

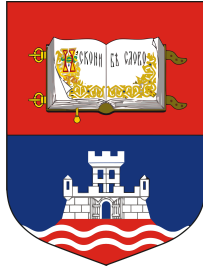
UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Miloš N. Mićović

**RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA I
STRATEGIJE ZA AUTOMATSKO DOKAZIVANJE
NEKIH ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Doktorska disertacija

Beograd, 2026.



UNIVERSITY OF BELGRADE
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Miloš N. Mićović

**STRATIFIED FAMILIES OF FUNCTIONS AND
STRATEGIES FOR AUTOMATED PROVING
OF SOME ANALYTIC INEQUALITIES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026.

Mentori:

dr Branko Malešević, redovni profesor
Katedra za primenjenu matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

dr Tatjana Lutovac, redovni profesor
Katedra za primenjenu matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Bojana Mihailović, vanredni profesor
Katedra za primenjenu matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

dr Boško Nikolić, redovni profesor
Katedra za računarsku tehniku i informatiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

dr Zoran Pucanović, redovni profesor
Katedra za matematiku, fiziku i nacrtanu geometriju
Građevinski fakultet
Univerzitet u Beogradu

dr Nataša Ćirović, vanredni profesor
Katedra za primenjenu matematiku
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu

dr Bojan Banjac, vanredni profesor
Katedra za animaciju u inženjerstvu
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

Datum odbrane:

Naslov doktorske disertacije: Raslojene familije funkcija i strategije za automatsko dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti

Sažetak: Glavni predmeti ove disertacije su razvoj teorije raslojenih familija funkcija, poboljšanje i proširenje metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti i razvoj strategija i sistema za automatsko dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti.

U ovoj disertaciji je razmatrana raslojenost jednoparametarskih familija funkcija i uopšten je pojam raslojenosti i monotone raslojenosti familije funkcija nad nekim realnim skupom. Takođe, razmatrani su pojam i određivanje najboljih konstanti u nejednakostima. Data su neka poboljšanja Nike teoreme, koja se koristi za dokazivanje činjenice da funkcija ima tačno jedan ekstremum na posmatranom intervalu. Za datu raslojenu familiju funkcija razmatrani su postojanje, jedinstvenost i određivanje minimaks aproksimanta kao funkcije iz familije za koju je odstupanje od apscise najmanje moguće (u odnosu na sve ostale funkcije iz familije). Na osnovu osobina raslojenih familija funkcija, razvijen je Parametarski metod za dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti. Ovaj metod se zasniva na izdvajanju onih funkcija iz posmatrane familije koje imaju nulu na posmatranom intervalu. Po analogiji sa parametarskim metodom, razvijen je Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimanata. Ovaj metod se zasniva na izdvajanju onih funkcija iz posmatrane familije koje imaju stacionarnu tačku na posmatranom intervalu. Parametarski i Novi parametarski metod omogućavaju određivanje najboljih konstanti u razmatranoj nejednakosti. Uz teorijske rezultate, razvijene su i neke strategije za primenu raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti.

U disertaciji je takođe poboljšan i proširen jedan metod za dokazivanje miksovano trigonometrijsko polinomskih (MTP) nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti. Taj metod se zasniva na aproksimaciji trigonometrijskih funkcija (koje se javljaju u datoj nejednakosti) odgovarajućim Tejlorovim polinomima, čime se dokaz date MTP nejednakosti svodi na dokaz polinomske nejednakosti. Po analogiji sa tim metodom, dat je metod za dokazivanje miksovano eksponencijalno polinomskih (MEP) nejednakosti, koje su uvedene u disertaciji, kao i nekih uopštenja MTP i MEP nejednakosti. Za dokazivanje polinomskih nejednakosti koristila se Šturmov teorema.

Posebno je analiziran poredak Tejlorovih razvoja razmatranih realnih funkcija. Na osnovu te analize, razvijene su nove strategije za aproksimaciju trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija odgovarajućim Tejlorovim polinomima tako da se dokazivanje date nejednakosti svede na dokazivanje polinomske nejednakosti. Takođe, razvijen je algoritam za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti i implementiran je jedan novi sistem za automatsko dokazivanje nejednakosti. Pri tome, dokazi dobijeni primenom razvijenog sistema prikazuju se korisniku u stilu koji je blizak ljudskom načinu dokazivanja.

U disertaciji su date i primene koncepta raslojenih familija funkcija i razvijenog dokazivača u teoriji analitičkih nejednakosti. Dat je novi dokaz jedne od Huygens-ovih nejednakosti, koja je tek nedavno dokazana. Dobijena su poboljšanja i uopštenja Cusa-Huygens i nekih tipova Cusa-Huygens nejednakosti, jednog tipa Wilker-ove nejednakosti, Wilker-Cusa-Huygens nejednakosti, eksponencijalno polinomskih nejednakosti, nekih tipova Mitrinović-Adamović nejednakosti, D' Aurizio-Sándor nejednakosti i jednog tipa D' Aurizio-Sándor nejednakosti, nekih ograničenja sinc funkcije preko kosinusnih funkcija i nekih tipova Jordan-ove nejednakosti, kao i neke nove nejednakosti i minimaks aproksimacije.

Ključne reči: raslojene familije funkcija; analitičke nejednakosti; miksovano trigonometrijsko polinomske funkcije; miksovano eksponencijalno polinomske funkcije; minimaks aproksimacije; metodi, strategije i algoritmi za dokazivanje nejednakosti; automatsko dokazivanje; veštačka inteligencija.

Naučna oblast: Elektrotehnika i računarstvo.

Uža naučna oblast: Primenjena matematika.

Title of the Doctoral Dissertation: Stratified families of functions and strategies for automated proving of some analytic inequalities

Abstract: The main subjects of this dissertation are the development of the theory of stratified families of functions, the improvement and extension of a method for proving inequalities by reducing them to polynomial inequalities and the development of strategies and a system for automated proving of some analytic inequalities.

In this dissertation the stratification of one-parameter families of functions was considered and the notion of the stratification and the monotonic stratification of a family of functions over some real set was generalised. Furthermore, the notion and determination of the best constants in inequalities were considered. Some improvements of the Nike theorem, which is used to prove the fact that a function has exactly one extremum on the observed interval, were given. For a given stratified family of functions the existence, uniqueness and determination of the minimax approximant as a function from the family for which the deviation from the abscissa is the least possible (compared to all the other functions from the family) were considered. Based on the properties of stratified families of functions, a Parametric method for proving some analytic inequalities was developed. This method is based on selecting those functions from an observed family that have zero on an observed interval. By analogy with the Parametric method, a Novel parametric method for proving some inequalities and determining minimax approximants was developed. This method is based on selecting those functions from an observed family that have a stationary point on an observed interval. The Parametric and the Novel parametric method enable the determination of the best constants in a considered inequality. Alongside the theoretical results, some strategies for the application of stratified families of functions in the theory of analytic inequalities were developed.

In the dissertation a method for proving mixed trigonometric polynomial (MTP) inequalities by reducing them to polynomial inequalities is also improved and extended. That method is based on the approximation of the trigonometric functions (which appear in a given inequality) by the corresponding Taylor polynomials, which reduces the proof of a given MTP inequality to the proof of a polynomial inequality. By analogy with that method, a method is given for proving mixed exponential polynomial (MEP) inequalities, which were introduced in the dissertation, as well as some generalisations of MTP and MEP inequalities. For proving polynomial inequalities Sturm's theorem was used.

In particular, the order of Taylor expansions of the considered real functions was analysed. Based on that analysis, new strategies were developed for the approximation of trigonometric and exponential functions by corresponding Taylor polynomials so that proving a given inequality reduces to proving a polynomial inequality. Also, an algorithm for proving inequalities by reducing them to polynomial inequalities was developed and a new system for automated proving of inequalities was implemented. Furthermore, the proofs obtained by applying the developed system are presented to the user in a style that is close to the human way of proving.

In the dissertation applications of the concept of stratified families of functions and the developed prover in the theory of analytic inequalities were given. A new proof of one of Huygens's inequalities, which was recently proved, was given. Improvements and generalisations of the Cusa-Huygens and some Cusa-Huygens-type inequalities, one Wilker-type inequality, Wilker-Cusa-Huygens inequalities, exponential polynomial inequalities, some Mitrinović-Adamović-type inequalities, D'Aurizio-Sándor inequalities and one D'Aurizio-Sándor-type inequality, some bounds of the sinc function via cosine functions and some Jordan-type inequalities were obtained, as well as some new inequalities and minimax approximations.

Keywords: stratified families of functions; analytic inequalities; mixed trigonometric polynomial functions; mixed exponential polynomial functions; minimax approximations; methods, strategies and algorithms for proving inequalities; automated proving; artificial intelligence.

Scientific Field: Electrical Engineering and Computing.

Scientific Subfield: Applied Mathematics.

Sadržaj

Spisak korišćenih oznaka	iv
Uvod	1
1 Pregled postojećih rezultata	5
1.1 Raslojene familije funkcija	5
1.2 O miksovano trigonometrijsko polinomskim funkcijama	7
1.3 Jedan metod za dokazivanje miksovano trigonometrijsko polinomskih nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti	8
1.4 Jedna teorema za dokazivanje polinomskih nejednakosti	14
1.5 Neki sistemi za automatsko dokazivanje analitičkih nejednakosti	18
2 Teorijski doprinosi raslojenim familijama funkcija	27
2.1 Neke osobine raslojenih familija funkcija	27
2.2 Najbolje konstante u nejednakostima	29
2.2.1 Neke osobine najboljih konstanti u nejednakostima	29
2.2.2 Izdvajanje konstanti za neke nejednakosti	30
2.3 Neka uopštenja i poboljšanja Nike teoreme	34
2.4 Minimaks aproksimanti	35
2.4.1 Neke osobine minimaks aproksimanta	35
2.4.2 Teorema o postojanju i određivanju minimaks aproksimanta	38
2.5 Parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti	39
2.6 Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimacija	46
2.7 Neke strategije za primenu raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti	57
2.7.1 Strategija za određivanje najboljih konstanti u nejednakostima	58
2.7.2 Strategija za dokazivanje nejednakosti zasnovana na Parametarskom metodu	59
2.7.3 Strategija za određivanje minimaks aproksimanta primenom Nike teoreme	60
2.7.4 Strategija za dokazivanje nejednakosti i određivanje minimaks aproksimanta zasnovana na Novom parametarskom metodu	61
3 Neka poboljšanja i uopštenja metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti	63
3.1 Neke dopune metoda za dokazivanje MTP nejednakosti	63
3.1.1 Neka poboljšanja Leme 1.1 i Leme 1.2	63
3.1.2 Dokazivanje nekih uopštenja MTP nejednakosti	69
3.1.3 Dokazivanje nejednakosti na proizvoljnom konačnom intervalu	70
3.2 Dokazivanje miksovano eksponencijalno polinomskih nejednakosti	74
3.2.1 Neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije za eksponencijalnu funkciju	75
3.2.2 Određivanje nanižne polinomske aproksimacije i neka uopštenja MEP funkcija	78

