25    | 5157.02 | 3890.25        | 13           | 10.14      | 0.07  | 0.09     |
|                      | 150 | 80  | 4060.25*   | 7209.21 | 4060.25    | 4304.46 | 4060.25        | 20           | 0.84       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 200 | 30  | 4083.25*   | 7209.69 | 4492.00*   | 7204.45 | <b>5159.50</b> | 6            | 12.12      | 0.24  | 0.31     |
|                      | 200 | 50  | 4970.00*   | 7211.58 | 4934.00*   | 7209.65 | <b>5016.75</b> | 13           | 13.81      | 0.06  | 0.08     |
|                      | 200 | 80  | 5368.75*   | 7215.67 | 5371.00*   | 7219.97 | <b>5383.50</b> | 4            | 18.49      | 0.02  | 0.02     |
|                      | 200 | 100 | 5852.75*   | 7269.43 | 5857.25*   | 7210.54 | <b>5857.75</b> | 20           | 5.63       | 0.00  | 0.00     |
| pmed7                | 150 | 20  | 3161.50*   | 7200.97 | 3687.00*   | 7200.84 | <b>3717.50</b> | 8            | 1.21       | 0.05  | 0.04     |
|                      | 150 | 30  | 3697.00*   | 7201.28 | 3711.25    | 5500.26 | 3711.25        | 20           | 2.27       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 150 | 50  | 4184.00*   | 7201.30 | 4204.50*   | 7201.26 | 4204.50        | 9            | 6.23       | 0.11  | 0.13     |
|                      | 150 | 80  | 4180.00*   | 7201.22 | 4180.00*   | 7202.18 | 4180.00        | 20           | 0.23       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 200 | 30  | 4497.50*   | 7205.17 | 4506.50*   | 7228.88 | <b>5099.00</b> | 18           | 15.42      | 0.03  | 0.03     |
|                      | 200 | 50  | 4638.75*   | 7202.13 | 4901.50*   | 7204.15 | <b>5035.25</b> | 18           | 11.04      | 0.05  | 0.16     |
|                      | 200 | 80  | 5283.25*   | 7207.03 | 5292.50    | 4537.07 | 5292.50        | 6            | 14.51      | 0.07  | 0.07     |
|                      | 200 | 100 | 5664.75*   | 7218.80 | 5664.75*   | 7203.58 | <b>5666.50</b> | 20           | 3.36       | 0.00  | 0.00     |
| pmed8                | 150 | 20  | 3226.00*   | 7201.00 | 3868.00*   | 7201.05 | <b>3876.75</b> | 20           | 3.40       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 150 | 30  | 3817.75*   | 7201.79 | 3817.75    | 1706.60 | 3817.75        | 18           | 2.69       | 0.02  | 0.06     |
|                      | 150 | 50  | 4092.50*   | 7202.55 | 4094.50    | 2832.54 | 4094.50        | 20           | 2.80       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 150 | 80  | 4405.50*   | 7202.78 | 4405.50    | 5743.70 | 4405.50        | 20           | 0.57       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 200 | 30  | 4316.50*   | 7204.21 | 4686.50*   | 7204.69 | <b>5183.25</b> | 19           | 6.96       | 0.02  | 0.08     |
|                      | 200 | 50  | 5366.75*   | 7699.12 | 5516.25*   | 7207.10 | <b>5736.50</b> | 17           | 12.28      | 0.04  | 0.13     |
|                      | 200 | 80  | 5734.00*   | 7225.80 | 5734.00*   | 7206.46 | 5734.00        | 20           | 0.52       | 0.00  | 0.00     |
|                      | 200 | 100 | 5818.00*   | 7256.58 | 5818.00*   | 7202.82 | 5818.00        | 20           | 0.23       | 0.00  | 0.00     |

Предности ILP2 формулације у односу на ILP1 постају израженије како се димензија проблема повећава, што се може видети из Табеле 5.5 у којој је приказан сумарни преглед резултата на скупу великих инстанци. Број оптималних решења које је CPLEX пронашао користећи ILP2 већи је него у случају када се користи ILP1, и то за оба критеријума покривања. У случају бинарног покривања, CPLEX са ILP1 формулацијом обезбеђује оптимално решење за само 3 од 24

инстанце, уз просечно време од 3262.76s. Са друге стране, CPLEX са ILP2 формулацијом проналази оптимална решења за 14 од 24 инстанце, уз просечно време од 2095.60s. За само једну инстанцу (pmed6\_200\_50) ILP1 је дао боље решење у поређењу са ILP2, док за 9 инстанци ILP2 обезбеђује боља допустива решења у односу на она добијена помоћу ILP1. У случају парцијалног покривања, CPLEX са ILP1 моделом не проналази оптимално решење ни за једну инстанцу у оквиру 2 сата процесорског времена, док је са ILP2 пронађено 8 оптималних решења уз просечно време од 4332.08s. Само за инстанцу pmed6\_200\_50, CPLEX са ILP1 је вратио боље решење, док за преостале инстанце ILP2 обезбеђује или боља (16 инстанци) или једнака (7 инстанци) решења.

Резултати приказани у Табелама 5.3 и 5.4 показују да предложени SVNS достиже сва оптимална решења за веома кратка времена. Колоне које се односе на SVNS указују на то да је он побољшао горњу границу обезбеђену CPLEX решавачем, односно достигао још боља решења од допустивих, за 2 инстанце у случају бинарног покривања и за 12 инстанци у случају парцијалног покривања. У просеку,  $gap$  вредности износе 0.06% за бинарно и 0.05% за парцијално покривање, док су просечне  $\sigma$  вредности 0.07% за оба критеријума покривања, што указује на добру стабилност алгоритма.

Табела 5.5: Број оптималних и допустивих решења пронађених CPLEX решавачем на скупу од 24 велике инстанце

|      | бинарно покривање |       |         |         | парцијално покривање |       |         |         |
|------|-------------------|-------|---------|---------|----------------------|-------|---------|---------|
|      | #opt              | #feas | avg.f   | avg.t   | #opt                 | #feas | avg.f   | avg.t   |
| ILP1 | 3                 | 21    | 4412.67 | 6713.60 | 0                    | 24    | 4476.23 | 7231.27 |
| ILP2 | 14                | 10    | 4547.67 | 4224.44 | 8                    | 16    | 4596.73 | 6248.55 |

#### Резултати на веома великим инстанцама

Предложени SVNS алгоритам и CPLEX решавач покренути су и на скупу од 32 веома велике инстанце. Само за једну такву инстанцу (pmed12\_250\_30), CPLEX решавач уз ILP2 модел пронашао је допустиво решење за оба критеријума покривања. Пронађена допустива решења лошијег су квалитета од оних које је достигао SVNS. За све остале веома велике инстанце CPLEX није успео да дође чак ни до допустивог решења услед недостатка меморије. Из овог разлога су у Табели 5.6 дати само резултати SVNS алгоритма за оба критеријума заустављања.

Предложени SVNS алгоритам достигао је најбоља решења за врло кратко време за оба критеријума покривања. За 14 инстанци у случају бинарног покривања и 13 у случају парцијалног, SVNS проналази исто најбоље решење у

свих 20 извршавања, па су  $gap$  и  $\sigma$  вредности 0%. За преостале инстанце вредности  $gap$  и  $\sigma$  нису велике, што потврђује стабилност SVNS алгоритма.

Табела 5.6: Резултати SVNS алгоритма на скупу веома великих инстанци

| Инст.  | $n$ | $p$ | бинарно покривање |              |            |       |          | парцијално покривање |              |            |       |          |
|--------|-----|-----|-------------------|--------------|------------|-------|----------|----------------------|--------------|------------|-------|----------|
|        |     |     | $f_{best}$        | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $gap$ | $\sigma$ | $f_{best}$           | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed11 | 250 | 30  | 6056              | 14           | 5.42       | 0.08  | 0.16     | 6412.50              | 2            | 8.11       | 0.27  | 0.14     |
|        | 250 | 50  | 6147              | 5            | 14.32      | 0.13  | 0.13     | 6405.25              | 18           | 10.26      | 0.02  | 0.05     |
|        | 250 | 70  | 6748              | 4            | 23.08      | 0.04  | 0.06     | 6862.75              | 19           | 15.01      | 0.00  | 0.02     |
|        | 250 | 90  | 6745              | 19           | 21.83      | 0.01  | 0.04     | 6851.25              | 11           | 14.60      | 0.00  | 0.01     |
|        | 300 | 60  | 8536              | 5            | 33.12      | 0.06  | 0.07     | 8616.75              | 1            | 36.87      | 0.031 | 0.02     |
|        | 300 | 80  | 8747              | 20           | 13.05      | 0.00  | 0.00     | 8789.50              | 20           | 18.23      | 0.00  | 0.00     |
|        | 300 | 100 | 8417              | 20           | 4.24       | 0.00  | 0.00     | 8477.25              | 20           | 3.83       | 0.00  | 0.00     |
|        | 300 | 150 | 8787              | 20           | 0.87       | 0.00  | 0.00     | 8841.75              | 20           | 1.23       | 0.00  | 0.00     |
| pmed12 | 250 | 30  | 6183              | 12           | 5.57       | 0.08  | 0.10     | 6433.75              | 19           | 16.73      | 0.00  | 0.02     |
|        | 250 | 50  | 6590              | 2            | 20.49      | 0.04  | 0.06     | 6769.75              | 3            | 22.50      | 0.20  | 0.10     |
|        | 250 | 70  | 6844              | 8            | 18.68      | 0.04  | 0.01     | 6966.75              | 12           | 24.40      | 0.04  | 0.07     |
|        | 250 | 90  | 6846              | 20           | 4.09       | 0.00  | 0.00     | 7055.00              | 14           | 42.24      | 0.01  | 0.01     |
|        | 300 | 60  | 8775              | 20           | 0.74       | 0.00  | 0.00     | 8775.00              | 20           | 0.47       | 0.00  | 0.00     |
|        | 300 | 80  | 8906              | 20           | 0.34       | 0.00  | 0.00     | 8906.00              | 20           | 0.36       | 0.00  | 0.00     |
|        | 300 | 100 | 8973              | 20           | 0.28       | 0.00  | 0.00     | 8973.00              | 20           | 0.21       | 0.00  | 0.00     |
|        | 300 | 150 | 8446              | 20           | 0.11       | 0.00  | 0.00     | 8446.00              | 20           | 0.07       | 0.00  | 0.00     |
| pmed16 | 350 | 40  | 8454              | 3            | 37.78      | 0.08  | 0.10     | 8899.75              | 12           | 54.29      | 0.05  | 0.10     |
|        | 350 | 70  | 9591              | 3            | 41.90      | 0.05  | 0.04     | 9840.50              | 1            | 54.49      | 0.07  | 0.10     |
|        | 350 | 90  | 9484              | 3            | 63.07      | 0.23  | 0.16     | 9610.75              | 7            | 61.45      | 0.80  | 0.08     |
|        | 350 | 120 | 10218             | 20           | 27.55      | 0.00  | 0.00     | 10272.25             | 20           | 25.28      | 0.00  | 0.00     |
|        | 400 | 80  | 10916             | 1            | 69.56      | 0.06  | 0.10     | 11141.25             | 3            | 99.78      | 0.04  | 0.04     |
|        | 400 | 100 | 11416             | 7            | 93.07      | 0.07  | 0.09     | 11588.25             | 17           | 72.12      | 0.01  | 0.02     |
|        | 400 | 140 | 11504             | 20           | 14.95      | 0.00  | 0.00     | 11617.25             | 20           | 14.39      | 0.00  | 0.00     |
|        | 400 | 200 | 11412             | 20           | 4.13       | 0.00  | 0.00     | 11541.50             | 20           | 4.71       | 0.00  | 0.00     |
| pmed17 | 350 | 40  | 8908              | 3            | 26.62      | 0.15  | 0.07     | 9212.00              | 1            | 43.70      | 0.20  | 0.12     |
|        | 350 | 70  | 10077             | 1            | 38.76      | 0.18  | 0.07     | 10147.00             | 4            | 70.72      | 0.10  | 0.07     |
|        | 350 | 90  | 10130             | 1            | 53.74      | 0.10  | 0.06     | 10142.50             | 5            | 44.76      | 0.02  | 0.02     |
|        | 350 | 120 | 9955              | 20           | 9.59       | 0.00  | 0.00     | 10002.50             | 20           | 34.02      | 0.00  | 0.00     |
|        | 400 | 80  | 11547             | 2            | 93.22      | 0.15  | 0.14     | 11651.00             | 10           | 73.79      | 0.02  | 0.03     |
|        | 400 | 100 | 11653             | 5            | 70.44      | 0.09  | 0.06     | 11664.50             | 8            | 118.86     | 0.03  | 0.03     |
|        | 400 | 140 | 11806             | 20           | 11.29      | 0.00  | 0.00     | 11811.00             | 20           | 20.59      | 0.00  | 0.00     |
|        | 400 | 200 | 11797             | 20           | 5.87       | 0.00  | 0.00     | 11821.00             | 20           | 8.58       | 0.00  | 0.00     |

Из приказаних резултата се може видети да предложени SVNS алгоритама проналази решења доброг квалитета на свим инстанцама. Осим тога, алгоритам долази до најбољих достигнутих решења у великом броју извршавања, а када то није случај пронађена лошија решења не одступају у великој мери од најбољих. Ово говори у прилог стабилности и робусности предложене методе. Може се закључити да је предложени SVNS поуздан метод за решавање проблема MCPNCP са бинарним и парцијалним покривањем.

## Глава 6

### Закључак

У овој дисертацији разматрана су четири NP-тешка проблема дискретне оптимизације. Први проблем је у литератури познат као проблем  $p$ -резервног центра (енгл. *p-next center problem*, *PNCP*). Како би се обухватили различити сценарији из реалних ситуација, у оквиру PNCP разматра се могућност отказивања неких центара услед ванредних ситуација. У складу са тим, неопходно је да се сваком центру одреди њему резервни центар који је на најкраћој удаљености од њега, тако да уколико дође до његовог затварања, сви корисници који су били додељени том затвореном центру буду преусмерени у његов резервни центар. Задатак је одредити локације тачно  $p$  центара тако да максимално растојање од корисника до његовог резервног центра, пролазећи кроз примарни центар, буде минимално. За решавање PNCP предложена је закошена метода променљивих околина која у фази локалне претраге користи хеуристику брзе размене. Резултати методе упоређени су са најбољим резултатима из литературе.

Преостала три уведена проблема до сада нису била разматрана у литератури. То су: проблем  $p$ -резервног центра са фактором уштеде (енгл. *p-next center problem with discount factor*,  $\gamma$ PNCP), условљени проблем  $p$ -резервног центра (енгл. *Conditional p-next center problem*, *CPNCP*) и проблем максималног покривања  $p$ -резервног центра са бинарним и парцијалним покривањем (енгл. *Maximal covering p-next center problem*, *MCPNCP*). Мотивација за разматрање ових нових модификација PNCP је истраживање више различитих сценарија који се јављају у реалним ситуацијама, као и анализа различитих приступа и њихових ефеката приликом планирања сервисних мрежа. Претпоставка да је комуникација између успостављених центара ефикаснија (у смислу ресурса или времена) у односу на комуникацију између корисника и центра води до дефиниције проблема  $\gamma$ PNCP увођењем фактора уштеде времена (ресурса) транспорта између два центра. Са друге стране, у пракси се често јавља потреба за проширењем сервисне мреже која подразумева додавање нових објеката у постојећу мрежу што је обухваћено увођењем CPNCP. Коначно, приликом планирања система

хитних служби или система брзе испоруке, од интереса је утврдити да ли растојање које корисник прелази да би добио тражену услугу мање од унапред задатог полупречника покривања. Увођењем полупречника покривања дефинише се MCPNCP са бинарним и парцијалним покривањем у којима је потребно максимизовати испуњене захтеве корисника.

Сва три новоуведена проблема успешно су формулисана као проблеми целобројног линеарног програмирања (енгл. *Integer linear programming, ILP*). Коришћењем предложених ILP модела егзактим решавачем CPLEX одређена су оптимална решења за инстанце мањих димензија за све проблеме.

За добијање решења на тест примерима већих димензија, који су били ван домашаја егзактних метода, за сваки од разматраних проблема посебно су дизајниране различите варијанте једне метахеуристике - методе променљивих околина (енгл. *Variable neighborhood search, VNS*). У оквиру VNS метода посебна пажња посвећена је процедурама локалне претраге, које су имплементирани на адекватан начин тако да обезбеђују успешност и ефикасност и у случају решавања инстанци великих димензија. Имплементирана је хеуристика брзе размене уз посебно креиране процедуре за евалуацију и ажурирање које доводе до смањења временске сложености алгоритма. Развијене метахеуристичке методе тестиране су на тест примерима који су генерисани тако да покривају више различитих сценарија који се јављају при различитим приступима приликом планирања сервисних мрежа у реалним ситуацијама.

Научни допринос ове дисертације састоји се у следећим резултатима:

- Предложена је ефикасна закошена метода променљивих околина за решавање PNCP која је тестирана на инстанцама проблема PNCP из литературе и добијени резултати су упоређени са најбољим познатим решењима из литературе.
- Уведена су три нова NP-тешка проблема ( $\gamma$ PNCP, CPNCP и MCPNCP) која до сада нису била разматрана у литератури.
- За сваки од три новоуведена дискретна проблема развијени су одговарајући математички модели. Предложени модели целобројног линеарног програмирања за  $\gamma$ PNCP, CPNCP и MCPNCP решавани су коришћењем егзактног решавача CPLEX и добијена су оптимална решења за инстанце мањих димензија. У случају MCPNCP проблема развијена су два ILP модела која се могу применити и на бинарно и на парцијално покривање. Предложени модели су упоређени у смислу броја оптималних или допустивих решења које CPLEX добија користећи сваки од модела и одговарајућег времена извршавања CPLEX решавача.

- Предложене су посебно конструисане хеуристичке методе засноване на методи променљивих околина за решавање наведених проблема, а њихови резултати су упоређени са резултатима добијеним применом егзактног решавача.
- Развијене су ефикасне методе локалног претраживања у оквиру VNS алгоритма за  $\gamma$ PNCP, CPNCP и MCPNCP, прилагођене специфичностима проблема, које доприносе смањењу временске сложености алгоритма.
- Генерисане су нове инстанце за CPNCP и MCPNCP које обухватају различите сценарије из праксе, чиме је омогућена даља анализа ефикасности различитих приступа приликом планирања сервисних мрежа.
- Извршена је анализа утицаја параметара VNS алгоритама, као и параметара који се односе на сам проблем, на квалитет добијених решења.

Део резултата приказаних у дисертацији објављен је у часописима на SCI листи [94, 96], у радовима у зборницима конференција [95, 98], док је део резултата из рада [97] који је у тренутку писања рада у процесу рецензије.

Научно истраживање у овој дисертацији даје допринос областима комбинаторне оптимизације, целобројног линеарног програмирања, метахеуристика и локацијских проблема. Методе и решења приказана у овом раду могу се успешно применити како на решавање описаних, тако и на решавање сродних проблема.

Будуће истраживање би могло обухватати варијанте PNCP са ограниченим капацитетима услужних центара, као и додавање нових ограничења у модел којима се обухватају ситуације из праксе.

# Литература

- [1] Maria Albareda-Sambola, Yolanda Hinojosa, Alfredo Marín, and Justo Puerto. When centers can fail: A close second opportunity. *Computers & Operations Research*, 62:145–156, 2015.
- [2] Sibel Alumur and Bahar Y. Kara. Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190(1):1–21, 2008.
- [3] Turgut Aykin. On the location of hub facilities. *Transportation Science*, 22(2):155–157, 1988.
- [4] Manish Bansal and Kiavash Kianfar. Planar maximum coverage location problem with partial coverage and rectangular demand and service zones. *INFORMS Journal on Computing*, 29(1):152–169, 2017.
- [5] Cynthia Barnhart, Ellis L. Johnso, George L. Nemhauser, Martin W. P. Savelsbergh, and Pamela H. Vance. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research*, 46(3):316–329, 1998.
- [6] John E Beasley. OR-library. <http://people.brunel.ac.uk/~ma-stjjb/jeb/orlib/pmedinfo.html>.
- [7] Oded Berman and Zvi Drezner. A new formulation for the conditional p-median and p-center problems. *Operations Research Letters*, 36:481–483, 2008.
- [8] Oded Berman, Zvi Drezner, and Dmitry Krass. Generalized coverage: New developments in covering location models. *Computers & Operations Research*, 37(10):1675–1687, 2010.
- [9] Oded Berman and Dmitry Krass. The generalized maximal covering location problem. *Computers & Operations Research*, 29(6):563–581, 2002.
- [10] Oded Berman, Dmitry Krass, and Zvi Drezner. The gradual covering decay location problem on a network. *European Journal of Operational Research*, 151(3):474–480, 2003.

- [11] Oded Berman and David Simchi-Levi. The conditional location problem on networks. *Transportation Science*, 24:77–78, 1990.
- [12] Adda Boualem, Cyril De Runz, and Marwane Ayaida. Partial paving strategy: application to optimize the area coverage problem in mobile wireless sensor networks. *Journal of Wireless Mobile Networks, Ubiquitous Computing, and Dependable Applications*, 13(2):1–22, 2022.
- [13] Jack Brimberg, Said Salhi, Raca Todosijević, and Dragan Urošević. Variable neighborhood search: The power of change and simplicity. *Computers & Operations Research*, 155:106221, 2023.
- [14] Becky Callaghan, Said Slhi, and Jack Brimberg. Optimal solutions for the continuous p-centre problem and related  $\alpha$ -neighbour and conditional problems: A relaxation-based algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, 70(2):192–211, 2018.
- [15] Carlo Caruso, Alberto Colorni, and Leo Aloï. Dominant, an algorithm for the p-center problem. *European Journal of Operational Research*, 149(1):53–64, 2003.
- [16] Derya Celik Turkoglu and Mujde Erol Genevois. A comparative survey of service facility location problems. *Annals of Operations Research*, 292:399–468, 2020.
- [17] Doron Chen and Reuven Chen. New relaxation-based algorithms for the optimal solution of the continuous and discrete p-center problems. *Computers & Operations Research*, 36(5):1646–1655, 2009.
- [18] Doron Chen and Reuven Chen. A relaxation-based algorithm for solving the conditional p-center problem. *Operations Research Letters*, 38:215–217, 2010.
- [19] Reuven Chen. Conditional minisum and minimax location-allocation problems in Euclidean space. *Transportation Science*, 22:158–160, 1990.
- [20] Reuven Chen and Gabriel Y. Handler. The conditional p-center in the plane,. *Naval Research Logistics*, 40:117–127, 1993.
- [21] Richard Church and Charles R Velle. The maximal covering location problem. *Papers in regional science*, 32(1):101–118, 1974.
- [22] Richard L Church and Kenneth L Roberts. Generalized coverage models and public facility location. *Papers in regional science*, 53(1):117–135, 1983.
- [23] Alberto Colorni, Marco Dorigo, and Vittorio Maniezzo. Distributed optimization by ant colonies. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Life*, pages 134–142, 1991.

- [24] Mark S Daskin. *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*. John Wiley&Sons, 2011.
- [25] Tatjana Davidović, Dušan Ramljak, Milica Šelmić, and Dušan Teodorović. Bee colony optimization for the p-center problem. *Computers & Operations Research*, 38(10):1367–1376, 2011.
- [26] Janez Demšar. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. *Journal of Machine Learning Research*, 7:1–30, 2006.
- [27] Marco Dorigo Dorigo and Thomas Stutzle. *Ant Colony Optimization*. MIT Press, 2004.
- [28] Zvi Drezner. The p-centre problem-Heuristic and optimal algorithms. *Journal of the Operational Research Society*, 35(8):741–748, 1984.
- [29] Zvi Drezner. Conditional p-center problems. *Transportation Science*, 23:51–53, 1989.
- [30] Zvi Drezner. On the conditional p-median problem. *Computers & Operations Research*, 22:525–530, 1995.
- [31] Zvi Drezner and Horst W. Hamacher. *Facility Location: Applications and Theory*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [32] Inmaculada Espejo, Alfredo Marín, and Antonio M. Rodríguez-Chía. Capacitated p-center problem with failure foresight. *European Journal of Operational Research*, 247(1):229–244, 2015.
- [33] Reza Zanjirani Farahani, Nasrin Asgari, Nooshin Heidari, Mahtab Hosseini, and Mark Goh. Covering problems in facility location: A review. *Computers & Industrial Engineering*, 62(1):368–407, 2012.
- [34] Thomas A. Feo and Mauricio G. C. Resende. A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem. *Operations Research Letters*, 8:67–71, 1989.
- [35] Christodoulos A. Floudas and Panos M. Pardalos. *Encyclopedia of Optimization*. Springer, 2006.
- [36] Robert W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962.
- [37] Sergio García and Alfredo Marín. Covering location problems. In Gilbert Laporte, Stefan Nickel, and Francisco Saldanha da Gama, editors, *Location Science*, pages 93–114. Springer International Publishing, Cham, 2015.

- [38] Michael R. Garey and S.David Johnson. *Computers and intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. WH Freeman, New York, 1979.
- [39] Fred Glover. Tabu Search-Part I. *ORSA Journal on computing*, 1(3):190–206, 1989.
- [40] Fred Glover. Tabu Search-Part II. *ORSA Journal on computing*, 2(1):4–32, 1990.
- [41] Fred Glover. Tabu search and adaptive memory programming — advances, applications and challenges. In Richard S. Barr, Richard V. Helgason, and Jeffery L. Kennington, editors, *Interfaces in Computer Science and Operations Research: Advances in Metaheuristics, Optimization, and Stochastic Modeling Technologies*, pages 1–75. Springer US, Boston, MA, 1997.
- [42] Fred W. Glover and Gary A. Kochenberger. *Handbook of metaheuristics*,. Springer, Science & Business Media, 2006.
- [43] Seifollah Louis Hakimi. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problem. *Operations Research*, 13(3):462–475, 1965.
- [44] Gabriel Y. Handler and Pitu B. Mirchandani. *Location on Networks: Theory and Algorithms*. MIT Press, Cambridge, 1979.
- [45] Pierre Hansen, Jack Brimberg, Dragan Urošević, and Nenad Mladenović. Primal-dual variable neighborhood search for the simple plant-location problem. *INFORMS Journal on Computing*, 19:552–564, 2003.
- [46] Pierre Hansen and Nenad Mladenovic. A tutorial on variable neighborhood search. Technical Report G2003-46, GERAD, Montréal, Canada, July 2003.
- [47] Pierre Hansen, Nenad Mladenović, and José A Moreno Pérez. Variable neighbourhood search: methods and applications. *Annals of Operations Research*, 175:367–407, 2010.
- [48] Refael Hassin, Asaf Levin, and Dana Morad. Lexicographic local search and the p-center problem. *European Journal of Operational Research*, 151(2):265–279, December 2003.
- [49] Yolanda Hinojosa, Alfredo Marín, and Justo Puerto. Dynamically second-preferred p-center problem. *European Journal of Operational Research*, 307(1):33–47, 2023.
- [50] John H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. University Michigan Press, 1975.

- [51] John N. Hooker. Chapter 15 - operations research methods in constraint programming. In Francesca Rossi, Peter van Beek, and Toby Walsh, editors, *Handbook of Constraint Programming*, volume 2 of *Foundations of Artificial Intelligence*, pages 527–570. Elsevier, 2006.
- [52] Lester Ingberg. Simulated annealing: Practice versus theory. *Mathematical and Computer Modelling*, 18:29–57, 1993.
- [53] Chandra Ade Irawan, Said Slhi, and Zvi Drezner. Hybrid meta-heuristics with VNS and exact methods: Application to large unconditional and conditional vertex p-centre problems. *Journal of Heuristics*, 22(4):507–537, 2016.
- [54] Olivera Janković. An efficient genetic algorithm for the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 28:201–218, 2018.
- [55] Olivera Janković, Stefan Mišković, Zorica Stanimirović, and Raca Todosijević. Novel formulations and vns-based heuristics for single and multiple allocation p-hub maximal covering problems. *Annals of Operations Research*, 259(1):191–216, 2017.
- [56] Derviş Karaboğa. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. In *Technical Report-TR06*. Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
- [57] Orhan Karasakal, Esra Karasakal, and Özgün Töreyn. A partial coverage hierarchical location allocation model for health services. *European journal of industrial engineering*, 17(1):115–147, 2023.
- [58] Orhan Karasakal and Esra K Karasakal. A maximal covering location model in the presence of partial coverage. *Computers & Operations Research*, 31(9):1515–1526, 2004.
- [59] O. Kariv and Seifollah Louis Hakimi. An algorithmic approach to network location problems. part 1: The p-centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37(3):513–538, 1979.
- [60] James Kennedy and Russell Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, volume 4, pages 1942–1948 vol.4, 1995.
- [61] Scott Kirkpatrick, C. Daniel Jr. Gelatt, and Mario P. Jr. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.
- [62] Vanja Korać, Jozef Kratica, and Aleksandar Savić. An improved genetic algorithm for the multi level uncapacitated facility location problem. *International Journal of Computers Communications & Control*, 8(6), 2013.

- [63] Martine Labbé, Dominique Peeters, and Jacques-François Thisse. Chapter 7 location on networks. In *Network Routing*, volume 8 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 551–624. Elsevier, 1995.
- [64] C. C. Lin. A note about the new emergency facility insertion in an undirected connected graph. In *Proceedings of the Sixth Annual Pittsburgh Conference on Modelling Simulation, Pittsburgh, Penn*, volume 1, pages 375–377, 1975.
- [65] Mariana A Londe, Carlos E Andrade, and Luciana S Pessoa. An evolutionary approach for the p-next center problem. *Expert Systems with Applications*, 175:114728, 2021.
- [66] Ana Dolores López-Sánchez, Jesús Sánchez-Oro, and Alfredo Garcia Hernández-Díaz. GRASP and VNS for solving the p-next center problem. *Computers & Operations Research*, 104:295–303, 2019.
- [67] Helena R. Lourenço, Olivier C. Martin, and Thomas Stützle. Iterated local search. In Fred Glover and Gary A. Kochenberger, editors, *Handbook of Metaheuristics*, pages 320–353. Springer US, Boston, MA, 2003.
- [68] Panta Lučić and Dušan Teodorović. Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence. In *Preprints of the TRI-STAN IV Triennial Symposium on Transportation Analysis*, pages 441–445. University of Azores, Azores Islands, Portugal, 2001.
- [69] Vittorio Maniezzo, Thomas Stützle, and Stefan Voß. *Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*. Annals of Information Systems. Springer US, 2009.
- [70] Miroslav Marić. An efficient genetic algorithm for solving the multi-level uncapacitated facility location problem. *Computing and Informatics*, 29(2):183–201, 2010.
- [71] Nimrod Megiddo, Eitan Zemel, and S Louis Hakimi. The maximum coverage location problem. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):253–261, 1983.
- [72] Edward Minieka. Conditional centers and medians on a graph. *Networks*, 10:265–272, 1980.
- [73] Pitu B. Mirchandani and Richard L. Francis. *Discrete location theory*. New York : Wiley, 1990.
- [74] John Mitchell. Branch-and-cut algorithms for combinatorial optimization problems1. *Handbook of Applied Optimization*, 01 2002.
- [75] Nenad Mladenović. A variable neighborhood algorithm-a new metaheuristic for combinatorial optimization. In *papers presented at Optimization Days*, volume 12, 1995.

- [76] Nenad Mladenović and Pierre Hansen. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097–1100, 1997.
- [77] Nenad Mladenović, Martine Labbe, and Pierre Hansen. Solving the p-center problem with tabu search and variable neighborhood search. *Networks An International Journal*, 42(1):48–64, 2003.
- [78] Seyed R. Mousavi. Exploiting flat subspaces in local search for p-center problem and two fault-tolerant variants. *Computers & Operations Research*, 149:106023, 2023.
- [79] Alan T Murray. Maximal coverage location problem: impacts, significance, and evolution. *International Regional Science Review*, 39(1):5–27, 2016.
- [80] Meltem Peker and Bahar Y Kara. The p-hub maximal covering problem and extensions for gradual decay functions. *Omega*, 54:158–172, 2015.
- [81] Riccardo Poli. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008, 2008.
- [82] Mauricio G.C. Resende and Celso C. Ribeiro. *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures: Advances, Hybridizations, and Applications*, pages 283–319. Springer US, Boston, MA, 2010.
- [83] Mauricio G.C. Resende and Celso C. Ribeiro. *Optimization by GRASP*. Springer, 2016.
- [84] Charles S ReVelle and Horst A Eiselt. Location analysis: A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research*, 165(1):1–19, 2005.
- [85] Dalibor Ristić, Nenad Mladenović, Mustapha Ratli, Raca Todosijević, and Dragan Urošević. Auxiliary data structures and techniques to speed up solving of the p-next center problem: A VNS heuristic. *Applied Soft Computing*, 140:110276, 2023.
- [86] Dalibor Ristić, Nenad Mladenović, Raca Todosijević, and Dragan Urošević. Filtered variable neighborhood search method for the p-next center problem. *International Journal for Traffic and Transport Engineering*, 11(2):294–309, 2021.
- [87] Dalibor Ristić, Dragan Urošević, Nenad Mladenović, and Raca Todosijević. Solving the p-second center problem with variable neighborhood search. *Computer Science and Information Systems*, 20(1):95–115, 2023.
- [88] Said Salhi. Defining tabu list size and aspiration criterion within tabu search methods. *Computers & Operations Research*, 29(1):67–86, 2002.

- [89] David J. Sheshkin. *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. CRC Press, Boca Raton, 2000.
- [90] Olivera Stančić, Zorica Stanimirović, Raca Todosijević, and Stefan Mišković. Mathematical formulations and solution methods for the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem. *Discrete Optimization*, 43:100672, 2022.
- [91] Balram Suman and Prabhat Kumar. A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization. *Journal of the Operational Research Society*, 57(10):1143–1160, 2006.
- [92] El-Ghazali Talbi. *Metaheuristics: from design to implementation*. John Wiley & Sons, 2009.
- [93] Barbaros C Tansel, Richard L Francis, and Timothy J Lowe. State of the art - Location on networks: A survey. part I: the p-center and p-median problems. *Management Science*, 29(4):482–497, 1983.
- [94] Jelena Tasić. An efficient solution approach to the p-next center problem. *Matematički Vesnik*, 76(1-2):66–83, 2024.
- [95] Jelena Tasić, Zorica Dražić, and Zorica Stanimirović. Variable neighborhood search for the p-next center problem with discount factor. In *Proceedings of the LII International Symposium on Operational Research (SYM-OP-IS 2025)*. University of Belgrade - Faculty of Organizational Sciences, September 7-10 2025.
- [96] Jelena Tasić, Zorica Dražić, and Zorica Stanimirović. A vns method for the conditional p-next center problem. *Computers & Operations Research*, 175:106916, 2025.
- [97] Jelena Tasić, Zorica Dražić, and Zorica Stanimirović. Maximal covering p-next center problem: models and an efficient solution method. *Na recenziji*, 2026.
- [98] Jelena Tasić and Zorica Stanimirović. Metoda promenljivih okolina za problem p-rezervnog centra. In *Proceedings of the XLIX International Symposium on Operational Research (SYM-OP-IS 2022)*. University of Belgrade - Faculty of Economics and Business, September 19-22 2022.
- [99] Dušan Teodorović, Milica Šelmić, and Tatjana Davidović. Bee colony optimization PART II: The application survey. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 25:185–219, 2014.
- [100] Francis J Vasko, Dennis D Newhart, Kenneth L Stott Jr, and Floyd E Wolf. A large-scale application of the partial coverage uncapacitated facility location problem. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1):11–20, 2003.

- [101] Vedat Verter. *Uncapacitated and Capacitated Facility Location Problems*, pages 25–37. Springer US, New York, NY, 2011.
- [102] Jian Wang, Han Liu, Shi An, and Na Cui. A new partial coverage locating model for cooperative fire services. *Information Sciences*, 373:527–538, 2016.
- [103] Alfred Weber. Über den standort der industrien, tübingen. *English Translation: The Theory of the Location of Industries*, 1909.
- [104] R.A. Whitaker. A fast algorithm for the greedy interchange for large-scale clustering and median location problems. *INFOR*, 21(2), 1983.
- [105] Laurence A Wolsey. *Integer programming*. Wiley, 1998.
- [106] Qingyun Zhang, Zhipeng Lü, Zhouxing Su, and Chumin Li. A vertex weighting-based double-tabu search algorithm for the classical p-center problem. *Computers & Operations Research*, 160:106373, 2023.
- [107] Qingyun Zhang, Zhouxing Su, Zhipeng Lü, and Lingxiao Yang. A weighting-based tabu search algorithm for the p-next center problem. In *Proceedings of the Thirty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-22)*, pages 4828–4834, 2022.

# Прилог А

## Резултати тестирања за PNCP

У Табелама А.1-А.5 приказани су комплетни резултати тестирања SVNS [94] алгоритма. За сваку инстанцу су, осим имена, приказани следећи подаци:  $n$  - број чворова,  $p$  - број центара које треба успоставити,  $best$  - најбоља вредност функције циља добијена у 20 извршавања,  $\#best$  - број извршавања у којима је добијена вредност  $best$ ,  $t_{best}$  - просечно време потребно да се вредност  $best$  достигне по први пут (у секундама),  $t_{tot}$  - просечно укупно време извршавања (у секундама),  $agap$  - просечно одступање добијених вредности од  $best$  (у проценти) и  $std\_dev$  - стандардна девијација добијених вредности, која се одређује по формули:  $std\_dev = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (gap_i - agap)^2}$ , где је  $gap_i$  процентуално одступање решења добијеног у  $i$ -том извршавању од  $best$  вредности. Решења која нису оптимална означена су са \* уз вредност у  $best$  колони.

Табела А.1: Резултати SVNS алгоритма на скупу малих инстанци ( $10 \leq n \leq 50$ ,  $5 \leq p \leq 20$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed1    | 10  | 5   | 84     | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |
| pmed1    | 20  | 5   | 120    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed1    | 20  | 10  | 95     | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |
| pmed1    | 30  | 5   | 126    | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed1    | 30  | 10  | 95     | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed1    | 40  | 5   | 144    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed1    | 40  | 10  | 111    | 20       | 0.01          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed1    | 40  | 20  | 89     | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed1    | 50  | 10  | 110    | 5        | 0.01          | 0.05           | 0.68       | 0.39           |
| pmed1    | 50  | 20  | 89     | 20       | 0.01          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed2    | 10  | 5   | 121    | 17       | 0.00          | 0.00           | 0.87       | 2.07           |
| pmed2    | 20  | 5   | 147    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed2    | 20  | 10  | 99     | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |

Табела А.1: (Наставак) Резултати SVNS алгоритма на скупу малих инстанци ( $10 \leq n \leq 50$ ,  $5 \leq p \leq 20$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed2    | 30  | 5   | 169    | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed2    | 30  | 10  | 110    | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed2    | 40  | 5   | 164    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed2    | 40  | 10  | 112    | 19       | 0.01          | 0.05           | 0.94       | 4.09           |
| pmed2    | 40  | 20  | 96     | 20       | 0.01          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed2    | 50  | 10  | 140    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed2    | 50  | 20  | 99     | 20       | 0.00          | 0.05           | 0          | 0              |
| pmed3    | 10  | 5   | 77     | 20       | 0.00          | 0.00           | 0          | 0              |
| pmed3    | 20  | 5   | 145    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed3    | 20  | 10  | 77     | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |
| pmed3    | 30  | 5   | 157    | 20       | 0.00          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed3    | 30  | 10  | 122    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed3    | 40  | 5   | 157    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed3    | 40  | 10  | 105    | 20       | 0.00          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed3    | 40  | 20  | 77     | 20       | 0.00          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed3    | 50  | 10  | 125    | 15       | 0.01          | 0.06           | 0.4        | 0.69           |
| pmed3    | 50  | 20  | 87     | 20       | 0.00          | 0.05           | 0          | 0              |
| pmed4    | 10  | 5   | 126    | 20       | 0.00          | 0.00           | 0          | 0              |
| pmed4    | 20  | 5   | 139    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed4    | 20  | 10  | 125    | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |
| pmed4    | 30  | 5   | 173    | 20       | 0.00          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed4    | 30  | 10  | 122    | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed4    | 40  | 5   | 175    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed4    | 40  | 10  | 122    | 13       | 0.01          | 0.04           | 0.29       | 0.39           |
| pmed4    | 40  | 20  | 85     | 20       | 0.00          | 0.031          | 0          | 0              |
| pmed4    | 50  | 10  | 126    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed4    | 50  | 20  | 91     | 20       | 0.01          | 0.05           | 0          | 0              |
| pmed5    | 10  | 5   | 125    | 20       | 0.00          | 0.00           | 0          | 0              |
| pmed5    | 20  | 5   | 139    | 20       | 0.00          | 0.02           | 0          | 0              |
| pmed5    | 20  | 10  | 91     | 20       | 0.00          | 0.01           | 0          | 0              |
| pmed5    | 30  | 5   | 155    | 19       | 0.01          | 0.04           | 0.03       | 0.14           |
| pmed5    | 30  | 10  | 120    | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed5    | 40  | 5   | 164    | 20       | 0.00          | 0.05           | 0          | 0              |
| pmed5    | 40  | 10  | 127    | 20       | 0.00          | 0.04           | 0          | 0              |
| pmed5    | 40  | 20  | 91     | 20       | 0.00          | 0.03           | 0          | 0              |
| pmed5    | 50  | 10  | 121    | 20       | 0.00          | 0.06           | 0          | 0              |
| pmed5    | 50  | 20  | 89     | 12       | 0.01          | 0.04           | 0.45       | 0.55           |

Табела А.2: Резултати SVNS алгоритма на скупу средњих инстанци ( $60 \leq n \leq 200$ ,  $10 \leq p \leq 100$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed1    | 60  | 10  | 112    | 20       | 0.01          | 0.80           | 0          | 0              |
| pmed1    | 60  | 20  | 89     | 20       | 0.03          | 0.58           | 0          | 0              |
| pmed1    | 60  | 30  | 89     | 20       | 0.00          | 0.55           | 0          | 0              |
| pmed1    | 70  | 10  | 119    | 20       | 0.14          | 1.25           | 0          | 0              |
| pmed1    | 70  | 20  | 99     | 20       | 0.01          | 1.03           | 0          | 0              |
| pmed1    | 70  | 30  | 73     | 20       | 0.01          | 0.80           | 0          | 0              |
| pmed1    | 80  | 10  | 129    | 20       | 0.31          | 1.77           | 0          | 0              |
| pmed1    | 80  | 20  | 102    | 20       | 0.12          | 1.47           | 0          | 0              |
| pmed1    | 80  | 30  | 85     | 20       | 0.23          | 1.07           | 0          | 0              |
| pmed1    | 90  | 10  | 133    | 20       | 0.06          | 1.87           | 0          | 0              |
| pmed1    | 90  | 20  | 107    | 4        | 0.46          | 1.79           | 0.75       | 0.37           |
| pmed1    | 90  | 30  | 87     | 20       | 0.11          | 1.38           | 0          | 0              |
| pmed1    | 90  | 50  | 70     | 20       | 0.05          | 1.11           | 0          | 0              |
| pmed1    | 100 | 10  | 133    | 20       | 0.08          | 2.31           | 0          | 0              |
| pmed1    | 100 | 20  | 108    | 20       | 0.13          | 1.94           | 0          | 0              |
| pmed1    | 100 | 30  | 93     | 1        | 0.12          | 1.57           | 2.04       | 0.47           |
| pmed1    | 100 | 50  | 70     | 16       | 0.32          | 1.25           | 0.29       | 0.57           |
| pmed2    | 60  | 10  | 140    | 20       | 0.01          | 0.94           | 0          | 0              |
| pmed2    | 60  | 20  | 99     | 20       | 0.08          | 0.75           | 0          | 0              |
| pmed2    | 60  | 30  | 96     | 20       | 0.00          | 0.59           | 0          | 0              |
| pmed2    | 70  | 10  | 138    | 20       | 0.01          | 1.31           | 0          | 0              |
| pmed2    | 70  | 20  | 102    | 20       | 0.01          | 1.11           | 0          | 0              |
| pmed2    | 70  | 30  | 96     | 20       | 0.00          | 0.70           | 0          | 0              |
| pmed2    | 80  | 10  | 138    | 20       | 0.09          | 1.73           | 0          | 0              |
| pmed2    | 80  | 20  | 109    | 20       | 0.09          | 1.47           | 0          | 0              |
| pmed2    | 80  | 30  | 97     | 20       | 0.08          | 1.06           | 0          | 0              |
| pmed2    | 90  | 10  | 138    | 20       | 0.46          | 2.14           | 0          | 0              |
| pmed2    | 90  | 20  | 108    | 8        | 0.23          | 1.95           | 0.56       | 0.45           |
| pmed2    | 90  | 30  | 96     | 20       | 0.03          | 1.33           | 0          | 0              |
| pmed2    | 90  | 50  | 96     | 20       | 0.00          | 0.91           | 0          | 0              |
| pmed2    | 100 | 10  | 135    | 20       | 0.09          | 2.43           | 0          | 0              |
| pmed2    | 100 | 20  | 107    | 20       | 0.23          | 2.26           | 0          | 0              |
| pmed2    | 100 | 30  | 96     | 20       | 0.06          | 1.57           | 0          | 0              |
| pmed2    | 100 | 50  | 96     | 20       | 0.00          | 0.90           | 0          | 0              |
| pmed3    | 60  | 10  | 124    | 20       | 0.05          | 1.27           | 0          | 0              |
| pmed3    | 60  | 20  | 97     | 20       | 0.00          | 0.68           | 0          | 0              |
| pmed3    | 60  | 30  | 73     | 20       | 0.01          | 0.88           | 0          | 0              |

Табела А.2: (Наставак) Резултати SVNS алгоритма на скупу средњих инстанци ( $60 \leq n \leq 200$ ,  $10 \leq p \leq 100$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed3    | 70  | 10  | 121    | 20       | 0.10          | 1.58           | 0          | 0              |
| pmed3    | 70  | 20  | 97     | 20       | 0.01          | 0.97           | 0          | 0              |
| pmed3    | 70  | 30  | 82     | 20       | 0.07          | 0.89           | 0          | 0              |
| pmed3    | 80  | 10  | 121    | 20       | 0.17          | 1.94           | 0          | 0              |
| pmed3    | 80  | 20  | 93     | 20       | 0.06          | 1.22           | 0          | 0              |
| pmed3    | 80  | 30  | 84     | 20       | 0.14          | 1.04           | 0          | 0              |
| pmed3    | 90  | 10  | 148    | 20       | 0.02          | 2.42           | 0          | 0              |
| pmed3    | 90  | 20  | 105    | 19       | 0.23          | 1.88           | 0.24       | 1.04           |
| pmed3    | 90  | 30  | 93     | 20       | 0.03          | 1.47           | 0          | 0              |
| pmed3    | 90  | 50  | 93     | 20       | 0.00          | 1.18           | 0          | 0              |
| pmed3    | 100 | 10  | 151    | 20       | 0.04          | 3.20           | 0          | 0              |
| pmed3    | 100 | 20  | 109    | 7        | 0.74          | 2.29           | 2.16       | 1.75           |
| pmed3    | 100 | 30  | 93     | 20       | 0.02          | 1.56           | 0          | 0              |
| pmed3    | 100 | 50  | 93     | 20       | 0.00          | 1.09           | 0          | 0              |
| pmed4    | 60  | 10  | 134    | 8        | 0.15          | 0.96           | 0.45       | 0.37           |
| pmed4    | 60  | 20  | 93     | 20       | 0.00          | 0.71           | 0          | 0              |
| pmed4    | 60  | 30  | 79     | 20       | 0.03          | 0.56           | 0          | 0              |
| pmed4    | 70  | 10  | 146    | 9        | 0.12          | 1.47           | 0.38       | 0.34           |
| pmed4    | 70  | 20  | 102    | 20       | 0.01          | 0.94           | 0          | 0              |
| pmed4    | 70  | 30  | 85     | 20       | 0.01          | 0.72           | 0          | 0              |
| pmed4    | 80  | 10  | 146    | 8        | 0.45          | 1.88           | 0.41       | 0.34           |
| pmed4    | 80  | 20  | 114    | 19       | 0.19          | 1.29           | 0.04       | 0.19           |
| pmed4    | 80  | 30  | 90     | 20       | 0.03          | 0.88           | 0          | 0              |
| pmed4    | 90  | 10  | 147    | 20       | 0.04          | 2.36           | 0          | 0              |
| pmed4    | 90  | 20  | 112    | 11       | 0.54          | 1.52           | 1.21       | 1.33           |
| pmed4    | 90  | 30  | 92     | 20       | 0.07          | 1.06           | 0          | 0              |
| pmed4    | 90  | 50  | 82     | 20       | 0.02          | 1.06           | 0          | 0              |
| pmed4    | 100 | 10  | 147    | 16       | 0.47          | 2.90           | 0.14       | 0.27           |
| pmed4    | 100 | 20  | 118    | 17       | 0.79          | 1.72           | 0.13       | 0.30           |
| pmed4    | 100 | 30  | 96     | 20       | 0.07          | 1.36           | 0          | 0              |
| pmed4    | 100 | 50  | 82     | 20       | 0.06          | 1.11           | 0          | 0              |
| pmed5    | 60  | 10  | 119    | 20       | 0.01          | 0.86           | 0          | 0              |
| pmed5    | 60  | 20  | 90     | 20       | 0.00          | 0.68           | 0          | 0              |
| pmed5    | 60  | 30  | 82     | 20       | 0.00          | 0.57           | 0          | 0              |
| pmed5    | 70  | 10  | 119    | 20       | 0.01          | 1.12           | 0          | 0              |
| pmed5    | 70  | 20  | 86     | 20       | 0.02          | 0.76           | 0          | 0              |
| pmed5    | 70  | 30  | 85     | 20       | 0.00          | 0.64           | 0          | 0              |

Табела А.2: (Наставак) Результаты SVNS алгоритма на скупу средних инстанци ( $60 \leq n \leq 200$ ,  $10 \leq p \leq 100$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed5    | 80  | 10  | 118    | 20       | 0.09          | 1.42           | 0          | 0              |
| pmed5    | 80  | 20  | 90     | 20       | 0.02          | 1.14           | 0          | 0              |
| pmed5    | 80  | 30  | 85     | 20       | 0.00          | 0.83           | 0          | 0              |
| pmed5    | 90  | 10  | 119    | 20       | 0.02          | 1.96           | 0          | 0              |
| pmed5    | 90  | 20  | 92     | 20       | 0.03          | 1.40           | 0          | 0              |
| pmed5    | 90  | 30  | 85     | 20       | 0.01          | 1.12           | 0          | 0              |
| pmed5    | 100 | 10  | 119    | 20       | 0.01          | 2.37           | 0          | 0              |
| pmed5    | 100 | 20  | 94     | 13       | 0.36          | 1.87           | 0.37       | 0.51           |
| pmed5    | 100 | 30  | 85     | 20       | 0.03          | 1.50           | 0          | 0              |
| pmed6    | 150 | 20  | 77     | 20       | 0.41          | 4.83           | 0          | 0              |
| pmed6    | 150 | 30  | 64     | 2        | 1.99          | 4.62           | 2.89       | 1.02           |
| pmed6    | 150 | 50  | 56     | 20       | 0.20          | 3.27           | 0          | 0              |
| pmed6    | 150 | 80  | 56     | 20       | 0.01          | 1.54           | 0          | 0              |
| pmed6    | 200 | 20  | 77*    | 20       | 1.50          | 10.65          | 0          | 0              |
| pmed6    | 200 | 30  | 66*    | 20       | 3.90          | 9.20           | 0          | 0              |
| pmed6    | 200 | 50  | 49     | 1        | 5.50          | 8.79           | 3.78       | 2.07           |
| pmed6    | 200 | 80  | 49     | 20       | 0.18          | 4.18           | 0          | 0              |
| pmed6    | 200 | 100 | 49     | 20       | 0.06          | 3.18           | 0          | 0              |
| pmed7    | 150 | 20  | 67     | 13       | 1.92          | 4.87           | 0.52       | 0.71           |
| pmed7    | 150 | 30  | 59     | 20       | 0.29          | 3.69           | 0          | 0              |
| pmed7    | 150 | 50  | 59     | 20       | 0.04          | 3.00           | 0          | 0              |
| pmed7    | 150 | 80  | 59     | 20       | 0.01          | 1.47           | 0          | 0              |
| pmed7    | 200 | 20  | 68*    | 20       | 1.11          | 8.68           | 0          | 0              |
| pmed7    | 200 | 30  | 60     | 9        | 4.04          | 7.85           | 2.08       | 1.96           |
| pmed7    | 200 | 50  | 50     | 14       | 3.59          | 6.43           | 0.9        | 1.48           |
| pmed7    | 200 | 80  | 46     | 20       | 1.01          | 4.06           | 0          | 0              |
| pmed7    | 200 | 100 | 46     | 20       | 0.23          | 3.25           | 0          | 0              |
| pmed8    | 150 | 20  | 70     | 4        | 1.54          | 5.99           | 4          | 2.10           |
| pmed8    | 150 | 30  | 58     | 20       | 0.63          | 4.34           | 0          | 0              |
| pmed8    | 150 | 50  | 58     | 20       | 0.05          | 2.86           | 0          | 0              |
| pmed8    | 150 | 80  | 58     | 20       | 0.01          | 1.41           | 0          | 0              |
| pmed8    | 200 | 20  | 81*    | 2        | 2.52          | 11.00          | 1.60       | 1.11           |
| pmed8    | 200 | 30  | 70*    | 20       | 1.24          | 9.49           | 0          | 0              |
| pmed8    | 200 | 50  | 68     | 20       | 0.23          | 6.46           | 0          | 0              |
| pmed8    | 200 | 80  | 68     | 20       | 0.03          | 3.35           | 0          | 0              |
| pmed8    | 200 | 100 | 68     | 20       | 0.02          | 2.48           | 0          | 0              |

Табела А.2: (Наставак) Резултати SVNS алгоритма на скупу средњих инстанци ( $60 \leq n \leq 200$ ,  $10 \leq p \leq 100$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed9    | 150 | 20  | 71     | 20       | 0.59          | 4.46           | 0          | 0              |
| pmed9    | 150 | 30  | 71     | 20       | 0.07          | 3.15           | 0          | 0              |
| pmed9    | 150 | 50  | 71     | 20       | 0.02          | 2.41           | 0          | 0              |
| pmed9    | 150 | 80  | 71     | 20       | 0.00          | 1.15           | 0          | 0              |
| pmed9    | 200 | 30  | 71     | 20       | 0.85          | 8.68           | 0          | 0              |
| pmed9    | 200 | 50  | 71     | 20       | 0.22          | 5.26           | 0          | 0              |
| pmed9    | 200 | 80  | 71     | 20       | 0.05          | 2.60           | 0          | 0              |
| pmed9    | 200 | 100 | 71     | 20       | 0.05          | 1.98           | 0          | 0              |
| pmed10   | 150 | 20  | 62     | 20       | 0.09          | 4.21           | 0          | 0              |
| pmed10   | 150 | 30  | 62     | 20       | 0.03          | 3.12           | 0          | 0              |
| pmed10   | 150 | 50  | 62     | 20       | 0.01          | 2.37           | 0          | 0              |
| pmed10   | 150 | 80  | 62     | 20       | 0.00          | 1.21           | 0          | 0              |
| pmed10   | 200 | 30  | 70     | 20       | 0.03          | 5.69           | 0          | 0              |
| pmed10   | 200 | 50  | 70     | 20       | 0.01          | 3.67           | 0          | 0              |
| pmed10   | 200 | 80  | 70     | 20       | 0.00          | 1.96           | 0          | 0              |
| pmed10   | 200 | 100 | 70     | 20       | 0.00          | 1.59           | 0          | 0              |

Табела А.3: Резултати SVNS алгоритма на скупу великих инстанци ( $250 \leq n \leq 400$ ,  $30 \leq p \leq 200$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed11   | 250 | 30  | 44     | 12       | 1.56          | 2.26           | 2.5        | 3.80           |
| pmed11   | 250 | 50  | 42     | 5        | 0.88          | 1.69           | 2.5        | 1.76           |
| pmed11   | 250 | 70  | 42     | 20       | 0.43          | 1.16           | 0          | 0              |
| pmed11   | 250 | 90  | 42     | 20       | 0.13          | 0.91           | 0          | 0              |
| pmed11   | 300 | 60  | 51     | 20       | 0.26          | 2.05           | 0          | 0              |
| pmed11   | 300 | 80  | 51     | 20       | 0.10          | 1.55           | 0          | 0              |
| pmed11   | 300 | 100 | 51     | 20       | 0.05          | 1.31           | 0          | 0              |
| pmed11   | 300 | 150 | 51     | 20       | 0.02          | 1.01           | 0          | 0              |
| pmed12   | 250 | 30  | 48*    | 5        | 1.64          | 2.12           | 3.96       | 3.29           |
| pmed12   | 250 | 50  | 45*    | 1        | 0.63          | 1.70           | 5          | 2.32           |
| pmed12   | 250 | 70  | 43     | 4        | 0.72          | 1.25           | 1.98       | 1.10           |
| pmed12   | 250 | 90  | 43     | 19       | 0.36          | 0.99           | 0.12       | 0.51           |
| pmed12   | 300 | 60  | 72     | 20       | 0.03          | 1.16           | 0          | 0              |
| pmed12   | 300 | 80  | 72     | 20       | 0.03          | 0.88           | 0          | 0              |

Табела А.3: (Наставак) Резултати SVNS алгоритма на скупу великих инстанци ( $250 \leq n \leq 400$ ,  $30 \leq p \leq 200$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed12   | 300 | 100 | 72     | 20       | 0.02          | 0.75           | 0          | 0              |
| pmed12   | 300 | 150 | 72     | 20       | 0.02          | 0.92           | 0          | 0              |
| pmed13   | 250 | 30  | 48*    | 3        | 1.41          | 2.09           | 5.83       | 4.18           |
| pmed13   | 250 | 50  | 44     | 1        | 1.16          | 1.77           | 5.45       | 2.32           |
| pmed13   | 250 | 70  | 44     | 16       | 0.68          | 1.26           | 0.80       | 1.65           |
| pmed13   | 250 | 90  | 44     | 20       | 0.21          | 1.02           | 0          | 0              |
| pmed13   | 300 | 60  | 43*    | 1        | 1.74          | 2.33           | 7.09       | 3.99           |
| pmed13   | 300 | 80  | 41*    | 2        | 1.09          | 1.85           | 5.12       | 2.66           |
| pmed13   | 300 | 100 | 39     | 5        | 1.22          | 1.71           | 2.31       | 1.60           |
| pmed13   | 300 | 150 | 39     | 20       | 0.34          | 1.25           | 0          | 0              |
| pmed14   | 250 | 30  | 60     | 20       | 0.42          | 2.16           | 0          | 0              |
| pmed14   | 250 | 50  | 60     | 20       | 0.14          | 1.57           | 0          | 0              |
| pmed14   | 250 | 70  | 60     | 20       | 0.05          | 0.97           | 0          | 0              |
| pmed14   | 250 | 90  | 60     | 20       | 0.04          | 0.74           | 0          | 0              |
| pmed14   | 300 | 60  | 60     | 20       | 0.20          | 1.91           | 0          | 0              |
| pmed14   | 300 | 80  | 60     | 20       | 0.13          | 2.09           | 0          | 0              |
| pmed14   | 300 | 100 | 60     | 20       | 0.07          | 1.25           | 0          | 0              |
| pmed14   | 300 | 150 | 60     | 20       | 0.02          | 1.05           | 0          | 0              |
| pmed15   | 250 | 30  | 49     | 15       | 1.17          | 2.05           | 0.51       | 0.88           |
| pmed15   | 250 | 50  | 49     | 20       | 0.36          | 1.54           | 0          | 0              |
| pmed15   | 250 | 70  | 49     | 20       | 0.12          | 1.03           | 0          | 0              |
| pmed15   | 250 | 90  | 49     | 20       | 0.07          | 0.82           | 0          | 0              |
| pmed15   | 300 | 60  | 44     | 17       | 1.15          | 2.01           | 0.34       | 0.81           |
| pmed15   | 300 | 80  | 44     | 20       | 0.61          | 1.99           | 0          | 0              |
| pmed15   | 300 | 100 | 44     | 20       | 0.30          | 1.76           | 0          | 0              |
| pmed15   | 300 | 150 | 44     | 20       | 0.03          | 0.99           | 0          | 0              |
| pmed16   | 350 | 40  | 37*    | 1        | 3.14          | 4.77           | 9.86       | 5.75           |
| pmed16   | 350 | 70  | 34*    | 12       | 1.86          | 2.94           | 2.35       | 3.03           |
| pmed16   | 350 | 90  | 33     | 2        | 1.26          | 2.33           | 2.73       | 0.91           |
| pmed16   | 350 | 120 | 33     | 15       | 1.14          | 2.45           | 0.76       | 1.31           |
| pmed16   | 400 | 80  | 34*    | 17       | 8.75          | 12.87          | 0.74       | 1.83           |
| pmed16   | 400 | 100 | 33     | 4        | 5.71          | 9.77           | 2.42       | 1.21           |
| pmed16   | 400 | 140 | 33     | 15       | 2.48          | 6.53           | 0.76       | 1.31           |
| pmed16   | 400 | 200 | 33     | 20       | 0.73          | 4.37           | 0          | 0              |
| pmed17   | 350 | 40  | 39*    | 19       | 2.33          | 4.44           | 0.13       | 0.56           |
| pmed17   | 350 | 70  | 37     | 14       | 1.65          | 2.69           | 1.35       | 2.18           |
| pmed17   | 350 | 90  | 37     | 19       | 0.68          | 2.10           | 0.27       | 1.18           |
| pmed17   | 350 | 120 | 37     | 20       | 0.23          | 1.59           | 0          | 0              |

Табела А.4: Резултати SVNS алгоритма на скупу великих инстанци ( $250 \leq n \leq 400$ ,  $30 \leq p \leq 200$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed17   | 400 | 80  | 37     | 18       | 6.08          | 11.16          | 0.41       | 1.29           |
| pmed17   | 400 | 100 | 37     | 20       | 3.09          | 9.37           | 0          | 0              |
| pmed17   | 400 | 140 | 37     | 20       | 0.70          | 6.02           | 0          | 0              |
| pmed17   | 400 | 200 | 37     | 20       | 0.15          | 4.04           | 0          | 0              |
| pmed18   | 350 | 40  | 50     | 20       | 0.24          | 4.45           | 0          | 0              |
| pmed18   | 350 | 70  | 50     | 20       | 0.08          | 2.35           | 0          | 0              |
| pmed18   | 350 | 90  | 50     | 20       | 0.05          | 1.74           | 0          | 0              |
| pmed18   | 350 | 120 | 50     | 20       | 0.02          | 1.31           | 0          | 0              |
| pmed18   | 400 | 80  | 50     | 20       | 0.48          | 9.33           | 0          | 0              |
| pmed18   | 400 | 100 | 50     | 20       | 0.42          | 7.23           | 0          | 0              |
| pmed18   | 400 | 140 | 50     | 20       | 0.19          | 4.86           | 0          | 0              |
| pmed18   | 400 | 200 | 50     | 20       | 0.02          | 3.99           | 0          | 0              |
| pmed19   | 350 | 40  | 38*    | 1        | 2.47          | 4.40           | 6.84       | 3.05           |
| pmed19   | 350 | 70  | 35     | 1        | 1.99          | 2.955          | 5.57       | 2.11           |
| pmed19   | 350 | 90  | 35     | 12       | 1.60          | 2.38           | 1.14       | 1.40           |
| pmed19   | 350 | 120 | 35     | 20       | 0.62          | 1.76           | 0          | 0              |
| pmed19   | 400 | 80  | 34*    | 2        | 9.47          | 13.04          | 6.62       | 3.07           |
| pmed19   | 400 | 100 | 32     | 4        | 7.13          | 9.72           | 6.41       | 4.01           |
| pmed19   | 400 | 140 | 32     | 19       | 3.22          | 6.48           | 0.16       | 0.68           |
| pmed19   | 400 | 200 | 32     | 20       | 0.35          | 4.06           | 0          | 0              |

Табела А.5: Резултати SVNS алгоритма на Additional [86] скупу инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ,  $5 \leq p \leq 200$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed1    | 100 | 5   | 166    | 20       | 0.00          | 0.61           | 0          | 0              |
| pmed2    | 100 | 10  | 135    | 20       | 0.09          | 0.45           | 0          | 0              |
| pmed3    | 100 | 10  | 151    | 20       | 0.03          | 0.57           | 0          | 0              |
| pmed4    | 100 | 20  | 118    | 4        | 0.10          | 0.33           | 0.68       | 0.34           |
| pmed5    | 100 | 33  | 85     | 20       | 0.01          | 0.25           | 0          | 0              |
| pmed6    | 200 | 5   | 107    | 20       | 0.09          | 3.09           | 0          | 0              |
| pmed7    | 200 | 10  | 84     | 11       | 0.61          | 2.35           | 0.54       | 0.59           |
| pmed8    | 200 | 20  | 82     | 9        | 0.52          | 1.73           | 1.34       | 1.21           |
| pmed9    | 200 | 40  | 71     | 19       | 0.21          | 1.06           | 0.28       | 1.23           |
| pmed10   | 200 | 67  | 70     | 20       | 0.01          | 0.48           | 0          | 0              |

Табела А.5: (Наставак) Резултати SVNS алгоритма на Additional [86] скупу инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ,  $5 \leq p \leq 200$ ).

| Инстанца | $n$ | $p$ | $best$ | $\#best$ | $t_{best}(s)$ | $t_{total}(s)$ | $agap(\%)$ | $std\_dev(\%)$ |
|----------|-----|-----|--------|----------|---------------|----------------|------------|----------------|
| pmed11   | 300 | 5   | 70     | 20       | 0.13          | 6.99           | 0          | 0              |
| pmed12   | 300 | 10  | 72     | 20       | 0.30          | 5.23           | 0          | 0              |
| pmed13   | 300 | 30  | 49     | 1        | 2.56          | 3.41           | 5.41       | 2.68           |
| pmed14   | 300 | 60  | 60     | 20       | 0.19          | 1.80           | 0          | 0              |
| pmed15   | 300 | 100 | 44     | 20       | 0.22          | 1.30           | 0          | 0              |
| pmed16   | 400 | 5   | 54     | 20       | 16.99         | 61.37          | 0          | 0              |
| pmed17   | 400 | 10  | 46     | 1        | 15.99         | 53.84          | 2.07       | 0.47           |
| pmed18   | 400 | 40  | 50     | 20       | 2.42          | 19.10          | 0          | 0              |
| pmed19   | 400 | 80  | 34     | 2        | 9.43          | 13.32          | 6.76       | 2.96           |
| pmed20   | 400 | 133 | 40     | 20       | 0.96          | 6.43           | 0          | 0              |
| pmed21   | 500 | 5   | 48     | 20       | 2.22          | 102.03         | 0          | 0              |
| pmed22   | 500 | 10  | 49     | 16       | 41.92         | 98.21          | 0.41       | 0.82           |
| pmed23   | 500 | 50  | 36     | 1        | 17.09         | 30.3           | 3.75       | 1.82           |
| pmed24   | 500 | 100 | 33     | 16       | 9.67          | 17.56          | 0.61       | 1.21           |
| pmed25   | 500 | 167 | 44     | 20       | 0.59          | 5.67           | 0          | 0              |
| pmed26   | 600 | 5   | 47     | 20       | 14.73         | 157.90         | 0          | 0              |
| pmed27   | 600 | 10  | 39     | 5        | 32.56         | 126.56         | 1.92       | 1.11           |
| pmed28   | 600 | 60  | 57     | 20       | 0.03          | 5.81           | 0          | 0              |
| pmed29   | 600 | 120 | 36     | 20       | 1.59          | 15.65          | 0          | 0              |
| pmed30   | 600 | 200 | 40     | 20       | 0.04          | 5.65           | 0          | 0              |
| pmed31   | 700 | 5   | 35     | 20       | 3.37          | 248.32         | 0          | 0              |
| pmed32   | 700 | 10  | 72     | 20       | 0.06          | 38.15          | 0          | 0              |
| pmed33   | 700 | 70  | 28     | 5        | 35.7          | 65.17          | 3.93       | 2.74           |
| pmed34   | 700 | 140 | 41     | 20       | 0.45          | 19.02          | 0          | 0              |
| pmed35   | 800 | 5   | 36     | 20       | 11.54         | 333.88         | 0          | 0              |
| pmed36   | 800 | 10  | 42     | 20       | 1.84          | 266.33         | 0          | 0              |
| pmed37   | 800 | 80  | 33     | 20       | 3.84          | 62.85          | 0          | 0              |
| pmed38   | 900 | 5   | 40     | 20       | 7.41          | 430.79         | 0          | 0              |
| pmed39   | 900 | 10  | 74     | 20       | 0.14          | 63.97          | 0          | 0              |
| pmed40   | 900 | 90  | 25     | 2        | 62.44         | 103.11         | 5          | 2.79           |

## Прилог Б

### Резултати тестирања за $\gamma$ PNSP

У Табелама Б.1 и Б.2 приказани су комплетни резултати на скупу малих и Additional [86] инстанци. Након имена инстанце, броја чворова  $n$  и броја центара  $p$  које треба успоставити, за сваку вредност параметра  $\gamma$  најпре су приказани резултати CPLEX решавача, а затим и VNS алгоритма. За CPLEX решавач дате су вредности функције циља *best*, као и времена  $t$  потребна да се те вредности пронађу. Пронађена решења за која CPLEX решавач није доказао оптималност означена су знаком „\*” уз вредности у *best* колони, док ознака „OOM” у *best* колони значи да је извршавање CPLEX решавача завршено услед недостатка меморије. За VNS алгоритам у колонама означеним са *best* налазе се најбоља решења достигнута у 20 извршавања, затим број извршавања  $\#best$  у којима је *best* вредност достигнута и  $t_{tot}$  просечно укупно време извршавања алгоритма.

Табела Б.1: Детаљни резултати на скупу малих инстанци ( $n \leq 50$ ).

|       |     |     | $\gamma = 0.1$ |        |        |          |           |        | $\gamma = 0.4$ |        |          |           |        |        | $\gamma = 0.6$ |          |           |  |  |  |
|-------|-----|-----|----------------|--------|--------|----------|-----------|--------|----------------|--------|----------|-----------|--------|--------|----------------|----------|-----------|--|--|--|
|       |     |     | CPLEX          |        | VNS    |          |           | CPLEX  |                | VNS    |          |           | CPLEX  |        | VNS            |          |           |  |  |  |
| Инст. | $n$ | $p$ | $best$         | $t$    | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$            | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$    | $best$         | $\#best$ | $t_{tot}$ |  |  |  |
| pmed1 | 10  | 5   | 34.6           | 0.05   | 34.6   | 20       | 0.00      | 48.4   | 0.03           | 48.4   | 20       | 0.00      | 57.6   | 0.03   | 57.6           | 20       | 0.00      |  |  |  |
| pmed1 | 20  | 5   | 77.1           | 0.39   | 77.1   | 20       | 0.01      | 90.8   | 0.30           | 90.8   | 20       | 0.01      | 101    | 0.30   | 101            | 20       | 0.01      |  |  |  |
| pmed1 | 20  | 10  | 37.5           | 0.25   | 37.5   | 20       | 0.02      | 53.4   | 0.17           | 53.4   | 20       | 0.01      | 58.8   | 0.16   | 58.8           | 20       | 0.01      |  |  |  |
| pmed1 | 30  | 5   | 98.8           | 4.59   | 98.8   | 20       | 0.02      | 112.2  | 3.14           | 112.2  | 20       | 0.02      | 119.8  | 2.14   | 119.8          | 20       | 0.02      |  |  |  |
| pmed1 | 30  | 10  | 59.4           | 4.84   | 59.4   | 20       | 0.02      | 70     | 2.44           | 70     | 20       | 0.02      | 78.6   | 2.05   | 78.6           | 20       | 0.02      |  |  |  |
| pmed1 | 40  | 5   | 103.9          | 56.69  | 103.9  | 20       | 0.04      | 124.6  | 15.83          | 124.6  | 20       | 0.04      | 133.8  | 10.14  | 133.8          | 20       | 0.04      |  |  |  |
| pmed1 | 40  | 10  | 72.1           | 42.58  | 72.1   | 20       | 0.04      | 82.6   | 13.19          | 82.6   | 20       | 0.04      | 93.6   | 12.44  | 93.6           | 20       | 0.03      |  |  |  |
| pmed1 | 40  | 20  | 44.5           | 5.88   | 44.5   | 20       | 0.05      | 52.8   | 3.66           | 52.8   | 20       | 0.05      | 57.2   | 1.30   | 57.2           | 20       | 0.05      |  |  |  |
| pmed1 | 50  | 10  | 85.7           | 724.22 | 85.7   | 20       | 0.07      | 96.4   | 107.97         | 96.4   | 20       | 0.06      | 104.6  | 95.22  | 104.6          | 18       | 0.05      |  |  |  |
| pmed1 | 50  | 20  | 50             | 22.33  | 50     | 13       | 0.07      | 61.6   | 6.94           | 61.6   | 20       | 0.06      | 67     | 3.03   | 67             | 20       | 0.06      |  |  |  |
| pmed2 | 10  | 5   | 54.2           | 0.03   | 54.2   | 20       | 0.00      | 78.8   | 0.05           | 78.8   | 20       | 0.00      | 95.2   | 0.02   | 95.2           | 20       | 0.00      |  |  |  |
| pmed2 | 20  | 5   | 90.2           | 0.52   | 90.2   | 20       | 0.01      | 117    | 0.41           | 117    | 20       | 0.01      | 132.6  | 0.44   | 132.6          | 20       | 0.01      |  |  |  |
| pmed2 | 20  | 10  | 53.4           | 0.22   | 53.4   | 20       | 0.01      | 68.8   | 0.22           | 68.8   | 20       | 0.01      | 79.2   | 0.19   | 79.2           | 20       | 0.01      |  |  |  |
| pmed2 | 30  | 5   | 107.4          | 4.84   | 107.4  | 20       | 0.03      | 128.4  | 2.13           | 128.4  | 20       | 0.03      | 144.8  | 2.95   | 144.8          | 20       | 0.02      |  |  |  |
| pmed2 | 30  | 10  | 66.2           | 4.11   | 66.2   | 20       | 0.03      | 79.4   | 2.27           | 79.4   | 20       | 0.03      | 87.6   | 1.69   | 87.6           | 20       | 0.02      |  |  |  |
| pmed  | 40  | 5   | 110.1          | 56.17  | 110.1  | 20       | 0.05      | 130.8  | 19.64          | 130.8  | 20       | 0.04      | 143    | 17.78  | 143            | 20       | 0.04      |  |  |  |
| pmed2 | 40  | 10  | 78.8           | 33.48  | 78.8   | 20       | 0.04      | 95     | 21.11          | 95     | 16       | 0.04      | 108    | 12.97  | 108            | 2        | 0.03      |  |  |  |
| pmed2 | 40  | 20  | 46.4           | 4.27   | 46.4   | 20       | 0.05      | 60.8   | 2.94           | 60.8   | 20       | 0.05      | 69.8   | 2.89   | 69.8           | 20       | 0.05      |  |  |  |
| pmed2 | 50  | 10  | 87.5           | 305.48 | 87.5   | 20       | 0.06      | 107.8  | 176.58         | 107.8  | 10       | 0.06      | 114.8  | 124.56 | 114.8          | 12       | 0.05      |  |  |  |
| pmed2 | 50  | 20  | 55             | 17.83  | 55     | 9        | 0.07      | 69.6   | 7.80           | 69.6   | 19       | 0.07      | 78.8   | 6.73   | 78.8           | 18       | 0.07      |  |  |  |
| pmed3 | 10  | 5   | 25.6           | 0.02   | 25.6   | 20       | 0.00      | 36.4   | 0.02           | 36.4   | 20       | 0.00      | 46.2   | 0.02   | 46.2           | 20       | 0.00      |  |  |  |
| pmed3 | 20  | 5   | 79.1           | 0.48   | 79.1   | 20       | 0.01      | 111    | 0.36           | 111    | 20       | 0.01      | 125.8  | 0.39   | 125.8          | 20       | 0.01      |  |  |  |
| pmed3 | 20  | 10  | 38.5           | 0.22   | 38.5   | 20       | 0.01      | 55     | 0.16           | 55     | 20       | 0.01      | 64.4   | 0.14   | 64.4           | 20       | 0.01      |  |  |  |

Табела Б.1: (Наставак) Детаљни резултати на скупу малих инстанци ( $n \leq 50$ ).