3.2.3	Primena u dokazivanju MHTP nejednakosti i nekih uopštenja MHTP nejednakosti	80
3.3	Izolovanje nula i izolovanje ekstremuma realnih funkcija	81
3.3.1	Metod za izolovanje nula funkcija	81
3.3.2	Metod za izolovanje ekstremuma funkcija	81
4	Jedan sistem za automatsko dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti	83
4.1	Neke strategije za određivanje vrednosti indeksa Tejlorovih razvoja u nanižnim polinomskim aproksimacijama	83
4.1.1	O polinomskoj nejednakosti $P(x) > 0$	84
4.1.2	Strategija za redukovanje broja indeksa grupisanjem sabiraka polazne funkcije	84
4.1.3	Još neki teorijski rezultati o poretku Tejlorovih razvoja trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija	86
4.1.4	Strategija simultanog uvećavanja vrednosti indeksa	94
4.1.5	Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije	95
4.1.6	Strategija postepenog uvećavanja vrednosti indeksa	96
4.1.7	Diskusija i neka poboljšanja razmatranih strategija	98
4.2	Rad sistema – Menadžer i ostali algoritmi	100
4.2.1	Algoritam 1: Kontraprimer	101
4.2.2	Algoritam 2: Transformacija	103
4.2.3	Algoritam 3: Aproksimacija	104
4.2.4	Algoritam 4: Racionalizacija	105
4.2.5	Algoritam 5: Šturm	105
4.2.6	Primer rada sistema	106
4.3	Korišćene tehnologije	114
4.4	Funkcionalnosti i korisnički interfejs sistema	114
4.4.1	Pronalaženje kontraprimera	116
4.4.2	Dokazivanje raznih klasa nejednakosti	116
4.4.2.1	Dokazivanje polinomskih nejednakosti	116
4.4.2.2	Dokazivanje MTP nejednakosti	119
4.4.2.3	Dokazivanje uopštenih MTP nejednakosti	120
4.4.2.4	Dokazivanje MEP nejednakosti	122
4.4.2.5	Dokazivanje uopštenih MEP nejednakosti	123
4.4.2.6	Dokazivanje nejednakosti koje sadrže i trigonometrijske i eksponencijalne funkcije	124
4.4.3	Postavke sistema	125
4.4.4	Primena sistema u izolovanju nula i izolovanju ekstremuma funkcija	127
4.5	O korektnosti rada sistema	130
4.6	Diskusija i poređenje sa nekim postojećim sistemima	130
5	Primene	133
5.1	Cusa-Huygens nejednakosti	133
5.1.1	Neka poboljšanja Cusa-Huygens nejednakosti na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$	133
5.1.1.1	Primena Strategije za određivanje najboljih konstanti	134
5.1.1.2	Primena Strategije zasnovane na Parametarskom metodu	136
5.1.1.3	Primena Strategije zasnovane na Nike teoremi	139
5.1.1.4	Primena Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu	141
5.1.2	Proširenje Cusa-Huygens nejednakosti na beskonačni interval	143
5.1.3	Poboljšanja nekih tipova Cusa-Huygens nejednakosti	144
5.1.3.1	Poboljšanje Teoreme 5.7	148

5.1.3.2	Poboljšanje Teoreme 5.8	154
5.1.3.3	Poboljšanje Teoreme 5.9	156
5.2	Dokaz Huygens-ove nejednakosti	162
5.3	Uopštenje jednog tipa Wilker-ove nejednakosti	164
5.4	Wilker-Cusa-Huygens nejednakosti	168
5.4.1	Poboljšanje Teoreme 5.20	169
5.4.2	Poboljšanje Teoreme 5.21	170
5.4.3	Poboljšanje Teoreme 5.22	172
5.4.4	Poboljšanje Teoreme 5.23	174
5.4.5	Poboljšanje Teoreme 5.24	176
5.4.6	Poboljšanje Teoreme 5.25	178
5.5	Neke eksponencijalno polinomske nejednakosti	179
5.5.1	Poboljšanje Teoreme 5.32	180
5.5.2	Poboljšanje Teoreme 5.33	183
5.6	Neki tipovi Mitrinović-Adamović nejednakosti	184
5.6.1	Poboljšanje Teoreme 5.37	186
5.6.2	Poboljšanje Teoreme 5.38	187
5.6.3	Poboljšanje Teoreme 5.39	189
5.7	D'Aurizio-Sándor nejednakosti	190
5.7.1	Poboljšanje Teoreme 5.44	191
5.7.2	Poboljšanje Teoreme 5.45	193
5.7.3	Poboljšanje jednog tipa D'Aurizio-Sándor nejednakosti	195
5.7.3.1	Uopštenje leve strane nejednakosti (5.61)	196
5.7.3.2	Uopštenje desne strane nejednakosti (5.61)	197
5.8	Neka ograničenja sinc funkcije preko kosinusnih funkcija	199
5.8.1	Poboljšanje nejednakosti (5.65)	200
5.8.2	Poboljšanje nejednakosti (5.66)	201
5.8.3	Poboljšanje nejednakosti (5.67)	202
5.8.4	Poboljšanja Teoreme 5.52	204
5.9	Neki tipovi Jordan-ove nejednakosti	205
5.9.1	Poboljšanje Teoreme 5.63	206
5.9.2	Poboljšanje teorema 5.59–5.62	218
5.9.3	Neka ograničenja i aproksimacije funkcije sinc	225
Zaključak i pravci budućeg istraživanja		227
Literatura		231
Biografija		245

Spisak korišćenih oznaka

Oznaka	Značenje
$\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$	familija funkcija sa argumentom $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i parametrom $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$
$\varphi_p^{(m)}(x)$	$= \frac{\partial^m \varphi_p(x)}{\partial x^m}$, gde $m \in \mathbb{N}$
$\lceil c \rceil$	najmanji ceo broj koji je veći od $c \in \mathbb{R}$ ili jednak tom broju
$\lfloor c \rfloor$	najveći ceo broj koji je manji od $c \in \mathbb{R}$ ili jednak tom broju
$T_n^{\phi, c}(x)$	Tejlorov razvoj stepena n funkcije $\phi(x)$ u okolini tačke $c \in \mathbb{R}$
$c_k^{\phi, c}$	koeficijent člana stepena k Tejlorovog razvoja $T_n^{\phi, c}(x)$, gde je $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
$\exp^{-}(x)$	$= e^{-x}$
$f(c+)$	$= \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$, gde je f realna funkcija i $c \in \mathbb{R}$
$f(c-)$	$= \lim_{x \rightarrow c-} f(x)$, gde je f realna funkcija i $c \in \mathbb{R}$
$\text{rem}(P_1(x), P_2(x))$	ostatak pri deljenju polinoma $P_1(x)$ polinomom $P_2(x)$
$\text{dg}(P(x))$	stepen polinoma $P(x)$
□	kraj primera
■	kraj dokaza
■	kraj tekstualne celine

Uvod

„*Good order is the foundation of all good things.*”

Edmund Burke (1729–1797)

Još od antičkih vremena postojala je potreba da se uporede različiti realni izrazi i funkcije, tj. da se provere odgovarajuće nejednakosti. Matematičari tog perioda znali su za nejednakost trougla, nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine, a određivali su i aproksimacije broja π . Od osamnaestog veka proučavanje nejednakosti postaje znatno učestalije. Određivanje približnih vrednosti brojeva, aproksimacija funkcija i određenih integrala svodi se na dokazivanje odgovarajućih nejednakosti, što je danas čest predmet istraživanja u matematici, kao i u mnogim drugim oblastima nauke i inženjerstva. [72]

Postoje različiti metodi, strategije i pristupi koji su razvijeni za dokazivanje raznih nejednakosti. Budući da dokazivanje nejednakosti može biti složeno i vremenski zahtevno, razvijeni su i neki sistemi za automatsko dokazivanje nejednakosti. Međutim, svi ovi metodi, strategije i sistemi imaju neka ograničenja s obzirom na to da postoje neprekidne funkcije za koje je dokazivanje pozitivnosti nad nekim realnim segmentom neodlučiv problem [163].

U ovoj disertaciji proučavaćemo familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisane za vrednosti argumenta $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$. U teoriji analitičkih nejednakosti, nedavno je, u [127], uveden pojam raslojenih familija funkcija. Intuitivno, familija funkcija je raslojena nad datim skupom ukoliko se nijedne dve funkcije iz te familije ne seku nad tim skupom. Posebno su značajne monotono raslojene familije funkcija (tj. funkcije koje su monotone po parametru) jer postoji poredak funkcija u takvim familijama.

Na osnovu konkretnih nejednakosti, uvođenjem parametra umesto pojedinih konstanti, može se uočiti odgovarajuća familija funkcija. Analiziranje takvih familija funkcija omogućava istovremeno razmatranje i eventualno dokazivanje nejednakosti za one realne vrednosti parametra za koje je uočena familija raslojena. Od posebnog značaja je određivanje one vrednosti parametra za koje se dobijaju najbolje konstante za odgovarajuće nejednakosti, kao i vrednost parametra za koju se dobija aproksimacija sa najmanjom greškom aproksimacije u odnosu na određenu metriku (minimaks aproksimacija [127]).

Jedan od glavnih predmeta ove disertacije je dalji razvoj teorije raslojenih familija funkcija, kao i primena dobijenih teorijskih rezultata u poboljšavanju i uopštavanju nekih postojećih nejednakosti i određivanju odgovarajućih minimaks aproksimacija.

U primenama teorije raslojenih familija funkcija često je potrebno ispitati znak neke miksovano trigonometrijsko polinomske (MTP) funkcije. MTP funkcije su konačne linearne kombinacije izraza oblika $x^p \cos^q x \sin^r x$, gde $p, q, r \in \mathbb{N}_0$. Za ispitivanje znaka MTP funkcija, tj. za dokazivanje odgovarajuće MTP nejednakosti, koristićemo metod iz [120]. Primenom tog metoda se, aproksimacijom trigonometrijskih funkcija odgovarajućim Tejlorovim (Taylor) razvojem, dokaz MTP nejednakosti

svodi na dokaz polinomske nejednakosti. Na primer, za dokazivanje pozitivnosti neke MTP funkcije, dovoljno je odrediti jednu pozitivnu nanižnu polinomsku aproksimaciju (ukoliko postoji) te MTP funkcije na posmatranom intervalu.

U ovoj disertaciji poboljšaćemo metod za dokazivanje MTP nejednakosti iz [120] tako da se mogu dokazati nejednakosti na proizvoljnom konačnom intervalu, kao i neke nove klase nejednakosti. Uvešćemo klasu miksovano eksponencijalno polinomskih (MEP) funkcija koje predstavljaju konačne linearne kombinacije izraza oblika $x^p e^{-qx}$, gde $p, q \in \mathbb{N}_0$. Takođe, razmatraćemo i neka uopštenja MTP i MEP funkcija.

Za dokazivanje polinomskih nejednakosti korišćićemo Šturmovu (Sturm) teoremu, pomoću koje se može odrediti broj nula polinoma na posmatranom realnom segmentu.

Dokazivanje MTP i MEP nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti često je veoma kompleksno i vremenski zahtevno i stoga bi bilo poželjno automatizovati taj proces. Jedan od glavnih problema prilikom implementacije ovog metoda za dokazivanje nejednakosti jeste formulisanje algoritma za aproksimaciju realnih funkcija, koje se javljaju u polaznoj nejednakosti, odgovarajućim Tejlorovim polinomima tih funkcija u cilju dobijanja odgovarajućih nanižnih/navišnih polinomskih aproksimacija. U [157] autori dokazivača MetiTarski ukazali su na postojanje ovog problema i naveli da je to jedan od razloga zbog kog su koristili metod rezolucije pri implementaciji dokazivača. U ovoj disertaciji analiziraćemo poredak Tejlorovih razvoja realnih funkcija i, na osnovu te analize, formiraćemo neke strategije za određivanje stepena Tejlorovih polinoma kojima aproksimiramo realne funkcije koje se javljaju u nejednakostima.

Predmeti ove disertacije su i razvoj i implementacija jednog sistema za automatsko dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti. Pri implementaciji sistema, posebna pažnja biće posvećena tome da dokazi budu čitljivi i jednostavni za verifikaciju.

Struktura disertacije. U prvom poglavlju dat je pregled nekih postojećih rezultata, dok ostala poglavlja sadrže nove rezultate, od kojih su neki objavljeni u [27, 121–126, 133, 135, 136].