|       |     |     | $\gamma = 0.1$ |        |        |          |           |        | $\gamma = 0.4$ |        |          |           |        |       | $\gamma = 0.6$ |          |           |        |          |           |
|-------|-----|-----|----------------|--------|--------|----------|-----------|--------|----------------|--------|----------|-----------|--------|-------|----------------|----------|-----------|--------|----------|-----------|
|       |     |     | CPLEX          |        |        | VNS      |           |        | CPLEX          |        |          | VNS       |        |       | CPLEX          |          |           | VNS    |          |           |
| Инст. | $n$ | $p$ | $best$         | $t$    | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$            | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$   | $best$         | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ |
| pmed3 | 30  | 5   | 104.6          | 10.52  | 104.6  | 20       | 0.02      | 119.8  | 3.16           | 119.8  | 20       | 0.03      | 133.6  | 2.23  | 133.6          | 20       | 0.03      |        |          |           |
| pmed3 | 30  | 10  | 71             | 2.56   | 71     | 20       | 0.03      | 92.8   | 1.56           | 92.8   | 20       | 0.02      | 108.2  | 1.72  | 108.2          | 20       | 0.02      |        |          |           |
| pmed3 | 40  | 5   | 106            | 55.70  | 106    | 20       | 0.04      | 126    | 24.75          | 126    | 20       | 0.04      | 135    | 16.03 | 135            | 20       | 0.04      |        |          |           |
| pmed3 | 40  | 10  | 80             | 44.67  | 80     | 20       | 0.04      | 98.2   | 20.48          | 98.2   | 20       | 0.03      | 103.8  | 13.14 | 103.8          | 20       | 0.03      |        |          |           |
| pmed3 | 40  | 20  | 38.5           | 7.81   | 38.5   | 20       | 0.05      | 46.4   | 1.97           | 46.4   | 20       | 0.05      | 60.2   | 1.34  | 60.2           | 20       | 0.05      |        |          |           |
| pmed3 | 50  | 10  | 84.5           | 522.72 | 84.5   | 20       | 0.07      | 100.2  | 154.09         | 100.2  | 20       | 0.06      | 109.6  | 65.19 | 109.6          | 19       | 0.05      |        |          |           |
| pmed3 | 50  | 20  | 59             | 54.39  | 59     | 20       | 0.08      | 70.6   | 22.95          | 70.6   | 9        | 0.07      | 77.8   | 18.23 | 79.8           | 19       | 0.06      |        |          |           |
| pmed4 | 10  | 5   | 56.9           | 0.06   | 56.9   | 20       | 0.00      | 92.6   | 0.03           | 92.6   | 20       | 0.00      | 116.4  | 0.03  | 116.4          | 20       | 0.00      |        |          |           |
| pmed4 | 20  | 5   | 98.1           | 0.67   | 98.1   | 20       | 0.02      | 113.2  | 0.48           | 113.2  | 20       | 0.01      | 117.8  | 0.31  | 117.8          | 20       | 0.01      |        |          |           |
| pmed4 | 20  | 10  | 69.2           | 0.30   | 69.2   | 20       | 0.01      | 92.2   | 0.28           | 92.2   | 20       | 0.01      | 101.4  | 0.23  | 101.4          | 20       | 0.01      |        |          |           |
| pmed4 | 30  | 5   | 98.1           | 3.80   | 98.1   | 20       | 0.03      | 124.4  | 2.84           | 124.4  | 20       | 0.03      | 142    | 2.66  | 142            | 20       | 0.03      |        |          |           |
| pmed4 | 30  | 10  | 74.7           | 3.36   | 74.7   | 20       | 0.03      | 94.2   | 2.92           | 94.2   | 20       | 0.02      | 105.2  | 2.25  | 105.2          | 20       | 0.02      |        |          |           |
| pmed4 | 40  | 5   | 119            | 41.08  | 119    | 20       | 0.04      | 141.8  | 15.03          | 141.8  | 20       | 0.04      | 155    | 13.41 | 155            | 20       | 0.04      |        |          |           |
| pmed4 | 40  | 10  | 80.6           | 35.94  | 80.6   | 20       | 0.04      | 104.2  | 24.08          | 104.2  | 20       | 0.03      | 115.6  | 20.22 | 115.6          | 9        | 0.03      |        |          |           |
| pmed4 | 40  | 20  | 50.7           | 4.81   | 50.7   | 20       | 0.05      | 68.6   | 1.63           | 68.6   | 20       | 0.05      | 75.8   | 0.91  | 75.8           | 20       | 0.05      |        |          |           |
| pmed4 | 50  | 10  | 85.2           | 395.42 | 85.2   | 20       | 0.07      | 109.4  | 192.84         | 109.4  | 20       | 0.06      | 116.4  | 69.08 | 116.4          | 16       | 0.05      |        |          |           |
| pmed4 | 50  | 20  | 63             | 49.52  | 63     | 20       | 0.07      | 70.8   | 7.52           | 70.8   | 20       | 0.07      | 78.2   | 3.06  | 78.2           | 18       | 0.07      |        |          |           |
| pmed5 | 10  | 5   | 82.1           | 0.03   | 82.1   | 20       | 0.00      | 108.2  | 0.05           | 108.2  | 20       | 0.00      | 113.8  | 0.03  | 113.8          | 20       | 0.00      |        |          |           |
| pmed5 | 20  | 5   | 85             | 0.55   | 85     | 20       | 0.02      | 113    | 0.44           | 113    | 20       | 0.01      | 128.8  | 0.47  | 128.8          | 20       | 0.01      |        |          |           |
| pmed5 | 20  | 10  | 56.5           | 0.30   | 56.5   | 20       | 0.01      | 76     | 0.22           | 76     | 20       | 0.01      | 83.8   | 0.20  | 83.8           | 20       | 0.01      |        |          |           |
| pmed5 | 30  | 5   | 100.5          | 3.45   | 100.5  | 20       | 0.03      | 117.4  | 2.52           | 117.4  | 20       | 0.03      | 134.2  | 1.98  | 134.2          | 20       | 0.03      |        |          |           |
| pmed5 | 30  | 10  | 78.9           | 5.20   | 78.9   | 20       | 0.02      | 86.4   | 1.92           | 86.4   | 20       | 0.02      | 96.6   | 1.39  | 96.6           | 20       | 0.02      |        |          |           |
| pmed5 | 40  | 5   | 123.9          | 90.52  | 123.9  | 20       | 0.04      | 139.2  | 17.34          | 139.2  | 20       | 0.04      | 150    | 12.75 | 150            | 20       | 0.04      |        |          |           |
| pmed5 | 40  | 10  | 79.6           | 22.81  | 79.6   | 20       | 0.04      | 93.4   | 4.38           | 93.4   | 20       | 0.03      | 102.6  | 9.95  | 102.6          | 20       | 0.04      |        |          |           |
| pmed5 | 40  | 20  | 52.9           | 4.22   | 52.9   | 20       | 0.05      | 66.4   | 1.38           | 66.4   | 20       | 0.05      | 74.6   | 1.28  | 74.6           | 20       | 0.05      |        |          |           |
| pmed5 | 50  | 10  | 79.6           | 158.11 | 79.6   | 20       | 0.06      | 97.8   | 43.41          | 97.8   | 20       | 0.05      | 102.6  | 28.45 | 102.6          | 20       | 0.06      |        |          |           |
| pmed5 | 50  | 20  | 54             | 9.28   | 54     | 20       | 0.07      | 66     | 9.56           | 66     | 20       | 0.07      | 70.8   | 2.59  | 70.8           | 20       | 0.06      |        |          |           |

Табела Б.2: Детаљни резултати на скупу Additional [86] инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ).

|        |     |     | $\gamma = 0.1$ |      |        |          |           |        | $\gamma = 0.4$ |        |          |           |        |         | $\gamma = 0.6$ |          |           |  |  |  |
|--------|-----|-----|----------------|------|--------|----------|-----------|--------|----------------|--------|----------|-----------|--------|---------|----------------|----------|-----------|--|--|--|
|        |     |     | CPLEX          |      | VNS    |          |           |        | CPLEX          |        | VNS      |           |        |         | CPLEX          |          | VNS       |  |  |  |
| Инст.  | $n$ | $p$ | $best$         | $t$  | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$            | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$ | $t$     | $best$         | $\#best$ | $t_{tot}$ |  |  |  |
| pmed1  | 100 | 5   | 140.7*         | 7200 | 133.3  | 20       | 1.99      | 146.2* | 7200           | 146.2  | 20       | 1.89      | 154.8* | 7200    | 154.8          | 20       | 1.85      |  |  |  |
| pmed2  | 100 | 10  | 114.6*         | 7200 | 104.6  | 20       | 1.53      | 121.8* | 7200           | 117.2  | 20       | 1.40      | 130.6* | 7200    | 124.4          | 20       | 1.15      |  |  |  |
| pmed3  | 100 | 10  | 110*           | 7200 | 102    | 10       | 1.76      | 132.2* | 7200           | 121.8  | 20       | 1.35      | 144.2* | 7200    | 133.8          | 17       | 1.43      |  |  |  |
| pmed4  | 100 | 20  | 82.9*          | 7200 | 80.3   | 2        | 1.97      | 94.2*  | 7200           | 94.2   | 1        | 1.72      | 102.6* | 7200    | 102            | 15       | 1.63      |  |  |  |
| pmed5  | 100 | 33  | 49.8*          | 7200 | 49.8   | 20       | 2.84      | 56.2   | 93.16          | 56.2   | 17       | 2.54      | 58     | 48.2    | 58             | 7        | 2.60      |  |  |  |
| pmed6  | 200 | 5   | 113.5*         | 7200 | 88.6   | 20       | 5.44      | 112.8* | 7200           | 99.4   | 20       | 4.86      | 118.4* | 7200    | 99.6           | 20       | 5.21      |  |  |  |
| pmed7  | 200 | 10  | 81.6*          | 7200 | 69.1   | 16       | 4.67      | 88*    | 7200           | 76.4   | 7        | 3.95      | 97.4*  | 7200    | 81.6           | 20       | 3.67      |  |  |  |
| pmed8  | 200 | 20  | 72.4*          | 7200 | 58.3   | 10       | 5.41      | 81.4*  | 7200           | 66.8   | 3        | 4.57      | 82.2*  | 7200    | 72.4           | 1        | 4.45      |  |  |  |
| pmed9  | 200 | 40  | 56.8*          | 7200 | 39.4   | 8        | 8.64      | 52.2*  | 7200           | 47.6   | 4        | 7.45      | 62.2*  | 7200    | 51.2           | 7        | 7.09      |  |  |  |
| pmed10 | 200 | 67  | 21.6*          | 7200 | 21.5   | 17       | 16.33     | 28     | 3552.79        | 28     | 19       | 14.64     | 42     | 137.2   | 42             | 20       | 10.01     |  |  |  |
| pmed11 | 300 | 5   | OOM            |      | 60.8   | 20       | 8.41      | 72.2*  | 7200           | 64.2   | 20       | 7.05      | 72.4*  | 7200    | 66.8           | 20       | 8.10      |  |  |  |
| pmed12 | 300 | 10  | 98.9*          | 7200 | 53.5   | 20       | 8.28      | 120.4* | 7200           | 59.6   | 14       | 6.81      | 92.6*  | 7200    | 62             | 10       | 6.12      |  |  |  |
| pmed13 | 300 | 30  | OOM            |      | 38.1   | 10       | 9.17      | 48.4*  | 7200           | 42.2   | 3        | 8.25      | 77*    | 7200    | 44.2           | 3        | 7.63      |  |  |  |
| pmed14 | 300 | 60  | 61.2*          | 7200 | 27.7   | 10       | 23.16     | 73.6*  | 7200           | 33.2   | 1        | 19.33     | 67*    | 7200    | 36.6           | 3        | 18.20     |  |  |  |
| pmed15 | 300 | 100 | 44.1*          | 7200 | 18.4   | 1        | 46.50     | 64.4*  | 7200           | 23.4   | 1        | 40.01     | 27.6*  | 7200    | 26.4           | 1        | 37.27     |  |  |  |
| pmed16 | 400 | 5   | OOM            |      | 48.2   | 20       | 9.84      | OOM    |                | 50.4   | 20       | 10.23     | OOM    |         | 51.6           | 20       | 11.02     |  |  |  |
| pmed17 | 400 | 10  | OOM            |      | 40.4   | 14       | 12.94     | 68.6*  | 7200           | 43.8   | 1        | 9.68      | 64*    | 7200    | 45.2           | 6        | 10.18     |  |  |  |
| pmed18 | 400 | 40  | 60.9*          | 7200 | 30.3   | 1        | 19.72     | OOM    |                | 34.8   | 2        | 15.90     | OOM    |         | 37.8           | 1        | 15.48     |  |  |  |
| pmed19 | 400 | 80  | 44.8*          | 7200 | 20.6   | 3        | 41.07     | 47.8*  | 7200           | 26     | 2        | 34.51     | 55.6*  | 7200    | 27.8           | 1        | 33.57     |  |  |  |
| pmed20 | 400 | 133 | 44.1*          | 7200 | 15.9   | 1        | 89.88     | OOM    |                | 21.4   | 1        | 75.11     | 35.2*  | 7200    | 24             | 9        | 79.08     |  |  |  |
| pmed21 | 500 | 5   | OOM            |      | 41.2   | 20       | 22.95     | OOM    |                | 44.8   | 20       | 19.34     | OOM    |         | 46.4           | 20       | 20.56     |  |  |  |
| pmed22 | 500 | 10  | OOM            |      | 39.8   | 19       | 19.37     | OOM    |                | 44.2   | 2        | 14.22     | OOM    |         | 45.8           | 7        | 14.47     |  |  |  |
| pmed23 | 500 | 50  | OOM            |      | 23.8   | 1        | 28.62     | OOM    |                | 27.4   | 2        | 23.45     | OOM    |         | 29.8           | 2        | 23.73     |  |  |  |
| pmed24 | 500 | 100 | OOM            |      | 17.9   | 1        | 65.11     | 49.8*  | 7200           | 21.2   | 1        | 58.07     | OOM    |         | 22.8           | 2        | 59.87     |  |  |  |
| pmed25 | 500 | 167 | OOM            |      | 15.4   | 1        | 146.62    | OOM    |                | 19     | 1        | 126.70    | 26.4   | 1856.52 | 26.4           | 19       | 115.52    |  |  |  |
| pmed26 | 600 | 5   | OOM            |      | 39.3   | 20       | 33.50     | OOM    |                | 42.2   | 19       | 27.51     | OOM    |         | 44.6           | 20       | 26.25     |  |  |  |

Табела Б.2: Детаљни резултати на скупу Additional [86] инстанци ( $100 \leq n \leq 900$ ).

| Инст.  | $n$ | $p$ | $\gamma = 0.1$ |      |        |          |           | $\gamma = 0.4$ |     |        |          |           | $\gamma = 0.6$ |        |        |          |           |
|--------|-----|-----|----------------|------|--------|----------|-----------|----------------|-----|--------|----------|-----------|----------------|--------|--------|----------|-----------|
|        |     |     | CPLEX          |      | VNS    |          |           | CPLEX          |     | VNS    |          |           | CPLEX          |        | VNS    |          |           |
|        |     |     | $best$         | $t$  | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$         | $t$ | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ | $best$         | $t$    | $best$ | $\#best$ | $t_{tot}$ |
| pmed27 | 600 | 10  | OOM            | 32.9 | 20     | 22.35    | OOM       | 35.2           | 1   | 18.02  | OOM      | 35.9      | 9              | 17.31  |        |          |           |
| pmed28 | 600 | 60  | OOM            | 20.1 | 1      | 35.70    | OOM       | 22.8           | 1   | 32.91  | OOM      | 34.2      | 20             | 20.85  |        |          |           |
| pmed29 | 600 | 120 | OOM            | 15.9 | 1      | 99.46    | OOM       | 20.2           | 2   | 91.84  | OOM      | 21.6      | 3              | 88.46  |        |          |           |
| pmed30 | 600 | 200 | OOM            | 13.8 | 1      | 230.55   | OOM       | 18             | 1   | 191.29 | OOM      | 24        | 19             | 183.45 |        |          |           |
| pmed31 | 700 | 5   | OOM            | 30.9 | 20     | 37.80    | OOM       | 33.2           | 20  | 36.25  | OOM      | 33.8      | 20             | 40.40  |        |          |           |
| pmed32 | 700 | 10  | OOM            | 30.1 | 1      | 28.52    | OOM       | 32.4           | 20  | 26.04  | OOM      | 43.2      | 20             | 20.36  |        |          |           |
| pmed33 | 700 | 70  | OOM            | 17.4 | 1      | 52.81    | OOM       | 20.2           | 1   | 45.83  | OOM      | 22.6      | 1              | 47.26  |        |          |           |
| pmed34 | 700 | 140 | OOM            | 14.7 | 2      | 146.10   | OOM       | 18             | 1   | 130.67 | OOM      | 24.6      | 20             | 113.51 |        |          |           |
| pmed35 | 800 | 5   | OOM            | 30.7 | 20     | 37.96    | OOM       | 33             | 9   | 38.48  | OOM      | 34.6      | 20             | 40.19  |        |          |           |
| pmed36 | 800 | 10  | OOM            | 28.3 | 2      | 32.23    | OOM       | 30.6           | 2   | 29.93  | OOM      | 31.8      | 1              | 32.76  |        |          |           |
| pmed37 | 800 | 80  | OOM            | 17.4 | 1      | 71.88    | OOM       | 20.8           | 1   | 61.02  | OOM      | 22.4      | 1              | 66.09  |        |          |           |
| pmed38 | 900 | 5   | OOM            | 29.8 | 20     | 62.92    | OOM       | 32             | 20  | 47.42  | OOM      | 33        | 20             | 51.93  |        |          |           |
| pmed39 | 900 | 10  | OOM            | 24.2 | 11     | 40.61    | OOM       | 29.6           | 20  | 30.81  | OOM      | 44.4      | 20             | 14.94  |        |          |           |
| pmed40 | 900 | 90  | OOM            | 16.2 | 1      | 98.57    | OOM       | 18.6           | 1   | 89.84  | OOM      | 20.2      | 2              | 93.47  |        |          |           |

## Прилог Ц

# Резултати тестирања за CPNCP

### Ц.1 Подешавање параметра $\alpha$

Табела Ц.1: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу малих инстанци са  $20 \leq n \leq 50$ .

|                |                 | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|----------------|-----------------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
| Инст.          | <i>opt/b.k.</i> | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed1_20_10_5  | 95              | 95           | 20           | 0.0026        | 95             | 20           | 0.00165       | 95             | 20           | 0.0026        | 95             | 20           | 0.0012        | 95             | 20           | 0.0006        |
| pmed1_50_20_5  | 89              | 89           | 18           | 0.01735       | 89             | 20           | 0.01735       | 89             | 20           | 0.017         | 89             | 20           | 0.02225       | 89             | 20           | 0.0224        |
| pmed1_50_20_10 | 94              | 94           | 18           | 0.0104        | 94             | 20           | 0.008         | 94             | 20           | 0.00805       | 94             | 20           | 0.00795       | 94             | 20           | 0.0078        |
| pmed2_20_10_5  | 100             | 100          | 20           | 0.0018        | 100            | 20           | 0.00255       | 100            | 20           | 0.0019        | 100            | 20           | 0.0013        | 100            | 20           | 0.0009        |
| pmed2_40_20_5  | 98              | 98           | 20           | 0.0024        | 98             | 20           | 0.0031        | 98             | 20           | 0.0028        | 98             | 20           | 0.0028        | 98             | 20           | 0.0026        |
| pmed2_50_20_10 | 104             | 104          | 20           | 0.0018        | 104            | 20           | 0.0026        | 104            | 20           | 0.00235       | 104            | 20           | 0.0023        | 104            | 20           | 0.00255       |
| pmed3_30_10_5  | 122             | 122          | 20           | 0.0014        | 122            | 20           | 0.00145       | 122            | 20           | 0.00225       | 122            | 20           | 0.0013        | 122            | 20           | 0.0011        |
| pmed3_40_10_5  | 122             | 122          | 20           | 0.00255       | 122            | 20           | 0.0032        | 122            | 20           | 0.0027        | 122            | 20           | 0.00225       | 122            | 20           | 0.00215       |
| pmed3_50_20_15 | 93              | 93           | 20           | 0.0016        | 93             | 20           | 0.0018        | 93             | 20           | 0.00185       | 93             | 20           | 0.00165       | 93             | 20           | 0.00165       |
| pmed4_40_20_5  | 91              | 91           | 20           | 0.00475       | 91             | 20           | 0.0042        | 91             | 20           | 0.0038        | 91             | 20           | 0.00425       | 91             | 20           | 0.00435       |
| pmed4_50_10_5  | 141             | 141          | 20           | 0.0039        | 141            | 20           | 0.00355       | 141            | 20           | 0.00315       | 141            | 20           | 0.003         | 141            | 20           | 0.0029        |
| pmed4_50_20_10 | 108             | 108          | 20           | 0.00175       | 108            | 20           | 0.002         | 108            | 20           | 0.0018        | 108            | 20           | 0.00185       | 108            | 20           | 0.00185       |
| pmed5_20_10_5  | 91              | 91           | 20           | 0.00125       | 91             | 20           | 0.0028        | 91             | 20           | 0.00105       | 91             | 20           | 0.00065       | 91             | 20           | 0.00135       |
| pmed5_40_20_10 | 97              | 97           | 20           | 0.00245       | 97             | 20           | 0.00215       | 97             | 20           | 0.00155       | 97             | 20           | 0.00215       | 97             | 20           | 0.0022        |
| pmed5_40_20_15 | 96              | 96           | 20           | 0.00185       | 96             | 20           | 0.0018        | 96             | 20           | 0.00175       | 96             | 20           | 0.00175       | 96             | 20           | 0.002         |
| <b>Просек</b>  | 102.73          | 102.73       | 19.73        | 0.0039        | 102.73         | 20           | 0.0039        | 102.73         | 20           | 0.0036        | 102.73         | 20           | 0.0038        | 102.73         | 20           | 0.0038        |

Табела II.2: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу средњих инстанци са  $50 < n \leq 100$ .

| Инст.           | опт/б.к. | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|-----------------|----------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
|                 |          | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed1_60_20_5   | 95       | 95           | 20           | 0.0235        | 95             | 20           | 0.0151        | 95             | 20           | 0.0162        | 95             | 20           | 0.01565       | 95             | 20           | 0.0171        |
| pmed1_60_20_10  | 97       | 97           | 17           | 0.1036        | 97             | 20           | 0.05235       | 97             | 20           | 0.0531        | 97             | 20           | 0.13865       | 97             | 19           | 0.1587        |
| pmed1_70_20_5   | 99       | 99           | 17           | 0.21425       | 99             | 20           | 0.05795       | 99             | 20           | 0.0661        | 99             | 20           | 0.09615       | 99             | 20           | 0.0974        |
| pmed1_80_20_5   | 105      | 105          | 18           | 0.3717        | 105            | 20           | 0.2277        | 105            | 20           | 0.19485       | 105            | 20           | 0.14925       | 105            | 20           | 0.17265       |
| pmed1_80_30_10  | 91       | 91           | 12           | 0.2889        | 91             | 20           | 0.09495       | 91             | 20           | 0.0822        | 91             | 20           | 0.0921        | 91             | 20           | 0.18075       |
| pmed1_90_50_15  | 70       | 70           | 14           | 0.70105       | 70             | 20           | 0.47865       | 70             | 20           | 0.45095       | 70             | 20           | 0.39085       | 70             | 20           | 0.3869        |
| pmed1_100_30_10 | 98       | 98           | 8            | 0.5934        | 98             | 20           | 0.4607        | 98             | 20           | 0.4866        | 98             | 18           | 0.53145       | 98             | 19           | 0.6078        |
| pmed1_100_50_10 | 77       | 77           | 5            | 0.9919        | 77             | 20           | 0.73595       | 77             | 20           | 0.806         | 77             | 16           | 1.22145       | 77             | 9            | 1.47175       |
| pmed2_70_20_5   | 102      | 102          | 20           | 0.09575       | 102            | 20           | 0.02845       | 102            | 20           | 0.02875       | 102            | 20           | 0.02965       | 102            | 20           | 0.0313        |
| pmed2_70_30_10  | 96       | 96           | 20           | 0.0168        | 96             | 20           | 0.01545       | 96             | 20           | 0.014         | 96             | 20           | 0.0143        | 96             | 20           | 0.01585       |
| pmed2_90_10_5   | 145      | 145          | 20           | 0.0766        | 145            | 20           | 0.0702        | 145            | 20           | 0.07035       | 145            | 20           | 0.0424        | 145            | 20           | 0.04055       |
| pmed2_90_30_5   | 96       | 96           | 19           | 0.4041        | 96             | 20           | 0.1155        | 96             | 20           | 0.0857        | 96             | 20           | 0.0996        | 96             | 20           | 0.1949        |
| pmed2_90_30_10  | 97       | 97           | 17           | 0.22845       | 97             | 20           | 0.05255       | 97             | 20           | 0.05575       | 97             | 20           | 0.09535       | 97             | 20           | 0.10665       |
| pmed2_90_50_5   | 96       | 96           | 20           | 0.01635       | 96             | 20           | 0.0096        | 96             | 20           | 0.0103        | 96             | 20           | 0.01135       | 96             | 20           | 0.0116        |
| pmed2_100_30_10 | 98       | 98           | 17           | 0.3425        | 98             | 20           | 0.10035       | 98             | 20           | 0.1054        | 98             | 20           | 0.2128        | 98             | 20           | 0.3739        |
| pmed2_100_50_5  | 96       | 96           | 20           | 0.0244        | 96             | 20           | 0.018         | 96             | 20           | 0.01855       | 96             | 20           | 0.0191        | 96             | 20           | 0.02005       |
| pmed3_60_30_5   | 79       | 79           | 20           | 0.0431        | 79             | 20           | 0.0212        | 79             | 20           | 0.02255       | 79             | 20           | 0.02595       | 79             | 20           | 0.02015       |
| pmed3_70_20_5   | 104      | 104          | 19           | 0.1205        | 104            | 20           | 0.02935       | 104            | 20           | 0.03005       | 104            | 20           | 0.02905       | 104            | 20           | 0.04415       |
| pmed3_70_30_5   | 82       | 82           | 11           | 0.2552        | 82             | 20           | 0.25745       | 82             | 19           | 0.4069        | 82             | 12           | 0.3414        | 82             | 6            | 0.3832        |
| pmed3_70_30_10  | 86       | 86           | 17           | 0.1938        | 86             | 20           | 0.0659        | 86             | 20           | 0.0651        | 86             | 20           | 0.0662        | 86             | 20           | 0.09985       |
| pmed3_80_30_10  | 87       | 87           | 18           | 0.3703        | 87             | 20           | 0.09225       | 87             | 20           | 0.09265       | 87             | 20           | 0.10085       | 87             | 20           | 0.1178        |
| pmed3_100_30_15 | 97       | 97           | 19           | 0.3892        | 97             | 20           | 0.13915       | 97             | 20           | 0.1828        | 97             | 20           | 0.1832        | 97             | 20           | 0.30345       |
| pmed3_100_50_5  | 93       | 93           | 20           | 0.0082        | 93             | 20           | 0.0093        | 93             | 20           | 0.0088        | 93             | 20           | 0.0088        | 93             | 20           | 0.00885       |
| pmed3_100_50_15 | 93       | 93           | 20           | 0.01          | 93             | 20           | 0.00955       | 93             | 20           | 0.01          | 93             | 20           | 0.01025       | 93             | 20           | 0.00935       |
| pmed4_60_10_5   | 137      | 137          | 20           | 0.0029        | 137            | 20           | 0.0028        | 137            | 20           | 0.00325       | 137            | 20           | 0.00265       | 137            | 20           | 0.0027        |
| pmed4_60_20_10  | 93       | 93           | 20           | 0.00355       | 93             | 20           | 0.00405       | 93             | 20           | 0.00385       | 93             | 20           | 0.0041        | 93             | 20           | 0.0036        |
| pmed4_70_30_5   | 86       | 86           | 20           | 0.2481        | 86             | 20           | 0.04835       | 86             | 20           | 0.04145       | 86             | 20           | 0.04085       | 86             | 20           | 0.04795       |
| pmed4_80_10_5   | 154      | 154          | 20           | 0.0256        | 154            | 20           | 0.0233        | 154            | 20           | 0.0224        | 154            | 20           | 0.02245       | 154            | 20           | 0.02175       |
| pmed4_80_30_5   | 92       | 92           | 16           | 0.20805       | 92             | 20           | 0.0833        | 92             | 20           | 0.07385       | 92             | 20           | 0.0889        | 92             | 20           | 0.13405       |
| pmed4_90_20_5   | 119      | 119          | 20           | 0.0261        | 119            | 20           | 0.0178        | 119            | 20           | 0.01895       | 119            | 20           | 0.01825       | 119            | 20           | 0.0201        |
| pmed4_100_20_15 | 123      | 123          | 20           | 0.00965       | 123            | 20           | 0.00615       | 123            | 20           | 0.0061        | 123            | 20           | 0.00775       | 123            | 20           | 0.00765       |
| pmed4_100_50_5  | 82       | 82           | 9            | 0.49155       | 82             | 20           | 0.3653        | 82             | 20           | 0.46295       | 82             | 20           | 0.45985       | 82             | 18           | 1.01685       |

Табела II.2: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу средњих инстанци са  $50 < n \leq 100$ .

| Инст.           | опт/б.к. | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|-----------------|----------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
|                 |          | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed5_60_20_5   | 90       | 90           | 19           | 0.09255       | 90             | 20           | 0.02275       | 90             | 20           | 0.01785       | 90             | 20           | 0.02095       | 90             | 20           | 0.02495       |
| pmed5_70_20_10  | 90       | 90           | 20           | 0.0091        | 90             | 20           | 0.00615       | 90             | 20           | 0.0056        | 90             | 20           | 0.0058        | 90             | 20           | 0.00565       |
| pmed5_80_20_10  | 92       | 92           | 20           | 0.0364        | 92             | 20           | 0.0224        | 92             | 20           | 0.0208        | 92             | 20           | 0.0244        | 92             | 20           | 0.02705       |
| pmed5_80_30_5   | 85       | 85           | 20           | 0.0251        | 85             | 20           | 0.01455       | 85             | 20           | 0.0144        | 85             | 20           | 0.01435       | 85             | 20           | 0.01735       |
| pmed5_90_20_5   | 94       | 94           | 19           | 0.116         | 94             | 20           | 0.07515       | 94             | 20           | 0.07315       | 94             | 20           | 0.07745       | 94             | 20           | 0.07675       |
| pmed5_90_50_5   | 85       | 85           | 20           | 0.01185       | 85             | 20           | 0.01285       | 85             | 20           | 0.0124        | 85             | 20           | 0.0129        | 85             | 20           | 0.0106        |
| pmed5_90_50_15  | 85       | 85           | 20           | 0.0028        | 85             | 20           | 0.0031        | 85             | 20           | 0.00295       | 85             | 20           | 0.0029        | 85             | 20           | 0.00285       |
| pmed5_100_50_15 | 85       | 85           | 20           | 0.0105        | 85             | 20           | 0.0071        | 85             | 20           | 0.0073        | 85             | 20           | 0.00705       | 85             | 20           | 0.0081        |
| <b>Просек</b>   | 96.78    | 96.78        | 17.78        | 0.18          | 96.78          | 20           | 0.10          | 96.78          | 19.98        | 0.10          | 96.78          | 19.65        | 0.12          | 96.78          | 19.28        | 0.16          |

Табела II.3: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу инстанци са  $150 < n \leq 200$ .

| Инст.            | опт/б.к. | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|------------------|----------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
|                  |          | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed6_150_30_5   | 64       | 66           | 4            | 1.38808       | 64             | 7            | 1.5013        | 64             | 13           | 1.9971        | 64             | 9            | 1.8947        | 64             | 1            | 1.75915       |
| pmed6_150_50_15  | 56       | 56           | 13           | 1.24915       | 56             | 20           | 0.67565       | 56             | 20           | 0.5209        | 56             | 20           | 1.24085       | 56             | 19           | 1.9763        |
| pmed6_150_80_10  | 56       | 56           | 20           | 0.13575       | 56             | 20           | 0.0766        | 56             | 20           | 0.06665       | 56             | 20           | 0.06535       | 56             | 20           | 0.06565       |
| pmed6_200_50_15  | 49       | 50           | 1            | 3.37925       | 49             | 17           | 4.24425       | 49             | 17           | 4.72625       | 49             | 4            | 4.54275       | 49             | 1            | 3.45345       |
| pmed6_200_80_15  | 49       | 49           | 19           | 3.60535       | 49             | 20           | 0.57285       | 49             | 20           | 0.6685        | 49             | 20           | 0.80615       | 49             | 20           | 1.12495       |
| pmed6_200_100_5  | 49       | 49           | 19           | 0.62425       | 49             | 20           | 0.28915       | 49             | 20           | 0.29645       | 49             | 20           | 0.35075       | 49             | 20           | 0.3715        |
| pmed6_200_100_10 | 49       | 49           | 20           | 1.41315       | 49             | 20           | 0.31475       | 49             | 20           | 0.34005       | 49             | 20           | 0.32725       | 49             | 20           | 0.34285       |
| pmed7_150_20_5   | 67       | 67           | 6            | 0.43275       | 67             | 19           | 0.9918        | 67             | 17           | 0.87615       | 67             | 18           | 1.3843        | 67             | 16           | 1.16485       |
| pmed7_150_50_5   | 59       | 59           | 19           | 0.2013        | 59             | 20           | 0.065         | 59             | 20           | 0.06695       | 59             | 20           | 0.07895       | 59             | 20           | 0.08615       |
| pmed7_150_80_10  | 59       | 59           | 20           | 0.1312        | 59             | 20           | 0.01695       | 59             | 20           | 0.01725       | 59             | 20           | 0.0167        | 59             | 20           | 0.0177        |
| pmed7_200_50_15  | 50       | 50           | 1            | 3.787         | 50             | 20           | 2.72855       | 50             | 20           | 3.5189        | 50             | 7            | 3.53365       | 50             | 1            | 4.4073        |
| pmed7_200_80_5   | 46       | 46           | 1            | 3.51905       | 46             | 20           | 2.957         | 46             | 18           | 4.48285       | 46             | 6            | 3.70995       | 46             | 1            | 4.54375       |
| pmed7_200_100_5  | 46       | 46           | 14           | 3.8549        | 46             | 20           | 0.6997        | 46             | 20           | 0.70815       | 46             | 20           | 0.8571        | 46             | 20           | 1.0335        |
| pmed7_200_100_10 | 46       | 46           | 9            | 3.43865       | 46             | 20           | 0.632         | 46             | 20           | 0.90245       | 46             | 20           | 1.3785        | 46             | 20           | 1.7575        |
| pmed8_150_20_5   | 70       | 70           | 18           | 1.2164        | 70             | 20           | 0.37685       | 70             | 20           | 0.5512        | 70             | 20           | 0.42865       | 70             | 20           | 0.5083        |
| pmed8_150_30_15  | 58       | 58           | 20           | 0.1447        | 58             | 20           | 0.08185       | 58             | 20           | 0.0779        | 58             | 20           | 0.07605       | 58             | 20           | 0.0708        |
| pmed8_150_50_5   | 58       | 58           | 20           | 0.29875       | 58             | 20           | 0.10425       | 58             | 20           | 0.09995       | 58             | 20           | 0.12295       | 58             | 20           | 0.14215       |

Табела Ц.3: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу инстанци са  $150 < n \leq 200$ .

| Инст.             | опт/б.к. | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|-------------------|----------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
|                   |          | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed8_150_50_10   | 58       | 58           | 20           | 0.12375       | 58             | 20           | 0.05855       | 58             | 20           | 0.06065       | 58             | 20           | 0.05975       | 58             | 20           | 0.07255       |
| pmed8_200_20_10   | 81       | 81           | 10           | 1.1971        | 81             | 20           | 0.8582        | 81             | 20           | 0.92805       | 81             | 20           | 1.68115       | 81             | 15           | 1.23005       |
| pmed8_200_30_15   | 70       | 70           | 16           | 0.75685       | 70             | 20           | 0.31165       | 70             | 20           | 0.45635       | 70             | 20           | 0.7295        | 70             | 20           | 0.89245       |
| pmed8_200_100_5   | 68       | 68           | 20           | 0.17115       | 68             | 20           | 0.04955       | 68             | 20           | 0.0476        | 68             | 20           | 0.048         | 68             | 20           | 0.04785       |
| pmed9_150_20_10   | 71       | 71           | 20           | 0.0339        | 71             | 20           | 0.02225       | 71             | 20           | 0.0212        | 71             | 20           | 0.02175       | 71             | 20           | 0.0234        |
| pmed9_150_50_15   | 71       | 71           | 20           | 0.04405       | 71             | 20           | 0.03575       | 71             | 20           | 0.0353        | 71             | 20           | 0.0327        | 71             | 20           | 0.03355       |
| pmed9_150_80_10   | 71       | 71           | 20           | 0.0154        | 71             | 20           | 0.01965       | 71             | 20           | 0.0199        | 71             | 20           | 0.02055       | 71             | 20           | 0.01935       |
| pmed9_200_80_5    | 71       | 71           | 20           | 0.09105       | 71             | 20           | 0.11595       | 71             | 20           | 0.07075       | 71             | 20           | 0.0688        | 71             | 20           | 0.0721        |
| pmed9_200_100_10  | 71       | 71           | 20           | 0.06335       | 71             | 20           | 0.0836        | 71             | 20           | 0.083         | 71             | 20           | 0.08505       | 71             | 20           | 0.0926        |
| pmed9_200_100_15  | 71       | 71           | 20           | 0.1584        | 71             | 20           | 0.1184        | 71             | 20           | 0.1184        | 71             | 20           | 0.11905       | 71             | 20           | 0.12065       |
| pmed10_150_30_15  | 62       | 62           | 20           | 0.01625       | 62             | 20           | 0.0149        | 62             | 20           | 0.0145        | 62             | 20           | 0.01495       | 62             | 20           | 0.01645       |
| pmed10_150_50_5   | 62       | 62           | 20           | 0.0195        | 62             | 20           | 0.0174        | 62             | 20           | 0.0174        | 62             | 20           | 0.01755       | 62             | 20           | 0.01835       |
| pmed10_150_80_15  | 62       | 62           | 20           | 0.012         | 62             | 20           | 0.0075        | 62             | 20           | 0.01235       | 62             | 20           | 0.012         | 62             | 20           | 0.0119        |
| pmed10_200_20_5   | 75       | 70           | 20           | 0.03895       | 70             | 20           | 0.02855       | 70             | 20           | 0.0276        | 70             | 20           | 0.03335       | 70             | 20           | 0.03385       |
| pmed10_200_50_10  | 70       | 70           | 20           | 0.04645       | 70             | 20           | 0.04045       | 70             | 20           | 0.038         | 70             | 20           | 0.04335       | 70             | 20           | 0.0455        |
| pmed10_200_80_20  | 70       | 70           | 20           | 0.0126        | 70             | 20           | 0.01355       | 70             | 20           | 0.01465       | 70             | 20           | 0.0134        | 70             | 20           | 0.0146        |
| pmed10_200_100_20 | 70       | 70           | 20           | 0.0344        | 70             | 20           | 0.0332        | 70             | 20           | 0.0332        | 70             | 20           | 0.0332        | 70             | 20           | 0.03395       |
| <b>Просек</b>     | 61.91    | 61.85        | 16.18        | 0.93          | 61.76          | 19.5         | 0.53          | 61.76          | 19.56        | 0.64          | 61.76          | 18.35        | 0.70          | 61.76          | 17.47        | 0.75          |

Табела Ц.4: Подешавање параметра  $\alpha$  на скупу великих инстанци са  $250 < n \leq 400$ .