U drugom poglavlju dati su teorijski doprinosi raslojenim familijama funkcija: definicija i neke osobine raslojenih familija funkcija i najboljih konstanti u nejednakostima, neke teoreme koje omogućavaju određivanje najboljih konstanti u nejednakostima, neka uopštenja Nike teoreme (koja se koristi za dokazivanje da funkcija ima tačno jedan ekstremum na posmatranom intervalu), teoreme o jedinstvenosti, postojanju i određivanju minimaks aproksimanta za neke raslojene familije funkcija, Parametarski metod za dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti i Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimacija. Na osnovu ovih teorijskih rezultata su razvijene i neke strategije za primenu raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti.

U trećem poglavlju data su poboljšanja i proširenja metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz [120] i metodi za izolovanje nula i ekstremuma funkcija iz razmatranih klasa.

U četvrtom poglavlju, na osnovu analize Tejlorovih razvoja razmatranih funkcija, razvijene su strategije za aproksimaciju realnih funkcija, koje se javljaju u polaznoj nejednakosti, odgovarajućim Tejlorovim polinomima. Na taj način se dokaz polazne nejednakosti može svesti na dokaz polinomske nejednakosti nad posmatranim intervalom. Takođe, razvijen je algoritam za dokazivanje nekih klasa nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti. Taj algoritam je implementiran u okviru razvijenog dokazivača.

U petom poglavlju su, primenom koncepta raslojenosti i razvijenog dokazivača, dati novi dokazi, poboljšanja i proširenja oko trideset postojećih nejednakosti i dobijene su neke nove nejednakosti i minimaks aproksimacije.

Zahvalnica. Veliku zahvalnost dugujem mentorima, prof. dr Branku Maleševiću i prof. dr Tatjani Lutovac, na pomoći prilikom pisanja doktorske disertacije, izdvojenom vremenu i svim idejama, sugestijama i savetima kako da što bolje prikažem dobijene rezultate. Prof. dr Branku Maleševiću zahvalan sam i na mentorstvu tokom doktorskih studija, intenzivnom radu sa mnom i na inspiraciji da krenem da istražujem ovu oblast. Zahvalnost dugujem i prof. dr Ivani Jovović, pod čijim sam mentorstvom započeo doktorske studije, na motivaciji, pomoći i podršci na početku doktorskih studija. Zahvalan sam i članovima komisije, prof. dr Bojani Mihailović, prof. dr Bošku Nikoliću, prof. dr Zoranu Pucanoviću, prof. dr Nataši Ćirović i prof. dr Bojanu Banjcu, na čitanju rada i korisnim sugestijama i komentarima. Dr Marijani Đukić i prof. dr Nikoli Jokiću zahvalan sam na lekturi disertacije. Sestrama, Milici i Mirjani, zahvalan sam na podršci. Najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima, Snežani i Nebojši.

Istraživanje je finansijski podržano od strane Ministarstva prosvete i Ministarstva nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Republike Srbije. Doktorska disertacija je delimično realizovana u prostorijama Palate nauke, zadužbine Miodraga Kostića.

Poglavlje 1

Pregled postojećih rezultata

1.1 Raslojene familije funkcija

Koncept raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti uveden je u [127]. U tom radu data je definicija *raslojenih funkcija*, kao i neki teorijski rezultati, koje navodimo u nastavku prema [127].

Definicija 1.1 Funkcije $\varphi_p(x)$, gde $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}^+$, jesu rastuće raslojene ukoliko je

$$(\forall x \in (a, b)) (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x) < \varphi_{p_2}(x)),$$

tj. opadajuće raslojene ukoliko je

$$(\forall x \in (a, b)) (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x) > \varphi_{p_2}(x)).$$

U [127] je takođe uveden i sledeći pojam *minimaks aproksimanta*:

Definicija 1.2 Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ iz familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}^+$, jeste *minimaks aproksimant* na intervalu (a, b) ukoliko se za vrednost parametra $p = p_0 \in \mathbb{R}^+$ dostiže infimum greške

$$d^{(p)} = \sup_{x \in (a, b)} |\varphi_p(x)|.$$

Termin *raslojene familije funkcija* je korišćen u [146]. U okviru te doktorske disertacije razmatrano je određivanje minimaks aproksimanta u odnosu na neke druge metrike i primenom raslojenosti su dobijena neka uopštenja i poboljšanja razmatranih nejednakosti. Takođe su razmatrane i neke primene u oblasti elektrotehnike.

Za određivanje minimaks aproksimanta u [127] dokazane su sledeće teoreme.

Teorema 1.1 (Teorema 1 [127]) Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in (a, b)$ i $p \in \mathbb{R}^+$, familija funkcija koje su neprekidne po $x \in (a, b)$ za $p \in \mathbb{R}^+$ i rastuće raslojene za $p \in \mathbb{R}^+$ i neka su $c, d \in \mathbb{R}^+$, $c < d$. Ukoliko važi:

- (a) $\varphi_c(x) < 0$ i $\varphi_d(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$, $\varphi_c(a+) = \varphi_c(b-) = \varphi_d(a+) = 0$ i $\varphi_d(b-) \in \mathbb{R}^+$;
- (b) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in (a, b)$ i funkcija $\varphi_p(b-)$ je neprekidna po $p \in (c, d)$ takođe;
- (c) za svako $p \in (c, d)$ postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$;
- (d) za svako $p \in (c, d)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jedan ekstremum $t^{(p)}$ na intervalu (a, b) , koji je minimum;

tada postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in \mathbb{R}^+$ sledeće jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p(b-)$$

i za $d_0 = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0}(b-)$ imamo

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in (a,b)} |\varphi_p(x)|.$$

Teorema 1.2 (Teorema 1' [127]) *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in (a, b)$ i $p \in \mathbb{R}^+$, familija funkcija koje su neprekidne po $x \in (a, b)$ za $p \in \mathbb{R}^+$ i opadajuće raslojene za $p \in \mathbb{R}^+$ i neka su $c, d \in \mathbb{R}^+$, $c < d$. Ukoliko važi:*

- (a) $\varphi_c(x) > 0$ i $\varphi_d(x) < 0$ za svako $x \in (a, b)$, $\varphi_c(a+) = \varphi_d(b-) = \varphi_d(a+) = 0$ i $\varphi_c(b-) \in \mathbb{R}^+$;
- (b) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in (a, b)$ i funkcija $\varphi_p(b-)$ je neprekidna po $p \in (c, d)$ takođe;
- (c) za svako $p \in (c, d)$ postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$;
- (d) za svako $p \in (c, d)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jedan ekstremum $t^{(p)}$ na intervalu (a, b) , koji je minimum;

tada postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in \mathbb{R}^+$ sledeće jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p(b-)$$

i za $d_0 = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0}(b-)$ imamo

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in (a,b)} |\varphi_p(x)|.$$

Uslov (d) prethodne dve teoreme zahteva proveru da posmatrane funkcije imaju minimum. Sledeća teorema daje dovoljne uslove za postojanje minimuma funkcija.

Teorema 1.3 (Teorema 3 [127], Nike teorema) *Neka je $f : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija (za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$) koja ispunjava sledeće uslove:*

- (a) $f^{(m)}(x) > 0$ za $x \in (0, c)$;
- (b) postoji desna okolina nule u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f < 0, f' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0;$$

- (c) postoji leva okolina tačke c u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f > 0, f' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (0, c)$ i važi da je $f(x) < 0$ za $x \in (0, x_0)$ i da je $f(x) > 0$ za $x \in (x_0, c)$. Takođe, funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu $(0, c)$. Preciznije, postoji tačno jedna tačka $t \in (0, x_0) \subset (0, c)$ takva da je $f(t) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu $(0, c)$, odnosno na intervalu $(0, x_0)$.

Napomenimo da je prethodna teorema originalno data u [116], a u [127] je nazvana Nike teorema. U [127] je takođe data i sledeća varijanta Nike teoreme, koja se od prethodne teoreme razlikuje samo po uslovu (a).

Teorema 1.4 (Teorema 4 [127]) *Neka je $f : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija (za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$) koja ispunjava sledeće uslove:*

(a) $f^{(m)}(x)$ ima tačno jednu nulu x_m na $(0, c)$ tako da je $f^{(m)}(x) > 0$ na $(0, x_m)$ i $f^{(m)}(x) < 0$ na (x_m, c) ;

(b) postoji desna okolina nule u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f < 0, f' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0;$$

(c) postoji leva okolina tačke c u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f > 0, f' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (0, c)$ i važi da je $f(x) < 0$ za $x \in (0, x_0)$ i da je $f(x) > 0$ za $x \in (x_0, c)$. Takođe, funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu $(0, c)$. Preciznije, postoji tačno jedna tačka $t \in (0, x_0) \subset (0, c)$ takva da je $f(t) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu $(0, c)$, odnosno na intervalu $(0, x_0)$.

1.2 O miksovano trigonometrijsko polinomskim funkcijama

Pojam *miksovano trigonometrijsko polinomskih sistema* (MTPS) uveden je u [207].

Definicija 1.3 *Miksovano trigonometrijsko polinomski sistemi* (MTPS) su sistemi definisani sa

$$F(y, \theta) = (f_1(y, \theta), \dots, f_{n+m}(y, \theta))^T = 0,$$

za $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $1 \leq i \leq n + m$, i

$$f_i(y, \theta) = \sum_{\alpha \in S_i} b_{i\alpha} y^\beta \sin^\mu \theta \cos^\nu \theta + b_i,$$

gde je $\alpha = (\beta, \mu, \nu)$, $S_i \subset N^{n+2m} \setminus \{0\}$, i

$$\begin{cases} y^\beta = y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, \\ \sin^\mu \theta = \sin^{\mu_1} \theta_1 \dots \sin^{\mu_m} \theta_m, \\ \cos^\nu \theta = \cos^{\nu_1} \theta_1 \dots \cos^{\nu_m} \theta_m. \end{cases}$$

Prema [70, 92, 146, 207], MTPS imaju primenu u mnogim naučnim i inženjerskim oblastima, poput kinematike, robotike (opis rada PUMA robota [146]) i neurofiziologije.

Specijalan slučaj MTPS nastaje kada se sistem redukuje na jednu funkciju po jednoj promenljivoj. Tako dobijena funkcija se u [120, 147] određuje kao *miksovano trigonometrijsko polinomska* (MTP) *funkcija*. U vezi sa takvom MTP funkcijom razmatraju se *miksovano trigonometrijsko polinomskie nejednakosti* nad odgovarajućim realnim skupovima [42–45, 106, 110, 112, 120, 147]. Sledeća definicija, prema [120, 147], uvodi pojam MTP funkcije i MTP nejednakosti.

Definicija 1.4

(i) *Mikšovano trigonometrijsko polinomska funkcija* (MTP funkcija) je funkcija oblika

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x, \quad (1.1)$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, koja je definisana za $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Mikšovano trigonometrijsko polinomska nejednakost* (MTP nejednakost) je nejednakost oblika

$$f(x) > 0$$

za $x \in \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, gde je $f(x)$ MTP funkcija.

Na osnovu pojma MTP funkcija i MTP nejednakosti, u [107] je uveden pojam mikšovano hiperboličko-trigonometrijsko polinomskih funkcija i nejednakosti.

Definicija 1.5

(i) *Mikšovano hiperboličko-trigonometrijsko polinomska funkcija* (MHTP funkcija) je funkcija oblika

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, koja je definisana za $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Mikšovano hiperboličko-trigonometrijsko polinomska nejednakost* (MHTP nejednakost) je nejednakost oblika

$$f(x) > 0$$

za $x \in \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, gde je $f(x)$ MHTP funkcija.