| Инст.             | ОПТ/б.к. | $\alpha = 0$ |              |               | $\alpha = 0.1$ |              |               | $\alpha = 0.2$ |              |               | $\alpha = 0.3$ |              |               | $\alpha = 0.5$ |              |               |
|-------------------|----------|--------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|----------------|--------------|---------------|
|                   |          | <i>best</i>  | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> | <i>best</i>    | <i>#best</i> | <i>t_best</i> |
| pmed11_250_50_2   | 42       | 43           | 2            | 2.84005       | 42             | 20           | 3.25535       | 42             | 9            | 2.70875       | 42             | 4            | 3.398         | 43             | 4            | 2.5731        |
| pmed11_250_70_2   | 42       | 42           | 10           | 3.7795        | 42             | 20           | 0.87255       | 42             | 20           | 1.1326        | 42             | 20           | 1.74835       | 42             | 20           | 3.0608        |
| pmed11_250_90_5   | 42       | 42           | 15           | 3.37705       | 42             | 20           | 0.3931        | 42             | 20           | 0.41895       | 42             | 20           | 0.6666        | 42             | 20           | 0.86815       |
| pmed11_250_90_9   | 42       | 42           | 18           | 2.32675       | 42             | 20           | 0.4141        | 42             | 20           | 0.53075       | 42             | 20           | 0.8968        | 42             | 20           | 0.8081        |
| pmed11_300_60_2   | 51       | 51           | 19           | 0.91965       | 51             | 20           | 0.14025       | 51             | 20           | 0.13465       | 51             | 20           | 0.1359        | 51             | 20           | 0.16215       |
| pmed11_300_80_2   | 51       | 51           | 20           | 0.2561        | 51             | 20           | 0.1375        | 51             | 20           | 0.13145       | 51             | 20           | 0.1232        | 51             | 20           | 0.1294        |
| pmed12_250_50_2   | 43       | 48           | 12           | 3.41235       | 43             | 1            | 3.31725       | 46             | 2            | 2.302         | 47             | 1            | 2.011         | 47             | 1            | 3.3099        |
| pmed12_250_90_2   | 43       | 43           | 6            | 4.174         | 43             | 20           | 1.64775       | 43             | 20           | 1.7944        | 43             | 20           | 3.3464        | 43             | 18           | 5.62265       |
| pmed12_300_80_2   | 72       | 72           | 20           | 0.17305       | 72             | 20           | 0.096         | 72             | 20           | 0.0948        | 72             | 20           | 0.0957        | 72             | 20           | 0.0968        |
| pmed12_300_100_2  | 72       | 72           | 20           | 0.2118        | 72             | 20           | 0.2427        | 72             | 20           | 0.24005       | 72             | 20           | 0.2383        | 72             | 20           | 0.26675       |
| pmed12_300_150_5  | 72       | 72           | 20           | 0.2473        | 72             | 20           | 0.20375       | 72             | 20           | 0.20235       | 72             | 20           | 0.20325       | 72             | 20           | 0.21365       |
| pmed12_300_150_15 | 72       | 72           | 20           | 0.22345       | 72             | 20           | 0.36495       | 72             | 20           | 0.3588        | 72             | 20           | 0.35975       | 72             | 20           | 0.3708        |
| pmed16_350_40_2   | 36       | 40           | 1            | 3.33395       | 37             | 3            | 6.45745       | 37             | 1            | 3.6996        | 42             | 6            | 2.6494        | 43             | 14           | 3.1596        |
| pmed16_350_90_9   | 33       | 33           | 2            | 6.8907        | 33             | 20           | 6.7334        | 33             | 19           | 6.7599        | 33             | 6            | 5.9226        | 33             | 1            | 8.9109        |
| pmed16_350_120_2  | 33       | 33           | 5            | 9.2222        | 33             | 20           | 3.67515       | 33             | 20           | 4.7412        | 33             | 20           | 5.3739        | 33             | 20           | 10.3131       |
| pmed16_350_120_12 | 33       | 33           | 6            | 11.6007       | 33             | 20           | 3.93905       | 33             | 20           | 4.63035       | 33             | 20           | 4.5829        | 33             | 20           | 7.92665       |
| pmed16_400_100_5  | 33       | 33           | 1            | 8.4514        | 33             | 10           | 10.3973       | 33             | 7            | 9.4285        | 33             | 4            | 11.1054       | 34             | 4            | 10.6761       |
| pmed16_400_200_2  | 33       | 33           | 13           | 5.82755       | 33             | 20           | 3.1162        | 33             | 20           | 3.2199        | 33             | 20           | 3.4724        | 33             | 20           | 3.42975       |
| pmed16_400_200_5  | 33       | 33           | 13           | 7.13285       | 33             | 20           | 3.50865       | 33             | 20           | 3.50585       | 33             | 20           | 3.56645       | 33             | 20           | 4.0974        |
| pmed17_350_70_2   | 37       | 38           | 1            | 3.81565       | 37             | 20           | 3.5187        | 37             | 8            | 6.0079        | 37             | 2            | 4.4682        | 38             | 2            | 4.3883        |
| pmed17_350_120_2  | 37       | 37           | 17           | 3.9002        | 37             | 20           | 0.70025       | 37             | 20           | 0.80655       | 37             | 20           | 0.793         | 37             | 20           | 0.79205       |
| pmed17_350_120_12 | 37       | 37           | 13           | 4.44175       | 37             | 20           | 1.2476        | 37             | 20           | 1.27175       | 37             | 20           | 1.53505       | 37             | 20           | 2.08825       |
| pmed17_400_80_8   | 37       | 37           | 4            | 9.2532        | 37             | 20           | 2.92885       | 37             | 19           | 6.3113        | 37             | 7            | 9.20775       | 37             | 2            | 6.1429        |
| pmed17_400_140_5  | 37       | 37           | 15           | 5.5057        | 37             | 20           | 0.83165       | 37             | 20           | 0.84355       | 37             | 20           | 1.07585       | 37             | 20           | 1.1407        |
| pmed17_400_200_2  | 37       | 37           | 20           | 0.79145       | 37             | 20           | 0.3464        | 37             | 20           | 0.36745       | 37             | 20           | 0.3607        | 37             | 20           | 0.36005       |
| pmed17_400_200_20 | 37       | 37           | 20           | 0.613         | 37             | 20           | 0.65115       | 37             | 20           | 0.6667        | 37             | 20           | 0.6831        | 37             | 20           | 0.6248        |
| <b>Просек</b>     | 44.04    | 44.15        | 12.04        | 3.95          | 43.77          | 18.23        | 2.27          | 43.88          | 17.12        | 2.40          | 44.12          | 15.77        | 2.63          | 44.27          | 15.62        | 3.14          |

## Ц.2 SVNS алгоритам за CPNCP

У овом поглављу су дати комплетни резултати SVNS алгоритма и CPLEX решавача за CPNCP. Табеле Ц.5-Ц.9 су организоване на следећи начин: сваки ред садржи име инстанце,  $n$  - укупан број чворова,  $p$  - број центара које треба успоставити,  $q$  - број унапред задатих центара. Следеће две колоне садрже резултате CPLEX решавача: нађену вредност и потребно време. Уколико нађене вредности нису оптималне, означене су знаком „\*”. Последњих пет колона садржи:  $obj$  - најбољу вредност функције циља коју је достигао SVNS у 20 извршавања,  $\#opt/\#bk$  - број извршавања у којима је достигнуто оптимално или најбоље познато решење,  $t$  - просечно време потребно да се  $obj$  достигне по први пут (у секундама),  $t_{tot}$  - просечно укупно време (у секундама),  $gap$  - просечно одступање нађених вредности од вредности  $obj$  (у процентима),  $dev$  - стандардна девијација нађених вредности (у процентима). „OOM” у колони  $obj$  означава да CPLEX решавач није нашао ни допустиво решење у задатом времену услед недостатка меморије.

Табела Ц.5: Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на скупу малих инстанци  $20 \leq n \leq 50$ .

| Инстанце       | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |      | SVNS   |         |      |           |       |       |  |
|----------------|-----|-----|-----|--------|------|--------|---------|------|-----------|-------|-------|--|
|                |     |     |     | $obj.$ | $t$  | $obj.$ | $\#opt$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |  |
| pmed1_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 95     | 0.05 | 95     | 20      | 0.00 | 0.01      | 0     | 0     |  |
| pmed1_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 95     | 0.08 | 95     | 20      | 0.00 | 0.02      | 0     | 0     |  |
| pmed1_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 116    | 0.81 | 116    | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed1_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 89     | 0.14 | 89     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed1_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 89     | 0.05 | 89     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed1_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 89     | 0.03 | 89     | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed1_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 112    | 0.53 | 112    | 20      | 0.01 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed1_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 89     | 0.33 | 89     | 20      | 0.02 | 0.06      | 0     | 0     |  |
| pmed1_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 94     | 0.16 | 94     | 20      | 0.01 | 0.06      | 0     | 0     |  |
| pmed1_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 91     | 0.61 | 91     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed2_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 100    | 0.06 | 100    | 20      | 0.00 | 0.02      | 0     | 0     |  |
| pmed2_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 128    | 0.23 | 128    | 20      | 0.00 | 0.02      | 0     | 0     |  |
| pmed2_40_10_5  | 40  | 15  | 5   | 135    | 0.95 | 135    | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed2_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 98     | 0.55 | 98     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed2_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 96     | 0.06 | 96     | 20      | 0.01 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed2_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 96     | 0.05 | 96     | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed2_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 145    | 1.27 | 145    | 20      | 0.01 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed2_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 99     | 1.27 | 99     | 19      | 0.02 | 0.08      | 0.05  | 0.22  |  |
| pmed2_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 104    | 0.61 | 104    | 20      | 0.00 | 0.07      | 0     | 0     |  |
| pmed2_50_20_15 | 50  | 15  | 15  | 99     | 0.27 | 99     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed3_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 92     | 0.16 | 92     | 20      | 0.00 | 0.01      | 0     | 0     |  |
| pmed3_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 122    | 0.23 | 122    | 20      | 0.00 | 0.02      | 0     | 0     |  |
| pmed3_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 122    | 0.81 | 122    | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed3_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 85     | 0.64 | 85     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed3_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 85     | 0.25 | 85     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed3_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 82     | 0.27 | 82     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed3_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 128    | 2.38 | 128    | 20      | 0.01 | 0.07      | 0     | 0     |  |
| pmed3_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 87     | 0.67 | 87     | 20      | 0.00 | 0.08      | 0     | 0     |  |
| pmed3_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 88     | 0.50 | 88     | 20      | 0.00 | 0.08      | 0     | 0     |  |
| pmed3_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 93     | 0.16 | 93     | 20      | 0.00 | 0.06      | 0     | 0     |  |
| pmed4_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 125    | 0.03 | 125    | 20      | 0.00 | 0.01      | 0     | 0     |  |
| pmed4_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 126    | 0.33 | 126    | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed4_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 126    | 0.34 | 126    | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed4_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 91     | 0.27 | 91     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed4_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 91     | 0.09 | 91     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed4_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 85     | 0.08 | 85     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed4_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 141    | 2.80 | 141    | 20      | 0.00 | 0.07      | 0     | 0     |  |

Табела Ц.5: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на скупу малих инстанци  $20 \leq n \leq 50$ .

| Инстанце       | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |      | SVNS   |         |      |           |       |       |  |
|----------------|-----|-----|-----|--------|------|--------|---------|------|-----------|-------|-------|--|
|                |     |     |     | $obj.$ | $t$  | $obj.$ | $\#opt$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |  |
| pmed4_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 99     | 1.50 | 99     | 20      | 0.01 | 0.08      | 0     | 0     |  |
| pmed4_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 108    | 0.38 | 108    | 20      | 0.00 | 0.06      | 0     | 0     |  |
| pmed4_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 105    | 0.05 | 105    | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed5_20_10_5  | 20  | 5   | 5   | 91     | 0.03 | 91     | 20      | 0.00 | 0.01      | 0     | 0     |  |
| pmed5_30_10_5  | 30  | 5   | 5   | 126    | 0.41 | 126    | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed5_40_10_5  | 40  | 5   | 5   | 137    | 0.34 | 137    | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed5_40_20_5  | 40  | 15  | 5   | 91     | 0.67 | 91     | 20      | 0.00 | 0.05      | 0     | 0     |  |
| pmed5_40_20_10 | 40  | 10  | 10  | 97     | 0.47 | 97     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed5_40_20_15 | 40  | 5   | 15  | 96     | 0.09 | 96     | 20      | 0.00 | 0.03      | 0     | 0     |  |
| pmed5_50_10_5  | 50  | 5   | 5   | 121    | 0.66 | 121    | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |
| pmed5_50_20_5  | 50  | 15  | 5   | 90     | 0.98 | 90     | 20      | 0.00 | 0.07      | 0     | 0     |  |
| pmed5_50_20_10 | 50  | 10  | 10  | 91     | 0.77 | 91     | 20      | 0.00 | 0.06      | 0     | 0     |  |
| pmed5_50_20_15 | 50  | 5   | 15  | 90     | 0.30 | 90     | 20      | 0.00 | 0.04      | 0     | 0     |  |

Табела Ц.6: Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца       | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |       | SVNS   |              |      |           |       |       |  |
|----------------|-----|-----|-----|--------|-------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|--|
|                |     |     |     | $obj.$ | $t$   | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |  |
| pmed1_60_10_5  | 60  | 5   | 5   | 119    | 0.77  | 119    | 20           | 0.00 | 0.61      | 0.00  | 0     |  |
| pmed1_60_20_5  | 60  | 15  | 5   | 95     | 1.13  | 95     | 20           | 0.02 | 0.72      | 0     | 0     |  |
| pmed1_60_20_10 | 60  | 10  | 10  | 97     | 0.36  | 97     | 20           | 0.05 | 0.65      | 0     | 0     |  |
| pmed1_60_30_5  | 60  | 25  | 5   | 89     | 0.42  | 89     | 20           | 0.01 | 0.77      | 0     | 0     |  |
| pmed1_60_30_10 | 60  | 20  | 10  | 89     | 0.19  | 89     | 20           | 0.01 | 0.86      | 0     | 0     |  |
| pmed1_70_10_5  | 70  | 5   | 5   | 131    | 11.70 | 131    | 20           | 0.01 | 0.73      | 0     | 0     |  |
| pmed1_70_20_5  | 70  | 15  | 5   | 99     | 12.06 | 99     | 20           | 0.06 | 1.07      | 0     | 0     |  |
| pmed1_70_20_10 | 70  | 10  | 10  | 99     | 1.27  | 99     | 20           | 0.03 | 0.80      | 0     | 0     |  |
| pmed1_70_30_5  | 70  | 25  | 5   | 77     | 1.30  | 77     | 20           | 0.05 | 1.16      | 0     | 0     |  |
| pmed1_70_30_10 | 70  | 20  | 10  | 73     | 0.28  | 73     | 20           | 0.03 | 1.14      | 0     | 0     |  |
| pmed1_80_10_5  | 80  | 5   | 5   | 134    | 12.56 | 134    | 20           | 0.03 | 0.80      | 0     | 0     |  |
| pmed1_80_20_5  | 80  | 15  | 5   | 105    | 58.31 | 105    | 20           | 0.23 | 1.36      | 0     | 0     |  |
| pmed1_80_20_10 | 80  | 10  | 10  | 108    | 7.03  | 108    | 20           | 0.01 | 1.10      | 0     | 0     |  |
| pmed1_80_30_5  | 80  | 25  | 5   | 86     | 4.70  | 86     | 20           | 0.16 | 1.60      | 0     | 0     |  |
| pmed1_80_30_10 | 80  | 20  | 10  | 91     | 2.91  | 91     | 20           | 0.09 | 1.67      | 0     | 0     |  |
| pmed1_90_10_5  | 90  | 5   | 5   | 134    | 17.41 | 134    | 20           | 0.03 | 0.91      | 0     | 0     |  |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |        | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                 |     |     |     | $obj.$ | $t$    | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed1_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 112    | 155.14 | 112    | 13           | 0.46 | 1.45      | 0.94  | 1.28  |
| pmed1_90_20_10  | 90  | 10  | 10  | 115    | 21.42  | 115    | 20           | 0.11 | 1.11      | 0     | 0     |
| pmed1_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 91     | 13.33  | 91     | 20           | 0.37 | 1.92      | 0     | 0     |
| pmed1_90_30_10  | 90  | 20  | 10  | 95     | 15.92  | 95     | 20           | 0.23 | 1.75      | 0     | 0     |
| pmed1_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | 70     | 0.81   | 70     | 20           | 0.29 | 2.76      | 0     | 0     |
| pmed1_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 70     | 0.56   | 70     | 20           | 0.17 | 2.78      | 0     | 0     |
| pmed1_90_50_15  | 90  | 35  | 15  | 70     | 0.44   | 70     | 20           | 0.48 | 2.71      | 0     | 0     |
| pmed1_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 144    | 213.52 | 144    | 20           | 0.01 | 1.75      | 0     | 0     |
| pmed1_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 116    | 702.89 | 116    | 20           | 0.03 | 1.98      | 0     | 0     |
| pmed1_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 116    | 90.20  | 116    | 20           | 0.02 | 1.73      | 0     | 0     |
| pmed1_100_20_15 | 100 | 5   | 15  | 113    | 3.05   | 113    | 20           | 0.01 | 1.00      | 0     | 0     |
| pmed1_100_30_5  | 100 | 25  | 5   | 96     | 159.02 | 97     | 0            | 0.57 | 2.27      | 1.13  | 1.03  |
| pmed1_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 98     | 41.83  | 98     | 20           | 0.46 | 1.99      | 0     | 0     |
| pmed1_100_30_15 | 100 | 15  | 15  | 99     | 10.92  | 99     | 20           | 0.03 | 1.77      | 0     | 0     |
| pmed1_100_50_5  | 100 | 45  | 5   | 71     | 3.77   | 71     | 20           | 0.75 | 3.27      | 0     | 0     |
| pmed1_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 77     | 7.09   | 77     | 20           | 0.74 | 3.16      | 0     | 0     |
| pmed1_100_50_15 | 100 | 35  | 15  | 75     | 3.09   | 75     | 20           | 0.21 | 3.13      | 0     | 0     |
| pmed2_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 145    | 3.30   | 145    | 20           | 0.00 | 0.51      | 0     | 0     |
| pmed2_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 102    | 2.03   | 102    | 20           | 0.01 | 0.84      | 0     | 0     |
| pmed2_60_20_10  | 60  | 10  | 10  | 106    | 1.28   | 106    | 20           | 0.01 | 0.98      | 0     | 0     |
| pmed2_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 96     | 0.34   | 96     | 20           | 0.01 | 0.99      | 0     | 0     |
| pmed2_60_30_10  | 60  | 20  | 10  | 96     | 0.59   | 96     | 20           | 0.00 | 1.09      | 0     | 0     |
| pmed2_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 145    | 5.47   | 145    | 20           | 0.00 | 0.65      | 0     | 0     |
| pmed2_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 102    | 5.50   | 102    | 20           | 0.03 | 1.05      | 0     | 0     |
| pmed2_70_20_10  | 70  | 10  | 10  | 103    | 0.97   | 103    | 20           | 0.01 | 1.01      | 0     | 0     |
| pmed2_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 96     | 0.50   | 96     | 20           | 0.01 | 1.06      | 0     | 0     |
| pmed2_70_30_10  | 70  | 20  | 10  | 96     | 0.38   | 96     | 20           | 0.02 | 1.15      | 0     | 0     |
| pmed2_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 145    | 9.45   | 145    | 20           | 0.03 | 0.91      | 0     | 0     |
| pmed2_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 118    | 41.28  | 118    | 20           | 0.01 | 1.18      | 0     | 0     |
| pmed2_80_20_10  | 80  | 10  | 10  | 118    | 1.50   | 118    | 20           | 0.01 | 0.96      | 0     | 0     |
| pmed2_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 98     | 2.69   | 98     | 20           | 0.13 | 1.50      | 0     | 0     |
| pmed2_80_30_10  | 80  | 20  | 10  | 98     | 0.94   | 98     | 20           | 0.39 | 1.39      | 0     | 0     |
| pmed2_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 145    | 10.94  | 145    | 20           | 0.07 | 1.08      | 0     | 0     |
| pmed2_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 112    | 179.27 | 112    | 20           | 0.06 | 1.49      | 0     | 0     |
| pmed2_90_20_10  | 90  | 10  | 10  | 119    | 3.25   | 119    | 20           | 0.01 | 1.15      | 0     | 0     |
| pmed2_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 96     | 9.61   | 96     | 20           | 0.12 | 1.98      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |        | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                 |     |     |     | $obj.$ | $t$    | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed2_90_30_10  | 90  | 20  | 10  | 97     | 1.92   | 97     | 20           | 0.05 | 1.59      | 0     | 0     |
| pmed2_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | 96     | 0.80   | 96     | 20           | 0.01 | 2.31      | 0     | 0     |
| pmed2_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 96     | 0.53   | 96     | 20           | 0.01 | 2.25      | 0     | 0     |
| pmed2_90_50_15  | 90  | 35  | 15  | 96     | 0.63   | 96     | 20           | 0.01 | 2.30      | 0     | 0     |
| pmed2_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 140    | 31.72  | 140    | 20           | 0.03 | 1.54      | 0     | 0     |
| pmed2_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 109    | 185.31 | 109    | 20           | 0.38 | 2.00      | 0     | 0     |
| pmed2_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 111    | 14.41  | 111    | 1            | 0.28 | 1.76      | 0.86  | 0.20  |
| pmed2_100_20_15 | 100 | 5   | 15  | 110    | 3.02   | 110    | 20           | 0.02 | 1.46      | 0     | 0     |
| pmed2_100_30_5  | 100 | 25  | 5   | 96     | 5.92   | 96     | 20           | 0.22 | 2.10      | 0     | 0     |
| pmed2_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 98     | 16.72  | 98     | 20           | 0.10 | 2.12      | 0     | 0     |
| pmed2_100_30_15 | 100 | 15  | 15  | 96     | 1.23   | 96     | 20           | 0.04 | 1.82      | 0     | 0     |
| pmed2_100_50_5  | 100 | 45  | 5   | 96     | 1.47   | 96     | 20           | 0.02 | 2.53      | 0     | 0     |
| pmed2_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 96     | 1.00   | 96     | 20           | 0.01 | 2.55      | 0     | 0     |
| pmed2_100_50_15 | 100 | 35  | 15  | 96     | 0.63   | 96     | 20           | 0.01 | 2.37      | 0     | 0     |
| pmed3_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 141    | 2.30   | 141    | 20           | 0.02 | 0.59      | 0     | 0     |
| pmed3_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 97     | 2.80   | 97     | 20           | 0.00 | 0.83      | 0     | 0     |
| pmed3_60_20_10  | 60  | 10  | 10  | 97     | 0.89   | 97     | 20           | 0.00 | 0.70      | 0     | 0     |
| pmed3_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 79     | 1.16   | 79     | 20           | 0.02 | 1.21      | 0     | 0     |
| pmed3_60_30_10  | 60  | 20  | 10  | 81     | 3.53   | 81     | 20           | 0.07 | 1.10      | 0     | 0     |
| pmed3_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 139    | 5.30   | 139    | 20           | 0.01 | 0.79      | 0     | 0     |
| pmed3_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 104    | 53.86  | 104    | 20           | 0.03 | 1.03      | 0     | 0     |
| pmed3_70_20_10  | 70  | 10  | 10  | 105    | 3.36   | 105    | 20           | 0.03 | 0.99      | 0     | 0     |
| pmed3_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 82     | 3.16   | 82     | 20           | 0.26 | 1.54      | 0     | 0     |
| pmed3_70_30_10  | 70  | 20  | 10  | 86     | 1.59   | 86     | 20           | 0.07 | 1.27      | 0     | 0     |
| pmed3_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 139    | 10.42  | 139    | 20           | 0.01 | 0.96      | 0     | 0     |
| pmed3_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 104    | 76.30  | 104    | 20           | 0.05 | 1.26      | 0     | 0     |
| pmed3_80_20_10  | 80  | 10  | 10  | 108    | 14.89  | 108    | 20           | 0.02 | 1.31      | 0     | 0     |
| pmed3_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 85     | 22.98  | 85     | 20           | 0.20 | 1.61      | 0     | 0     |
| pmed3_80_30_10  | 80  | 20  | 10  | 87     | 11.47  | 87     | 20           | 0.09 | 1.65      | 0     | 0     |
| pmed3_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 159    | 38.17  | 159    | 20           | 0.01 | 1.21      | 0     | 0     |
| pmed3_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 105    | 218.45 | 105    | 20           | 0.08 | 1.80      | 0     | 0     |
| pmed3_90_20_10  | 90  | 10  | 10  | 113    | 68.75  | 113    | 20           | 0.26 | 1.82      | 0     | 0     |
| pmed3_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 93     | 4.75   | 93     | 20           | 0.03 | 1.89      | 0     | 0     |
| pmed3_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 93     | 4.75   | 93     | 20           | 0.03 | 1.89      | 0     | 0     |
| pmed3_90_30_10  | 90  | 20  | 10  | 97     | 15.28  | 97     | 20           | 0.13 | 1.97      | 0     | 0     |
| pmed3_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | 93     | 2.72   | 93     | 20           | 0.01 | 2.43      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |        | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                 |     |     |     | $obj.$ | $t$    | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed3_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 93     | 1.05   | 93     | 20           | 0.01 | 2.54      | 0     | 0     |
| pmed3_90_50_15  | 90  | 35  | 15  | 93     | 0.64   | 93     | 20           | 0.01 | 2.52      | 0     | 0     |
| pmed3_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 164    | 33.45  | 164    | 20           | 0.01 | 1.64      | 0     | 0     |
| pmed3_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 115    | 777.09 | 115    | 20           | 0.03 | 2.26      | 0     | 0     |
| pmed3_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 116    | 109.39 | 116    | 20           | 0.11 | 2.03      | 0     | 0     |
| pmed3_100_20_15 | 100 | 5   | 15  | 113    | 2.69   | 113    | 20           | 0.04 | 1.34      | 0     | 0     |
| pmed3_100_30_5  | 100 | 25  | 5   | 93     | 9.19   | 93     | 20           | 0.06 | 2.24      | 0     | 0     |
| pmed3_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 96     | 31.92  | 96     | 20           | 0.07 | 2.20      | 0     | 0     |
| pmed3_100_30_15 | 100 | 15  | 15  | 97     | 8.22   | 97     | 20           | 0.14 | 1.94      | 0     | 0     |
| pmed3_100_50_5  | 100 | 45  | 5   | 93     | 2.66   | 93     | 20           | 0.01 | 2.66      | 0     | 0     |
| pmed3_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 93     | 1.28   | 93     | 20           | 0.01 | 2.73      | 0     | 0     |
| pmed3_100_50_15 | 100 | 35  | 15  | 93     | 0.66   | 93     | 20           | 0.01 | 2.57      | 0     | 0     |
| pmed4_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 137    | 1.45   | 137    | 20           | 0.00 | 0.58      | 0     | 0     |
| pmed4_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 94     | 1.03   | 94     | 20           | 0.01 | 0.92      | 0     | 0     |
| pmed4_60_20_10  | 60  | 10  | 10  | 93     | 0.69   | 93     | 20           | 0.00 | 0.82      | 0     | 0     |
| pmed4_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 81     | 1.03   | 81     | 20           | 0.03 | 1.14      | 0     | 0     |
| pmed4_60_30_10  | 60  | 20  | 10  | 81     | 0.53   | 81     | 20           | 0.03 | 1.01      | 0     | 0     |
| pmed4_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 150    | 14.89  | 150    | 20           | 0.01 | 0.88      | 0     | 0     |
| pmed4_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 112    | 9.69   | 112    | 20           | 0.04 | 1.17      | 0     | 0     |
| pmed4_70_20_10  | 70  | 10  | 10  | 116    | 2.98   | 116    | 20           | 0.01 | 0.94      | 0     | 0     |
| pmed4_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 86     | 2.34   | 86     | 20           | 0.05 | 1.38      | 0     | 0     |
| pmed4_70_30_10  | 70  | 20  | 10  | 94     | 2.25   | 94     | 20           | 0.02 | 1.37      | 0     | 0     |
| pmed4_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 154    | 71.83  | 154    | 20           | 0.02 | 1.12      | 0     | 0     |
| pmed4_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 119    | 65.45  | 119    | 11           | 0.21 | 1.42      | 0.38  | 0.42  |
| pmed4_80_20_10  | 80  | 10  | 10  | 121    | 5.36   | 121    | 20           | 0.02 | 1.01      | 0     | 0     |
| pmed4_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 92     | 6.08   | 92     | 20           | 0.08 | 1.65      | 0     | 0     |
| pmed4_80_30_10  | 80  | 20  | 10  | 96     | 3.78   | 96     | 20           | 0.06 | 1.61      | 0     | 0     |
| pmed4_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 162    | 60.25  | 162    | 20           | 0.03 | 1.33      | 0     | 0     |
| pmed4_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 119    | 117.45 | 119    | 20           | 0.02 | 1.68      | 0     | 0     |
| pmed4_90_20_10  | 90  | 10  | 10  | 120    | 5.56   | 120    | 20           | 0.01 | 1.29      | 0     | 0     |
| pmed4_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 95     | 9.27   | 95     | 19           | 0.29 | 2.26      | 0.05  | 0.23  |
| pmed4_90_30_10  | 90  | 20  | 10  | 94     | 6.16   | 94     | 20           | 0.03 | 1.93      | 0     | 0     |
| pmed4_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | 82     | 1.33   | 82     | 20           | 0.06 | 3.01      | 0     | 0     |
| pmed4_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 82     | 0.52   | 82     | 20           | 0.03 | 2.66      | 0     | 0     |
| pmed4_90_50_15  | 90  | 35  | 15  | 82     | 0.61   | 82     | 20           | 0.07 | 2.69      | 0     | 0     |
| pmed4_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 160    | 192.23 | 160    | 20           | 0.01 | 1.86      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |        | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                 |     |     |     | $obj.$ | $t$    | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed4_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 122    | 596.67 | 122    | 20           | 0.23 | 2.04      | 0     | 0     |
| pmed4_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 123    | 50.88  | 123    | 20           | 0.02 | 1.77      | 0     | 0     |
| pmed4_100_20_15 | 100 | 5   | 15  | 123    | 2.14   | 123    | 20           | 0.01 | 1.25      | 0     | 0     |
| pmed4_100_30_5  | 100 | 25  | 5   | 100    | 142.20 | 100    | 16           | 0.76 | 2.34      | 0.20  | 0.40  |
| pmed4_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 104    | 35.13  | 104    | 8            | 0.40 | 2.43      | 2.88  | 2.36  |
| pmed4_100_30_15 | 100 | 15  | 15  | 106    | 4.39   | 106    | 20           | 0.10 | 1.87      | 0     | 0     |
| pmed4_100_50_5  | 100 | 45  | 5   | 82     | 3.34   | 82     | 20           | 0.37 | 3.32      | 0     | 0     |
| pmed4_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 82     | 1.05   | 82     | 20           | 0.22 | 3.26      | 0     | 0     |
| pmed4_100_50_15 | 100 | 35  | 15  | 82     | 1.34   | 82     | 20           | 0.54 | 3.29      | 0     | 0     |
| pmed5_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 127    | 0.66   | 127    | 20           | 0.00 | 0.57      | 0     | 0     |
| pmed5_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 90     | 0.89   | 90     | 20           | 0.02 | 0.82      | 0     | 0     |
| pmed5_60_20_10  | 60  | 10  | 10  | 93     | 0.47   | 93     | 20           | 0.00 | 0.72      | 0     | 0     |
| pmed5_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 82     | 0.20   | 82     | 20           | 0.01 | 0.86      | 0     | 0     |
| pmed5_60_30_10  | 60  | 20  | 10  | 82     | 0.20   | 82     | 20           | 0.01 | 0.88      | 0     | 0     |
| pmed5_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 122    | 2.66   | 122    | 20           | 0.00 | 0.79      | 0     | 0     |
| pmed5_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 91     | 2.30   | 91     | 20           | 0.01 | 0.86      | 0     | 0     |
| pmed5_70_20_10  | 70  | 10  | 10  | 90     | 0.55   | 90     | 20           | 0.01 | 0.84      | 0     | 0     |
| pmed5_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 85     | 0.64   | 85     | 20           | 0.01 | 1.05      | 0     | 0     |
| pmed5_70_30_10  | 70  | 20  | 10  | 85     | 0.22   | 85     | 20           | 0.01 | 0.94      | 0     | 0     |
| pmed5_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 119    | 3.58   | 119    | 20           | 0.00 | 0.79      | 0     | 0     |
| pmed5_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 91     | 2.84   | 91     | 20           | 0.03 | 0.91      | 0     | 0     |
| pmed5_80_20_10  | 80  | 10  | 10  | 92     | 0.89   | 92     | 20           | 0.02 | 0.85      | 0     | 0     |
| pmed5_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 85     | 1.27   | 85     | 20           | 0.01 | 1.11      | 0     | 0     |
| pmed5_80_30_10  | 80  | 20  | 10  | 85     | 0.72   | 85     | 20           | 0.02 | 1.02      | 0     | 0     |
| pmed5_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 127    | 8.98   | 127    | 20           | 0.00 | 1.00      | 0     | 0     |
| pmed5_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 94     | 6.48   | 94     | 20           | 0.08 | 1.29      | 0     | 0     |
| pmed5_90_20_10  | 90  | 10  | 10  | 100    | 3.34   | 100    | 20           | 0.01 | 1.13      | 0     | 0     |
| pmed5_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 85     | 1.11   | 85     | 20           | 0.03 | 1.37      | 0     | 0     |
| pmed5_90_30_10  | 90  | 20  | 10  | 86     | 1.72   | 86     | 20           | 0.04 | 1.31      | 0     | 0     |
| pmed5_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | 85     | 1.06   | 85     | 20           | 0.01 | 1.91      | 0     | 0     |
| pmed5_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 85     | 0.31   | 85     | 20           | 0.01 | 1.96      | 0     | 0     |
| pmed5_90_50_15  | 90  | 35  | 15  | 85     | 0.33   | 85     | 20           | 0.00 | 2.15      | 0     | 0     |
| pmed5_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 127    | 13.66  | 127    | 20           | 0.00 | 1.27      | 0     | 0     |
| pmed5_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 97     | 55.88  | 97     | 20           | 0.22 | 1.62      | 0     | 0     |
| pmed5_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 100    | 4.86   | 100    | 20           | 0.01 | 1.30      | 0     | 0     |
| pmed5_100_20_15 | 100 | 5   | 15  | 97     | 1.05   | 97     | 20           | 0.01 | 1.17      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца         | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |      |           |       |       |
|------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                  |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed5_100_30_5   | 100 | 25  | 5   | 85     | 1.17     | 85     | 20           | 0.06 | 1.70      | 0     | 0     |
| pmed5_100_30_10  | 100 | 20  | 10  | 87     | 10.61    | 87     | 20           | 0.05 | 1.61      | 0     | 0     |
| pmed5_100_30_15  | 100 | 15  | 15  | 90     | 9.98     | 90     | 20           | 0.25 | 1.55      | 0     | 0     |
| pmed5_100_50_5   | 100 | 45  | 5   | 85     | 0.98     | 85     | 20           | 0.01 | 2.07      | 0     | 0     |
| pmed5_100_50_10  | 100 | 40  | 10  | 85     | 0.56     | 85     | 20           | 0.01 | 2.10      | 0     | 0     |
| pmed5_100_50_15  | 100 | 35  | 15  | 85     | 0.67     | 85     | 20           | 0.01 | 2.07      | 0     | 0     |
| pmed6_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 77     | 45497.20 | 77     | 20           | 0.19 | 3.69      | 0     | 0     |
| pmed6_150_20_10  | 150 | 10  | 10  | 77     | 116.33   | 77     | 20           | 0.73 | 3.11      | 0     | 0     |
| pmed6_150_30_5   | 150 | 25  | 5   | 64     | 23263.90 | 64     | 7            | 1.50 | 4.03      | 2.03  | 1.49  |
| pmed6_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 64     | 826.34   | 64     | 9            | 1.33 | 3.94      | 2.34  | 2.77  |
| pmed6_150_30_15  | 150 | 15  | 15  | 64     | 19.94    | 64     | 20           | 1.25 | 4.16      | 0     | 0     |
| pmed6_150_50_5   | 150 | 45  | 5   | 56     | 11.95    | 56     | 20           | 0.40 | 5.17      | 0     | 0     |
| pmed6_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 56     | 8.39     | 56     | 20           | 0.24 | 5.32      | 0     | 0     |
| pmed6_150_50_15  | 150 | 35  | 15  | 56     | 3.73     | 56     | 20           | 0.68 | 5.44      | 0     | 0     |
| pmed6_150_80_5   | 150 | 75  | 5   | 56     | 8.80     | 56     | 20           | 0.09 | 7.38      | 0     | 0     |
| pmed6_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 56     | 5.89     | 56     | 20           | 0.08 | 7.30      | 0     | 0     |
| pmed6_150_80_15  | 150 | 75  | 15  | 56     | 2.56     | 56     | 20           | 0.09 | 7.41      | 0     | 0     |
| pmed6_150_80_20  | 150 | 60  | 20  | 56     | 2.05     | 56     | 20           | 0.08 | 7.00      | 0     | 0     |
| pmed6_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 79*    | 93573.90 | 77     | 20           | 0.52 | 5.42      | 0     | 0     |
| pmed6_200_20_10  | 200 | 10  | 10  | 77     | 3175.52  | 77     | 20           | 0.43 | 5.99      | 0     | 0     |
| pmed6_200_30_5   | 200 | 25  | 5   | 72*    | 92647.20 | 66     | 19           | 1.49 | 5.87      | 0.15  | 0.66  |
| pmed6_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 66     | 26602.10 | 66     | 20           | 1.25 | 5.58      | 0     | 0     |
| pmed6_200_30_15  | 200 | 15  | 15  | 66     | 819.73   | 66     | 19           | 1.18 | 5.57      | 0.45  | 1.98  |
| pmed6_200_50_5   | 200 | 45  | 5   | 49     | 869.98   | 49     | 3            | 6.03 | 8.57      | 2.45  | 2.10  |
| pmed6_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 49     | 1641.53  | 49     | 5            | 6.07 | 8.88      | 3.06  | 2.46  |
| pmed6_200_50_15  | 200 | 35  | 15  | 49     | 199.13   | 49     | 17           | 4.24 | 8.41      | 0.31  | 0.73  |
| pmed6_200_80_5   | 200 | 75  | 5   | 49     | 14.44    | 49     | 20           | 0.56 | 12.06     | 0     | 0     |
| pmed6_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 49     | 9.95     | 49     | 20           | 0.68 | 12.35     | 0     | 0     |
| pmed6_200_80_15  | 200 | 65  | 15  | 49     | 8.64     | 49     | 20           | 0.57 | 12.72     | 0     | 0     |
| pmed6_200_80_20  | 200 | 60  | 20  | 49     | 7.53     | 49     | 20           | 0.52 | 12.51     | 0     | 0     |
| pmed6_200_100_5  | 200 | 95  | 5   | 49     | 62.39    | 49     | 20           | 0.29 | 15.05     | 0     | 0     |
| pmed6_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 49     | 8.36     | 49     | 20           | 0.31 | 15.13     | 0     | 0     |
| pmed6_200_100_15 | 200 | 85  | 15  | 49     | 8.91     | 49     | 20           | 0.34 | 15.07     | 0     | 0     |
| pmed6_200_100_20 | 200 | 80  | 20  | 49     | 8.25     | 49     | 20           | 0.44 | 15.39     | 0     | 0     |
| pmed7_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 67     | 385.27   | 67     | 19           | 0.99 | 2.97      | 0.07  | 0.33  |
| pmed7_150_20_10  | 150 | 10  | 10  | 67     | 4.69     | 67     | 20           | 0.08 | 3.06      | 0     | 0     |
| pmed7_150_30_5   | 150 | 25  | 5   | 59     | 43.70    | 59     | 20           | 0.11 | 3.31      | 0     | 0     |
| pmed7_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 59     | 4.80     | 59     | 20           | 0.08 | 3.42      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца         | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |      |           |       |       |
|------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                  |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed7_150_30_15  | 150 | 15  | 15  | 59     | 2.77     | 59     | 20           | 0.19 | 2.75      | 0     | 0     |
| pmed7_150_50_5   | 150 | 45  | 5   | 59     | 8.72     | 59     | 20           | 0.07 | 4.34      | 0     | 0     |
| pmed7_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 59     | 3.52     | 59     | 20           | 0.10 | 4.47      | 0     | 0     |
| pmed7_150_50_15  | 150 | 35  | 15  | 59     | 1.78     | 59     | 20           | 0.04 | 4.56      | 0     | 0     |
| pmed7_150_80_5   | 150 | 75  | 5   | 59     | 32.77    | 59     | 20           | 0.03 | 6.65      | 0     | 0     |
| pmed7_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 59     | 2.42     | 59     | 20           | 0.02 | 6.83      | 0     | 0     |
| pmed7_150_80_15  | 150 | 75  | 15  | 59     | 1.97     | 59     | 20           | 0.03 | 6.60      | 0     | 0     |
| pmed7_150_80_20  | 150 | 60  | 20  | 59     | 2.30     | 59     | 20           | 0.03 | 6.80      | 0     | 0     |
| pmed7_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 70*    | 81343.50 | 68     | 20           | 0.34 | 4.52      | 0     | 0     |
| pmed7_200_20_10  | 200 | 10  | 10  | 68     | 353.52   | 68     | 20           | 0.10 | 4.16      | 0     | 0     |
| pmed7_200_30_5   | 200 | 25  | 5   | 62*    | 80597.60 | 60     | 20           | 1.74 | 5.91      | 0     | 0     |
| pmed7_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 60     | 6701.03  | 60     | 20           | 2.13 | 6.04      | 0     | 0     |
| pmed7_200_30_15  | 200 | 15  | 15  | 60     | 3265.73  | 60     | 20           | 0.53 | 6.20      | 0     | 0     |
| pmed7_200_50_5   | 200 | 45  | 5   | 50     | 440.98   | 50     | 16           | 3.85 | 7.34      | 0.70  | 1.45  |
| pmed7_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 50     | 372.64   | 50     | 3            | 3.13 | 7.34      | 3.00  | 1.48  |
| pmed7_200_50_15  | 200 | 35  | 15  | 50     | 1243.84  | 50     | 20           | 2.73 | 7.79      | 0     | 0     |
| pmed7_200_80_5   | 200 | 75  | 5   | 46     | 169.09   | 46     | 20           | 2.96 | 12.26     | 0     | 0     |
| pmed7_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 46     | 19.66    | 46     | 20           | 2.45 | 12.31     | 0     | 0     |
| pmed7_200_80_15  | 200 | 65  | 15  | 46     | 6.69     | 46     | 20           | 3.51 | 11.84     | 0     | 0     |
| pmed7_200_80_20  | 200 | 60  | 20  | 46     | 8.66     | 46     | 20           | 1.44 | 12.66     | 0     | 0     |
| pmed7_200_100_5  | 200 | 95  | 5   | 46     | 22.13    | 46     | 20           | 0.70 | 15.53     | 0     | 0     |
| pmed7_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 46     | 18.64    | 46     | 20           | 0.63 | 15.22     | 0     | 0     |
| pmed7_200_100_15 | 200 | 85  | 15  | 46     | 5.31     | 46     | 20           | 1.12 | 16.15     | 0     | 0     |
| pmed7_200_100_20 | 200 | 80  | 20  | 46     | 4.52     | 46     | 20           | 0.69 | 16.09     | 0     | 0     |
| pmed8_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 70     | 29442.40 | 70     | 20           | 0.38 | 4.47      | 0     | 0     |
| pmed8_150_20_10  | 150 | 10  | 10  | 70     | 103.00   | 70     | 20           | 0.18 | 3.80      | 0     | 0     |
| pmed8_150_30_5   | 150 | 25  | 5   | 58     | 211.28   | 58     | 20           | 0.29 | 3.77      | 0     | 0     |
| pmed8_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 58     | 23.63    | 58     | 20           | 0.23 | 3.73      | 0     | 0     |
| pmed8_150_30_15  | 150 | 15  | 15  | 58     | 4.45     | 58     | 20           | 0.08 | 3.84      | 0     | 0     |
| pmed8_150_50_5   | 150 | 45  | 5   | 58     | 16.33    | 58     | 20           | 0.10 | 4.95      | 0     | 0     |
| pmed8_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 58     | 5.89     | 58     | 20           | 0.06 | 4.81      | 0     | 0     |
| pmed8_150_50_15  | 150 | 35  | 15  | 58     | 2.97     | 58     | 20           | 0.05 | 5.15      | 0     | 0     |
| pmed8_150_80_5   | 150 | 75  | 5   | 58     | 14.75    | 58     | 20           | 0.04 | 7.35      | 0     | 0     |
| pmed8_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 58     | 2.69     | 58     | 20           | 0.02 | 7.61      | 0     | 0     |
| pmed8_150_80_15  | 150 | 75  | 15  | 58     | 1.92     | 58     | 20           | 0.02 | 7.56      | 0     | 0     |
| pmed8_150_80_20  | 150 | 60  | 20  | 58     | 1.52     | 58     | 20           | 0.01 | 7.28      | 0     | 0     |
| pmed8_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 81     | 6358.28  | 81     | 7            | 1.07 | 4.45      | 2.41  | 1.77  |
| pmed8_200_20_10  | 200 | 10  | 10  | 81     | 8591.98  | 81     | 20           | 0.86 | 5.33      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца         | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |         | SVNS   |              |      |           |       |       |
|------------------|-----|-----|-----|--------|---------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                  |     |     |     | $obj.$ | $t$     | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed8_200_30_5   | 200 | 25  | 5   | 69     | 5843.80 | 69     | 1            | 1.19 | 5.40      | 1.38  | 0.32  |
| pmed8_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 70     | 446.70  | 70     | 20           | 0.77 | 5.03      | 0     | 0     |
| pmed8_200_30_15  | 200 | 15  | 15  | 70     | 18.73   | 70     | 20           | 0.31 | 3.99      | 0     | 0     |
| pmed8_200_50_5   | 200 | 45  | 5   | 68     | 19.41   | 68     | 20           | 0.30 | 6.63      | 0     | 0     |
| pmed8_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 68     | 13.17   | 68     | 20           | 0.26 | 6.56      | 0     | 0     |
| pmed8_200_50_15  | 200 | 35  | 15  | 68     | 7.42    | 68     | 20           | 0.19 | 6.86      | 0     | 0     |
| pmed8_200_80_5   | 200 | 75  | 5   | 68     | 13.88   | 68     | 20           | 0.04 | 10.00     | 0     | 0     |
| pmed8_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 68     | 7.41    | 68     | 20           | 0.13 | 9.42      | 0     | 0     |
| pmed8_200_80_15  | 200 | 65  | 15  | 68     | 5.78    | 68     | 20           | 0.12 | 9.52      | 0     | 0     |
| pmed8_200_80_20  | 200 | 60  | 20  | 68     | 4.92    | 68     | 20           | 0.11 | 9.93      | 0     | 0     |
| pmed8_200_100_5  | 200 | 95  | 5   | 68     | 48.50   | 68     | 20           | 0.05 | 12.38     | 0     | 0     |
| pmed8_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 68     | 8.03    | 68     | 20           | 0.06 | 12.73     | 0     | 0     |
| pmed8_200_100_15 | 200 | 85  | 15  | 68     | 5.20    | 68     | 20           | 0.04 | 12.18     | 0     | 0     |
| pmed8_200_100_20 | 200 | 80  | 20  | 68     | 4.70    | 68     | 20           | 0.13 | 12.39     | 0     | 0     |
| pmed9_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 71     | 1244.05 | 71     | 20           | 0.23 | 3.49      | 0     | 0     |
| pmed9_150_20_10  | 150 | 10  | 10  | 71     | 25.81   | 71     | 20           | 0.02 | 3.85      | 0     | 0     |
| pmed9_150_30_5   | 150 | 25  | 5   | 71     | 9.75    | 71     | 20           | 0.03 | 3.12      | 0     | 0     |
| pmed9_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 71     | 14.67   | 71     | 20           | 0.10 | 3.01      | 0     | 0     |
| pmed9_150_30_15  | 150 | 15  | 15  | 71     | 2.23    | 71     | 20           | 0.02 | 3.36      | 0     | 0     |
| pmed9_150_50_5   | 150 | 45  | 5   | 71     | 12.56   | 71     | 20           | 0.02 | 3.81      | 0     | 0     |
| pmed9_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 71     | 5.39    | 71     | 20           | 0.04 | 4.08      | 0     | 0     |
| pmed9_150_50_15  | 150 | 35  | 15  | 71     | 5.02    | 71     | 20           | 0.04 | 4.00      | 0     | 0     |
| pmed9_150_80_5   | 150 | 75  | 5   | 71     | 21.58   | 71     | 20           | 0.03 | 6.18      | 0     | 0     |
| pmed9_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 71     | 6.75    | 71     | 20           | 0.02 | 6.17      | 0     | 0     |
| pmed9_150_80_15  | 150 | 75  | 15  | 71     | 2.27    | 71     | 20           | 0.02 | 6.23      | 0     | 0     |
| pmed9_150_80_20  | 150 | 60  | 20  | 71     | 1.67    | 71     | 20           | 0.01 | 6.68      | 0     | 0     |
| pmed9_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 75     | 19183.5 | 75     | 20           | 0.21 | 4.99      | 0     | 0     |
| pmed9_200_20_10  | 200 | 10  | 10  | 75     | 95.8    | 75     | 20           | 0.08 | 4.38      | 0     | 0     |
| pmed9_200_30_5   | 200 | 25  | 5   | 71     | 149.28  | 71     | 20           | 0.28 | 4.89      | 0     | 0     |
| pmed9_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 71     | 14.58   | 71     | 20           | 0.22 | 5.30      | 0     | 0     |
| pmed9_200_30_15  | 200 | 15  | 15  | 71     | 5.34    | 71     | 20           | 0.09 | 4.83      | 0     | 0     |
| pmed9_200_50_5   | 200 | 45  | 5   | 71     | 11.52   | 71     | 20           | 0.12 | 5.91      | 0     | 0     |
| pmed9_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 71     | 9.00    | 71     | 20           | 0.11 | 5.67      | 0     | 0     |
| pmed9_200_50_15  | 200 | 35  | 15  | 71     | 8.98    | 71     | 20           | 0.11 | 6.03      | 0     | 0     |
| pmed9_200_80_5   | 200 | 75  | 5   | 71     | 33.88   | 71     | 20           | 0.07 | 8.83      | 0     | 0     |
| pmed9_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 71     | 9.48    | 71     | 20           | 0.02 | 9.41      | 0     | 0     |