1.3 Jedan metod za dokazivanje mikšovano trigonometrijsko polinomskih nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti

MTP nejednakosti

$$f(x) > 0$$

za $x \in (0, b) \subset \mathbb{R}^+$ često se dokazuju određivanjem nanižne polinomske aproksimacije $P(x)$ za MTP funkciju $f(x)$ tako da je

$$f(x) > P(x) > 0$$

za $x \in (0, b)$, [24, 26, 46, 106, 110, 112, 115, 120, 141, 146, 147]. Pojam *navišne* i *nanižne polinomske aproksimacije* dat je u [120, 124]:

Definicija 1.6 *Polinom $P(x)$ je navišna polinomska aproksimacija funkcije $\phi(x)$ na skupu \mathbb{S} , $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, ukoliko je*

$$(\forall x \in \mathbb{S}) P(x) \geq \phi(x),$$

odnosno, polinom $P(x)$ je nanižna polinomska aproksimacija funkcije $\phi(x)$ na skupu \mathbb{S} ukoliko je

$$(\forall x \in \mathbb{S}) P(x) \leq \phi(x).$$

Jedan metod za određivanje nanižnih polinomskih aproksimacija za datu MTP funkciju dat je u [120]. Ideja je da se sabirci oblika $x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$ predstave preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova. Taj postupak je u [110] prikazan u obliku sledeće tabele.

Tabela 1.1: Transformacije sabiraka $x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$ MTP funkcije (1.1)

$n = q_i$	$m = r_i$	transformacija
parno	parno	$x^{p_i} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ $+ x^{p_i} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2}} \frac{(-1)^{m + \frac{n}{2} + j} \binom{n}{j} \binom{m}{(n+m)/2-j}}{2^{n+m}}$
neparno	parno	$x^{p_i} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
parno	neparno	$x^{p_i} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j - \frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
neparno	neparno	$x^{p_i} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j - \frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$

Na osnovu prethodne tabele moguće je svaku MTP funkciju oblika (1.1) transformisati u oblik

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i} \theta_k \text{trig}_k((q_i - r_i - 2k)x) \right), \quad (1.2)$$

gde je

$$\text{trig}_k = \begin{cases} \cos, & \text{ako je } r_i \text{ parno,} \\ \sin, & \text{ako je } r_i \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$m_i = \left\lceil \frac{q_i + r_i}{2} \right\rceil - 1$$

i gde su koeficijenti θ_k određeni prethodnom tabelom.

Funkcija (1.2) može se dalje srediti i zapisati u obliku

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} \text{trig}_i(t_i x), \quad (1.3)$$

gde je $m \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s_i, t_i \in \mathbb{N}_0$ i $\text{trig}_i = \cos$ ili $\text{trig}_i = \sin$.

Primer 1.1 MTP funkcija

$$f(x) = 3x^3 \sin^2 x + 5x \sin x \cos^2 x + \sin x$$

primenom smena iz Tabele 1.1 transformiše se u oblik

$$f(x) = 3x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 5x \left(\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin x \right) + \sin x =$$

$$= \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 \cos 2x + \frac{5}{4}x \sin 3x + \frac{5}{4}x \sin x + \sin x. \quad \square$$

U [120] su date neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije sinusnih i kosinusnih funkcija, koje se koriste za određivanje polinoma $P(x)$:

Lema 1.1 (Lema 1.1 [120]) *Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

važi:

(i) *Ukoliko je $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$\left(\forall x \in \left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)} \right] \right) (T_n(x) \geq T_{n+4}(x) \geq \sin x) \quad (1.4)$$

i

$$\left(\forall x \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0 \right] \right) (T_n(x) \leq T_{n+4}(x) \leq \sin x). \quad (1.5)$$

Za $x = 0$ nejednakosti u (1.4) i (1.5) postaju jednakosti. Za $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

(ii) *Ukoliko je $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$\left(\forall x \in \left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)} \right] \right) (T_n(x) \leq T_{n+4}(x) \leq \sin x) \quad (1.6)$$

i

$$\left(\forall x \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0 \right] \right) (T_n(x) \geq T_{n+4}(x) \geq \sin x). \quad (1.7)$$

Za $x = 0$ nejednakosti u (1.6) i (1.7) postaju jednakosti. Za $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

Lema 1.2 (Lema 1.2 [120]) *Za Tejlorov razvoj kosinusne funkcije*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

važi:

(i) *Ukoliko je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$\left(\forall x \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)} \right] \right) (T_n(x) \geq T_{n+4}(x) \geq \cos x). \quad (1.8)$$

Za $x = 0$ nejednakosti u (1.8) postaju jednakosti. Za $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

(ii) *Ukoliko je $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$\left(\forall x \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)} \right] \right) (T_n(x) \leq T_{n+4}(x) \leq \cos x). \quad (1.9)$$

Za $x = 0$ nejednakosti u (1.9) postaju jednakosti. Za $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

Primer 1.2 Neka je $T_n(x)$ Maklorenov razvoj stepena $n \in \mathbb{N}_0$ funkcije $\cos x$. Razmotrimo, na osnovu prethodne leme, neke navišne polinomske aproksimacije za funkciju $\cos 2x$ na intervalu $(0, 1)$.

Na osnovu Leme 1.2, važi da je

$$T_{4k}(t) \geq \cos t$$

za $t \in \left[-\sqrt{(4k+3)(4k+4)}, \sqrt{(4k+3)(4k+4)}\right]$, $k \in \mathbb{N}_0$. Za $k \in \mathbb{N}_0$ važi da je $\sqrt{(4k+3)(4k+4)} \geq \sqrt{12} = 3.46410\dots$. Dakle, za $t = 2x$ i $k \in \mathbb{N}_0$ važi da je

$$T_{4k}(2x) \geq \cos 2x$$

na intervalu $\left[-\frac{\sqrt{12}}{2}, \frac{\sqrt{12}}{2}\right] = [-1.73205\dots, 1.73205\dots]$, a samim tim i na intervalu $(0, 1)$. □

U nastavku, prema [120], opisujemo postupak za određivanje jedne nanižne polinomske aproksimacije $P(x)$ na intervalu $(0, b)$ za MTP funkciju (1.3). Takođe, u sledećem primeru ilustrujemo zašto je pri dokazivanju nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$ potrebno razlikovati slučajeve da li je $f(b-) \neq 0$ ili je $f(b-) = 0$.

Neka je $T_n^{\phi, c}(x)$ Tejlorov razvoj stepena n funkcije $\phi(x)$ u okolini tačke $c \in \mathbb{R}$.

Primer 1.3 Razmotrimo funkciju

$$f(x) = \sin x$$

na intervalima:

(i) $(0, b) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

(ii) $(0, b) = (0, 2\pi)$,

i razmotrimo dokaz pozitivnosti funkcije $f(x)$ nad datim intervalima upotrebom nanižne polinomske aproksimacije

$$P_\ell(x) = T_{4\ell+3}^{\sin, 0}(x),$$

gde $\ell \in \mathbb{N}_0$.

(i) Za $\ell = 0$ polinomska aproksimacija $P_0(x) = T_3^{\sin, 0}(x) = -\frac{x^3}{3!} + x$ je dovoljna za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Nijedna vrednost indeksa ℓ nije dovoljna za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b) = (0, 2\pi)$ jer, na osnovu Leme 1.1, važi da je

$$P_\ell(2\pi) < f(2\pi) = \sin 2\pi = 0$$

za svako $\ell \in \mathbb{N}_0$. □

Pretpostavimo da je $f(b-) > 0$.

Za svaki sabirak $\beta_i x^{s_i} \text{trig}_i(t_i x)$ MTP funkcije $f(x)$ u zapisu (1.3) funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$, u nekoj desnoj okolini tačke 0, aproksimiramo na sledeći način:

(1) Ukoliko je $\text{trig}_i = \cos$ i $\beta_i > 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+2}^{\cos, 0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) > T_{4\ell_i+2}^{\cos, 0}(t_i x).$$

(2) Ukoliko je $\text{trig}_i = \cos$ i $\beta_i < 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i}^{\cos,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) < T_{4\ell_i}^{\cos,0}(t_i x).$$

(3) Ukoliko je $\text{trig}_i = \sin$ i $\beta_i > 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+3}^{\sin,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) > T_{4\ell_i+3}^{\sin,0}(t_i x).$$

(4) Ukoliko je $\text{trig}_i = \sin$ i $\beta_i < 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+1}^{\sin,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) < T_{4\ell_i+1}^{\sin,0}(t_i x).$$

Svaka funkcija $\text{trig}_i(t_i x)$ iz (1.3) se aproksimira, na osnovu (1)–(4), odgovarajućim Tejlorovim polinomom. Na taj način može se formirati polinom

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} T_{\vartheta_i}^{\text{trig}_i, 0}(t_i x), \quad (1.10)$$

gde je

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\ell_i) = \begin{cases} 4\ell_i + 2, & \text{ako je } \text{trig}_i = \cos \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i, & \text{ako je } \text{trig}_i = \cos \text{ i } \beta_i < 0, \\ 4\ell_i + 3, & \text{ako je } \text{trig}_i = \sin \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i + 1, & \text{ako je } \text{trig}_i = \sin \text{ i } \beta_i < 0. \end{cases}$$

Definicija 1.7 Neka je dat polinom $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ oblika (1.10). Niz $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ nazivamo nizom indeksa Tejlorovih razvoja za polinom $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$.

Prema načinu formiranja polinoma $P(x)$ važi da je

$$f(x) \geq P(x)$$

na intervalu $(0, b)$. Ako se prema pravilima (1)–(4) izaberu vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ tako da je

$$P(x) > 0$$

za $x \in (0, b)$, tada je dokazana nejednakost

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, b)$.

Dokazivanje mnogih nejednakosti može se svesti na dokazivanje MTP nejednakosti [10, 14–20, 22–27, 29–31, 34, 35, 37, 38, 40, 41, 44–47, 49–51, 53–56, 58, 64, 69, 78, 80, 81, 89–91, 100–103, 106, 110, 112, 114, 115, 119, 120, 127–129, 133, 137, 138, 140–142, 146–148, 155, 167, 169, 174, 175, 177, 179, 181, 196, 198, 208–210, 213, 214, 218, 221–224, 226, 227, 229, 230], kao što pokazujemo u sledećem primeru.

Primer 1.4 Dokažimo Huygens-ovu nejednakost [105, 145, 178]

$$2 \sin x + \tan x > 3x$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ primenom prethodno opisanog metoda.

Ova nejednakost je ekvivalentna MTP nejednakosti

$$f(x) = 2 \sin x \cos x + \sin x - 3x \cos x > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

MTP funkcija $f(x)$ transformiše se u oblik sa višestrukim uglovima

$$f(x) = \sin 2x + \sin x - 3x \cos x.$$

Važi da je $f(\frac{\pi}{2}-) = 1 > 0$.

Na osnovu pravila (1)–(4), jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ je

$$P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}(x) = T_{4\ell_1+3}^{\sin, 0}(2x) + T_{4\ell_2+3}^{\sin, 0}(x) - 3xT_{4\ell_3}^{\cos, 0}(x),$$

gde $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{N}_0$.

Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (0, 0, 0)$ dobija se polinom

$$\begin{aligned} P_{0,0,0}(x) &= T_3^{\sin, 0}(2x) + T_3^{\sin, 0}(x) - 3xT_0^{\cos, 0}(x) = \\ &= \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - 3x = \\ &= -\frac{3}{2}x^3 \end{aligned}$$

koji nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, dok se za, na primer, $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (1, 1, 1)$ dobija polinom

$$\begin{aligned} P_{1,1,1}(x) &= T_7^{\sin, 0}(2x) + T_7^{\sin, 0}(x) - 3xT_4^{\cos, 0}(x) = \\ &= \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) - 3x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) = \\ &= -\frac{43}{1680}x^7 + \frac{3}{20}x^5, \end{aligned}$$

koji evidentno ispunjava

$$P_{1,1,1}(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. S obzirom na to da je

$$f(x) > P(x)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi i da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. □

Dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalima oblika $[0, b)$, $(0, b]$ ili $[0, b]$ je analogno.

Na sličan način bi se mogao formirati postupak za dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(-b, 0)$.

Slučaj kada je $f(b-) = 0$ razmotren je u [24]. Ukoliko je $f(b-) = 0$, tada je $P(b-) < 0$ za svaki izbor indeksa ℓ_i ; i tada nijedna polinomska aproksimacija $P(x)$ nije dovoljna za dokaz da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$. Stoga, ukoliko je $f(b-) = 0$ i $f(0+) > 0$, uvodi se smena $x = b - t$, čime se polazna nejednakost svodi na nejednakost $f(b - t) > 0$ na intervalu $(0, b)$. Ukoliko je $f(0+) = 0$ i $f(b-) = 0$, tada se interval $(0, b)$ deli na dva proizvoljna intervala $(0, c]$ i (c, b) . Zatim se dokazuje da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, c]$, a potom i da je $f(x) > 0$ na intervalu (c, b) uvođenjem smene $x = b - t$ i dokazivanjem da je $f(b - t) > 0$ na intervalu $(0, b - c)$.

Problem anuliranja MTP funkcije u rubnim tačkama segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ razmotren je u [113]. ■

Jedno poboljšanje metoda. U [120] je dato i jedno poboljšanje prethodno opisanog metoda. Ako u MTP funkciji f postoji više sabiraka koji sadrže istu trigonometrijsku funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$, tada se zbir takvih sabiraka predstavlja sabirkom oblika $h(x) \cdot \text{trig}_i(t_i x)$, gde je $h(x)$ polinom. Ukoliko je polinom $h(x)$ stalnog znaka na intervalu $(0, b)$, tada se funkcija $\text{trig}_i(t_i x)$ u sabirku $h(x) \cdot \text{trig}_i(t_i x)$ aproksimira prema pravilima:

(1') Ukoliko je $\text{trig}_i = \cos$ i $h(x) > 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+2}^{\cos,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) > T_{4\ell_i+2}^{\cos,0}(t_i x).$$

(2') Ukoliko je $\text{trig}_i = \cos$ i $h(x) < 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i}^{\cos,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) < T_{4\ell_i}^{\cos,0}(t_i x).$$

(3') Ukoliko je $\text{trig}_i = \sin$ i $h(x) > 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+3}^{\sin,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) > T_{4\ell_i+3}^{\sin,0}(t_i x).$$

(4') Ukoliko je $\text{trig}_i = \sin$ i $h(x) < 0$, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo polinomom $T_{4\ell_i+1}^{\sin,0}(t_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$\text{trig}_i(t_i x) < T_{4\ell_i+1}^{\sin,0}(t_i x).$$

Ukoliko polinom $h(x)$ nije stalnog znaka na intervalu $(0, b)$, tada ga razdvajamo na zbir dva polinoma: $h^+(x)$, koji sadrži sve pozitivne sabirke polinoma, i $h^-(x)$, koji sadrži sve negativne sabirke polinoma. U tom slučaju, funkciju $\text{trig}_i(t_i x)$ u sabircima $h^+(x) \cdot \text{trig}_i(t_i x)$ i $h^-(x) \cdot \text{trig}_i(t_i x)$ aproksimiramo prema pravilima (1')–(4') i tako formiramo polinom $P(x)$. ■

Na osnovu prethodno opisanog metoda za dokazivanje MTP nejednakosti, u [107] je dat jedan metod za dokazivanje MHTP nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti.

Ukoliko je data MTP funkcija polinom, za dokazivanje zadate nejednakosti može se koristiti Teorema 1.5, koja je data u sledećem potpoglavlju.

1.4 Jedna teorema za dokazivanje polinomskih nejednakosti

U [24, 46], za dokazivanje polinomskih nejednakosti na koje se svodila data MTP nejednakost koristi se Šturмова teorema [182]:

Teorema 1.5 (Teorema 4.1 [61], Šturмова teorema) *Neka je $P(x)$ realni polinom i neka je P_0, P_1, \dots, P_r niz realnih polinoma zadat sa:*

(a) $P_0(x) = P(x)$,

(b) $P_1(x) = P'(x)$,

(c) $P_{i+1}(x) = -\text{rem}(P_i(x), P_{i-1}(x))$ redom za $i = 1, 2, \dots, r-1$.

Označimo sa $V(c)$, $c \in \mathbb{R}$, broj promena znakova u nizu $P_0(c), P_1(c), \dots, P_r(c)$ (pri čemu se svako pojavljivanje broja 0 u ovom nizu zanemaruje).

Pretpostavimo da su a i b realni brojevi koji nisu nule polinoma $P(x)$ i da je $a < b$. Tada je broj nula polinoma $P(x)$ na intervalu $[a, b]$ jednak $N = V(a) - V(b)$ (pri čemu je svaka nula brojana jednom).

Napomena 1.1 *Primenom Šturmove teoreme dobija se broj različitih nula realnih polinoma na realnim segmentima, ali se ne dobija red ovih nula. U [188] su date dve varijante ove teoreme, čijom se primenom dobija i red svake nule polinoma.*

Šturmove teorema je takođe korišćena za dokazivanje polinomskih nejednakosti i u [10, 11, 13, 14, 97, 140].

Dodatna analiza dokazivanja polinomskih nejednakosti. U [61] je dokazano, na osnovu Šturmove teoreme, da postoji efektivna procedura za izračunavanje nula polinoma sa racionalnim koeficijentima, nad segmentom sa racionalnim krajevima ([61], Teorema 4.2). Na osnovu toga, u [111] je dat jedan metod za dokazivanje polinomskih nejednakosti sa iracionalnim koeficijentima. Ideja se zasniva na aproksimaciji iracionalnih koeficijenata odgovarajućim racionalnim brojevima tako da se dobije nanižna polinomska aproksimacija polaznog polinoma. Ukoliko se odredi nanižna polinomska aproksimacija koja je pozitivna, ta polinomska aproksimacija je dovoljna i za dokaz pozitivnosti polaznog polinoma.

Dokazivanje pozitivnosti polinoma sa realnim koeficijentima ilustrujemo u sledećem primeru.

Primer 1.5 *Primenom Šturmove teoreme, dokazaćemo da je*

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{768}\right)x^2 - \frac{5}{4}x + \left(\frac{\pi}{8} + 1\right) = \\ &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - 0.67\dots x^2 - \frac{5}{4}x + 1.39\dots > 0 \end{aligned}$$

na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(i) Za polinom $P(x)$ Šturmov niz polinoma je:

$$P_0(x) = P(x) = -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{768}\right)x^2 - \frac{5}{4}x + \left(\frac{\pi}{8} + 1\right)$$

$$P_1(x) = P'(x) = -\frac{81}{64}x^4 + \frac{321}{128}x^2 - 2\left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{768}\right)x^2 - \frac{5}{4}$$

$$P_2(x) = -\frac{107}{320}x^3 + \left(\frac{\pi}{1280} + \frac{2}{5}\right)x^2 + x - \frac{\pi}{8} - 1$$

$$P_3(x) = \left(\frac{81\pi^2}{11723776} + \frac{81\pi}{11449} + \frac{4525959}{1465472}\right)x^2 - \left(\frac{2029751\pi}{4396416} - \frac{71311}{34347}\right)x - \frac{405\pi^2}{366368} - \frac{26325\pi}{45796} - \frac{150115}{45796}$$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \frac{11449(243\pi^4 + 497664\pi^3 + 1232341026952\pi^2 - 11112549761024\pi - 37115470072832)}{12960(27\pi^2 + 27648\pi + 12069224)^2}x + \\ &+ \frac{45796(1546533\pi^3 + 802434114\pi^2 + 5543040664\pi + 28931142320)}{27(27\pi^2 + 27648\pi + 12069224)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= 135\left(177147\pi^{10} + 817710552\pi^9 - 164424929892809832\pi^8 - \right. \\ &- 338559239405254747968\pi^7 - 323131396358916307740096\pi^6 - \\ &- 154055820371170151044910592\pi^5 - 34518506523779389853255691776\pi^4 - \\ &- 363467901823596483705660534784\pi^3 - 165473585122796634409849061376\pi^2 - \\ &- 3602500539085685925670346555392\pi - \\ &- 25223403988013306355805781491712\left.)\right) / \left(366368(243\pi^4 + 497664\pi^3 + \right. \\ &+ 1232341026952\pi^2 - 11112549761024\pi - 37115470072832)^2\left.)\right) = -5.43454\dots \end{aligned}$$

U nizu brojeva

$$P_0(0) = 1.39269... , \quad P_1(0) = -1.25 , \quad P_2(0) = -1.39269... ,$$

$$P_3(0) = -5.09470... , \quad P_4(0) = 0.62338.. \quad \text{i} \quad P_5(0) = -5.43454...$$

postoje $V_0 = 3$ promene znaka u tački $x = 0$.

U nizu brojeva

$$P_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.32653... , \quad P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.23825... , \quad P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.52104... ,$$

$$P_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.68439... , \quad P_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.34232.. \quad \text{i} \quad P_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = -5.43454...$$

postoje $V_{\frac{\pi}{4}} = 3$ promene znaka u tački $x = \frac{\pi}{4}$.

Dakle, polinom $P(x)$ ima $N = V_0 - V_{\frac{\pi}{4}} = 0$ realnih nula na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.84664... > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$.

- (ii) Dokažimo sada nejednakost $P(x) > 0$ na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$ tako što ćemo odrediti, prema metodi iz [111], jednu pozitivnu nanižnu polinomsku aproksimaciju sa racionalnim koeficijentima za polinom $P(x)$ na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Važi da je

$$P(x) = -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - 0.67...x^2 - \frac{5}{4}x + 1.39...$$

Jedna nanižna polinomska aproksimacija¹ za polinom $P(x)$ na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$ je

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - 0.7x^2 - \frac{5}{4}x + 1.3 = \\ &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{13}{10}. \end{aligned}$$

Za polinom $Q(x)$ Šturmov niz polinoma je:

$$Q_0(x) = Q(x) = -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{13}{10}$$

$$Q_1(x) = Q'(x) = -\frac{81}{64}x^4 + \frac{321}{128}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{5}{4}$$

$$Q_2(x) = -\frac{107}{320}x^3 + \frac{21}{50}x^2 + x - \frac{13}{10}$$

$$Q_3(x) = \frac{119950383}{36636800}x^2 + \frac{141251}{114490}x - \frac{1129007}{228980}$$

$$Q_4(x) = -\frac{41825610366160403}{143880943818466890}x + \frac{13747581195980585}{28776188763693378}$$

$$Q_5(x) = -\frac{580859877187108258761707374644459}{97790573569848311543162238106240}.$$

¹ Iracionalni koeficijenti polinoma $P(x)$ su nanižno aproksimirani na prvoj decimali.

U nizu brojeva

$$Q_0(0) = \frac{13}{10}, \quad Q_1(0) = -\frac{5}{4}, \quad Q_2(0) = -\frac{13}{10}, \quad Q_3(0) = -\frac{1129007}{228980},$$

$$Q_4(0) = \frac{13747581195980585}{28776188763693378} \quad \text{i} \quad Q_5(0) = -\frac{580859877187108258761707374644459}{97790573569848311543162238106240}$$

postoje $V_0 = 3$ promene znaka u tački $x = 0$.