Табела Ц.6: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу средњих инстанци  $60 \leq n \leq 200$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |       | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|-------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$   | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed9_200_80_15   | 200 | 65  | 15  | 71     | 4.61  | 71     | 20           | 0.06 | 9.32      | 0     | 0     |
| pmed9_200_80_20   | 200 | 60  | 20  | 71     | 3.14  | 71     | 20           | 0.02 | 9.33      | 0     | 0     |
| pmed9_200_100_5   | 200 | 95  | 5   | 71     | 12.31 | 71     | 20           | 0.08 | 12.50     | 0     | 0     |
| pmed9_200_100_10  | 200 | 90  | 10  | 71     | 7.02  | 71     | 20           | 0.08 | 12.36     | 0     | 0     |
| pmed9_200_100_15  | 200 | 85  | 15  | 71     | 4.41  | 71     | 20           | 0.12 | 12.55     | 0     | 0     |
| pmed9_200_100_20  | 200 | 80  | 20  | 71     | 3.63  | 71     | 20           | 0.09 | 12.75     | 0     | 0     |
| pmed10_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 62     | 8.84  | 62     | 20           | 0.08 | 2.74      | 0     | 0     |
| pmed10_150_20_10  | 150 | 10  | 10  | 62     | 3.78  | 62     | 20           | 0.02 | 2.85      | 0     | 0     |
| pmed10_150_30_5   | 150 | 25  | 5   | 62     | 12.66 | 62     | 20           | 0.02 | 2.59      | 0     | 0     |
| pmed10_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 62     | 7.75  | 62     | 20           | 0.04 | 2.81      | 0     | 0     |
| pmed10_150_30_15  | 150 | 15  | 15  | 62     | 3.72  | 62     | 20           | 0.01 | 2.72      | 0     | 0     |
| pmed10_150_50_5   | 150 | 45  | 5   | 62     | 6.08  | 62     | 20           | 0.02 | 3.43      | 0     | 0     |
| pmed10_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 62     | 3.00  | 62     | 20           | 0.02 | 3.67      | 0     | 0     |
| pmed10_150_50_15  | 150 | 35  | 15  | 62     | 3.17  | 62     | 20           | 0.01 | 3.64      | 0     | 0     |
| pmed10_150_80_5   | 150 | 75  | 5   | 62     | 14.31 | 62     | 20           | 0.01 | 6.15      | 0     | 0     |
| pmed10_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 62     | 2.28  | 62     | 20           | 0.01 | 6.20      | 0     | 0     |
| pmed10_150_80_15  | 150 | 75  | 15  | 62     | 1.84  | 62     | 20           | 0.01 | 6.06      | 0     | 0     |
| pmed10_150_80_20  | 150 | 60  | 20  | 62     | 1.53  | 62     | 20           | 0.01 | 5.87      | 0     | 0     |
| pmed10_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 70     | 15.72 | 70     | 20           | 0.03 | 3.88      | 0     | 0     |
| pmed10_200_20_10  | 200 | 10  | 10  | 70     | 13.84 | 70     | 20           | 0.01 | 4.08      | 0     | 0     |
| pmed10_200_30_5   | 200 | 25  | 5   | 70     | 6.56  | 70     | 20           | 0.04 | 3.43      | 0     | 0     |
| pmed10_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 70     | 7.36  | 70     | 20           | 0.03 | 3.79      | 0     | 0     |
| pmed10_200_30_15  | 200 | 15  | 15  | 70     | 5.92  | 70     | 20           | 0.01 | 4.41      | 0     | 0     |
| pmed10_200_50_5   | 200 | 45  | 5   | 70     | 7.84  | 70     | 20           | 0.03 | 4.51      | 0     | 0     |
| pmed10_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 70     | 4.77  | 70     | 20           | 0.04 | 4.66      | 0     | 0     |
| pmed10_200_50_15  | 200 | 35  | 15  | 70     | 3.55  | 70     | 20           | 0.04 | 4.38      | 0     | 0     |
| pmed10_200_80_5   | 200 | 75  | 5   | 70     | 11.33 | 70     | 20           | 0.04 | 7.84      | 0     | 0     |
| pmed10_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 70     | 6.98  | 70     | 20           | 0.06 | 7.72      | 0     | 0     |
| pmed10_200_80_15  | 200 | 65  | 15  | 70     | 3.64  | 70     | 20           | 0.04 | 7.26      | 0     | 0     |
| pmed10_200_80_20  | 200 | 60  | 20  | 70     | 3.55  | 70     | 20           | 0.01 | 7.92      | 0     | 0     |
| pmed10_200_100_5  | 200 | 95  | 5   | 70     | 12.94 | 70     | 20           | 0.03 | 10.89     | 0     | 0     |
| pmed10_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 70     | 10.25 | 70     | 20           | 0.04 | 11.02     | 0     | 0     |
| pmed10_200_100_15 | 200 | 85  | 15  | 70     | 3.77  | 70     | 20           | 0.07 | 11.02     | 0     | 0     |
| pmed10_200_100_20 | 200 | 80  | 20  | 70     | 3.38  | 70     | 20           | 0.03 | 10.72     | 0     | 0     |

Табела Ц.7: Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на скупу великих инстанци  $250 \leq n \leq 400$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |      |           |       |       |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed11_250_30_2   | 250 | 28  | 2   | 46*    | 77088.70 | 44     | 20           | 2.09 | 6.12      | 0     | 0     |
| pmed11_250_30_3   | 250 | 27  | 3   | 44*    | 71802.60 | 44     | 20           | 1.48 | 6.28      | 0     | 0     |
| pmed11_250_50_2   | 250 | 48  | 2   | 42     | 295.80   | 42     | 20           | 3.26 | 8.81      | 0     | 0     |
| pmed11_250_50_3   | 250 | 47  | 3   | 42     | 91.89    | 42     | 19           | 3.29 | 8.73      | 0.12  | 0.52  |
| pmed11_250_50_5   | 250 | 45  | 5   | 42     | 71.31    | 42     | 20           | 2.57 | 8.93      | 0     | 0     |
| pmed11_250_70_2   | 250 | 68  | 2   | 42     | 160.64   | 42     | 20           | 0.87 | 11.17     | 0     | 0     |
| pmed11_250_70_5   | 250 | 65  | 5   | 42     | 31.61    | 42     | 20           | 0.97 | 11.55     | 0     | 0     |
| pmed11_250_70_7   | 250 | 63  | 7   | 42     | 19.11    | 42     | 20           | 0.60 | 11.50     | 0     | 0     |
| pmed11_250_90_2   | 250 | 88  | 2   | 42     | 33.98    | 42     | 20           | 0.52 | 15.49     | 0     | 0     |
| pmed11_250_90_5   | 250 | 85  | 5   | 42     | 24.38    | 42     | 20           | 0.39 | 15.22     | 0     | 0     |
| pmed11_250_90_9   | 250 | 81  | 9   | 42     | 12.89    | 42     | 20           | 0.41 | 15.62     | 0     | 0     |
| pmed11_300_60_2   | 300 | 58  | 2   | 51     | 92.05    | 51     | 20           | 0.14 | 10.62     | 0     | 0     |
| pmed11_300_60_3   | 300 | 57  | 3   | 51     | 760.67   | 51     | 20           | 0.18 | 11.16     | 0     | 0     |
| pmed11_300_60_6   | 300 | 54  | 6   | 51     | 29.19    | 51     | 20           | 0.19 | 11.30     | 0     | 0     |
| pmed11_300_80_2   | 300 | 78  | 2   | 51     | 970.61   | 51     | 20           | 0.14 | 14.93     | 0     | 0     |
| pmed11_300_80_5   | 300 | 75  | 5   | 51     | 125.34   | 51     | 20           | 0.13 | 15.30     | 0     | 0     |
| pmed11_300_80_8   | 300 | 72  | 8   | 51     | 40.48    | 51     | 20           | 0.12 | 15.38     | 0     | 0     |
| pmed11_300_100_2  | 300 | 98  | 2   | 51     | 309.56   | 51     | 20           | 0.11 | 20.82     | 0     | 0     |
| pmed11_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 51     | 60.88    | 51     | 20           | 0.09 | 20.96     | 0     | 0     |
| pmed11_300_100_10 | 300 | 90  | 10  | 51     | 133.39   | 51     | 20           | 0.11 | 20.30     | 0     | 0     |
| pmed11_300_150_2  | 300 | 148 | 2   | 51     | 196.78   | 51     | 20           | 0.13 | 37.84     | 0     | 0     |
| pmed11_300_150_5  | 300 | 145 | 5   | 51     | 25.03    | 51     | 20           | 0.11 | 38.01     | 0     | 0     |
| pmed11_300_150_10 | 300 | 140 | 10  | 51     | 38.20    | 51     | 20           | 0.10 | 37.55     | 0     | 0     |
| pmed11_300_150_15 | 300 | 135 | 15  | 51     | 27.64    | 51     | 20           | 0.06 | 37.50     | 0     | 0     |
| pmed12_250_30_2   | 250 | 28  | 2   | 48*    | 74375.10 | 48     | 15           | 3.70 | 6.25      | 0.62  | 1.16  |
| pmed12_250_30_3   | 250 | 27  | 3   | 47*    | 67789.90 | 48     | 20           | 2.16 | 6.62      | 0     | 0     |
| pmed12_250_50_2   | 250 | 48  | 2   | 43     | 3013.7   | 43     | 1            | 3.32 | 8.25      | 7.67  | 3.76  |
| pmed12_250_50_3   | 250 | 47  | 3   | 43     | 4904.08  | 43     | 3            | 5.16 | 8.80      | 2.79  | 1.58  |
| pmed12_250_50_5   | 250 | 45  | 5   | 43     | 323.047  | 43     | 4            | 5.27 | 8.89      | 3.37  | 2.80  |
| pmed12_250_70_2   | 250 | 68  | 2   | 43     | 214.63   | 43     | 11           | 2.58 | 11.57     | 1.05  | 1.16  |
| pmed12_250_70_5   | 250 | 65  | 5   | 43     | 58.23    | 43     | 17           | 4.46 | 11.84     | 0.35  | 0.83  |
| pmed12_250_70_7   | 250 | 63  | 7   | 43     | 41.11    | 43     | 18           | 4.77 | 11.77     | 0.23  | 0.70  |
| pmed12_250_90_2   | 250 | 88  | 2   | 43     | 479.78   | 43     | 20           | 1.65 | 15.44     | 0     | 0     |
| pmed12_250_90_5   | 250 | 85  | 5   | 43     | 128.09   | 43     | 20           | 2.26 | 15.91     | 0     | 0     |
| pmed12_250_90_9   | 250 | 81  | 9   | 43     | 18.08    | 43     | 20           | 1.69 | 15.37     | 0     | 0     |
| pmed12_300_60_2   | 300 | 58  | 2   | 72     | 240.83   | 72     | 20           | 0.10 | 7.78      | 0     | 0     |

Табела Ц.7: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу великих инстанци  $250 \leq n \leq 400$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |       |           |       |       |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|-------|-----------|-------|-------|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$   | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed12_300_60_3   | 300 | 57  | 3   | 72     | 96.39    | 72     | 20           | 0.09  | 8.00      | 0     | 0     |
| pmed12_300_60_6   | 300 | 54  | 6   | 72     | 158.30   | 72     | 20           | 0.11  | 8.19      | 0     | 0     |
| pmed12_300_80_2   | 300 | 78  | 2   | 72     | 159.13   | 72     | 20           | 0.10  | 10.86     | 0     | 0     |
| pmed12_300_80_5   | 300 | 75  | 5   | 72     | 73.19    | 72     | 20           | 0.11  | 11.94     | 0     | 0     |
| pmed12_300_80_8   | 300 | 72  | 8   | 72     | 19.39    | 72     | 20           | 0.02  | 12.47     | 0     | 0     |
| pmed12_300_100_2  | 300 | 98  | 2   | 72     | 132.50   | 72     | 20           | 0.24  | 16.17     | 0     | 0     |
| pmed12_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 72     | 37.55    | 72     | 20           | 0.25  | 16.61     | 0     | 0     |
| pmed12_300_100_10 | 300 | 90  | 10  | 72     | 36.84    | 72     | 20           | 0.13  | 16.39     | 0     | 0     |
| pmed12_300_150_2  | 300 | 148 | 2   | 72     | 337.69   | 72     | 20           | 0.22  | 34.61     | 0     | 0     |
| pmed12_300_150_5  | 300 | 145 | 5   | 72     | 52.36    | 72     | 20           | 0.20  | 31.68     | 0     | 0     |
| pmed12_300_150_10 | 300 | 140 | 10  | 72     | 33.56    | 72     | 20           | 0.16  | 34.69     | 0     | 0     |
| pmed12_300_150_15 | 300 | 135 | 15  | 72     | 18.22    | 72     | 20           | 0.36  | 32.69     | 0     | 0     |
| pmed16_350_40_2   | 350 | 38  | 2   | 41*    | 15109.30 | 37     | 3            | 6.46  | 10.03     | 2.30  | 0.97  |
| pmed16_350_40_4   | 350 | 36  | 4   | 40*    | 52501.90 | 37     | 4            | 6.20  | 10.18     | 2.84  | 2.34  |
| pmed16_350_70_2   | 350 | 68  | 2   | 33     | 1355.89  | 33     | 5            | 6.68  | 17.38     | 2.27  | 1.31  |
| pmed16_350_70_5   | 350 | 65  | 5   | 33     | 2618.73  | 33     | 3            | 7.87  | 17.03     | 3.33  | 2.33  |
| pmed16_350_70_8   | 350 | 62  | 8   | 33     | 111.09   | 33     | 1            | 9.63  | 17.43     | 3.79  | 2.32  |
| pmed16_350_90_2   | 350 | 88  | 2   | 33     | 474.81   | 33     | 20           | 9.66  | 24.27     | 0     | 0     |
| pmed16_350_90_5   | 350 | 85  | 5   | 33     | 303.64   | 33     | 15           | 8.55  | 24.34     | 0.76  | 1.31  |
| pmed16_350_90_9   | 350 | 81  | 9   | 33     | 37.20    | 33     | 20           | 6.73  | 22.92     | 0     | 0     |
| pmed16_350_120_2  | 350 | 118 | 2   | 33     | 1903.33  | 33     | 20           | 3.68  | 33.88     | 0     | 0     |
| pmed16_350_120_5  | 350 | 115 | 5   | 33     | 191.52   | 33     | 20           | 4.51  | 35.64     | 0     | 0     |
| pmed16_350_120_10 | 350 | 110 | 10  | 33     | 55.52    | 33     | 20           | 4.03  | 35.81     | 0     | 0     |
| pmed16_350_120_12 | 350 | 108 | 12  | 33     | 54.22    | 33     | 20           | 3.94  | 33.00     | 0     | 0     |
| pmed16_400_80_2   | 400 | 78  | 2   | 33     | 838.22   | 33     | 1            | 8.10  | 22.67     | 2.88  | 0.66  |
| pmed16_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 33     | 363.73   | 33     | 2            | 6.58  | 23.87     | 2.73  | 0.91  |
| pmed16_400_80_8   | 400 | 72  | 8   | 33     | 6079.09  | 33     | 1            | 4.88  | 23.49     | 2.88  | 0.66  |
| pmed16_400_100_2  | 400 | 98  | 2   | 33     | 724.03   | 33     | 12           | 8.89  | 30.92     | 1.21  | 1.48  |
| pmed16_400_100_5  | 400 | 95  | 5   | 33     | 627.28   | 33     | 10           | 10.40 | 30.45     | 1.52  | 1.52  |
| pmed16_400_100_10 | 400 | 90  | 10  | 33     | 54.20    | 33     | 4            | 7.31  | 31.10     | 2.42  | 1.21  |
| pmed16_400_140_2  | 400 | 138 | 2   | 33     | 676.17   | 33     | 20           | 8.63  | 49.98     | 0     | 0     |
| pmed16_400_140_5  | 400 | 135 | 5   | 33     | 93.36    | 33     | 20           | 7.51  | 49.92     | 0     | 0     |
| pmed16_400_140_10 | 400 | 130 | 10  | 33     | 56.03    | 33     | 20           | 8.13  | 52.82     | 0     | 0     |
| pmed16_400_140_14 | 400 | 126 | 14  | 33     | 60.14    | 33     | 20           | 6.31  | 53.94     | 0     | 0     |
| pmed16_400_200_2  | 400 | 198 | 2   | 33     | 1874.17  | 33     | 20           | 3.12  | 96.10     | 0     | 0     |
| pmed16_400_200_5  | 400 | 195 | 5   | 33     | 297.92   | 33     | 20           | 3.51  | 95.67     | 0     | 0     |

Табела Ц.7: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу великих инстанци  $250 \leq n \leq 400$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |      |           |       |       |  |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|------|-----------|-------|-------|--|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |  |
| pmed16_400_200_10 | 400 | 190 | 10  | 33     | 90.58    | 33     | 20           | 2.03 | 96.14     | 0     | 0     |  |
| pmed16_400_200_15 | 400 | 185 | 15  | 33     | 46.30    | 33     | 20           | 2.65 | 94.49     | 0     | 0     |  |
| pmed16_400_200_20 | 400 | 180 | 20  | 33     | 45.44    | 33     | 20           | 1.40 | 100.78    | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_40_2   | 350 | 38  | 2   | 37     | 47861.20 | 37     | 2            | 3.07 | 10.05     | 4.86  | 1.62  |  |
| pmed17_350_40_4   | 350 | 36  | 4   | 37     | 29562.80 | 37     | 2            | 2.46 | 9.87      | 4.86  | 1.62  |  |
| pmed17_350_70_2   | 350 | 68  | 2   | 37     | 232.13   | 37     | 20           | 3.52 | 15.73     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_70_5   | 350 | 65  | 5   | 37     | 179.31   | 37     | 20           | 3.14 | 16.11     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_70_7   | 350 | 63  | 7   | 37     | 88.05    | 37     | 20           | 2.72 | 15.82     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_90_2   | 350 | 88  | 2   | 37     | 898.11   | 37     | 20           | 1.83 | 21.50     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_90_5   | 350 | 85  | 5   | 37     | 197.86   | 37     | 20           | 1.68 | 21.61     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_90_9   | 350 | 81  | 9   | 37     | 40.45    | 37     | 20           | 1.30 | 21.30     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_120_2  | 350 | 118 | 2   | 37     | 178.17   | 37     | 20           | 0.70 | 32.31     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_120_5  | 350 | 115 | 5   | 37     | 337.17   | 37     | 20           | 0.70 | 32.29     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_120_10 | 350 | 110 | 10  | 37     | 59.38    | 37     | 20           | 1.43 | 32.21     | 0     | 0     |  |
| pmed17_350_120_12 | 350 | 108 | 12  | 37     | 56.88    | 37     | 20           | 1.25 | 31.98     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_80_2   | 400 | 78  | 2   | 37     | 442.88   | 37     | 20           | 3.39 | 21.72     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 37     | 286.05   | 37     | 20           | 2.24 | 21.66     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_80_8   | 400 | 72  | 8   | 37     | 64.59    | 37     | 20           | 2.93 | 21.28     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_100_2  | 400 | 98  | 2   | 37     | 1970.36  | 37     | 20           | 1.93 | 28.63     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_100_5  | 400 | 95  | 5   | 37     | 130.06   | 37     | 20           | 1.96 | 29.34     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_100_10 | 400 | 90  | 10  | 37     | 406.31   | 37     | 20           | 2.23 | 29.08     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_140_2  | 400 | 138 | 2   | 37     | 1951.47  | 37     | 20           | 0.60 | 48.05     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_140_5  | 400 | 135 | 5   | 37     | 453.67   | 37     | 20           | 0.83 | 46.98     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_140_10 | 400 | 130 | 10  | 37     | 123.52   | 37     | 20           | 0.95 | 48.64     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_140_14 | 400 | 126 | 14  | 37     | 47.30    | 37     | 20           | 1.17 | 48.10     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_200_2  | 400 | 198 | 2   | 37     | 357.52   | 37     | 20           | 0.35 | 88.97     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_200_5  | 400 | 195 | 5   | 37     | 160.64   | 37     | 20           | 0.52 | 96.56     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_200_10 | 400 | 190 | 10  | 37     | 41.44    | 37     | 20           | 0.41 | 93.60     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_200_15 | 400 | 185 | 15  | 37     | 64.81    | 37     | 20           | 0.54 | 94.03     | 0     | 0     |  |
| pmed17_400_200_20 | 400 | 180 | 20  | 37     | 42.86    | 37     | 20           | 0.65 | 92.48     | 0     | 0     |  |

Табела Ц.8: Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на скупу великих инстанци  $800 \leq n \leq 900$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX       |         | SVNS        |              |      |           |            |            |
|-------------------|-----|-----|-----|-------------|---------|-------------|--------------|------|-----------|------------|------------|
|                   |     |     |     | <i>obj.</i> | $t$     | <i>obj.</i> | $\#opt/\#bk$ | $t$  | $t_{tot}$ | <i>gap</i> | <i>dev</i> |
| pmed35_800_160_2  | 800 | 158 | 2   | 29          | 5127.31 | 29          | 20           | 3.08 | 117.34    | 0          | 0          |
| pmed35_800_160_5  | 800 | 155 | 5   | 29          | 2381.80 | 29          | 20           | 3.25 | 119.30    | 0          | 0          |
| pmed35_800_160_10 | 800 | 150 | 10  | 29          | 2004.03 | 29          | 20           | 4.00 | 121.06    | 0          | 0          |
| pmed35_800_160_16 | 800 | 144 | 16  | 29          | 764.45  | 29          | 20           | 4.40 | 119.87    | 0          | 0          |
| pmed35_800_200_2  | 800 | 198 | 2   | OOM         |         | 29          | 20           | 3.30 | 174.04    | 0          | 0          |
| pmed35_800_200_5  | 800 | 195 | 5   | OOM         |         | 29          | 20           | 3.04 | 172.51    | 0          | 0          |
| pmed35_800_200_10 | 800 | 190 | 10  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.60 | 175.23    | 0          | 0          |
| pmed35_800_200_15 | 800 | 185 | 15  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.71 | 173.58    | 0          | 0          |
| pmed35_800_200_20 | 800 | 180 | 20  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.86 | 172.66    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_2  | 800 | 268 | 2   | OOM         |         | 29          | 20           | 2.49 | 301.28    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_5  | 800 | 265 | 5   | OOM         |         | 29          | 20           | 3.56 | 281.21    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_10 | 800 | 260 | 10  | OOM         |         | 29          | 20           | 3.18 | 308.78    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_15 | 800 | 255 | 15  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.77 | 303.27    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_20 | 800 | 250 | 20  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.55 | 303.89    | 0          | 0          |
| pmed35_800_270_25 | 800 | 245 | 25  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.48 | 299.20    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_2  | 800 | 398 | 2   | OOM         |         | 29          | 20           | 1.98 | 620.51    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_5  | 800 | 395 | 5   | OOM         |         | 29          | 20           | 1.60 | 613.18    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_10 | 800 | 390 | 10  | OOM         |         | 29          | 20           | 1.62 | 617.86    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_20 | 800 | 380 | 20  | OOM         |         | 29          | 20           | 2.62 | 608.10    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_30 | 800 | 370 | 30  | OOM         |         | 29          | 20           | 1.88 | 615.23    | 0          | 0          |
| pmed35_800_400_40 | 800 | 360 | 40  | OOM         |         | 29          | 20           | 1.77 | 594.85    | 0          | 0          |
| pmed36_800_160_2  | 800 | 158 | 2   | OOM         |         | 42          | 20           | 0.88 | 101.18    | 0          | 0          |
| pmed36_800_160_5  | 800 | 155 | 5   | OOM         |         | 42          | 20           | 1.17 | 102.39    | 0          | 0          |
| pmed36_800_160_10 | 800 | 150 | 10  | OOM         |         | 42          | 20           | 0.97 | 102.51    | 0          | 0          |
| pmed36_800_160_16 | 800 | 144 | 16  | OOM         |         | 42          | 20           | 0.85 | 102.83    | 0          | 0          |
| pmed36_800_200_2  | 800 | 198 | 2   | OOM         |         | 42          | 20           | 1.12 | 154.22    | 0          | 0          |
| pmed36_800_200_5  | 800 | 195 | 5   | OOM         |         | 42          | 20           | 1.35 | 157.31    | 0          | 0          |
| pmed36_800_200_10 | 800 | 190 | 10  | OOM         |         | 42          | 20           | 1.02 | 154.29    | 0          | 0          |
| pmed36_800_200_15 | 800 | 185 | 15  | OOM         |         | 42          | 20           | 0.93 | 157.34    | 0          | 0          |
| pmed36_800_200_20 | 800 | 180 | 20  | OOM         |         | 42          | 20           | 1.57 | 154.94    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_2  | 800 | 268 | 2   | OOM         |         | 42          | 20           | 1.29 | 273.30    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_5  | 800 | 265 | 5   | OOM         |         | 42          | 20           | 4.67 | 234.48    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_10 | 800 | 260 | 10  | OOM         |         | 42          | 20           | 1.57 | 273.71    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_15 | 800 | 255 | 15  | OOM         |         | 42          | 20           | 0.92 | 271.78    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_20 | 800 | 250 | 20  | OOM         |         | 42          | 20           | 1.70 | 269.87    | 0          | 0          |
| pmed36_800_270_25 | 800 | 245 | 25  | OOM         |         | 42          | 20           | 1.20 | 273.51    | 0          | 0          |