U nizu brojeva

$$Q_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.21580\dots, \quad Q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.28418\dots, \quad Q_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.41752\dots,$$

$$Q_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.94202\dots, \quad Q_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.24942\dots \quad \text{i} \quad Q_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = -5.93983\dots$$

postoje $V_{\frac{\pi}{4}} = 3$ promene znaka u tački $x = \frac{\pi}{4}$.

Dakle, polinom $Q(x)$ ima $N = V_0 - V_{\frac{\pi}{4}} = 0$ realnih nula na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. S obzirom na to da je $Q\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.74943\dots > 0$, važi da je

$$Q(x) > 0$$

na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, odakle je i

$$P(x) > 0$$

na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. □

Ukoliko se u Šturmovom nizu polinoma svaki polinom podeli sa apsolutnom vrednošću vodećeg koeficijenta tog polinoma, dobija se modifikovani Šturmov niz za koji takođe važi isti zaključak Šturmove teoreme. Ovakva modifikacija Šturmovog niza primenjuje se u sistemu računarske algebre Maple i ilustrujemo je u sledećem primeru.

Primer 1.6 Za polinom

$$Q(x) = -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{13}{10}$$

iz prethodnog primera Šturmov niz polinoma je:

$$Q_0(x) = Q(x) = -x^5 + \frac{535}{162}x^3 - \frac{224}{81}x^2 - \frac{400}{81}x + \frac{416}{81}$$

$$Q_1(x) = Q'(x) = -x^4 + \frac{107}{54}x^2 - \frac{448}{405}x - \frac{80}{81}$$

$$Q_2(x) = -x^3 + \frac{672}{535}x^2 + \frac{320}{107}x - \frac{416}{107}$$

$$Q_3(x) = x^2 + \frac{45200320}{119950383}x - \frac{180641120}{119950383}$$

$$Q_4(x) = -x + \frac{6003834918325}{3653210792747}$$

$$Q_5(x) = -1.$$

U nizu brojeva

$$Q_0(0) = \frac{416}{81}, \quad Q_1(0) = -\frac{80}{81}, \quad Q_2(0) = -\frac{416}{107},$$

$$Q_3(0) = -\frac{180641120}{119950383}, \quad Q_4(0) = \frac{6003834918325}{3653210792747} \quad \text{i} \quad Q_5(0) = -1$$

postoje $V_0 = 3$ promene znaka u tački $x = 0$.

U nizu brojeva

$$Q_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.85254\dots, \quad Q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.01466\dots, \quad Q_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.24865\dots,$$

$$Q_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.59315\dots, \quad Q_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.85804\dots \quad \text{i} \quad Q_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

postoje $V_{\frac{\pi}{4}} = 3$ promene znaka u tački $x = \frac{\pi}{4}$.

Dakle, polinom $Q(x)$ ima $N = V_0 - V_{\frac{\pi}{4}} = 0$ realnih nula na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$. S obzirom na to da je $Q\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.74943\dots > 0$, važi da je

$$Q(x) > 0$$

na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$, odakle je i

$$P(x) > 0$$

na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$. □

1.5 Neki sistemi za automatsko dokazivanje analitičkih nejednakosti

Značaj automatskih dokazivača teorema u matematici i u nekim industrijskim oblastima, kao i neki problemi prilikom razvoja ovakvih sistema, analizirani su u [24].

U ovom potpoglavlju dajemo pregled nekih postojećih automatskih dokazivača nejednakosti koji su bili najrelevantniji za ovo istraživanje i inspiracija prilikom razvoja novog dokazivača.

MetiTarski. Jedan od najpoznatijih sistema za automatsko dokazivanje teorema je MetiTarski, koji je opisan u [5–9, 36, 60, 67, 144, 156–160]. MetiTarski dokazuje nejednakosti u kojima se javljaju realne funkcije poput sinusne, kosinusne, eksponencijalne, logaritamske, korene, itd.

Nastao je od rezolucijskog dokazivača Metis [7, 84]. U rezolucijskim dokazivačima se prvo negira konjektura koja se dokazuje, a zatim se povezuje sa aksiomama u potrazi za kontradikcijom. Na taj način se problem transformiše u konjukciju disjunkcija. Svaka disjunkcija se naziva klauza, dok se član disjunkcije (atomska formula ili njena negacija) naziva se literal. Kombinovanjem klauza dobijaju se nove klauze. Ako se dobije prazna klauza, dokaz je završen jer je pronađena kontradikcija.

Pored metoda rezolucije, MetiTarski koristi procedure odlučivanja za teoriju realnih zatvorenih polja. Takođe, sadrži i skup navišnih i nanižnih polinomskih aproksimacija realnih funkcija sa kojima program radi. Neke realne funkcije, poput sinusne i kosinusne, aproksimiraju se odgovarajućim Tejlorovim razvojima ovih funkcija, dok se za neke, poput logaritamske i eksponencijalne, koriste aproksimacije zasnovane na verižnim razlomcima. Aksiome o tim navišnim i nanižnim polinomskim aproksimacijama dokazane su primenom dokazivača Isabelle [149, 159].

Prilikom dokazivanja nejednakosti, svaka funkcija se zamenjuje navišnom/nanižnom polinomskom aproksimacijom, čime se polazni problem svodi na dokazivanje polinomskih nejednakosti. Za dokazivanje polinomskih nejednakosti u nekim verzijama sistema MetiTarski koristili su se Cohen-Hörmander procedura, QEPCAD, Z3 i sistem računarske algebre Mathematica.

MetiTarski ima primene u inženjerstvu. Integrisan je sa automatskim dokazivačem teorema PVS [154, 159], koji se koristi u verifikaciji softvera za vazduhoplovstvo u agenciji National Aeronautics and Space Administration (NASA). Može se koristiti u verifikaciji analognih električnih kola i kontrolnih sistema. U [60] je dat jedan metod za verifikaciju transcendentnih hardverskih i softverskih algoritama korišćenjem sistema MetiTarski. ■

SimTheP. Sistem za automatsko dokazivanje nejednakosti SimTheP (Simple Theorem Prover), razvijen u okviru doktorske disertacije [24], zasniva se na metodi za dokazivanje MTP nejednakosti koji je opisan u Potpoglavlju 1.3. U istom radu je, u programskom jeziku Java, razvijena i jedna implementacija sistema SimTheP, nazvana PAINT (Prover of Analytic Inequality Theorems).

Sistem SimTheP namenjen je dokazivanju isključivo MTP nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$, za $b \in \mathbb{R}^+$.

Vrednosti indeksa Tejlorovih razvoja u polinomske aproksimaciji $P(x)$ određuju se tako što se indeksima redom dodeljuju vrednosti prema jednom od ponuđenih leksikografskih poredaka dok se ne pronađu, ako postoje, takve vrednosti indeksa za koje je $P(x) > 0$ na posmatranom intervalu.

Pozitivnost polinomske aproksimacije $P(x)$ dokazuje se primenom Šturmove teoreme (koeficijenti polinoma su iz polja $\mathbb{Q}(\pi)$).

U sledećem primeru, na osnovu [24, 27], ukratko ilustrujemo proces dokazivanja jedne nejednakosti primenom sistema SimTheP.

Primer 1.7 Polazimo od MTP funkcije

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x \quad (1.11)$$

iz [24], za koju dokazujemo da je

$$f(x) > 0 \quad (1.12)$$

za $x \in (0, b) = (0, \frac{\pi}{2})$. Prvo se, primenom smena iz Tabele 1.1, funkcija $f(x)$ transformiše u sledeći oblik

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x - \frac{45}{4} \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x.$$

Zatim se formira funkcija

$$f^+(x) = 8x^5 \sin x + 90x^2 \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x,$$

koja sadrži sve pozitivne sabirke funkcije f , i funkcija

$$f^-(x) = -45x \sin x - \frac{45}{4} \cos x,$$

koja sadrži sve negativne sabirke funkcije f . Na funkcije $f^+(x)$ i $f^-(x)$ primenjuje se poboljšanje metoda za dokazivanje MTP nejednakosti koje je opisano u Potpoglavlju 1.3 (grupisanje polinoma uz odgovarajuće trigonometrijske funkcije), nakon čega se formiraju polinomske aproksimacije

$$P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}^+(x) = 8x^5 T_{4\ell_1+3}^{\sin, 0}(x) + 90x^2 T_{4\ell_2+2}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4} T_{4\ell_3+2}^{\cos, 0}(3x)$$

i

$$P_{\ell_4, \ell_5}^-(x) = -45x T_{4\ell_4+1}^{\sin, 0}(x) - \frac{45}{4} T_{4\ell_5}^{\cos, 0}(x)$$

za funkcije $f^+(x)$ i $f^-(x)$, respektivno. Prema [24], pri leksikografskom dodeljivanju vrednosti indeksa, potrebno je 212 iteracija kako bi se odredile vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ za koje je

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}^+(x) + P_{\ell_4, \ell_5}^-(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. □

U [24] je urađena uporedna analiza sistema SimTheP sa sistemom MetiTarski. Prema [24], prilikom dokazivanja nejednakosti iz prethodnog primera, MetiTarski je ispisao 9872 linija koda.

RootOfMTP. U [43] je dat i implementiran algoritam za izolovanje intervala u kojima se nalaze nule MTP funkcija. Algoritam je implementiran u sistemu računarske algebre Maple. Ulazni parametri funkcije RootOfMTP, u okviru koje je implementiran algoritam, jesu MTP funkcija, argument zadate MTP funkcije i maksimalna širina intervala u kojima se nule izoluju. Kao izlaz ove funkcije dobijaju se intervali u kojima se nalaze nule zadate MTP funkcije, kao i red svake nule. U okviru ove realizacije algoritma ne ispisuju se koraci koji dovode do rezultata.

U sledećem primeru dokazujemo MTP nejednakost iz Primera 1.7 primenom alata RootOfMTP.

Primer 1.8 Na sledećoj slici ekrana je prikazano izolovanje realnih intervala koji sadrže nule MTP funkcije

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x$$

primenom alata RootOfMTP.

```
> RootOfMTP(8*x^5*sin(x)-45*cos(x)*sin(x)^2-45*x*sin(x)+90*x^2*cos(x), x, 0.1);
poly: 8/45*x^5*sin(x)-cos(x)*sin(x)^2+2*x^2*cos(x)-x*sin(x)
tanpoly 512*t^5*x^5-360*t^6*x^2+1024*t^3*x^5-180*t^5*x-360*t^4*x^2+512*t*x^5+180*t^4-360*t^3*x+360*t^2*x^2-180*t^2-180*t*x+360*x^2
There is 1 real root with multiplicity 8 at 0.
tanpoly_xt: -360*t^6*x^2+(512*x^5-180*x)*t^5+(-360*x^2+180)*t^4+(1024*x^5-360*x)*t^3+(360*x^2-180)*t^2+(512*x^5-180*x)*t+360*x^2
tanpoly_xt: -90*t^6*x^2+(128*x^5-45*x)*t^5+(-90*x^2+45)*t^4+(256*x^5-90*x)*t^3+(90*x^2-45)*t^2+(128*x^5-45*x)*t+90*x^2
low: -4, upper: 4.
data: 999/1000
hpoly: 128*t^5*x^5+90*t^6*x^2+256*t^3*x^5-45*t^5*x+90*t^4*x^2+128*t*x^5-45*t^4-90*t^3*x-90*t^2*x^2+45*t^2-45*t*x-90*x^2
data: 999/1000
low: -4, upper: 4
infrootinter: [[-infinity, -40.00000000], [-51/2048, 51/2048], [40.00000000, infinity]]
klow, kupper: -1,1
For every k >= 2 (k in Z), there is 1 real root with multiplicity 1 in (2kPi+(-2*arctan(51/2048)), 2kPi+(2*arctan(51/2048))).
For every k >= 2 (k in Z), there is 1 real root with multiplicity 1 in (2kPi+(3.091603066), 2kPi+(Pi)).
For every k <= -2 (k in Z), there is 1 real root with multiplicity 1 in (2kPi+(-Pi), 2kPi+(-3.091603066)).
For every k <= -2 (k in Z), there is 1 real root with multiplicity 1 in (2kPi+(-2*arctan(51/2048)), 2kPi+(2*arctan(51/2048))).
irreducible factor: -64/45*t^5*x^5+t^6*x^2-128/45*t^3*x^5+1/2*t^5*x+t^4*x^2-64/45*x^5*t-1/2*t^4+t^3*x-t^2*x^2+1/2*t^2+1/2*x*t-x^2
?????????
?????????: 21,43,43,21,.75e-1
listnum:6,1
There is 1 real root with multiplicity 1 in each open interval of the list [[-5/2*Pi-2*arctan(17473395305913/17710976782919), -5/2*Pi-2*arctan(8736696309397/8855489735019)], [-2*Pi+2*arctan(102296417963/4398046511104), -2*Pi+2*arctan(25580265521/1099511627776)], [-1/2*Pi-2*arctan(112302342007/274877906944), -1/2*Pi-2*arctan(28061021025/68719476736)], [1/2*Pi+2*arctan(28061021025/68719476736)], [1/2*Pi+2*arctan(112302342007/274877906944)], [2*Pi-2*arctan(25580265521/1099511627776), 2*Pi-2*arctan(102296417963/4398046511104)], [5/2*Pi+2*arctan(8736696309397/8855489735019), 5/2*Pi+2*arctan(17473395305913/17710976782919)]].
```

Slika 1.3: Izolovanje nula funkcije (1.11) primenom alata RootOfMTP

Na osnovu prethodne slike, sledeći intervali sadrže nule reda 1 funkcije $f(x)$:

- (1) $(-2 \arctan \frac{51}{2048} + 2k\pi, 2 \arctan \frac{51}{2048} + 2k\pi) = (-0.0497... + k 6.283..., 0.0497... + k 6.283...)$,
za $k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$,
- (2) $(3.091603066 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) = (3.091603066 + k 6.283..., 3.141... + k 6.283...)$,
za $k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$,
- (3) $(-\pi + 2k\pi, -3.091603066 + 2k\pi) = (-3.141... + k 6.283..., -3.091603066 + k 6.283...)$,
za $k \leq -2, k \in \mathbb{Z}$,
- (4) $(-2 \arctan \frac{51}{2048} + 2k\pi, 2 \arctan \frac{51}{2048} + 2k\pi) = (-0.0497... + k 6.283..., 0.0497... + k 6.283...)$,
za $k \leq -2, k \in \mathbb{Z}$,
- (5) $[-2 \arctan \frac{17473395305913}{17710976782919} - \frac{5}{2}\pi, -2 \arctan \frac{8736696309397}{8855489735019} - \frac{5}{2}\pi] = [-9.41127322..., -9.41127291...]$,
- (6) $[2 \arctan \frac{102296417963}{4398046511104} - 2\pi, 2 \arctan \frac{25580265521}{1099511627776} - 2\pi] = [-6.23667466..., -6.23666346...]$,
- (7) $[-2 \arctan \frac{112302342007}{274877906944} - \frac{1}{2}\pi, -2 \arctan \frac{28061021025}{68719476736} - \frac{1}{2}\pi] = [-2.34651293..., -2.34614965...]$,
- (8) $[2 \arctan \frac{28061021025}{68719476736} + \frac{1}{2}\pi, 2 \arctan \frac{112302342007}{274877906944} + \frac{1}{2}\pi] = [2.34614965..., 2.34651293...]$,

$$(9) \left[-2 \arctan \frac{25580265521}{1099511627776} + 2\pi, -2 \arctan \frac{102296417963}{4398046511104} + 2\pi \right] = [6.23666346\dots, 6.23667466\dots],$$

$$(10) \left[2 \arctan \frac{8736696309397}{8855489735019} + \frac{5}{2}\pi, 2 \arctan \frac{17473395305913}{17710976782919} + \frac{5}{2}\pi \right] = [9.41127291\dots, 9.41127322\dots].$$

Analiziranjem prethodnih intervala na kojima su lokalizovane sve realne nule funkcije $f(x)$ možemo da zaključimo da nad intervalom $(0, \frac{\pi}{2})$ ova funkcija nema realnih nula. S obzirom na to da, na primer, izborom $x = \frac{\pi}{4}$ važi da je $f(\frac{\pi}{4}) > 0$, možemo da zaključimo i da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. \square

Neki drugi sistemi veštačke inteligencije. U poslednjim godinama, primetan je razvoj raznih sistema veštačke inteligencije i mašinskog učenja. Na primer, posebno je primetan razvoj velikih jezičkih modela, tj. sistema koji su obučavani na velikom broju tekstova kako bi mogli da obrađuju i generišu tekst. Ovi sistemi omogućavaju da se zadatak ne mora formulirati u nekom specifičnom, formalnom obliku, već sam model može iz govornog jezika da izvede precizne postavke koje matematički alati u pozadini mogu da obrade. Prema [87], veliki jezički model OpenAI o3 dostigao je 2025. godine nivo zlatne medalje na Međunarodnoj informatičkoj olimpijadi za srednje škole, dok je jedan sličan sistem specijalizovan za matematičke probleme 2024. godine dostigao nivo srebrne medalje na zadacima sa Međunarodne matematičke olimpijade za srednje škole. Postoje i podaci da su u 2025. godini novi model kompanije OpenAI, kao i sistem Gemini Deep Think, navodno dostigli nivo zlatne medalje na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi.

Jedan od najpoznatijih velikih jezičkih modela je sistem ChatGPT [152]. Ovaj sistem obuhvata i alat ChatGPT Math Solver, koji je namenjen rešavanju matematičkih problema.

Primer 1.9 Na sledećoj slici prikazan je pokušaj dokazivanja MTP nejednakosti iz Primera 1.7

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x > 0, \text{ za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

primenom sistema ChatGPT Math Solver 5 (pristupano septembra 2025. godine).

Math Solver 5 v
Share ...

Thought for 1m 24s

It seems like I can't run the code interpreter right now, pa ću dokaz uraditi ručno i jasno navesti računске korake. Pokazaću serijsku (Taylor) ekspanziju funkcije u nuli, izračunati vodeće koeficijente i proveriti vrednost na kraju intervala. Rezultat: funkcija je pozitivna na $(0, \pi/2)$. Evo rešenja korak-po-korak u traženom formatu.

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Solution By Steps

Step 1: Serijska ekspanzija $\sin x$ i $\cos x$ do dovoljno visokog reda

Koristimo poznate Taylorove razvojne redove oko 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O(x^9), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8).$$

Step 2: Ekspanzija $\sin^2 x$ do x^8 koristeći $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Izrana širina za $\cos(2x)$ daje

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \frac{1}{315}x^8 + O(x^{10}).$$

Step 3: Umetanje u $f(x)$ i sabiranje članova po stepenima do x^8

Računajući svaki član $f(x) = A + B + C + D$, gde su

$$A = 8x^5 \sin x,$$

$$B = -45 \cos x \sin^2 x,$$

$$C = -45x \sin x,$$

$$D = 90x^2 \cos x,$$

dobijamo (sabiranjem redova po stepenima):

- Koeficijent uz x^2 : $-45 - 45 + 90 = 0$.
- Koeficijent uz x^4 : $+\frac{75}{2} + \frac{15}{2} - 45 = 0$.
- Koeficijent uz x^6 : $8 - \frac{91}{8} - \frac{3}{8} + \frac{15}{4} = 0$.

Dakle svi članovi do x^6 se međusobno poništavaju — prvi nenula član pojavljuje se u redom x^8 .

Step 4: Izračunavanje koeficijenta uz x^8

Računom (detaljno izvođenim u heperišnom koraku iznad) dobijamo tačan koeficijent uz x^8 :

$$\text{koeficijent uz } x^8 = \frac{8}{21} > 0.$$

Dakle u okolini nule funkcija ima razvoj

$$f(x) = \frac{8}{21}x^8 + O(x^{10}),$$

pa je za dovoljno mali $x > 0$ striktno $f(x) > 0$.

Step 5: Provera vrednosti na desnoj ivici ($x = \frac{\pi}{2}$)

Za $x = \frac{\pi}{2}$ imamo $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, pa

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - 45\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Numerički (brza procena) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \approx 9.567$, pa

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 8 \cdot 9.567 - 45 \cdot 1.5708 \approx 76.54 - 70.69 \approx 5.85 > 0.$$

Step 6: Kontinuitet i ponašanje na intervalu

f je analitička (pa kontinualna) na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Imamo:

- oko $x = 0^+$ funkcija je striktno pozitivna jer $f(x) = \frac{8}{21}x^8 + O(x^{10}) > 0$ za male $x > 0$;
- na desnoj ivici $x = \frac{\pi}{2}$ vrednost je pozitivna;
- između te dve tačke funkcija ne može „preskočiti“ iz pozitivnog u negativno bez prelaska kroz nulu. Iz dodatne provere derivata (izraženog zatim i numerički) vidi se da funkcija nema promena znaka na unutrašnjosti — ponašanje i numeričke provere u tačkama srednjeg opsega (npr. $x = 1$) pokazuju da je $f(x)$ pozitivna i tamo.

Kombinovanjem ovih činjenica (pozitivnost blizu 0, pozitivnost na $\frac{\pi}{2}$ i kontinuitet bez promena znaka) zaključujemo da je

$$f(x) > 0 \quad \text{za sva } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Final Answer

Nejednakost

$$8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x > 0$$

drži za svaki $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.**Key Concept**

Korišćenje Taylorovih (serijskih) ekspanzija u 0 da se nađe vodeći nenulti član funkcije; zatim kontinuitet i vrednosti na krajevima intervala da se zaključi znak funkcije preko celog otvorenog intervala.

Key Concept Explanation

Ako je funkcija analitička, njena Taylorova ekspanzija oko tačke 0 otkriva vodeći nenulti stepen—ako je koeficijent ovog stepena pozitivan, funkcija je pozitivna u dovoljno maloj okolini 0^+ . Kombinujući to sa proverom vrednosti na drugom kraju intervala i činjenicom da je funkcija kontinualna, zaključujemo da funkcija ne menja znak unutar intervala i ostaje pozitivna.

Related Knowledge or Questions

[1] Pokaži detaljno računanje serijskog koeficijenta uz x^8 (korak-po-korak množenje i sabiranje članova).

[2] Dokaži strože da $f'(x) > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$ (time se postiže stroga monotonost i odmah sledi pozitivnost).

[3] Generalizacija: za koje konstante a, b, c, d je slična kombinacija polinoma i trigonometrijskih funkcija pozitivna na $(0, \frac{\pi}{2})$?

Bravo što si postavio ovaj lep zadatak! Ako želiš, mogu sada izvesti puni, potpuno detaljni algebarski račun koeficijenata uz x^8 i x^{10} (pokazujući po članu odakle dolaze) — reci broj [1] ili odmah odaberi [2] ili [3].



Slika 1.4: Pokušaj dokazivanja nejednakosti iz Primera 1.7 primenom sistema ChatGPT

Primitimo da u gornjem odgovoru, u koraku 6, sistem ChatGPT nije dokazao da je $f'(x) > 0$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sistem je ponudio da dokaže da je $f'(x) > 0$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na sledećoj slici prikazujemo rezultat tog rada.

Math Solver 5 Share

Step 5: Analiza znaka

Dakle:

$$f'(x) = \sin x (40x^4 - 90x^2 - 135 + 135 \sin^2 x) + \cos x (135x + 8x^5).$$

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, imamo $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.
Dakle znak $f'(x)$ zavisi od toga da li su unutrašnji izrazi u zagradi dovoljno veliki.