Табела Ц.8: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу веома великих инстанци  $800 \leq n \leq 900$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX       | SVNS        |                 |       |           |            |            |
|-------------------|-----|-----|-----|-------------|-------------|-----------------|-------|-----------|------------|------------|
|                   |     |     |     | <i>obj.</i> | <i>obj.</i> | <i>#opt/#bk</i> | $t$   | $t_{tot}$ | <i>gap</i> | <i>dev</i> |
| pmed36_800_400_2  | 800 | 398 | 2   | OOM         | 42          | 20              | 1.09  | 587.67    | 0          | 0          |
| pmed36_800_400_5  | 800 | 395 | 5   | OOM         | 42          | 20              | 2.34  | 588.69    | 0          | 0          |
| pmed36_800_400_10 | 800 | 390 | 10  | OOM         | 42          | 20              | 1.39  | 572.44    | 0          | 0          |
| pmed36_800_400_20 | 800 | 380 | 20  | OOM         | 42          | 20              | 2.36  | 596.99    | 0          | 0          |
| pmed36_800_400_30 | 800 | 370 | 30  | OOM         | 42          | 20              | 3.02  | 619.29    | 0          | 0          |
| pmed36_800_400_40 | 800 | 360 | 40  | OOM         | 42          | 20              | 2.04  | 567.61    | 0          | 0          |
| pmed37_800_160_2  | 800 | 158 | 2   | OOM         | 33          | 20              | 4.04  | 120.46    | 0          | 0          |
| pmed37_800_160_5  | 800 | 155 | 5   | OOM         | 33          | 20              | 4.55  | 118.82    | 0          | 0          |
| pmed37_800_160_10 | 800 | 150 | 10  | OOM         | 33          | 20              | 3.10  | 118.14    | 0          | 0          |
| pmed37_800_160_16 | 800 | 144 | 16  | OOM         | 33          | 20              | 5.33  | 119.16    | 0          | 0          |
| pmed37_800_200_2  | 800 | 198 | 2   | OOM         | 33          | 20              | 8.89  | 171.76    | 0          | 0          |
| pmed37_800_200_5  | 800 | 195 | 5   | OOM         | 33          | 20              | 4.97  | 168.02    | 0          | 0          |
| pmed37_800_200_10 | 800 | 190 | 10  | OOM         | 33          | 20              | 6.90  | 171.81    | 0          | 0          |
| pmed37_800_200_15 | 800 | 185 | 15  | OOM         | 33          | 20              | 7.81  | 173.29    | 0          | 0          |
| pmed37_800_200_20 | 800 | 180 | 20  | OOM         | 33          | 20              | 3.10  | 170.73    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_2  | 800 | 268 | 2   | OOM         | 33          | 20              | 7.32  | 298.16    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_5  | 800 | 265 | 5   | OOM         | 33          | 20              | 8.19  | 297.36    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_10 | 800 | 260 | 10  | OOM         | 33          | 20              | 5.90  | 289.98    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_15 | 800 | 255 | 15  | OOM         | 33          | 20              | 4.47  | 289.68    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_20 | 800 | 250 | 20  | OOM         | 33          | 20              | 5.14  | 301.35    | 0          | 0          |
| pmed37_800_270_25 | 800 | 245 | 25  | OOM         | 33          | 20              | 13.91 | 291.63    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_2  | 800 | 398 | 2   | OOM         | 33          | 20              | 8.47  | 609.09    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_5  | 800 | 395 | 5   | OOM         | 33          | 20              | 14.96 | 596.02    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_10 | 800 | 390 | 10  | OOM         | 33          | 20              | 5.87  | 605.77    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_20 | 800 | 380 | 20  | OOM         | 33          | 20              | 7.95  | 599.02    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_30 | 800 | 370 | 30  | OOM         | 33          | 20              | 0.77  | 460.27    | 0          | 0          |
| pmed37_800_400_40 | 800 | 360 | 40  | OOM         | 33          | 20              | 7.25  | 595.64    | 0          | 0          |
| pmed38_850_90_2   | 850 | 88  | 2   | OOM         | 28          | 20              | 3.25  | 60.16     | 0          | 0          |
| pmed38_850_90_5   | 850 | 85  | 5   | OOM         | 28          | 20              | 3.63  | 59.17     | 0          | 0          |
| pmed38_850_90_9   | 850 | 81  | 9   | OOM         | 28          | 20              | 1.85  | 59.67     | 0          | 0          |
| pmed38_850_170_2  | 850 | 168 | 2   | OOM         | 28          | 20              | 3.03  | 142.46    | 0          | 0          |
| pmed38_850_170_5  | 850 | 165 | 5   | OOM         | 28          | 20              | 3.43  | 142.98    | 0          | 0          |
| pmed38_850_170_10 | 850 | 160 | 10  | OOM         | 28          | 20              | 2.75  | 141.85    | 0          | 0          |
| pmed38_850_170_17 | 850 | 153 | 17  | OOM         | 28          | 20              | 3.74  | 137.06    | 0          | 0          |
| pmed38_850_220_2  | 850 | 218 | 2   | OOM         | 28          | 20              | 2.97  | 216.75    | 0          | 0          |
| pmed38_850_220_5  | 850 | 215 | 5   | OOM         | 28          | 20              | 3.04  | 224.12    | 0          | 0          |
| pmed38_850_220_10 | 850 | 210 | 10  | OOM         | 28          | 20              | 2.44  | 217.82    | 0          | 0          |

Табела Ц.8: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу веома великих инстанци  $800 \leq n \leq 900$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  | SVNS   |              |       |           |       |       |  |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------------|-------|-----------|-------|-------|--|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$   | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |  |
| pmed38_850_220_15 | 850 | 205 | 15  | OOM    | 28     | 20           | 3.17  | 217.88    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_220_22 | 850 | 198 | 22  | OOM    | 28     | 20           | 3.95  | 221.55    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_2  | 850 | 288 | 2   | OOM    | 28     | 20           | 2.59  | 364.16    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_5  | 850 | 285 | 5   | OOM    | 28     | 20           | 4.63  | 368.78    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_10 | 850 | 280 | 10  | OOM    | 28     | 20           | 3.28  | 379.83    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_15 | 850 | 275 | 15  | OOM    | 28     | 20           | 3.40  | 385.85    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_20 | 850 | 270 | 20  | OOM    | 28     | 20           | 2.51  | 378.73    | 0     | 0     |  |
| pmed38_850_290_29 | 850 | 261 | 29  | OOM    | 28     | 20           | 2.26  | 375.54    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_180_2  | 900 | 178 | 2   | OOM    | 40     | 20           | 1.96  | 143.03    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_180_5  | 900 | 175 | 5   | OOM    | 40     | 20           | 2.07  | 145.43    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_180_10 | 900 | 170 | 10  | OOM    | 40     | 20           | 1.70  | 142.53    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_180_15 | 900 | 165 | 15  | OOM    | 40     | 20           | 1.85  | 141.78    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_180_18 | 900 | 162 | 18  | OOM    | 40     | 20           | 1.82  | 145.81    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_230_2  | 900 | 228 | 2   | OOM    | 40     | 20           | 2.18  | 224.68    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_230_5  | 900 | 225 | 5   | OOM    | 40     | 20           | 2.05  | 232.15    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_230_10 | 900 | 220 | 10  | OOM    | 40     | 20           | 2.27  | 224.66    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_230_15 | 900 | 215 | 15  | OOM    | 40     | 20           | 1.87  | 234.02    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_230_20 | 900 | 210 | 20  | OOM    | 40     | 20           | 2.48  | 233.45    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_300_2  | 900 | 298 | 2   | OOM    | 40     | 20           | 2.62  | 378.38    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_300_5  | 900 | 295 | 5   | OOM    | 40     | 20           | 4.03  | 386.81    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_300_10 | 900 | 290 | 10  | OOM    | 40     | 20           | 1.48  | 374.77    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_300_20 | 900 | 280 | 20  | OOM    | 40     | 20           | 1.98  | 369.93    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_300_30 | 900 | 270 | 30  | OOM    | 40     | 20           | 2.07  | 389.69    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_2  | 900 | 448 | 2   | OOM    | 40     | 20           | 3.36  | 834.82    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_5  | 900 | 445 | 5   | OOM    | 40     | 20           | 4.86  | 835.18    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_10 | 900 | 440 | 10  | OOM    | 40     | 20           | 3.16  | 836.44    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_20 | 900 | 430 | 20  | OOM    | 40     | 20           | 2.87  | 844.24    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_30 | 900 | 420 | 30  | OOM    | 40     | 20           | 6.30  | 835.33    | 0     | 0     |  |
| pmed38_900_450_40 | 900 | 410 | 40  | OOM    | 40     | 20           | 3.04  | 838.06    | 0     | 0     |  |
| pmed39_850_90_2   | 850 | 88  | 2   | OOM    | 22     | 2            | 28.65 | 61.29     | 5.23  | 2.60  |  |
| pmed39_850_90_5   | 850 | 85  | 5   | OOM    | 22     | 3            | 27.23 | 62.12     | 4.77  | 2.68  |  |
| pmed39_850_90_9   | 850 | 81  | 9   | OOM    | 22     | 4            | 28.10 | 61.71     | 5     | 3.18  |  |
| pmed39_850_170_2  | 850 | 168 | 2   | OOM    | 22     | 20           | 22.96 | 147.76    | 0     | 0     |  |
| pmed39_850_170_5  | 850 | 165 | 5   | OOM    | 22     | 20           | 18.09 | 149.03    | 0     | 0     |  |
| pmed39_850_170_10 | 850 | 160 | 10  | OOM    | 22     | 20           | 25.90 | 148.06    | 0     | 0     |  |
| pmed39_850_170_17 | 850 | 153 | 17  | OOM    | 22     | 20           | 18.02 | 149.44    | 0     | 0     |  |
| pmed39_850_220_2  | 850 | 218 | 2   | OOM    | 22     | 20           | 16.79 | 230.67    | 0     | 0     |  |

Табела Ц.8: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу веома великих инстанци  $800 \leq n \leq 900$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX       | SVNS        |                 |       |           |            |            |
|-------------------|-----|-----|-----|-------------|-------------|-----------------|-------|-----------|------------|------------|
|                   |     |     |     | <i>obj.</i> | <i>obj.</i> | <i>#opt/#bk</i> | $t$   | $t_{tot}$ | <i>gap</i> | <i>dev</i> |
| pmed39_850_220_5  | 850 | 215 | 5   | OOM         | 22          | 20              | 13.21 | 223.49    | 0          | 0          |
| pmed39_850_220_10 | 850 | 210 | 10  | OOM         | 22          | 20              | 14.94 | 225.54    | 0          | 0          |
| pmed39_850_220_15 | 850 | 205 | 15  | OOM         | 22          | 20              | 16.78 | 229.64    | 0          | 0          |
| pmed39_850_220_22 | 850 | 198 | 22  | OOM         | 22          | 20              | 7.85  | 226.44    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_2  | 850 | 288 | 2   | OOM         | 22          | 20              | 15.65 | 374.67    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_5  | 850 | 285 | 5   | OOM         | 22          | 20              | 9.25  | 376.84    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_10 | 850 | 280 | 10  | OOM         | 22          | 20              | 14.07 | 372.69    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_15 | 850 | 275 | 15  | OOM         | 22          | 20              | 10.93 | 382.54    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_20 | 850 | 270 | 20  | OOM         | 22          | 20              | 11.04 | 372.02    | 0          | 0          |
| pmed39_850_290_29 | 850 | 261 | 29  | OOM         | 22          | 20              | 4.00  | 379.16    | 0          | 0          |
| pmed39_900_180_2  | 900 | 178 | 2   | OOM         | 74          | 20              | 1.34  | 146.35    | 0          | 0          |
| pmed39_900_180_5  | 900 | 175 | 5   | OOM         | 74          | 20              | 1.43  | 145.97    | 0          | 0          |
| pmed39_900_180_10 | 900 | 170 | 10  | OOM         | 74          | 20              | 1.83  | 144.55    | 0          | 0          |
| pmed39_900_180_15 | 900 | 165 | 15  | OOM         | 74          | 20              | 2.04  | 144.53    | 0          | 0          |
| pmed39_900_180_18 | 900 | 162 | 18  | OOM         | 74          | 20              | 1.51  | 144.64    | 0          | 0          |
| pmed39_900_230_2  | 900 | 228 | 2   | OOM         | 74          | 20              | 1.33  | 229.16    | 0          | 0          |
| pmed39_900_230_5  | 900 | 225 | 5   | OOM         | 74          | 20              | 1.90  | 226.78    | 0          | 0          |
| pmed39_900_230_10 | 900 | 220 | 10  | OOM         | 74          | 20              | 2.10  | 230.78    | 0          | 0          |
| pmed39_900_230_15 | 900 | 215 | 15  | OOM         | 74          | 20              | 1.81  | 227.18    | 0          | 0          |
| pmed39_900_230_20 | 900 | 210 | 20  | OOM         | 74          | 20              | 2.08  | 230.31    | 0          | 0          |
| pmed39_900_300_2  | 900 | 298 | 2   | OOM         | 74          | 20              | 1.47  | 381.52    | 0          | 0          |
| pmed39_900_300_5  | 900 | 295 | 5   | OOM         | 74          | 20              | 1.38  | 387.28    | 0          | 0          |
| pmed39_900_300_10 | 900 | 290 | 10  | OOM         | 74          | 20              | 1.74  | 381.20    | 0          | 0          |
| pmed39_900_300_20 | 900 | 280 | 20  | OOM         | 74          | 20              | 1.84  | 377.29    | 0          | 0          |
| pmed39_900_300_30 | 900 | 270 | 30  | OOM         | 74          | 20              | 1.51  | 375.09    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_2  | 900 | 448 | 2   | OOM         | 74          | 20              | 0.90  | 787.46    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_5  | 900 | 445 | 5   | OOM         | 74          | 20              | 3.75  | 851.93    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_10 | 900 | 440 | 10  | OOM         | 74          | 20              | 0.81  | 629.88    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_20 | 900 | 430 | 20  | OOM         | 74          | 20              | 0.91  | 865.38    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_30 | 900 | 420 | 30  | OOM         | 74          | 20              | 1.84  | 835.29    | 0          | 0          |
| pmed39_900_450_40 | 900 | 410 | 40  | OOM         | 74          | 20              | 0.91  | 631.03    | 0          | 0          |
| pmed40_850_90_2   | 850 | 88  | 2   | OOM         | 27          | 20              | 9.42  | 62.96     | 0          | 0          |
| pmed40_850_90_5   | 850 | 85  | 5   | OOM         | 27          | 20              | 15.29 | 62.64     | 0          | 0          |
| pmed40_850_90_9   | 850 | 81  | 9   | OOM         | 27          | 18              | 12.85 | 63.56     | 0.37       | 1.11       |
| pmed40_850_170_2  | 850 | 168 | 2   | OOM         | 27          | 20              | 8.40  | 151.28    | 0          | 0          |
| pmed40_850_170_5  | 850 | 165 | 5   | OOM         | 27          | 20              | 10.42 | 149.86    | 0          | 0          |

Табела Ц.8: (Наставак) Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгорита на скупу веома великих инстанци  $800 \leq n \leq 900$ .

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX       | SVNS        |                 |       |           |            |            |
|-------------------|-----|-----|-----|-------------|-------------|-----------------|-------|-----------|------------|------------|
|                   |     |     |     | <i>obj.</i> | <i>obj.</i> | <i>#opt/#bk</i> | $t$   | $t_{tot}$ | <i>gap</i> | <i>dev</i> |
| pmed40_850_170_10 | 850 | 160 | 10  | OOM         | 27          | 20              | 9.90  | 149.49    | 0          | 0          |
| pmed40_850_170_17 | 850 | 153 | 17  | OOM         | 27          | 20              | 4.90  | 149.21    | 0          | 0          |
| pmed40_850_220_2  | 850 | 218 | 2   | OOM         | 27          | 20              | 9.74  | 232.54    | 0          | 0          |
| pmed40_850_220_5  | 850 | 215 | 5   | OOM         | 27          | 20              | 7.83  | 233.86    | 0          | 0          |
| pmed40_850_220_10 | 850 | 210 | 10  | OOM         | 27          | 20              | 9.92  | 231.23    | 0          | 0          |
| pmed40_850_220_15 | 850 | 205 | 15  | OOM         | 27          | 20              | 8.74  | 227.63    | 0          | 0          |
| pmed40_850_220_22 | 850 | 198 | 22  | OOM         | 27          | 20              | 8.59  | 230.95    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_2  | 850 | 288 | 2   | OOM         | 27          | 20              | 8.62  | 375.11    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_5  | 850 | 285 | 5   | OOM         | 27          | 20              | 17.67 | 375.66    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_10 | 850 | 280 | 10  | OOM         | 27          | 20              | 10.93 | 375.00    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_15 | 850 | 275 | 15  | OOM         | 27          | 20              | 14.35 | 353.82    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_20 | 850 | 270 | 20  | OOM         | 27          | 20              | 17.28 | 373.71    | 0          | 0          |
| pmed40_850_290_29 | 850 | 261 | 29  | OOM         | 27          | 20              | 10.81 | 362.32    | 0          | 0          |
| pmed40_900_180_2  | 900 | 178 | 2   | OOM         | 23          | 18              | 73.21 | 173.84    | 0.43       | 1.3        |
| pmed40_900_180_5  | 900 | 175 | 5   | OOM         | 23          | 15              | 77.73 | 174.19    | 1.09       | 1.88       |
| pmed40_900_180_10 | 900 | 170 | 10  | OOM         | 23          | 18              | 65.77 | 176.91    | 0.43       | 1.3        |
| pmed40_900_180_15 | 900 | 165 | 15  | OOM         | 23          | 14              | 72.37 | 175.09    | 1.3        | 1.99       |
| pmed40_900_180_18 | 900 | 162 | 18  | OOM         | 23          | 20              | 58.00 | 175.56    | 0.43       | 1.3        |
| pmed40_900_230_2  | 900 | 228 | 2   | OOM         | 23          | 20              | 42.05 | 268.92    | 0          | 0          |
| pmed40_900_230_5  | 900 | 225 | 5   | OOM         | 23          | 20              | 35.55 | 260.87    | 0          | 0          |
| pmed40_900_230_10 | 900 | 220 | 10  | OOM         | 23          | 20              | 50.12 | 258.31    | 0          | 0          |
| pmed40_900_230_15 | 900 | 215 | 15  | OOM         | 23          | 20              | 34.35 | 257.93    | 0          | 0          |
| pmed40_900_230_20 | 900 | 210 | 20  | OOM         | 23          | 20              | 40.15 | 257.90    | 0          | 0          |
| pmed40_900_300_2  | 900 | 298 | 2   | OOM         | 23          | 20              | 29.25 | 423.81    | 0          | 0          |
| pmed40_900_300_5  | 900 | 295 | 5   | OOM         | 23          | 20              | 20.74 | 424.58    | 0          | 0          |
| pmed40_900_300_10 | 900 | 290 | 10  | OOM         | 23          | 20              | 30.44 | 439.37    | 0          | 0          |
| pmed40_900_300_20 | 900 | 280 | 20  | OOM         | 23          | 20              | 29.38 | 425.76    | 0          | 0          |
| pmed40_900_300_30 | 900 | 270 | 30  | OOM         | 23          | 20              | 25.03 | 423.74    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_2  | 900 | 448 | 2   | OOM         | 23          | 20              | 23.91 | 915.54    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_5  | 900 | 445 | 5   | OOM         | 23          | 20              | 20.87 | 919.05    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_10 | 900 | 440 | 10  | OOM         | 23          | 20              | 20.13 | 867.26    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_20 | 900 | 430 | 20  | OOM         | 23          | 20              | 22.65 | 904.46    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_30 | 900 | 420 | 30  | OOM         | 23          | 20              | 15.17 | 939.44    | 0          | 0          |
| pmed40_900_450_40 | 900 | 410 | 40  | OOM         | 23          | 20              | 9.23  | 939.13    | 0          | 0          |

Табела Ц.9: Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на Additional [86] скупу инстанци  $100 \leq n \leq 900$ .

| Инстанце          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |       |           |       |       |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|-------|-----------|-------|-------|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$   | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed1_100_5_2     | 100 | 3   | 2   | 166    | 95.70    | 166    | 20           | 0.00  | 1.59      | 0     | 0     |
| pmed2_100_10_2    | 100 | 8   | 2   | 135    | 460.83   | 135    | 20           | 0.04  | 1.53      | 0     | 0     |
| pmed3_100_10_2    | 100 | 8   | 2   | 151    | 1492.33  | 151    | 20           | 0.04  | 2.01      | 0     | 0     |
| pmed4_100_20_2    | 100 | 18  | 2   | 118    | 13858.70 | 118    | 20           | 0.19  | 1.96      | 0     | 0     |
| pmed5_100_33_2    | 100 | 31  | 2   | 85     | 2.75     | 85     | 20           | 0.04  | 1.79      | 0     | 0     |
| pmed5_100_33_3    | 100 | 30  | 3   | 85     | 22.38    | 85     | 20           | 0.03  | 1.84      | 0     | 0     |
| pmed6_200_5_2     | 200 | 3   | 2   | 107    | 32338.50 | 107    | 20           | 0.02  | 4.92      | 0     | 0     |
| pmed7_200_10_2    | 200 | 8   | 2   | 84     | 50061.00 | 84     | 20           | 0.22  | 4.63      | 0     | 0     |
| pmed8_200_20_2    | 200 | 18  | 2   | 84*    | 64306.40 | 82     | 15           | 1.47  | 5.18      | 0.55  | 0.98  |
| pmed9_200_40_2    | 200 | 38  | 2   | 71     | 362.88   | 71     | 20           | 0.20  | 4.96      | 0     | 0     |
| pmed9_200_40_4    | 200 | 36  | 4   | 71     | 121.08   | 71     | 20           | 0.16  | 4.89      | 0     | 0     |
| pmed10_200_67_2   | 200 | 65  | 2   | 70     | 30.50    | 70     | 20           | 0.03  | 5.99      | 0     | 0     |
| pmed10_200_67_4   | 200 | 63  | 4   | 70     | 18.42    | 70     | 20           | 0.03  | 5.95      | 0     | 0     |
| pmed10_200_67_6   | 200 | 61  | 6   | 70     | 12.36    | 70     | 20           | 0.04  | 5.95      | 0     | 0     |
| pmed11_300_5_2    | 300 | 3   | 2   | 70     | 605.09   | 70     | 20           | 0.05  | 6.84      | 0     | 0     |
| pmed12_300_10_2   | 300 | 8   | 2   | 76*    | 97327.30 | 72     | 20           | 0.09  | 7.81      | 0     | 0     |
| pmed13_300_30_2   | 300 | 28  | 2   | 58*    | 74942.10 | 48     | 10           | 3.76  | 7.81      | 1.15  | 1.23  |
| pmed13_300_30_3   | 300 | 27  | 3   | 60*    | 81315.40 | 48     | 1            | 3.85  | 7.95      | 2.08  | 0.66  |
| pmed14_300_60_2   | 300 | 58  | 2   | 60     | 95.72    | 60     | 20           | 0.26  | 9.74      | 0     | 0     |
| pmed14_300_60_4   | 300 | 56  | 4   | 60     | 153.05   | 60     | 20           | 0.16  | 9.90      | 0     | 0     |
| pmed14_300_60_6   | 300 | 54  | 6   | 60     | 46.39    | 60     | 20           | 0.26  | 9.53      | 0     | 0     |
| pmed15_300_100_2  | 300 | 98  | 2   | 44     | 279.98   | 44     | 20           | 0.71  | 20.73     | 0     | 0     |
| pmed15_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 44     | 56.38    | 44     | 20           | 0.72  | 20.56     | 0     | 0     |
| pmed15_300_100_10 | 300 | 90  | 10  | 44     | 85.23    | 44     | 20           | 0.75  | 20.85     | 0     | 0     |
| pmed16_400_5_2    | 400 | 3   | 2   | OOM    |          | 54     | 20           | 0.18  | 20.74     | 0     | 0     |
| pmed17_400_10_2   | 400 | 8   | 2   | 51*    | 87821.90 | 46     | 20           | 4.36  | 16.01     | 0     | 0     |
| pmed18_400_40_2   | 400 | 38  | 2   | 50     | 3569.36  | 50     | 20           | 0.56  | 11.33     | 0     | 0     |
| pmed18_400_40_4   | 400 | 36  | 4   | 50     | 29435.60 | 50     | 20           | 0.38  | 11.75     | 0     | 0     |
| pmed19_400_80_2   | 400 | 78  | 2   | 20299* | 15913.10 | 32     | 5            | 14.91 | 24.43     | 3.91  | 2.59  |
| pmed19_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 32     | 476.91   | 32     | 6            | 14.86 | 24.08     | 3.91  | 2.94  |
| pmed19_400_80_8   | 400 | 72  | 8   | 32     | 2076.70  | 32     | 8            | 16.81 | 24.54     | 3.91  | 4.29  |
| pmed20_400_133_2  | 400 | 131 | 2   | 40     | 3281.84  | 40     | 20           | 1.66  | 44.29     | 0     | 0     |
| pmed20_400_133_5  | 400 | 128 | 5   | 40     | 251.67   | 40     | 20           | 1.53  | 44.79     | 0     | 0     |
| pmed20_400_133_10 | 400 | 123 | 10  | 40     | 91.22    | 40     | 20           | 1.80  | 45.28     | 0     | 0     |
| pmed20_400_133_13 | 400 | 120 | 13  | 40     | 210.55   | 40     | 20           | 1.25  | 44.59     | 0     | 0     |
| pmed21_500_5_2    | 500 | 3   | 2   | 50*    | 63394.70 | 48     | 20           | 0.28  | 25.87     | 0     | 0     |
| pmed22_500_10_2   | 500 | 8   | 2   | 58*    | 65972.10 | 49     | 20           | 0.97  | 20.49     | 0     | 0     |
| pmed23_500_50_2   | 500 | 48  | 2   | OOM    |          | 35     | 5            | 9.72  | 19.80     | 3.71  | 2.41  |

Табела Ц.9: (Наставак)Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на Additional [86] скупу инстанци  $100 \leq n \leq 900$ .

| Инстанце          | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |          | SVNS   |              |       |           |       |       |
|-------------------|-----|-----|-----|--------|----------|--------|--------------|-------|-----------|-------|-------|
|                   |     |     |     | $obj.$ | $t$      | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$   | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed23_500_50_5   | 500 | 45  | 5   | 41*    | 42945.00 | 35     | 3            | 6.16  | 19.64     | 4.57  | 2.1   |
| pmed24_500_100_2  | 500 | 98  | 2   | OOM    |          | 33     | 20           | 11.50 | 36.67     | 0     | 0     |
| pmed24_500_100_5  | 500 | 95  | 5   | 33     | 1060.72  | 33     | 19           | 7.00  | 37.32     | 0.15  | 0.66  |
| pmed24_500_100_10 | 500 | 90  | 10  | 33     | 1538.05  | 33     | 20           | 9.95  | 37.72     | 0     | 0     |
| pmed25_500_167_2  | 500 | 165 | 2   | 44     | 1475.91  | 44     | 20           | 1.71  | 77.92     | 0     | 0     |
| pmed25_500_167_5  | 500 | 162 | 5   | 44     | 504.64   | 44     | 20           | 1.49  | 77.92     | 0     | 0     |
| pmed25_500_167_10 | 500 | 157 | 10  | 44     | 305.45   | 44     | 20           | 1.91  | 78.59     | 0     | 0     |
| pmed25_500_167_16 | 500 | 151 | 16  | 44     | 86.97    | 44     | 20           | 1.77  | 74.72     | 0     | 0     |
| pmed26_600_5_2    | 600 | 3   | 2   | 48*    | 83997.50 | 47     | 20           | 0.72  | 23.30     | 0     | 0     |
| pmed27_600_10_2   | 600 | 8   | 2   | OOM    |          | 39     | 20           | 1.87  | 30.44     | 0     | 0     |
| pmed28_600_60_2   | 600 | 58  | 2   | OOM    |          | 57     | 20           | 0.36  | 12.64     | 0     | 0     |
| pmed28_600_60_4   | 600 | 56  | 4   | OOM    |          | 57     | 20           | 0.42  | 12.47     | 0     | 0     |
| pmed28_600_60_6   | 600 | 54  | 6   | OOM    |          | 57     | 20           | 0.41  | 12.59     | 0     | 0     |
| pmed29_600_120_2  | 600 | 118 | 2   | OOM    |          | 36     | 20           | 1.34  | 57.06     | 0     | 0     |
| pmed29_600_120_5  | 600 | 115 | 5   | OOM    |          | 36     | 20           | 1.07  | 57.62     | 0     | 0     |
| pmed29_600_120_10 | 600 | 110 | 10  | OOM    |          | 36     | 20           | 1.17  | 57.58     | 0     | 0     |
| pmed29_600_120_12 | 600 | 108 | 12  | 36     | 259.19   | 36     | 20           | 1.20  | 56.83     | 0     | 0     |
| pmed30_600_200_2  | 600 | 198 | 2   | 40     | 8653.56  | 40     | 20           | 4.16  | 120.89    | 0     | 0     |
| pmed30_600_200_5  | 600 | 195 | 5   | 40     | 590.14   | 40     | 20           | 2.71  | 121.61    | 0     | 0     |
| pmed30_600_200_10 | 600 | 190 | 10  | 40     | 191.83   | 40     | 20           | 2.41  | 128.52    | 0     | 0     |
| pmed30_600_200_15 | 600 | 185 | 15  | 40     | 253.91   | 40     | 20           | 2.61  | 125.86    | 0     | 0     |
| pmed30_600_200_20 | 600 | 180 | 20  | 40     | 177.28   | 40     | 20           | 2.39  | 126.41    | 0     | 0     |
| pmed31_700_5_2    | 700 | 3   | 2   | 38*    | 54783.80 | 35     | 20           | 0.74  | 48.29     | 0     | 0     |
| pmed32_700_10_2   | 700 | 8   | 2   | OOM    |          | 72     | 20           | 0.72  | 10.90     | 0     | 0     |
| pmed33_700_70_2   | 700 | 68  | 2   | 43     | 17726.20 | 28     | 19           | 15.27 | 36.61     | 0.18  | 0.78  |
| pmed33_700_70_5   | 700 | 65  | 5   | 35     | 17006.60 | 28     | 17           | 15.67 | 36.63     | 0.54  | 1.28  |
| pmed33_700_70_7   | 700 | 63  | 7   | OOM    |          | 28     | 18           | 13.91 | 37.56     | 0.36  | 1.07  |
| pmed34_700_140_2  | 700 | 138 | 2   | OOM    |          | 41     | 20           | 1.71  | 74.16     | 0     | 0     |
| pmed34_700_140_5  | 700 | 135 | 5   | 41     | 4366.86  | 41     | 20           | 1.25  | 74.18     | 0     | 0     |
| pmed34_700_140_10 | 700 | 130 | 10  | 41     | 1797.77  | 41     | 20           | 1.35  | 72.75     | 0     | 0     |
| pmed34_700_140_14 | 700 | 126 | 14  | 41     | 586.75   | 41     | 20           | 1.39  | 75.86     | 0     | 0     |
| pmed35_800_5_2    | 800 | 3   | 2   | 36*    | 25111.60 | 36     | 20           | 1.12  | 54.97     | 0     | 0     |
| pmed36_800_10_2   | 800 | 8   | 2   | OOM    |          | 42     | 20           | 1.12  | 44.00     | 0     | 0     |
| pmed37_800_80_2   | 800 | 78  | 2   | OOM    |          | 33     | 20           | 1.90  | 45.32     | 0     | 0     |
| pmed37_800_80_5   | 800 | 75  | 5   | OOM    |          | 33     | 20           | 2.54  | 45.96     | 0     | 0     |
| pmed37_800_80_8   | 800 | 72  | 8   | OOM    |          | 33     | 20           | 2.17  | 45.51     | 0     | 0     |
| pmed38_900_5_2    | 900 | 3   | 2   | OOM    |          | 40     | 20           | 1.65  | 51.84     | 0     | 0     |
| pmed39_900_10_2   | 900 | 8   | 2   | OOM    |          | 74     | 20           | 1.48  | 15.11     | 0     | 0     |

Табела Ц.9: (Наставак)Поређење резултата CPLEX решавача и SVNS алгоритма на Additional [86] скупу инстанци  $100 \leq n \leq 900$ .

| Инстанце        | $n$ | $p$ | $q$ | CPLEX  |     |        | SVNS         |       |           |       |       |
|-----------------|-----|-----|-----|--------|-----|--------|--------------|-------|-----------|-------|-------|
|                 |     |     |     | $obj.$ | $t$ | $obj.$ | $\#opt/\#bk$ | $t$   | $t_{tot}$ | $gap$ | $dev$ |
| pmed40_900_90_2 | 900 | 88  | 2   | OOM    | 25  | 8      |              | 30.62 | 68.77     | 2.4   | 1.96  |
| pmed40_900_90_5 | 900 | 85  | 5   | OOM    | 24  | 1      |              | 34.88 | 69.92     | 7.08  | 2.67  |
| pmed40_900_90_9 | 900 | 81  | 9   | OOM    | 25  | 9      |              | 39.68 | 69.04     | 2.4   | 2.33  |

### Ц.3 Поређење CPNCP и PNCP модела

У Табелама Ц.10 и Ц.11 дати су комплетни резултати поређења CPNCP и PNCP модела на скупу средњих и великих инстанци. Прве четири колоне у Табелама Ц.10 и Ц.11 односе се на податке о инстанцама: име инстанце, укупан број чворова -  $n$ , број центара које треба отворити -  $p$  и број унапред отворених центара -  $q$ . Наредне колоне садрже најбоље вредности функције циља за PNCP и CPNCP добијене SVNS алгоритмом [94], и SVNS алгоритмом [96], редом. Резултати за Additional [86] скуп инстанци дати су у Табелама Ц.12-Ц.14, које су организоване слично као претходне, уз додатну колону  $\#best$  у којој се налази број извршавања SVNS алгоритма у којима је достигнута  $best$  вредност за одговарајућу методу.

Табела Ц.10: Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца       | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|----------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed1_60_10_5  | 60  | 5   | 5   | 112          | 119           |
| pmed1_60_20_5  | 60  | 15  | 5   | 89           | 95            |
| pmed1_60_20_10 | 60  | 10  | 10  |              | 97            |
| pmed1_60_30_5  | 60  | 25  | 5   | 89           | 89            |
| pmed1_60_30_10 | 60  | 20  | 10  |              | 89            |
| pmed1_70_10_5  | 70  | 5   | 5   | 119          | 131           |
| pmed1_70_20_5  | 70  | 15  | 5   | 99           | 99            |
| pmed1_70_20_10 | 70  | 10  | 10  |              | 99            |
| pmed1_70_30_5  | 70  | 25  | 5   | 73           | 77            |
| pmed1_70_30_10 | 70  | 20  | 10  |              | 73            |
| pmed1_80_10_5  | 80  | 5   | 5   | 129          | 134           |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-----------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                 |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed1_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 102          | 105           |
| pmed1_80_20_10  | 80  | 10  | 10  |              | 108           |
| pmed1_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 85           | 86            |
| pmed1_80_30_10  | 80  | 20  | 10  |              | 91            |
| pmed1_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 133          | 134           |
| pmed1_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 107          | 112           |
| pmed1_90_20_10  | 90  | 10  | 10  |              | 115           |
| pmed1_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 87           | 91            |
| pmed1_90_30_10  | 90  | 20  | 10  |              | 95            |
| pmed1_90_50_5   | 90  | 45  | 5   |              | 70            |
| pmed1_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 70           | 70            |
| pmed1_90_50_15  | 90  | 35  | 15  |              | 70            |
| pmed1_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 133          | 144           |
| pmed1_100_20_5  | 100 | 15  | 5   | 108          | 116           |
| pmed1_100_20_10 | 100 | 10  | 10  |              | 116           |
| pmed1_100_20_15 | 100 | 5   | 15  |              | 113           |
| pmed1_100_30_5  | 100 | 25  | 5   | 93           | 97            |
| pmed1_100_30_10 | 100 | 20  | 10  |              | 98            |
| pmed1_100_50_5  | 100 | 45  | 5   |              | 71            |
| pmed1_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 70           | 77            |
| pmed1_100_50_15 | 100 | 35  | 15  |              | 75            |
| pmed2_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 140          | 145           |
| pmed2_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 99           | 102           |
| pmed2_60_20_10  | 60  | 10  | 10  |              | 106           |
| pmed2_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 96           | 96            |
| pmed2_60_30_10  | 60  | 20  | 10  |              | 96            |
| pmed2_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 138          | 145           |
| pmed2_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 102          | 102           |
| pmed2_70_20_10  | 70  | 10  | 10  |              | 103           |
| pmed2_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 96           | 96            |
| pmed2_70_30_10  | 70  | 20  | 10  |              | 96            |
| pmed2_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 138          | 145           |
| pmed2_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 109          | 118           |
| pmed2_80_20_10  | 80  | 10  | 10  |              | 118           |
| pmed2_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 97           | 98            |
| pmed2_80_30_10  | 80  | 20  | 10  |              | 98            |
| pmed2_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 138          | 145           |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца        | SVNS за PNCP |     |     | SVNS за CPNCP |        |
|-----------------|--------------|-----|-----|---------------|--------|
|                 | $n$          | $p$ | $q$ | $best$        | $best$ |
| pmed2_90_20_5   | 90           | 15  | 5   | 108           | 112    |
| pmed2_90_20_10  | 90           | 10  | 10  |               | 119    |
| pmed2_90_30_5   | 90           | 25  | 5   | 96            | 96     |
| pmed2_90_30_10  | 90           | 20  | 10  |               | 97     |
| pmed2_90_50_5   | 90           | 45  | 5   |               | 96     |
| pmed2_90_50_10  | 90           | 40  | 10  | 96            | 96     |
| pmed2_90_50_15  | 90           | 35  | 15  |               | 96     |
| pmed2_100_10_5  | 100          | 5   | 5   | 135           | 140    |
| pmed2_100_20_5  | 100          | 15  | 5   |               | 109    |
| pmed2_100_20_10 | 100          | 10  | 10  | 107           | 111    |
| pmed2_100_20_15 | 100          | 5   | 15  |               | 110    |
| pmed2_100_30_5  | 100          | 25  | 5   |               | 96     |
| pmed2_100_30_10 | 100          | 20  | 10  | 96            | 98     |
| pmed2_100_30_15 | 100          | 15  | 15  |               | 96     |
| pmed2_100_50_5  | 100          | 45  | 5   |               | 96     |
| pmed2_100_50_10 | 100          | 40  | 10  | 96            | 96     |
| pmed2_100_50_15 | 100          | 35  | 15  |               | 96     |
| pmed3_60_10_5   | 60           | 5   | 5   | 124           | 141    |
| pmed3_60_20_5   | 60           | 15  | 5   | 97            | 97     |
| pmed3_60_20_10  | 60           | 10  | 10  |               | 97     |
| pmed3_60_30_5   | 60           | 25  | 5   | 73            | 79     |
| pmed3_60_30_10  | 60           | 20  | 10  |               | 81     |
| pmed3_70_10_5   | 70           | 5   | 5   | 121           | 139    |
| pmed3_70_20_5   | 70           | 15  | 5   | 97            | 104    |
| pmed3_70_20_10  | 70           | 10  | 10  |               | 105    |
| pmed3_70_30_5   | 70           | 25  | 5   | 82            | 82     |
| pmed3_70_30_10  | 70           | 20  | 10  |               | 86     |
| pmed3_80_10_5   | 80           | 5   | 5   | 121           | 139    |
| pmed3_80_20_5   | 80           | 15  | 5   | 93            | 104    |
| pmed3_80_20_10  | 80           | 10  | 10  |               | 108    |
| pmed3_80_30_5   | 80           | 25  | 5   | 84            | 85     |
| pmed3_80_30_10  | 80           | 20  | 10  |               | 87     |
| pmed3_90_10_5   | 90           | 5   | 5   | 148           | 159    |
| pmed3_90_20_5   | 90           | 15  | 5   | 105           | 105    |
| pmed3_90_20_10  | 90           | 10  | 10  |               | 113    |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца        | SVNS за PNCP |     |     | SVNS за CPNCP |        |
|-----------------|--------------|-----|-----|---------------|--------|
|                 | $n$          | $p$ | $q$ | $best$        | $best$ |
| pmed3_90_30_5   | 90           | 25  | 5   | 93            | 93     |
| pmed3_90_30_10  | 90           | 20  | 10  |               | 97     |
| pmed3_90_50_5   | 90           | 45  | 5   |               | 93     |
| pmed3_90_50_10  | 90           | 40  | 10  | 93            | 93     |
| pmed3_90_50_15  | 90           | 35  | 15  |               | 93     |
| pmed3_100_10_5  | 100          | 5   | 5   | 151           | 164    |
| pmed3_100_20_5  | 100          | 15  | 5   |               | 115    |
| pmed3_100_20_10 | 100          | 10  | 10  | 109           | 116    |
| pmed3_100_20_15 | 100          | 5   | 15  |               | 113    |
| pmed3_100_30_5  | 100          | 25  | 5   |               | 93     |
| pmed3_100_30_10 | 100          | 20  | 10  | 93            | 96     |
| pmed3_100_30_15 | 100          | 15  | 15  |               | 97     |
| pmed3_100_50_5  | 100          | 45  | 5   |               | 93     |
| pmed3_100_50_10 | 100          | 40  | 10  | 93            | 93     |
| pmed3_100_50_15 | 100          | 35  | 15  |               | 93     |
| pmed4_60_10_5   | 60           | 5   | 5   | 134           | 137    |
| pmed4_60_20_5   | 60           | 15  | 5   | 93            | 94     |
| pmed4_60_20_10  | 60           | 10  | 10  |               | 93     |
| pmed4_60_30_5   | 60           | 25  | 5   | 79            | 81     |
| pmed4_60_30_10  | 60           | 20  | 10  |               | 81     |
| pmed4_70_10_5   | 70           | 5   | 5   | 146           | 150    |
| pmed4_70_20_5   | 70           | 15  | 5   | 102           | 112    |
| pmed4_70_20_10  | 70           | 10  | 10  |               | 116    |
| pmed4_70_30_5   | 70           | 25  | 5   | 85            | 86     |
| pmed4_70_30_10  | 70           | 20  | 10  |               | 94     |
| pmed4_80_10_5   | 80           | 5   | 5   | 146           | 154    |
| pmed4_80_20_5   | 80           | 15  | 5   | 114           | 119    |
| pmed4_80_20_10  | 80           | 10  | 10  |               | 121    |
| pmed4_80_30_5   | 80           | 25  | 5   | 90            | 92     |
| pmed4_80_30_10  | 80           | 20  | 10  |               | 96     |
| pmed4_90_10_5   | 90           | 5   | 5   | 147           | 162    |
| pmed4_90_20_5   | 90           | 15  | 5   | 112           | 119    |
| pmed4_90_20_10  | 90           | 10  | 10  |               | 120    |
| pmed4_90_30_5   | 90           | 25  | 5   | 92            | 95     |
| pmed4_90_30_10  | 90           | 20  | 10  |               | 94     |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-----------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                 |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed4_90_50_5   | 90  | 45  | 5   |              | 82            |
| pmed4_90_50_10  | 90  | 40  | 10  | 82           | 82            |
| pmed4_90_50_15  | 90  | 35  | 15  |              | 82            |
| pmed4_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 147          | 160           |
| pmed4_100_20_5  | 100 | 15  | 5   |              | 122           |
| pmed4_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 118          | 123           |
| pmed4_100_20_15 | 100 | 5   | 15  |              | 123           |
| pmed4_100_30_5  | 100 | 25  | 5   |              | 100           |
| pmed4_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 96           | 104           |
| pmed4_100_30_15 | 100 | 15  | 15  |              | 106           |
| pmed4_100_50_5  | 100 | 45  | 5   |              | 82            |
| pmed4_100_50_10 | 100 | 40  | 10  | 82           | 82            |
| pmed4_100_50_15 | 100 | 35  | 15  |              | 82            |
| pmed5_60_10_5   | 60  | 5   | 5   | 119          | 127           |
| pmed5_60_20_5   | 60  | 15  | 5   | 90           | 90            |
| pmed5_60_20_10  | 60  | 10  | 10  |              | 93            |
| pmed5_60_30_5   | 60  | 25  | 5   | 82           | 82            |
| pmed5_60_30_10  | 60  | 20  | 10  |              | 82            |
| pmed5_70_10_5   | 70  | 5   | 5   | 119          | 122           |
| pmed5_70_20_5   | 70  | 15  | 5   | 86           | 91            |
| pmed5_70_20_10  | 70  | 10  | 10  |              | 90            |
| pmed5_70_30_5   | 70  | 25  | 5   | 85           | 85            |
| pmed5_70_30_10  | 70  | 20  | 10  |              | 85            |
| pmed5_80_10_5   | 80  | 5   | 5   | 118          | 119           |
| pmed5_80_20_5   | 80  | 15  | 5   | 90           | 91            |
| pmed5_80_20_10  | 80  | 10  | 10  |              | 92            |
| pmed5_80_30_5   | 80  | 25  | 5   | 85           | 85            |
| pmed5_80_30_10  | 80  | 20  | 10  |              | 85            |
| pmed5_90_10_5   | 90  | 5   | 5   | 119          | 127           |
| pmed5_90_20_5   | 90  | 15  | 5   | 92           | 94            |
| pmed5_90_20_10  | 90  | 10  | 10  |              | 100           |
| pmed5_90_30_5   | 90  | 25  | 5   | 85           | 85            |
| pmed5_90_30_10  | 90  | 20  | 10  |              | 86            |
| pmed5_90_50_5   | 90  | 45  | 5   | x            | 85            |
| pmed5_90_50_10  | 90  | 40  | 10  |              | 85            |
| pmed5_90_50_15  | 90  | 35  | 15  |              | 85            |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца        | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-----------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                 |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed5_100_10_5  | 100 | 5   | 5   | 119          | 127           |
| pmed5_100_20_5  | 100 | 15  | 5   |              | 97            |
| pmed5_100_20_10 | 100 | 10  | 10  | 94           | 100           |
| pmed5_100_20_15 | 100 | 5   | 15  |              | 97            |
| pmed5_100_30_5  | 100 | 25  | 5   |              | 85            |
| pmed5_100_30_10 | 100 | 20  | 10  | 85           | 87            |
| pmed5_100_30_15 | 100 | 15  | 15  |              | 90            |
| pmed5_100_50_5  | 100 | 45  | 5   | x            | 85            |
| pmed5_100_50_10 | 100 | 40  | 10  |              | 85            |
| pmed5_100_50_15 | 100 | 35  | 15  |              | 85            |
| pmed6_150_20_5  | 150 | 15  | 5   | 77           | 77            |
| pmed6_150_20_10 | 150 | 10  | 10  |              | 77            |
| pmed6_150_30_5  | 150 | 25  | 5   |              | 64            |
| pmed6_150_30_10 | 150 | 20  | 10  | 64           | 64            |
| pmed6_150_30_15 | 150 | 15  | 15  |              | 64            |
| pmed6_150_50_5  | 150 | 45  | 5   |              | 56            |
| pmed6_150_50_10 | 150 | 40  | 10  | 56           | 56            |
| pmed6_150_50_15 | 150 | 35  | 15  |              | 56            |
| pmed6_150_80_5  | 150 | 75  | 5   |              | 56            |
| pmed6_150_80_10 | 150 | 70  | 10  | 56           | 56            |
| pmed6_150_80_15 | 150 | 65  | 15  |              | 56            |
| pmed6_150_80_20 | 150 | 60  | 20  |              | 56            |
| pmed6_200_20_5  | 200 | 15  | 5   | 77           | 77            |
| pmed6_200_20_10 | 200 | 10  | 10  |              | 77            |
| pmed6_200_30_5  | 200 | 25  | 5   |              | 66            |
| pmed6_200_30_10 | 200 | 20  | 10  | 66           | 66            |
| pmed6_200_30_15 | 200 | 15  | 15  |              | 66            |
| pmed6_200_50_5  | 200 | 45  | 5   |              | 49            |
| pmed6_200_50_10 | 200 | 40  | 10  | 49           | 49            |
| pmed6_200_50_15 | 200 | 35  | 15  |              | 49            |
| pmed6_200_80_5  | 200 | 75  | 5   |              | 49            |
| pmed6_200_80_10 | 200 | 70  | 10  | 49           | 49            |
| pmed6_200_80_15 | 200 | 65  | 15  |              | 49            |
| pmed6_200_80_20 | 200 | 60  | 20  |              | 49            |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца         | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                  |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed6_200_100_5  | 200 | 95  | 5   |              | 49            |
| pmed6_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 49           | 49            |
| pmed6_200_100_15 | 200 | 85  | 15  |              | 49            |
| pmed6_200_100_20 | 200 | 80  | 20  |              | 49            |
| pmed7_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 67           | 67            |
| pmed7_150_20_10  | 150 | 10  | 10  |              | 67            |
| pmed7_150_30_5   | 150 | 25  | 5   |              | 59            |
| pmed7_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 59           | 59            |
| pmed7_150_30_15  | 150 | 15  | 15  |              | 59            |
| pmed7_150_50_5   | 150 | 45  | 5   |              | 59            |
| pmed7_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 59           | 59            |
| pmed7_150_50_15  | 150 | 35  | 15  |              | 59            |
| pmed7_150_80_5   | 150 | 75  | 5   |              | 59            |
| pmed7_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 59           | 59            |
| pmed7_150_80_15  | 150 | 65  | 15  |              | 59            |
| pmed7_150_80_20  | 150 | 60  | 20  |              | 59            |
| pmed7_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 68           | 68            |
| pmed7_200_20_10  | 200 | 10  | 10  |              | 68            |
| pmed7_200_30_5   | 200 | 25  | 5   |              | 60            |
| pmed7_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 60           | 60            |
| pmed7_200_30_15  | 200 | 15  | 15  |              | 60            |
| pmed7_200_50_5   | 200 | 45  | 5   |              | 50            |
| pmed7_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 50           | 50            |
| pmed7_200_50_15  | 200 | 35  | 15  |              | 50            |
| pmed7_200_80_5   | 200 | 75  | 5   |              | 46            |
| pmed7_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 46           | 46            |
| pmed7_200_80_15  | 200 | 65  | 15  |              | 46            |
| pmed7_200_80_20  | 200 | 60  | 20  |              | 46            |
| pmed7_200_100_5  | 200 | 95  | 5   |              | 46            |
| pmed7_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 46           | 46            |
| pmed7_200_100_15 | 200 | 85  | 15  |              | 46            |
| pmed7_200_100_20 | 200 | 80  | 20  |              | 46            |
| pmed8_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 70           | 70            |
| pmed8_150_20_10  | 150 | 10  | 10  |              | 70            |
| pmed8_150_30_5   | 150 | 25  | 5   |              | 58            |
| pmed8_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 58           | 58            |
| pmed8_150_30_15  | 150 | 15  | 15  |              | 58            |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца         | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                  |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed8_150_50_5   | 150 | 45  | 5   |              | 58            |
| pmed8_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 58           | 58            |
| pmed8_150_50_15  | 150 | 35  | 15  |              | 58            |
| pmed8_150_80_5   | 150 | 75  | 5   |              | 58            |
| pmed8_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 58           | 58            |
| pmed8_150_80_15  | 150 | 65  | 15  |              | 58            |
| pmed8_150_80_20  | 150 | 60  | 20  |              | 58            |
| pmed8_200_20_5   | 200 | 15  | 5   | 81           | 81            |
| pmed8_200_20_10  | 200 | 10  | 10  |              | 81            |
| pmed8_200_30_5   | 200 | 25  | 5   |              | 69            |
| pmed8_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 70           | 70            |
| pmed8_200_30_15  | 200 | 15  | 15  |              | 70            |
| pmed8_200_50_5   | 200 | 45  | 5   |              | 68            |
| pmed8_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 68           | 68            |
| pmed8_200_50_15  | 200 | 35  | 15  |              | 68            |
| pmed8_200_80_5   | 200 | 75  | 5   |              | 68            |
| pmed8_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 68           | 68            |
| pmed8_200_80_15  | 200 | 65  | 15  |              | 68            |
| pmed8_200_80_20  | 200 | 60  | 20  |              | 68            |
| pmed8_200_100_5  | 200 | 95  | 5   |              | 68            |
| pmed8_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 68           | 68            |
| pmed8_200_100_15 | 200 | 85  | 15  |              | 68            |
| pmed8_200_100_20 | 200 | 80  | 20  |              | 68            |
| pmed9_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 71           | 71            |
| pmed9_150_20_10  | 150 | 10  | 10  |              | 71            |
| pmed9_150_30_5   | 150 | 25  | 5   |              | 71            |
| pmed9_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_150_30_15  | 150 | 15  | 15  |              | 71            |
| pmed9_150_50_5   | 150 | 45  | 5   |              | 71            |
| pmed9_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_150_50_15  | 150 | 35  | 15  |              | 71            |
| pmed9_150_80_5   | 150 | 75  | 5   |              | 71            |
| pmed9_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_150_80_15  | 150 | 65  | 15  |              | 71            |
| pmed9_150_80_20  | 150 | 60  | 20  |              | 71            |
| pmed9_200_30_5   | 200 | 25  | 5   |              | 71            |
| pmed9_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_200_30_15  | 200 | 15  | 15  |              | 71            |

Табела Ц.10: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу средњих инстанци.

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                   |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed9_200_50_5    | 200 | 45  | 5   |              | 71            |
| pmed9_200_50_10   | 200 | 40  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_200_50_15   | 200 | 35  | 15  |              | 71            |
| pmed9_200_80_5    | 200 | 75  | 5   |              | 71            |
| pmed9_200_80_10   | 200 | 70  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_200_80_15   | 200 | 65  | 15  |              | 71            |
| pmed9_200_80_20   | 200 | 60  | 20  |              | 71            |
| pmed9_200_100_5   | 200 | 95  | 5   |              | 71            |
| pmed9_200_100_10  | 200 | 90  | 10  | 71           | 71            |
| pmed9_200_100_15  | 200 | 85  | 15  |              | 71            |
| pmed9_200_100_20  | 200 | 80  | 20  |              | 71            |
| pmed10_150_20_5   | 150 | 15  | 5   | 62           | 62            |
| pmed10_150_20_10  | 150 | 10  | 10  |              | 62            |
| pmed10_150_30_5   | 150 | 25  | 5   |              | 62            |
| pmed10_150_30_10  | 150 | 20  | 10  | 62           | 62            |
| pmed10_150_30_15  | 150 | 15  | 15  |              | 62            |
| pmed10_150_50_5   | 150 | 45  | 5   |              | 62            |
| pmed10_150_50_10  | 150 | 40  | 10  | 62           | 62            |
| pmed10_150_50_15  | 150 | 35  | 15  |              | 62            |
| pmed10_150_80_5   | 150 | 75  | 5   |              | 62            |
| pmed10_150_80_10  | 150 | 70  | 10  | 62           | 62            |
| pmed10_150_80_15  | 150 | 65  | 15  |              | 62            |
| pmed10_150_80_20  | 150 | 60  | 20  |              | 62            |
| pmed10_200_30_5   | 200 | 25  | 5   |              | 70            |
| pmed10_200_30_10  | 200 | 20  | 10  | 70           | 70            |
| pmed10_200_30_15  | 200 | 15  | 15  |              | 70            |
| pmed10_200_50_5   | 200 | 45  | 5   |              | 70            |
| pmed10_200_50_10  | 200 | 40  | 10  | 70           | 70            |
| pmed10_200_50_15  | 200 | 35  | 15  |              | 70            |
| pmed10_200_80_5   | 200 | 75  | 5   |              | 70            |
| pmed10_200_80_10  | 200 | 70  | 10  | 70           | 70            |
| pmed10_200_80_15  | 200 | 65  | 15  |              | 70            |
| pmed10_200_80_20  | 200 | 60  | 20  |              | 70            |
| pmed10_200_100_5  | 200 | 95  | 5   |              | 70            |
| pmed10_200_100_10 | 200 | 90  | 10  | 70           | 70            |
| pmed10_200_100_15 | 200 | 85  | 15  |              | 70            |
| pmed10_200_100_20 | 200 | 80  | 20  |              | 70            |

Табела Ц.11: Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу великих инстанци.

| Инстанца          |     |     |     | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                   | $n$ | $p$ | $q$ | $best$       | $best$        |
| pmed11_250_30_2   | 250 | 28  | 2   | 44           | 44            |
| pmed11_250_30_3   | 250 | 27  | 3   |              | 44            |
| pmed11_250_50_2   | 250 | 48  | 2   |              | 42            |
| pmed11_250_50_3   | 250 | 47  | 3   | 42           | 42            |
| pmed11_250_50_5   | 250 | 45  | 5   |              | 42            |
| pmed11_250_70_2   | 250 | 68  | 2   |              | 42            |
| pmed11_250_70_5   | 250 | 65  | 5   | 42           | 42            |
| pmed11_250_70_7   | 250 | 63  | 7   |              | 42            |
| pmed11_250_90_2   | 250 | 88  | 2   |              | 42            |
| pmed11_250_90_5   | 250 | 85  | 5   | 42           | 42            |
| pmed11_250_90_9   | 250 | 81  | 9   |              | 42            |
| pmed11_300_60_2   | 300 | 58  | 2   |              | 51            |
| pmed11_300_60_3   | 300 | 57  | 3   | 51           | 51            |
| pmed11_300_60_6   | 300 | 54  | 6   |              | 51            |
| pmed11_300_80_2   | 300 | 78  | 2   |              | 51            |
| pmed11_300_80_5   | 300 | 75  | 5   | 51           | 51            |
| pmed11_300_80_8   | 300 | 72  | 8   |              | 51            |
| pmed11_300_100_2  | 300 | 98  | 2   |              | 51            |
| pmed11_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 51           | 51            |
| pmed11_300_100_10 | 300 | 90  | 10  |              | 51            |
| pmed11_300_150_2  | 300 | 148 | 2   |              | 51            |
| pmed11_300_150_5  | 300 | 145 | 5   | 51           | 51            |
| pmed11_300_150_10 | 300 | 140 | 10  |              | 51            |
| pmed11_300_150_15 | 300 | 135 | 15  |              | 51            |
| pmed12_250_30_2   | 250 | 28  | 2   | 48           | 48            |
| pmed12_250_30_3   | 250 | 27  | 3   |              | 47            |
| pmed12_250_50_2   | 250 | 48  | 2   |              | 43            |
| pmed12_250_50_3   | 250 | 47  | 3   | 45           | 43            |
| pmed12_250_50_5   | 250 | 45  | 5   |              | 43            |
| pmed12_250_70_2   | 250 | 68  | 2   |              | 43            |
| pmed12_250_70_5   | 250 | 65  | 5   | 43           | 43            |
| pmed12_250_70_7   | 250 | 63  | 7   |              | 43            |
| pmed12_250_90_2   | 250 | 88  | 2   |              | 43            |
| pmed12_250_90_5   | 250 | 85  | 5   | 43           | 43            |
| pmed12_250_90_9   | 250 | 81  | 9   |              | 43            |

Табела Ц.11: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу великих инстанци.

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                   |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed12_300_60_2   | 300 | 58  | 2   |              | 72            |
| pmed12_300_60_3   | 300 | 57  | 3   | 72           | 72            |
| pmed12_300_60_6   | 300 | 54  | 6   |              | 72            |
| pmed12_300_80_2   | 300 | 78  | 2   |              | 72            |
| pmed12_300_80_5   | 300 | 75  | 5   | 72           | 72            |
| pmed12_300_80_8   | 300 | 72  | 8   |              | 72            |
| pmed12_300_100_2  | 300 | 98  | 2   |              | 72            |
| pmed12_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 72           | 72            |
| pmed12_300_100_10 | 300 | 90  | 10  |              | 72            |
| pmed12_300_150_2  | 300 | 148 | 2   |              | 72            |
| pmed12_300_150_5  | 300 | 145 | 5   | 72           | 72            |
| pmed12_300_150_10 | 300 | 140 | 10  |              | 72            |
| pmed12_300_150_15 | 300 | 135 | 15  |              | 72            |
| pmed16_350_40_2   | 350 | 38  | 2   | 37           | 37            |
| pmed16_350_40_4   | 350 | 36  | 4   |              | 37            |
| pmed16_350_70_2   | 350 | 68  | 2   |              | 33            |
| pmed16_350_70_5   | 350 | 65  | 5   | 34           | 33            |
| pmed16_350_70_8   | 350 | 63  | 7   |              | 33            |
| pmed16_350_90_2   | 350 | 88  | 2   |              | 33            |
| pmed16_350_90_5   | 350 | 85  | 5   | 33           | 33            |
| pmed16_350_90_9   | 350 | 81  | 9   |              | 33            |
| pmed16_350_120_2  | 350 | 118 | 2   |              | 33            |
| pmed16_350_120_5  | 350 | 115 | 5   | 33           | 33            |
| pmed16_350_120_10 | 350 | 110 | 10  |              | 33            |
| pmed16_350_120_12 | 350 | 108 | 12  |              | 33            |
| pmed16_400_80_2   | 400 | 78  | 2   |              | 33            |
| pmed16_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 34           | 33            |
| pmed16_400_80_8   | 400 | 72  | 8   |              | 33            |
| pmed16_400_100_2  | 400 | 98  | 2   |              | 33            |
| pmed16_400_100_5  | 400 | 95  | 5   | 33           | 33            |
| pmed16_400_100_10 | 400 | 90  | 10  |              | 33            |
| pmed16_400_140_2  | 400 | 138 | 2   |              | 33            |
| pmed16_400_140_5  | 400 | 135 | 5   | 33           | 33            |
| pmed16_400_140_10 | 400 | 130 | 10  |              | 33            |

Табела Ц.11: (Наставак) Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на скупу великих инстанци.

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP | SVNS за CPNCP |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|---------------|
|                   |     |     |     | $best$       | $best$        |
| pmed16_400_200_2  | 400 | 198 | 2   |              | 33            |
| pmed16_400_200_5  | 400 | 195 | 5   |              | 33            |
| pmed16_400_200_10 | 400 | 190 | 10  | 33           | 33            |
| pmed16_400_200_15 | 400 | 185 | 15  |              | 33            |
| pmed16_400_200_20 | 400 | 180 | 20  |              | 33            |
| pmed17_350_40_2   | 350 | 38  | 2   | 39           | 37            |
| pmed17_350_40_4   | 350 | 36  | 4   |              | 37            |
| pmed17_350_70_2   | 350 | 68  | 2   |              | 37            |
| pmed17_350_70_5   | 350 | 65  | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_350_70_7   | 350 | 63  | 7   |              | 37            |
| pmed17_350_90_2   | 350 | 88  | 2   |              | 37            |
| pmed17_350_90_5   | 350 | 85  | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_350_90_9   | 350 | 81  | 9   |              | 37            |
| pmed17_350_120_2  | 350 | 118 | 2   |              | 37            |
| pmed17_350_120_5  | 350 | 115 | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_350_120_10 | 350 | 110 | 10  |              | 37            |
| pmed17_350_120_12 | 350 | 108 | 12  |              | 37            |
| pmed17_400_80_2   | 400 | 78  | 2   |              | 37            |
| pmed17_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_400_80_8   | 400 | 72  | 8   |              | 37            |
| pmed17_400_100_2  | 400 | 98  | 2   |              | 37            |
| pmed17_400_100_5  | 400 | 95  | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_400_100_10 | 400 | 90  | 10  |              | 37            |
| pmed17_400_140_2  | 400 | 138 | 2   |              | 37            |
| pmed17_400_140_5  | 400 | 135 | 5   | 37           | 37            |
| pmed17_400_140_10 | 400 | 130 | 10  |              | 37            |
| pmed17_400_140_14 | 400 | 126 | 14  |              | 37            |
| pmed17_400_200_2  | 400 | 198 | 2   |              | 37            |
| pmed17_400_200_5  | 400 | 195 | 5   |              | 37            |
| pmed17_400_200_10 | 400 | 190 | 10  | 37           | 37            |
| pmed17_400_200_15 | 400 | 185 | 15  |              | 37            |
| pmed17_400_200_20 | 400 | 180 | 20  |              | 37            |

Табела Ц.12: Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на средњим инстанцама ( $100 \leq n \leq 300$ ) из Additional [86] скупа.

| Инстанце          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP |          | SVNS за CPNCP |          |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|----------|---------------|----------|
|                   |     |     |     | $best$       | $\#best$ | $best$        | $\#best$ |
| pmed1_100_5_2     | 100 | 3   | 2   | 166          | 20       | 166           | 20       |
| pmed2_100_10_2    | 100 | 8   | 2   | 135          | 20       | 135           | 20       |
| pmed3_100_10_2    | 100 | 8   | 2   | 151          | 20       | 151           | 20       |
| pmed4_100_20_2    | 100 | 18  | 2   | 118          | 4        | 118           | 20       |
| pmed5_100_33_2    | 100 | 31  | 2   | 85           | 20       | 85            | 20       |
| pmed5_100_33_3    | 100 | 30  | 3   | 85           | 20       | 85            | 20       |
| pmed6_200_5_2     | 200 | 3   | 2   | 107          | 20       | 107           | 20       |
| pmed7_200_10_2    | 200 | 8   | 2   | 84           | 11       | 84            | 20       |
| pmed8_200_20_2    | 200 | 18  | 2   | 82           | 9        | 82            | 15       |
| pmed9_200_40_2    | 200 | 38  | 2   | 71           | 19       | 71            | 20       |
| pmed9_200_40_4    | 200 | 36  | 4   | 71           | 19       | 71            | 20       |
| pmed10_200_67_2   | 200 | 65  | 2   | 70           | 20       | 70            | 20       |
| pmed10_200_67_4   | 200 | 63  | 4   | 70           | 20       | 70            | 20       |
| pmed10_200_67_6   | 200 | 61  | 6   | 70           | 20       | 70            | 20       |
| pmed11_300_5_2    | 300 | 3   | 2   | 70           | 20       | 70            | 20       |
| pmed12_300_10_2   | 300 | 8   | 2   | 72           | 20       | 72            | 20       |
| pmed13_300_30_2   | 300 | 28  | 2   | 49           | 1        | <b>48</b>     | 10       |
| pmed13_300_30_3   | 300 | 27  | 3   | 49           | 1        | <b>48</b>     | 1        |
| pmed14_300_60_2   | 300 | 58  | 2   | 60           | 20       | 60            | 20       |
| pmed14_300_60_4   | 300 | 56  | 4   | 60           | 20       | 60            | 20       |
| pmed14_300_60_6   | 300 | 54  | 6   | 60           | 20       | 60            | 20       |
| pmed15_300_100_2  | 300 | 98  | 2   | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed15_300_100_5  | 300 | 95  | 5   | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed15_300_100_10 | 300 | 90  | 10  | 44           | 20       | 44            | 20       |

Табела Ц.13: Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на великим инстанцама ( $400 \leq n \leq 600$ ) из Additional [86] скупа.

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP |          | SVNS за CPNCP |          |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|----------|---------------|----------|
|                   |     |     |     | $best$       | $\#best$ | $best$        | $\#best$ |
| pmed16_400_5_2    | 400 | 3   | 2   | 54           | 20       | 54            | 20       |
| pmed17_400_10_2   | 400 | 8   | 2   | 46           | 1        | 46            | 20       |
| pmed18_400_40_2   | 400 | 38  | 2   | 50           | 20       | 50            | 20       |
| pmed18_400_40_4   | 400 | 36  | 4   | 50           | 20       | 50            | 20       |
| pmed19_400_80_2   | 400 | 78  | 2   | 34           | 2        | <b>32</b>     | 5        |
| pmed19_400_80_5   | 400 | 75  | 5   | 34           | 2        | <b>32</b>     | 6        |
| pmed19_400_80_8   | 400 | 72  | 8   | 34           | 2        | <b>32</b>     | 8        |
| pmed20_400_133_2  | 400 | 131 | 2   | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed20_400_133_5  | 400 | 128 | 5   | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed20_400_133_10 | 400 | 123 | 10  | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed20_400_133_13 | 400 | 120 | 13  | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed21_500_5_2    | 500 | 3   | 2   | 48           | 20       | 48            | 20       |
| pmed22_500_10_2   | 500 | 8   | 2   | 49           | 16       | 49            | 20       |
| pmed23_500_50_2   | 500 | 48  | 2   | 36           | 1        | <b>35</b>     | 5        |
| pmed23_500_50_5   | 500 | 45  | 5   | 36           | 1        | <b>35</b>     | 3        |
| pmed24_500_100_2  | 500 | 98  | 2   | 33           | 16       | 33            | 20       |
| pmed24_500_100_5  | 500 | 95  | 5   | 33           | 16       | 33            | 19       |
| pmed24_500_100_10 | 500 | 90  | 10  | 33           | 16       | 33            | 20       |
| pmed25_500_167_2  | 500 | 165 | 2   | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed25_500_167_5  | 500 | 162 | 5   | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed25_500_167_10 | 500 | 157 | 10  | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed25_500_167_16 | 500 | 151 | 16  | 44           | 20       | 44            | 20       |
| pmed26_600_5_2    | 600 | 3   | 2   | 47           | 20       | 47            | 20       |
| pmed27_600_10_2   | 600 | 8   | 2   | 39           | 5        | 39            | 20       |
| pmed28_600_60_2   | 600 | 58  | 2   | 57           | 20       | 57            | 20       |
| pmed28_600_60_4   | 600 | 56  | 4   | 57           | 20       | 57            | 20       |
| pmed28_600_60_6   | 600 | 54  | 6   | 57           | 20       | 57            | 20       |
| pmed29_600_120_2  | 600 | 118 | 2   | 36           | 20       | 36            | 20       |
| pmed29_600_120_5  | 600 | 115 | 5   | 36           | 20       | 36            | 20       |
| pmed29_600_120_10 | 600 | 110 | 10  | 36           | 20       | 36            | 20       |
| pmed29_600_120_12 | 600 | 108 | 12  | 36           | 20       | 36            | 20       |
| pmed30_600_200_2  | 600 | 198 | 2   | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed30_600_200_5  | 600 | 195 | 5   | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed30_600_200_10 | 600 | 190 | 10  | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed30_600_200_15 | 600 | 185 | 15  | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed30_600_200_20 | 600 | 180 | 20  | 40           | 20       | 40            | 20       |

Табела Ц.14: Поређење SVNS алгоритама за PNCP и CPNCP на веома великим инстанцама ( $700 \leq n \leq 900$ ) из Additional [86] скупа.

| Инстанца          | $n$ | $p$ | $q$ | SVNS за PNCP |          | SVNS за CPNCP |          |
|-------------------|-----|-----|-----|--------------|----------|---------------|----------|
|                   |     |     |     | $best$       | $\#best$ | $best$        | $\#best$ |
| pmed31_700_5_2    | 700 | 3   | 2   | 35           | 20       | 35            | 20       |
| pmed32_700_10_2   | 700 | 8   | 2   | 72           | 20       | 72            | 20       |
| pmed33_700_70_2   | 700 | 68  | 2   | 28           | 5        | 28            | 19       |
| pmed33_700_70_5   | 700 | 65  | 5   | 28           | 5        | 28            | 17       |
| pmed33_700_70_7   | 700 | 63  | 7   | 28           | 5        | 28            | 18       |
| pmed34_700_140_2  | 700 | 138 | 2   | 41           | 20       | 41            | 20       |
| pmed34_700_140_5  | 700 | 135 | 5   | 41           | 20       | 41            | 20       |
| pmed34_700_140_10 | 700 | 130 | 10  | 41           | 20       | 41            | 20       |
| pmed34_700_140_14 | 700 | 126 | 14  | 41           | 20       | 41            | 20       |
| pmed35_800_5_2    | 800 | 3   | 2   | 36           | 20       | 36            | 20       |
| pmed36_800_10_2   | 800 | 8   | 2   | 42           | 20       | 42            | 20       |
| pmed37_800_80_2   | 800 | 78  | 2   | 33           | 20       | 33            | 20       |
| pmed37_800_80_5   | 800 | 75  | 5   | 33           | 20       | 33            | 20       |
| pmed37_800_80_8   | 800 | 72  | 8   | 33           | 20       | 33            | 20       |
| pmed38_900_5_2    | 900 | 3   | 2   | 40           | 20       | 40            | 20       |
| pmed39_900_10_2   | 900 | 8   | 2   | 74           | 20       | 74            | 20       |
| pmed40_900_90_2   | 900 | 88  | 2   | 25           | 2        | 25            | 8        |
| pmed40_900_90_5   | 900 | 85  | 5   | 25           | 2        | <b>24</b>     | 1        |
| pmed40_900_90_9   | 900 | 81  | 9   | 25           | 2        | 25            | 9        |

## Прилог Д

### Резултати тестирања за MCPNCP

У Табелама Д.1 - Д.4 дати су комплетни резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма за MCPNCP за бинарно и парцијално покривање за мале и средње инстанце.

Табеле Д.1 и Д.3 садрже резултате за бинарно покривање за мале, односно средње инстанце и организоване су на следећи начин: прве три колоне садрже податке о инстанцама: име инстанце, укупан број чворова -  $n$ , број центара које треба отворити -  $p$ . Наредне три колоне садрже резултате CPLEX решавача добијене уз помоћ формулације ILP1:  $f.val$  - вредност функције циље,  $t$  - време извршавања (у секундама) и  $\%cov$  - број покривених чворова (у процентима). Резултати CPLEX решавача добијени уз помоћ ILP2 формулације приказани су на исти начин у наредним колонома. Последњих шест колона односе се на резултате SVNS алгоритма и садрже:  $f_{best}$  - најбоље SVNS решење из 20 извршавања,  $\#f_{best}$  - број извршавања у којима је достигнуто  $f_{best}$ ,  $t_{best}$  - просечно време потребно да се  $f_{best}$  достигне по први пут (у секундама),  $t_{tot}$  - просечно укупно време извршавања,  $gap$  - просечно одступање вредности функције циља од  $f_{best}$  (у процентима),  $\sigma$  - стандардна девијација добијених вредности, која се одређује по формули:  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (gap_i - gap)^2}$ , где је  $gap_i$  процентуално одступање решења добијеног у  $i$ -том извршавању од  $f_{best}$  вредности.

Табеле Д.2 и Д.4 садрже резултате за парцијално покривање за мале и средње инстанце и су организоване слично као претходне табеле.

Табела Д.1: Бинарно покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма на малим инстанцама.

| бинарно покривање |         | CPLEX ILP1 |       |         | CPLEX ILP2 |      |         | SVNS       |              |            |           |       |          |
|-------------------|---------|------------|-------|---------|------------|------|---------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.             | $n$ $p$ | $f.val.$   | $t$   | $\%cov$ | $f.val.$   | $t$  | $\%cov$ | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed1             | 10 5    | 242        | 0.03  | 90      | 242        | 0.02 | 90      | 242        | 20           | 0.00       | 0.01      | 0     | 0        |
|                   | 20 5    | 548        | 1.44  | 90      | 548        | 0.29 | 90      | 548        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0     | 0        |
|                   | 20 10   | 466        | 0.42  | 90      | 466        | 0.14 | 90      | 466        | 20           | 0.00       | 0.06      | 0     | 0        |
|                   | 30 5    | 767        | 5.76  | 73      | 767        | 1.76 | 73      | 767        | 20           | 0.00       | 0.13      | 0     | 0        |
|                   | 30 10   | 793        | 1.93  | 83      | 793        | 0.59 | 83      | 793        | 20           | 0.00       | 0.13      | 0     | 0        |
|                   | 40 5    | 924        | 30.33 | 80      | 924        | 6.05 | 80      | 924        | 20           | 0.00       | 0.24      | 0     | 0        |
|                   | 40 10   | 1013       | 10.77 | 85      | 1013       | 2.69 | 85      | 1013       | 20           | 0.01       | 0.22      | 0     | 0        |
|                   | 40 20   | 1026       | 2.31  | 87      | 1026       | 0.57 | 87      | 1026       | 20           | 0.00       | 0.22      | 0     | 0        |
|                   | 50 10   | 1087       | 89.77 | 78      | 1087       | 6.79 | 78      | 1087       | 20           | 0.02       | 0.47      | 0     | 0        |
|                   | 50 20   | 1247       | 6.24  | 88      | 1247       | 1.77 | 88      | 1247       | 20           | 0.04       | 0.45      | 0     | 0        |
| pmed2             | 10 5    | 231        | 0.02  | 70      | 231        | 0.02 | 70      | 231        | 20           | 0.00       | 0.01      | 0     | 0        |
|                   | 20 5    | 444        | 1.03  | 60      | 444        | 0.70 | 60      | 444        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0     | 0        |
|                   | 20 10   | 378        | 0.06  | 60      | 378        | 0.06 | 60      | 378        | 20           | 0.00       | 0.06      | 0     | 0        |
|                   | 30 5    | 614        | 8.80  | 80      | 614        | 3.28 | 80      | 614        | 20           | 0.00       | 0.14      | 0     | 0        |
|                   | 30 10   | 822        | 1.34  | 80      | 822        | 0.31 | 80      | 822        | 20           | 0.00       | 0.13      | 0     | 0        |
|                   | 40 5    | 879        | 27.12 | 72      | 879        | 7.89 | 72      | 879        | 20           | 0.00       | 0.24      | 0     | 0        |
|                   | 40 10   | 850        | 5.93  | 67      | 850        | 2.40 | 65      | 850        | 20           | 0.01       | 0.23      | 0     | 0        |
|                   | 40 20   | 965        | 2.92  | 87      | 965        | 0.78 | 87      | 965        | 20           | 0.01       | 0.26      | 0     | 0        |
|                   | 50 10   | 1206       | 91.89 | 80      | 1206       | 8.52 | 80      | 1206       | 20           | 0.02       | 0.49      | 0     | 0        |
|                   | 50 20   | 1237       | 3.84  | 78      | 1237       | 2.67 | 78      | 1237       | 19           | 0.05       | 0.47      | 0.02  | 0.09     |

Табела Д.1: Бинарно покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма на малим инстанцама.

| бинарно покривање |             | CPLEX ILP1 |        |      | CPLEX ILP2 |       |      | SVNS       |              |            |           |     |          |
|-------------------|-------------|------------|--------|------|------------|-------|------|------------|--------------|------------|-----------|-----|----------|
| Инст.             | $n \quad p$ | $f.val.$   | $t$    | %cov | $f.val.$   | $t$   | %cov | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | gap | $\sigma$ |
| pmed3             | 10 5        | 183        | 0.09   | 70   | 183        | 0.03  | 70   | 183        | 20           | 0.00       | 0.01      | 0   | 0        |
|                   | 20 5        | 485        | 2.06   | 75   | 485        | 0.81  | 75   | 485        | 20           | 0.00       | 0.06      | 0   | 0        |
|                   | 20 10       | 539        | 0.40   | 75   | 539        | 0.11  | 75   | 539        | 20           | 0.00       | 0.05      | 0   | 0        |
|                   | 30 5        | 525        | 8.47   | 63   | 525        | 4.05  | 63   | 525        | 20           | 0.00       | 0.14      | 0   | 0        |
|                   | 30 10       | 847        | 2.74   | 80   | 847        | 0.78  | 80   | 847        | 20           | 0.00       | 0.14      | 0   | 0        |
|                   | 40 5        | 901        | 29.06  | 67   | 901        | 7.98  | 67   | 901        | 20           | 0.00       | 0.25      | 0   | 0        |
|                   | 40 10       | 839        | 3.95   | 70   | 839        | 1.79  | 70   | 839        | 20           | 0.00       | 0.24      | 0   | 0        |
|                   | 40 20       | 956        | 1.50   | 77   | 956        | 0.49  | 77   | 956        | 20           | 0.01       | 0.25      | 0   | 0        |
|                   | 50 10       | 1115       | 118.40 | 72   | 1115       | 11.19 | 72   | 1115       | 20           | 0.09       | 0.50      | 0   | 0        |
|                   | 50 20       | 1160       | 3.64   | 76   | 1160       | 1.59  | 76   | 1160       | 20           | 0.01       | 0.49      | 0   | 0        |
| pmed4             | 10 5        | 202        | 0.01   | 60   | 202        | 0.01  | 60   | 202        | 20           | 0.00       | 0.02      | 0   | 0        |
|                   | 20 5        | 272        | 0.18   | 45   | 272        | 0.17  | 45   | 272        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0   | 0        |
|                   | 20 10       | 389        | 0.08   | 55   | 389        | 0.08  | 55   | 389        | 20           | 0.00       | 0.06      | 0   | 0        |
|                   | 30 5        | 685        | 3.88   | 70   | 685        | 2.24  | 70   | 685        | 20           | 0.00       | 0.15      | 0   | 0        |
|                   | 30 10       | 778        | 0.48   | 70   | 778        | 0.37  | 70   | 778        | 20           | 0.00       | 0.14      | 0   | 0        |
|                   | 40 5        | 870        | 12.51  | 70   | 870        | 5.25  | 70   | 870        | 20           | 0.00       | 0.23      | 0   | 0        |
|                   | 40 10       | 830        | 3.10   | 60   | 830        | 1.35  | 60   | 830        | 20           | 0.01       | 0.23      | 0   | 0        |
|                   | 40 20       | 981        | 0.42   | 67   | 981        | 0.39  | 67   | 981        | 20           | 0.01       | 0.23      | 0   | 0        |
|                   | 50 10       | 1086       | 15.09  | 70   | 1086       | 7.10  | 70   | 1086       | 20           | 0.01       | 0.48      | 0   | 0        |
|                   | 50 20       | 1032       | 2.09   | 70   | 1032       | 1.34  | 70   | 1032       | 20           | 0.03       | 0.48      | 0   | 0        |
| pmed5             | 10 5        | 171        | 0.01   | 50   | 171        | 0.01  | 50   | 171        | 20           | 0.00       | 0.02      | 0   | 0        |
|                   | 20 5        | 336        | 0.82   | 60   | 336        | 0.82  | 60   | 336        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0   | 0        |
|                   | 20 10       | 381        | 0.05   | 60   | 381        | 0.05  | 60   | 381        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0   | 0        |
|                   | 30 5        | 573        | 2.79   | 63   | 573        | 1.16  | 63   | 573        | 20           | 0.00       | 0.18      | 0   | 0        |
|                   | 30 10       | 633        | 0.79   | 66   | 633        | 0.54  | 66   | 633        | 20           | 0.00       | 0.15      | 0   | 0        |
|                   | 40 5        | 792        | 9.72   | 67   | 792        | 5.34  | 67   | 792        | 20           | 0.00       | 0.25      | 0   | 0        |
|                   | 40 10       | 747        | 3.31   | 62   | 747        | 3.31  | 62   | 747        | 20           | 0.01       | 0.23      | 0   | 0        |
|                   | 40 20       | 912        | 0.34   | 65   | 912        | 0.33  | 65   | 912        | 20           | 0.01       | 0.26      | 0   | 0        |
|                   | 50 10       | 1198       | 11.66  | 80   | 1198       | 5.56  | 80   | 1198       | 20           | 0.04       | 0.48      | 0   | 0        |
|                   | 50 20       | 1241       | 1.38   | 74   | 1241       | 0.93  | 74   | 1241       | 20           | 0.01       | 0.50      | 0   | 0        |

Табела Д.2: Парцијално покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма на малим инстанцама.

| парцијално покривање |         | CPLEX ILP1 |        | CPLEX ILP2 |       | SVNS       |              |            |           |       |          |
|----------------------|---------|------------|--------|------------|-------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ $p$ | $f.val.$   | $t$    | $f.val.$   | $t$   | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed1                | 10 5    | 242        | 0.16   | 242        | 0.03  | 242        | 20           | 0.00       | 0.02      | 0     | 0        |
|                      | 20 5    | 558.5      | 1.87   | 558.5      | 0.60  | 558.5      | 20           | 0.00       | 0.09      | 0     | 0        |
|                      | 20 10   | 481        | 0.50   | 481        | 0.14  | 481        | 20           | 0.00       | 0.07      | 0     | 0        |
|                      | 30 5    | 811.25     | 14.32  | 811.25     | 3.84  | 811.25     | 20           | 0.00       | 0.16      | 0     | 0        |
|                      | 30 10   | 822.75     | 2.47   | 822.75     | 0.57  | 822.75     | 20           | 0.01       | 0.16      | 0     | 0        |
|                      | 40 5    | 961        | 243.12 | 961        | 11.87 | 961        | 20           | 0.00       | 0.30      | 0     | 0        |
|                      | 40 10   | 1032       | 124.64 | 1032       | 3.59  | 1032       | 20           | 0.02       | 0.25      | 0     | 0        |
|                      | 40 20   | 1076.25    | 21.58  | 1076.25    | 0.68  | 1076.25    | 20           | 0.01       | 0.26      | 0     | 0        |
|                      | 50 10   | 1107.25    | 119.57 | 1107.25    | 9.49  | 1107.25    | 20           | 0.04       | 0.66      | 0     | 0        |
|                      | 50 20   | 1298.25    | 21.84  | 1298.25    | 1.73  | 1298.25    | 20           | 0.02       | 0.63      | 0     | 0        |
| pmed2                | 10 5    | 236.75     | 0.04   | 236.75     | 0.08  | 236.75     | 20           | 0.00       | 0.02      | 0     | 0        |
|                      | 20 5    | 476.25     | 1.33   | 476.25     | 0.81  | 476.25     | 20           | 0.00       | 0.08      | 0     | 0        |
|                      | 20 10   | 411        | 0.17   | 411        | 0.17  | 411        | 20           | 0.00       | 0.06      | 0     | 0        |
|                      | 30 5    | 639.5      | 14.36  | 639.5      | 5.60  | 639.5      | 20           | 0.00       | 0.15      | 0     | 0        |
|                      | 30 10   | 869.75     | 1.94   | 869.75     | 1.22  | 869.75     | 20           | 0.00       | 0.15      | 0     | 0        |
|                      | 40 5    | 931.5      | 193.20 | 931.5      | 11.93 | 931.5      | 20           | 0.00       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 40 10   | 911.75     | 13.60  | 911.75     | 5.15  | 911.75     | 20           | 0.01       | 0.26      | 0     | 0        |
|                      | 40 20   | 1017.25    | 5.23   | 1017.25    | 0.93  | 1017.25    | 20           | 0.01       | 0.29      | 0     | 0        |
|                      | 50 10   | 1315       | 177.09 | 1315       | 15.69 | 1315       | 20           | 0.16       | 0.71      | 0     | 0        |
|                      | 50 20   | 1320.75    | 8.80   | 1320.75    | 4.14  | 1320.75    | 20           | 0.08       | 0.64      | 0     | 0        |
| pmed3                | 10 5    | 183        | 0.19   | 183        | 0.03  | 183        | 20           | 0.00       | 0.01      | 0     | 0        |
|                      | 20 5    | 495.5      | 2.97   | 495.5      | 1.42  | 495.5      | 20           | 0.00       | 0.08      | 0     | 0        |
|                      | 20 10   | 559.75     | 0.47   | 559.75     | 0.17  | 559.75     | 20           | 0.00       | 0.07      | 0     | 0        |
|                      | 30 5    | 598.5      | 13.35  | 598.5      | 8.24  | 598.5      | 20           | 0.00       | 0.17      | 0     | 0        |
|                      | 30 10   | 864.75     | 4.43   | 864.75     | 1.39  | 864.75     | 20           | 0.03       | 0.16      | 0     | 0        |
|                      | 40 5    | 969.75     | 233.54 | 969.75     | 19.94 | 969.75     | 20           | 0.00       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 40 10   | 878.5      | 10.71  | 878.5      | 3.51  | 878.5      | 20           | 0.03       | 0.25      | 0     | 0        |
|                      | 40 20   | 963        | 2.54   | 963        | 1.10  | 963        | 20           | 0.01       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 50 10   | 1178.75    | 120.49 | 1178.75    | 16.74 | 1178.75    | 20           | 0.05       | 0.66      | 0     | 0        |
|                      | 50 20   | 1180.25    | 6.86   | 1180.25    | 3.19  | 1180.25    | 20           | 0.02       | 0.65      | 0     | 0        |
| pmed4                | 10 5    | 220        | 0.05   | 220        | 0.05  | 220        | 20           | 0.00       | 0.02      | 0     | 0        |
|                      | 20 5    | 329.75     | 0.65   | 329.75     | 0.58  | 329.75     | 20           | 0.00       | 0.09      | 0     | 0        |
|                      | 20 10   | 424.5      | 0.12   | 424.5      | 0.11  | 424.5      | 20           | 0.00       | 0.08      | 0     | 0        |
|                      | 30 5    | 758.75     | 10.09  | 758.75     | 4.47  | 758.75     | 20           | 0.00       | 0.17      | 0     | 0        |
|                      | 30 10   | 904.5      | 1.69   | 904.5      | 0.46  | 904.5      | 20           | 0.00       | 0.17      | 0     | 0        |
|                      | 40 5    | 946        | 37.82  | 946        | 11.77 | 946        | 20           | 0.00       | 0.28      | 0     | 0        |
|                      | 40 10   | 930        | 5.76   | 930        | 2.59  | 930        | 20           | 0.02       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 40 20   | 1014.5     | 0.61   | 1014.5     | 0.41  | 1014.5     | 20           | 0.01       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 50 10   | 1229.75    | 94.04  | 1229.75    | 11.04 | 1229.75    | 20           | 0.06       | 0.69      | 0     | 0        |
|                      | 50 20   | 1060.25    | 5.84   | 1060.25    | 3.22  | 1060.25    | 20           | 0.11       | 0.64      | 0     | 0        |

Табела Д.2: Парцијално покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на малим инстанцама.

| парцијално покривање |     |     | CPLEX ILP1 |        | CPLEX ILP2 |      | SVNS       |              |            |           |       |          |
|----------------------|-----|-----|------------|--------|------------|------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$    | $f.val.$   | $t$  | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed5                | 10  | 5   | 171        | 0.01   | 171        | 0.01 | 171        | 20           | 0.00       | 0.02      | 0     | 0        |
|                      | 20  | 5   | 410.75     | 0.72   | 410.75     | 0.69 | 410.75     | 20           | 0.00       | 0.08      | 0     | 0        |
|                      | 20  | 10  | 403.25     | 0.05   | 403.25     | 0.06 | 403.25     | 20           | 0.00       | 0.07      | 0     | 0        |
|                      | 30  | 5   | 596.25     | 7.48   | 596.25     | 3.53 | 596.25     | 20           | 0.00       | 0.19      | 0     | 0        |
|                      | 30  | 10  | 700.5      | 1.63   | 700.5      | 1.01 | 700.5      | 20           | 0.00       | 0.16      | 0     | 0        |
|                      | 40  | 5   | 865.5      | 33.12  | 865.5      | 9.58 | 865.5      | 20           | 0.00       | 0.28      | 0     | 0        |
|                      | 40  | 10  | 847.25     | 9.51   | 847.25     | 4.18 | 847.25     | 20           | 0.00       | 0.29      | 0     | 0        |
|                      | 40  | 20  | 981.25     | 0.63   | 981.25     | 0.36 | 981.25     | 20           | 0.00       | 0.27      | 0     | 0        |
|                      | 50  | 10  | 1256.25    | 107.43 | 1256.25    | 7.82 | 1256.25    | 20           | 0.02       | 0.70      | 0     | 0        |
|                      | 50  | 20  | 1326.25    | 2.48   | 1326.25    | 0.87 | 1326.25    | 20           | 0.09       | 0.64      | 0     | 0        |

Табела Д.3: Бинарно покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на средњим инстанцама.

| бинарно покривање |     |      | CPLEX ILP1 |         |      | CPLEX ILP2 |        |      | SVNS       |              |            |           |       |          |
|-------------------|-----|------|------------|---------|------|------------|--------|------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.             | $n$ | $p$  | $f.val.$   | $t$     | %cov | $f.val.$   | $t$    | %cov | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed1             | 60  | 10   | 1405       | 188.61  | 75   | 1405       | 10.41  | 75   | 1405       | 20           | 0.06       | 1.39      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 20   | 1510       | 105.95  | 85   | 1510       | 3.80   | 85   | 1510       | 20           | 0.03       | 1.52      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 30   | 1575       | 57.15   | 91   | 1575       | 2.73   | 91   | 1575       | 20           | 0.02       | 2.18      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 10   | 1820       | 320.25  | 75   | 1820       | 270.54 | 75   | 1820       | 20           | 0.02       | 1.73      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 20   | 1684       | 103.93  | 84   | 1684       | 35.46  | 84   | 1684       | 20           | 0.06       | 1.93      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 30   | 1692       | 10.49   | 77   | 1692       | 7.11   | 77   | 1692       | 20           | 0.05       | 2.02      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 10   | 1900       | 502.69  | 78   | 1900       | 355.58 | 78   | 1900       | 20           | 0.08       | 2.34      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 20   | 2019       | 205.39  | 83   | 2019       | 197.77 | 83   | 2019       | 20           | 0.07       | 2.76      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 30   | 2063       | 152.70  | 85   | 2063       | 21.59  | 85   | 2063       | 19           | 0.37       | 2.67      | 0.01  | 0.05     |
|                   | 90  | 10   | 2076       | 829.77  | 77   | 2076       | 515.33 | 77   | 2076       | 20           | 0.13       | 2.98      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 20   | 2338       | 326.67  | 80   | 2338       | 351.03 | 80   | 2338       | 20           | 0.18       | 3.30      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 30   | 2373       | 141.70  | 82   | 2373       | 49.22  | 82   | 2373       | 20           | 0.27       | 3.31      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 50   | 2021       | 14.68   | 81   | 2021       | 6.74   | 81   | 2021       | 20           | 0.09       | 3.59      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 10   | 2299       | 1315.86 | 76   | 2299       | 776.27 | 76   | 2299       | 20           | 0.13       | 4.78      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 20   | 2437       | 463.41  | 80   | 2437       | 436.05 | 80   | 2437       | 7            | 0.30       | 4.85      | 0.16  | 0.12     |
| 100               | 30  | 2672 | 272.43     | 82      | 2672 | 196.18     | 82     | 2672 | 20         | 0.27         | 4.74       | 0         | 0     |          |
| 100               | 50  | 2573 | 77.56      | 81      | 2573 | 12.53      | 81     | 2573 | 20         | 0.10         | 4.52       | 0         | 0     |          |

Табела Д.3: Бинарно покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма на средњим инстанцама.

| бинарно покривање |     |     | CPLEX ILP1 |         |      | CPLEX ILP2 |         |      | SVNS       |              |            |           |      |          |
|-------------------|-----|-----|------------|---------|------|------------|---------|------|------------|--------------|------------|-----------|------|----------|
| Инст.             | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$     | %cov | $f.val.$   | $t$     | %cov | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | gap  | $\sigma$ |
| pmed2             | 60  | 10  | 1354       | 171.57  | 81   | 1354       | 14.64   | 81   | 1354       | 20           | 0.04       | 1.41      | 0    | 0        |
|                   | 60  | 20  | 1431       | 11.39   | 78   | 1431       | 4.43    | 78   | 1431       | 20           | 0.02       | 1.59      | 0    | 0        |
|                   | 60  | 30  | 1692       | 37.41   | 91   | 1692       | 2.11    | 91   | 1692       | 20           | 0.04       | 2.34      | 0    | 0        |
|                   | 70  | 10  | 1731       | 346.43  | 78   | 1731       | 245.87  | 78   | 1731       | 20           | 0.10       | 1.92      | 0    | 0        |
|                   | 70  | 20  | 1750       | 85.79   | 78   | 1750       | 15.36   | 78   | 1750       | 14           | 0.22       | 2.07      | 0.21 | 0.31     |
|                   | 70  | 30  | 1903       | 57.96   | 88   | 1903       | 11.94   | 88   | 1903       | 20           | 0.04       | 1.98      | 0    | 0        |
|                   | 80  | 10  | 1881       | 443.87  | 73   | 1881       | 320.45  | 73   | 1881       | 20           | 0.07       | 2.46      | 0    | 0        |
|                   | 80  | 20  | 1873       | 216.15  | 77   | 1873       | 189.84  | 77   | 1873       | 20           | 0.08       | 2.66      | 0    | 0        |
|                   | 80  | 30  | 2067       | 104.57  | 83   | 2067       | 19.35   | 83   | 2067       | 20           | 0.27       | 2.80      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 10  | 2046       | 1157.30 | 81   | 2046       | 628.63  | 81   | 2046       | 20           | 0.09       | 2.98      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 20  | 2152       | 328.78  | 78   | 2152       | 369.81  | 78   | 2152       | 20           | 0.13       | 3.27      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 30  | 2415       | 181.13  | 83   | 2415       | 228.12  | 83   | 2415       | 20           | 0.13       | 3.55      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 50  | 2585       | 189.08  | 93   | 2585       | 127.09  | 93   | 2585       | 20           | 0.03       | 3.38      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 10  | 2306       | 1763.40 | 76   | 2306       | 855.16  | 76   | 2306       | 20           | 0.07       | 4.33      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 20  | 2533       | 799.44  | 80   | 2533       | 423.42  | 80   | 2533       | 20           | 0.41       | 4.55      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 30  | 2361       | 373.59  | 84   | 2361       | 242.96  | 84   | 2361       | 20           | 0.27       | 4.89      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 50  | 2711       | 2213.94 | 94   | 2711       | 157.96  | 94   | 2711       | 20           | 0.04       | 4.25      | 0    | 0        |
| pmed3             | 60  | 10  | 1458       | 616.29  | 75   | 1458       | 16.16   | 75   | 1458       | 20           | 0.02       | 1.49      | 0    | 0        |
|                   | 60  | 20  | 1366       | 21.10   | 76   | 1366       | 6.77    | 76   | 1366       | 20           | 0.02       | 1.59      | 0    | 0        |
|                   | 60  | 30  | 1313       | 3.69    | 78   | 1313       | 1.90    | 78   | 1313       | 20           | 0.03       | 2.38      | 0    | 0        |
|                   | 70  | 10  | 1513       | 221.16  | 72   | 1513       | 246.00  | 72   | 1513       | 20           | 0.02       | 1.96      | 0    | 0        |
|                   | 70  | 20  | 1709       | 117.40  | 72   | 1709       | 22.50   | 72   | 1709       | 20           | 0.03       | 2.12      | 0    | 0        |
|                   | 70  | 30  | 1694       | 47.14   | 77   | 1694       | 6.86    | 77   | 1694       | 20           | 0.03       | 2.20      | 0    | 0        |
|                   | 80  | 10  | 1755       | 494.80  | 73   | 1755       | 323.14  | 73   | 1755       | 16           | 0.50       | 2.45      | 0.03 | 0.07     |
|                   | 80  | 20  | 1806       | 222.69  | 70   | 1806       | 249.58  | 70   | 1806       | 20           | 0.17       | 2.67      | 0    | 0        |
|                   | 80  | 30  | 2039       | 473.56  | 80   | 2039       | 154.79  | 80   | 2039       | 20           | 0.04       | 2.73      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 10  | 2215       | 2958.59 | 81   | 2215       | 690.64  | 81   | 2215       | 20           | 0.24       | 3.08      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 20  | 1945       | 477.54  | 73   | 1945       | 310.52  | 73   | 1945       | 20           | 0.25       | 3.27      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 30  | 2164       | 196.52  | 75   | 2164       | 234.03  | 75   | 2164       | 20           | 0.12       | 3.50      | 0    | 0        |
|                   | 90  | 50  | 2400       | 331.10  | 90   | 2400       | 88.79   | 90   | 2400       | 20           | 0.04       | 3.53      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 10  | 2434       | 2877.14 | 83   | 2434       | 1106.81 | 83   | 2434       | 20           | 0.19       | 4.98      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 20  | 2729       | 675.06  | 81   | 2729       | 335.68  | 81   | 2729       | 20           | 0.10       | 4.84      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 30  | 2494       | 242.97  | 78   | 2494       | 258.78  | 78   | 2494       | 20           | 0.41       | 5.11      | 0    | 0        |
|                   | 100 | 50  | 2632       | 218.86  | 92   | 2632       | 2387.24 | 92   | 2632       | 20           | 0.17       | 4.41      | 0    | 0        |

Табела Д.3: Бинарно покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгоритма на средњим инстанцама.

| бинарно покривање |     |      | CPLEX ILP1 |         |         | CPLEX ILP2 |         |         | SVNS       |              |            |           |       |          |
|-------------------|-----|------|------------|---------|---------|------------|---------|---------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.             | $n$ | $p$  | $f.val.$   | $t$     | % $cov$ | $f.val.$   | $t$     | % $cov$ | $f_{best}$ | # $f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed4             | 60  | 10   | 1337       | 123.79  | 83      | 1337       | 8.29    | 83      | 1337       | 20           | 0.03       | 1.39      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 20   | 1340       | 6.92    | 68      | 1340       | 3.15    | 68      | 1340       | 20           | 0.11       | 1.46      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 30   | 1420       | 2.38    | 78      | 1420       | 1.48    | 78      | 1420       | 20           | 0.05       | 2.30      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 10   | 1529       | 193.68  | 77      | 1529       | 174.02  | 77      | 1529       | 20           | 0.02       | 1.85      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 20   | 1510       | 14.20   | 68      | 1510       | 9.90    | 68      | 1510       | 20           | 0.04       | 1.99      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 30   | 1601       | 3.62    | 72      | 1601       | 2.74    | 72      | 1601       | 20           | 0.04       | 2.05      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 10   | 1962       | 344.96  | 77      | 1962       | 386.62  | 77      | 1962       | 20           | 0.10       | 2.44      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 20   | 1782       | 160.35  | 75      | 1782       | 24.45   | 75      | 1782       | 20           | 0.05       | 2.61      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 30   | 1540       | 11.37   | 71      | 1540       | 7.36    | 71      | 1540       | 20           | 0.31       | 2.74      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 10   | 2247       | 580.30  | 80      | 2247       | 572.48  | 80      | 2247       | 20           | 0.31       | 2.96      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 20   | 2166       | 193.73  | 75      | 2166       | 41.44   | 75      | 2166       | 20           | 0.08       | 3.21      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 30   | 1937       | 107.31  | 71      | 1937       | 13.40   | 71      | 1937       | 20           | 0.17       | 3.26      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 50   | 2300       | 6.62    | 86      | 2300       | 5.30    | 86      | 2300       | 20           | 0.10       | 3.72      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 10   | 2292       | 977.45  | 79      | 2292       | 604.96  | 79      | 2292       | 20           | 0.16       | 4.58      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 20   | 2349       | 377.78  | 80      | 2349       | 309.70  | 80      | 2349       | 20           | 0.08       | 4.79      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 30   | 2253       | 240.37  | 71      | 2253       | 43.82   | 71      | 2253       | 20           | 0.20       | 4.85      | 0     | 0        |
| 100               | 50  | 2682 | 11.73      | 84      | 2682    | 10.10      | 84      | 2682    | 20         | 0.26         | 4.74       | 0         | 0     |          |
| pmed5             | 60  | 10   | 1412       | 39.77   | 80      | 1412       | 6.65    | 80      | 1412       | 20           | 0.01       | 1.35      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 20   | 1346       | 7.48    | 75      | 1346       | 2.58    | 75      | 1346       | 20           | 0.01       | 1.54      | 0     | 0        |
|                   | 60  | 30   | 1429       | 3.35    | 81      | 1429       | 1.59    | 83      | 1429       | 20           | 0.02       | 2.44      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 10   | 1800       | 673.19  | 82      | 1800       | 71.94   | 82      | 1800       | 20           | 0.02       | 1.84      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 20   | 1636       | 21.64   | 75      | 1636       | 8.72    | 75      | 1636       | 20           | 0.41       | 2.03      | 0     | 0        |
|                   | 70  | 30   | 1756       | 11.67   | 87      | 1756       | 6.62    | 87      | 1756       | 20           | 0.02       | 2.05      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 10   | 1961       | 380.28  | 80      | 1961       | 294.90  | 80      | 1961       | 20           | 0.05       | 2.42      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 20   | 2098       | 176.35  | 81      | 2098       | 163.84  | 81      | 2098       | 20           | 0.07       | 2.61      | 0     | 0        |
|                   | 80  | 30   | 1970       | 408.36  | 88      | 1970       | 53.66   | 88      | 1970       | 20           | 0.04       | 2.58      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 10   | 2034       | 1205.93 | 80      | 2034       | 2589.19 | 80      | 2034       | 20           | 0.07       | 3.12      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 20   | 2376       | 282.71  | 84      | 2376       | 176.99  | 84      | 2376       | 20           | 0.12       | 3.19      | 0     | 0        |
|                   | 90  | 30   | 2458       | 158.29  | 87      | 2458       | 153.34  | 87      | 2458       | 20           | 0.11       | 3.18      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 10   | 2381       | 2258.16 | 78      | 2381       | 701.74  | 78      | 2381       | 20           | 0.15       | 4.70      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 20   | 2463       | 579.37  | 84      | 2463       | 292.60  | 84      | 2463       | 20           | 0.23       | 4.29      | 0     | 0        |
|                   | 100 | 30   | 2655       | 410.36  | 86      | 2655       | 159.08  | 86      | 2655       | 20           | 0.19       | 4.62      | 0     | 0        |

Табела Д.4: Парцијално покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на средњим инстанцама.

| парцијално покривање |     |     | CPLEX ILP1 |         | CPLEX ILP2 |         | SVNS       |              |            |           |       |          |
|----------------------|-----|-----|------------|---------|------------|---------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$     | $f.val.$   | $t$     | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed1                | 60  | 10  | 1480.25    | 314.12  | 1480.25    | 12.86   | 1480.25    | 20           | 0.05       | 1.61      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 20  | 1554.25    | 104.51  | 1554.25    | 6.17    | 1554.25    | 20           | 0.06       | 1.78      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 30  | 1623.75    | 93.82   | 1623.75    | 3.89    | 1623.75    | 20           | 0.17       | 2.54      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 10  | 1897.5     | 617.09  | 1897.5     | 324.29  | 1897.5     | 20           | 0.05       | 2.27      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 20  | 1719.75    | 206.06  | 1719.75    | 228.85  | 1719.75    | 20           | 0.03       | 2.31      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 30  | 1729       | 119.59  | 1729       | 11.85   | 1729       | 20           | 0.06       | 2.31      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 10  | 1965.25    | 1594.77 | 1965.25    | 559.42  | 1965.25    | 20           | 0.35       | 2.94      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 20  | 2084.25    | 351.53  | 2084.25    | 407.23  | 2084.25    | 20           | 0.05       | 3.09      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 30  | 2150       | 201.17  | 2150       | 538.11  | 2150       | 20           | 0.13       | 2.94      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 10  | 2209       | 3173.31 | 2209       | 936.29  | 2209       | 20           | 0.29       | 4.50      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 20  | 2456       | 773.10  | 2456       | 320.92  | 2456       | 20           | 0.06       | 4.20      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 30  | 2477       | 198.44  | 2477       | 247.79  | 2477       | 20           | 0.12       | 4.25      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 50  | 2117.75    | 91.57   | 2117.75    | 16.13   | 2117.75    | 20           | 0.07       | 4.69      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 10  | 2429.5     | 4416.16 | 2429.5     | 1499.14 | 2429.5     | 20           | 0.12       | 6.52      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 20  | 2565.5     | 1661.71 | 2565.5     | 661.58  | 2565.5     | 20           | 0.10       | 6.09      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 30  | 2746.25    | 664.32  | 2746.25    | 373.70  | 2746.25    | 15           | 1.14       | 6.14      | 0.00  | 0.00     |
|                      | 100 | 50  | 2661.5     | 114.16  | 2661.5     | 181.44  | 2661.5     | 20           | 0.32       | 5.71      | 0     | 0        |
| pmed2                | 60  | 10  | 1425.25    | 465.12  | 1425.25    | 29.98   | 1425.25    | 20           | 0.05       | 1.63      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 20  | 1458       | 151.95  | 1458       | 6.55    | 1458       | 20           | 0.03       | 1.82      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 30  | 1705.75    | 63.50   | 1705.75    | 2.84    | 1705.75    | 20           | 0.02       | 2.48      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 10  | 1889.75    | 844.81  | 1889.75    | 481.88  | 1889.75    | 20           | 0.04       | 2.19      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 20  | 1804.5     | 211.01  | 1804.5     | 52.01   | 1804.5     | 20           | 0.02       | 2.35      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 30  | 1926       | 112.55  | 1926       | 20.69   | 1926       | 20           | 0.04       | 2.19      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 10  | 2085.5     | 1303.21 | 2085.5     | 634.45  | 2085.5     | 20           | 0.05       | 2.79      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 20  | 1924.25    | 3605.92 | 1924.25    | 424.62  | 1924.25    | 19           | 0.38       | 2.99      | 0.02  | 0.11     |
|                      | 80  | 30  | 2119.75    | 179.08  | 2119.75    | 328.16  | 2119.75    | 11           | 0.35       | 2.98      | 0.12  | 0.13     |
|                      | 90  | 10  | 2197.25    | 4105.37 | 2197.25    | 1526.82 | 2197.25    | 20           | 0.14       | 4.61      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 20  | 2222.25    | 1049.73 | 2222.25    | 419.35  | 2222.25    | 20           | 0.43       | 4.52      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 30  | 2443       | 429.19  | 2443       | 254.24  | 2443       | 20           | 0.17       | 4.49      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 50  | 2645       | 3281.24 | 2645       | 136.58  | 2645       | 20           | 0.03       | 4.33      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 10  | 2546.75*   | 7200.29 | 2546.75    | 1727.71 | 2546.75    | 20           | 0.23       | 5.88      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 20  | 2603.75    | 5910.48 | 2603.75    | 808.12  | 2603.75    | 19           | 1.68       | 6.35      | 0.01  | 0.03     |
|                      | 100 | 30  | 2400.75    | 1287.67 | 2400.75    | 514.59  | 2400.75    | 20           | 0.24       | 6.27      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 50  | 2758.25*   | 7200.40 | 2758.25    | 650.53  | 2758.25    | 20           | 0.06       | 5.59      | 0     | 0        |

Табела Д.4: Парцијално покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на средњим инстанцама.

| парцијално покривање |     |     | CPLEX ILP1 |         | CPLEX ILP2 |         | SVNS       |              |            |           |       |          |
|----------------------|-----|-----|------------|---------|------------|---------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$     | $f.val.$   | $t$     | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed3                | 60  | 10  | 1549       | 270.33  | 1549       | 34.43   | 1549       | 20           | 0.03       | 1.72      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 20  | 1421.75    | 393.28  | 1421.75    | 7.82    | 1421.75    | 20           | 0.03       | 1.76      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 30  | 1320       | 5.29    | 1320       | 2.01    | 1320       | 20           | 0.02       | 2.55      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 10  | 1616.75    | 523.12  | 1616.75    | 322.70  | 1616.75    | 20           | 0.03       | 2.27      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 20  | 1798       | 199.43  | 1798       | 202.51  | 1798       | 20           | 0.03       | 2.33      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 30  | 1739.5     | 634.11  | 1739.5     | 18.10   | 1739.5     | 14           | 0.67       | 2.35      | 0.01  | 0.01     |
|                      | 80  | 10  | 1902.25*   | 7200.14 | 1902.25    | 545.79  | 1902.25    | 20           | 0.06       | 2.98      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 20  | 1934       | 316.55  | 1934       | 209.60  | 1934       | 20           | 0.07       | 3.02      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 30  | 2054.75    | 219.61  | 2054.75    | 152.10  | 2054.75    | 20           | 0.11       | 3.17      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 10  | 2370.25*   | 7200.21 | 2392       | 1401.59 | 2392       | 20           | 0.59       | 4.62      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 20  | 2025       | 2861.33 | 2025       | 450.23  | 2025       | 20           | 0.08       | 4.22      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 30  | 2221.5     | 705.79  | 2221.5     | 225.66  | 2221.5     | 20           | 0.18       | 4.49      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 50  | 2475.5     | 443.82  | 2475.5     | 176.34  | 2475.5     | 20           | 0.07       | 4.73      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 10  | 2510.25*   | 7200.32 | 2573.75    | 3014.01 | 2573.75    | 20           | 0.41       | 6.62      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 20  | 2891.75    | 5945.52 | 2891.75    | 630.60  | 2891.75    | 20           | 0.15       | 6.48      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 30  | 2568.75    | 777.22  | 2568.75    | 322.67  | 2568.75    | 20           | 0.19       | 6.52      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 50  | 2661.5     | 1005.81 | 2661.5     | 258.00  | 2661.5     | 20           | 0.30       | 6.03      | 0     | 0        |
| pmed4                | 60  | 10  | 1419.25    | 232.60  | 1419.25    | 11.50   | 1419.25    | 20           | 0.01       | 1.67      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 20  | 1441.25    | 13.13   | 1441.25    | 4.20    | 1441.25    | 20           | 0.04       | 1.69      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 30  | 1446.5     | 4.57    | 1446.5     | 1.51    | 1446.5     | 20           | 0.07       | 2.64      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 10  | 1673.25    | 480.93  | 1673.25    | 329.48  | 1673.25    | 20           | 0.09       | 2.22      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 20  | 1612       | 43.61   | 1612       | 24.76   | 1612       | 20           | 0.03       | 2.24      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 30  | 1652.25    | 13.07   | 1652.25    | 6.79    | 1652.25    | 20           | 0.03       | 2.25      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 10  | 2158       | 793.19  | 2158       | 488.49  | 2158       | 20           | 0.08       | 2.79      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 20  | 1942.75    | 268.77  | 1942.75    | 115.00  | 1942.75    | 20           | 0.04       | 3.08      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 30  | 1610.5     | 135.58  | 1610.5     | 18.85   | 1610.5     | 20           | 0.07       | 2.93      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 10  | 2379.5     | 2355.79 | 2379.5     | 702.65  | 2379.5     | 12           | 0.32       | 4.58      | 0.45  | 0.55     |
|                      | 90  | 20  | 2338.25    | 411.04  | 2338.25    | 376.98  | 2338.25    | 20           | 0.27       | 4.38      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 30  | 2061.25    | 198.98  | 2061.25    | 54.78   | 2061.25    | 20           | 0.31       | 4.43      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 50  | 2335.25    | 22.06   | 2335.25    | 8.94    | 2335.25    | 20           | 0.10       | 4.53      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 10  | 2457.25    | 4601.37 | 2457.25    | 1265.73 | 2457.25    | 20           | 0.24       | 6.12      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 20  | 2445.25    | 1071.32 | 2445.25    | 488.48  | 2445.25    | 20           | 0.60       | 6.63      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 30  | 2431.25    | 1187.78 | 2431.25    | 479.82  | 2431.25    | 20           | 0.24       | 6.16      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 50  | 2725       | 830.93  | 2725       | 22.19   | 2725       | 20           | 0.20       | 5.86      | 0     | 0        |

Табела Д.4: Парцијално покривање: резултати CPLEX решавача и SVNS алгорита на средњим инстанцама.

| парцијално покривање |     |     | CPLEX ILP1 |         | CPLEX ILP2 |         | SVNS       |              |            |           |       |          |
|----------------------|-----|-----|------------|---------|------------|---------|------------|--------------|------------|-----------|-------|----------|
| Инст.                | $n$ | $p$ | $f.val.$   | $t$     | $f.val.$   | $t$     | $f_{best}$ | $\#f_{best}$ | $t_{best}$ | $t_{tot}$ | $gap$ | $\sigma$ |
| pmed5                | 60  | 10  | 1483.75    | 241.63  | 1483.75    | 13.47   | 1483.75    | 20           | 0.01       | 1.71      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 20  | 1424.25    | 18.53   | 1424.25    | 5.31    | 1424.25    | 20           | 0.02       | 1.71      | 0     | 0        |
|                      | 60  | 30  | 1474.5     | 7.04    | 1474.5     | 1.61    | 1474.5     | 20           | 0.05       | 2.57      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 10  | 1926       | 470.49  | 1926       | 337.47  | 1926       | 20           | 0.05       | 2.14      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 20  | 1739.25    | 113.25  | 1739.25    | 28.30   | 1739.25    | 20           | 0.03       | 2.34      | 0     | 0        |
|                      | 70  | 30  | 1780.75    | 91.23   | 1780.75    | 32.32   | 1780.75    | 20           | 0.02       | 2.23      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 10  | 2070       | 1645.18 | 2070       | 957.77  | 2070       | 20           | 0.05       | 2.76      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 20  | 2156.25    | 263.47  | 2156.25    | 177.75  | 2156.25    | 20           | 0.14       | 3.08      | 0     | 0        |
|                      | 80  | 30  | 1980.75    | 299.71  | 1980.75    | 999.28  | 1980.75    | 20           | 0.04       | 3.04      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 10  | 2194.75    | 3787.95 | 2194.75    | 1068.58 | 2194.75    | 20           | 0.06       | 4.32      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 20  | 2429       | 6489.08 | 2429       | 6882.45 | 2429       | 20           | 0.37       | 4.64      | 0     | 0        |
|                      | 90  | 30  | 2478       | 1859.61 | 2478       | 4758.71 | 2478       | 19           | 1.06       | 4.26      | 0.01  | 0.03     |
|                      | 100 | 10  | 2578.75*   | 7200.30 | 2578.75    | 1722.40 | 2578.75    | 20           | 0.18       | 6.37      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 20  | 2495       | 5319.47 | 2495       | 603.74  | 2495       | 20           | 0.27       | 6.09      | 0     | 0        |
|                      | 100 | 30  | 2696.25    | 5918.41 | 2696.25    | 5268.16 | 2696.25    | 20           | 2.12       | 6.37      | 0     | 0        |

## Биографија

Јелена Тасић рођена је 26. маја 1993. године у Крушевцу, где је завршила основну школу и гимназију. Школске 2012/2013. године уписала је основне академске студије на Математичком факултету у Београду (студијски програм Математика, модул Примењена математика), и дипломирала школске 2015/2016. године са просечном оценом 9.13. Школске 2016/2017. године уписала је мастер академске студије на Математичком факултету, студијски програм Математика, модул Примењена математика. Мастер академске студије завршила је 2017. године са просеком 10.00, одбранивши мастер рад под насловом „Решавање граничног проблема са Риман-Лиувилевим изводом разломљеног реда методом коначних елемената” под руководством проф. др Александре Делић. Школске 2017/2018. године уписала је докторске академске студије на Математичком факултету, смер Математика.

Од 2016. године запослена је на Математичком факултету Универзитета у Београду као сарадник у настави, а од 2018. као асистент. До сада је изводила вежбе и практикуме на курсевима Увод у нумеричку математику, Дискретне структуре 2, Нумеричке методе, Метакеуристичке методе, Одабрана поглавља оптимизације и Математика (на Хемијском факултету Универзитета у Београду). Током 2019. године била је ангажована као истраживач на пројекту „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене” (број пројекта 174015) финансираног од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, на Математичком институту САНУ. Била је члан Организационог одбора 48. Међународног симпозијума о операционим истраживањима (SYM-OP-IS 2021).

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписана Јелена Тасић

број уписа 2012 / 2017

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

Математички модели и методе оптимизације за решавање варијанти проблема р-резервног центра

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, 15. 6. 2026.

J. Tasic

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске  
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Јелена Тасић

Број уписа 2012 / 2017

Студијски програм Математика

Наслов рада Математички модели и методе оптимизације за решавање  
варијанти проблема  $p$ -резервног центра

Ментор проф. др Зорица Дражић

Потписани Јелена Тасић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 15. 6. 2026.

J. Tasić

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Математички модели и методе оптимизације за решавање варијанти проблема р-резервног центра

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15. 6. 2026.

J. Stasich

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.