- Drugi deo: $(135x + 8x^5) \cos x > 0$ uvek, jer je $x > 0$, $\cos x > 0$.

- Prvi deo: $(40x^4 - 90x^2 - 135 + 135 \sin^2 x) \sin x$.

Za mala x , član $135 \sin^2 x \approx 135x^2$ balansira negativni $-90x^2$ i deo -135 , ali pošto tu stoji faktor $\sin x$, razvoj serije oko nule pokazuje da celokupan $f'(x) \sim Cx^7$ sa $C > 0$.

Za veće x , deo sa $40x^4$ dominira i postaje pozitivan, dok $\sin^2 x$ doprinosi dodatno pozitivno.

Dakle oba dela doprinose pozitivno, i nema mogućnosti za negativnu vrednost. Prelaz u pozitivno se vidi već iz serijske ekspanzije (kao što smo prethodno videli: prvi nenulti član $f(x)$ oko nule je $+\frac{8}{21}x^8$, pa derivat u nuli mora početi pozitivnim članom x^7).

Tako zaključujemo da je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Final Answer

Pokazali smo da je

$$f'(x) > 0 \quad \text{za sve } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Dakle, f je strogo rastuća na $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je $f(0^+) = 0^+$ i $f(\frac{\pi}{2}) > 0$, sledi da je

$$f(x) > 0 \quad \text{na } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Slika 1.5: Pokušaj dokazivanja da je $f'(x) > 0$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Prisetimo da funkcija $40x^4 - 90x^2 - 135 + 135 \sin^2 x$ iz prethodnog odgovora ima nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i stoga nije pozitivna na posmatranom intervalu. Dakle, sistem ChatGPT je napravio grešku i stoga zaključujemo da se prethodni pokušaj dokazivanja nejednakosti iz Primera 1.7 ne može smatrati dokazom. \square

Pored sistema ChatGPT, postoje i drugi slični sistemi, na primer, DeepSeek [65] i Grok [203]. Prilikom pokušaja dokazivanja nejednakosti iz Primera 1.7 i ovi sistemi su pravili neke greške (pristupano septembra 2025. godine).

U poslednje vreme razvijaju se sistemi koji koriste tehnike veštačke inteligencije i mašinskog učenja, a koji su namenjeni isključivo za dokazivanje nejednakosti. U [104] je razvijen alat APPIRL (Automated Proof of Polynomial Inequalities via Reinforcement Learning) za automatko dokazivanje polinomskih nejednakosti primenom podržanog učenja. U [192] je razvijen sistem AIPS (Algebraic Inequality Proving System), koji može da dokazuje neke nejednakosti sa matematičkih olimpijada, kao i da generiše nove nejednakosti, koje se mogu koristiti kao zadaci na matematičkim olimpijadama.

Poglavlje 2

Teorijski doprinosi raslojenim familijama funkcija

2.1 Neke osobine raslojenih familija funkcija

U [124] je uveden pojam rastuće, tj. opadajuće raslojenih familija funkcija u tački. Dodatno, u sledećoj definiciji dajemo opštije tumačenje pojma raslojenosti familije funkcija nad nekim realnim skupom, koje predstavlja uopštenje u odnosu na koncept monotone raslojenosti.

Definicija 2.1 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisana za $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, jeste

(i) raslojena u tački $x_0 \in \mathbb{S}$ po parametru $p \in \mathbb{P}$ ako važi da je

$$(\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}) (p_1 \neq p_2 \iff \varphi_{p_1}(x_0) \neq \varphi_{p_2}(x_0)).$$

(ii) rastuće raslojena u tački $x_0 \in \mathbb{S}$ po parametru $p \in \mathbb{P}$ ako važi da je

$$(\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x_0) < \varphi_{p_2}(x_0)).$$

(iii) opadajuće raslojena u tački $x_0 \in \mathbb{S}$ po parametru $p \in \mathbb{P}$ ako važi da je

$$(\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x_0) > \varphi_{p_2}(x_0)).$$

(iv) raslojena na skupu \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$ ako je raslojena u svakoj tački skupa \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$, tj. ukoliko se nijedne dve funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ ne seku na \mathbb{S} .

(v) rastuće (tj. opadajuće) raslojena na skupu \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$ ako je rastuće (tj. opadajuće) raslojena u svakoj tački skupa \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$.

Primer 2.1 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x + p^2, \tag{2.1}$$

važi:

(i) Ukoliko je $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, važi da je

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}) (\varphi_{p_1}(x_0) \neq \varphi_{p_2}(x_0) \implies p_1 \neq p_2).$$

Za $p_1 = -1$ i $p_2 = 1$ važi da je

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\varphi_{p_1}(x_0) = \varphi_{p_2}(x_0) = x_0 + 1).$$

Dakle, familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ nije raslojena na skupu \mathbb{R} po parametru $p \in \mathbb{R}$.

(ii) Ukoliko je $\mathbb{P} = \mathbb{R}^-$, važi da je

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x_0) > \varphi_{p_2}(x_0)).$$

Dakle, familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je opadajuće raslojena na skupu \mathbb{R} po parametru $p \in \mathbb{R}^-$.

(iii) Ukoliko je $\mathbb{P} = \mathbb{R}^+$, važi da je

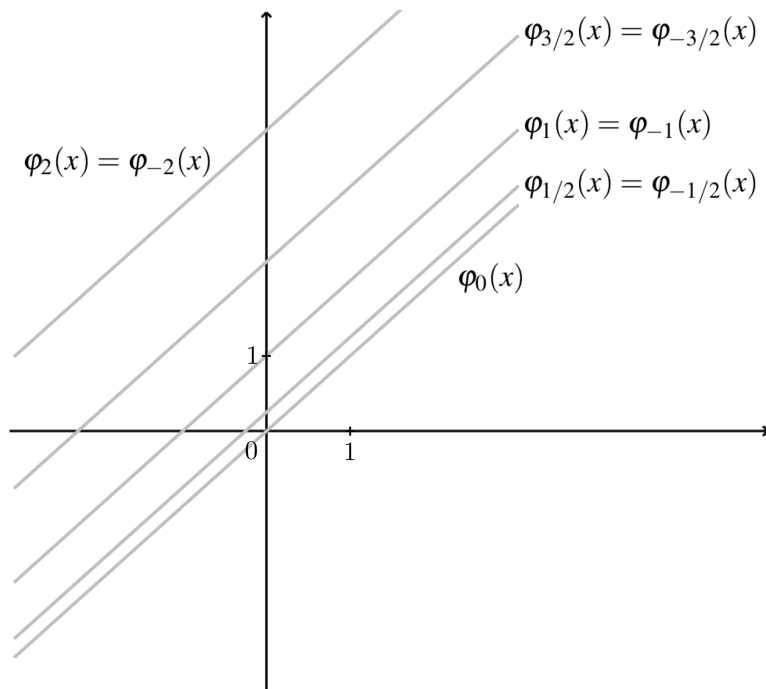
$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}) (p_1 < p_2 \iff \varphi_{p_1}(x_0) < \varphi_{p_2}(x_0)).$$

Dakle, familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće raslojena na skupu \mathbb{R} po parametru $p \in \mathbb{R}^+$.

(iv) Ukoliko je $\mathbb{P} = \{-1, 0, 2\}$, važi da je

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\varphi_2(x_0) > \varphi_{-1}(x_0) > \varphi_0(x_0)).$$

Dakle, familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ jeste raslojena na skupu \mathbb{R} po parametru $p \in \mathbb{P}$, ali nije monotonno raslojena na skupu \mathbb{R} po parametru $p \in \mathbb{P}$.



Slika 2.1: Neke funkcije iz familije funkcija definisane sa (2.1)

□

U [124] je takođe uveden i pojam familija funkcija koje su kompresovane u tački jer se ovakve raslojene familije funkcija često javljaju u primenama [25, 27, 114, 122–128, 133–136]. U ovoj disertaciji pojam kompresovanosti određujemo prema [135] sledećom definicijom.

Definicija 2.2 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisana za $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Kažemo da je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ kompresovana u tački $x_0 \in \mathbb{S}$ ukoliko je $\varphi_p(x_0) = 0$ za svako $p \in \mathbb{P}$.
- (ii) Ako je $\mathbb{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ili $\mathbb{S} = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ kompresovana u tački a ukoliko je $\varphi_p(a+) = 0$ za svako $p \in \mathbb{P}$.
- (iii) Ako je $\mathbb{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ili $\mathbb{S} = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ kompresovana u tački b ukoliko je $\varphi_p(b-) = 0$ za svako $p \in \mathbb{P}$.

2.2 Najbolje konstante u nejednakostima

Polazimo od familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ koja je definisana za $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$.

Postavlja se pitanje da li postoje vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}$ za koje je $\varphi_p(x) > 0$, tj. $\varphi_p(x) < 0$ na posmatranom skupu \mathbb{S} i, ukoliko postoje, koje su najmanje/najveće vrednosti za takve parametre (koje se u literaturi često nazivaju *najboljim konstantama za odgovarajuće nejednakosti*).

2.2.1 Neke osobine najboljih konstanti u nejednakostima

Pojam najboljih konstanti za odgovarajuće nejednakosti dat je u [125]:

Definicija 2.3 Neka je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ raslojena na skupu $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ po parametru $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$. Konstanta $p_1 \in \mathbb{P}$ je najbolja moguća za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) na skupu \mathbb{S} za $p \in \mathbb{P}$ ako i samo ako je $\varphi_{p_1}(x) > 0$ (tj. $\varphi_{p_1}(x) < 0$) na skupu \mathbb{S} i ne postoji nijedna konstanta $p_2 \in \mathbb{P}$ takva da važi da je

$$(\forall x \in \mathbb{S}) (\varphi_{p_1}(x) > \varphi_{p_2}(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in \mathbb{S}) (\varphi_{p_1}(x) < \varphi_{p_2}(x) < 0)).$$

Primer 2.2 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in (0, 1)$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x^2 + p, \quad (2.2)$$

važi da je rastuće raslojena na intervalu $(0, 1)$ za svaki izbor skupa \mathbb{P} . Razmotrimo sledeće slučajeve:

(i) Neka je $\mathbb{P} = (1, 2)$. Tada je

$$\varphi_p(x) > 0$$

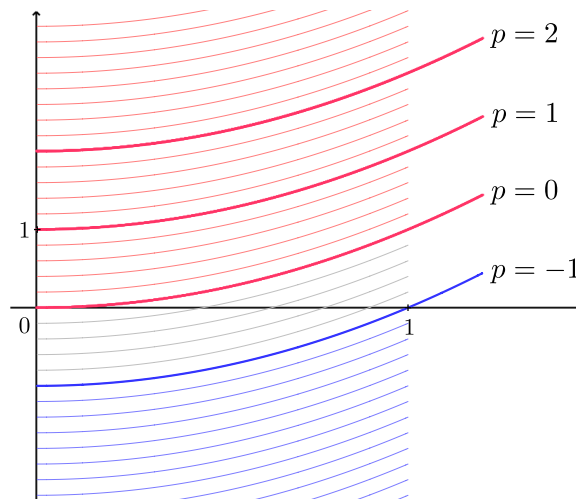
za svako $p \in (1, 2)$. Međutim, važi da za svako $p_1 \in (1, 2)$ postoji $p_2 \in (1, 2)$ takvo da je

$$(\forall x \in (0, 1)) (\varphi_{p_1}(x) > \varphi_{p_2}(x) > 0).$$

Dakle, za ovakav izbor skupa \mathbb{P} ne postoji najbolja konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu $(0, 1)$.

(ii) Neka je $\mathbb{P} = [1, 2]$. Evidentno je da je $p = 1$ najbolja konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu $(0, 1)$ i za $\mathbb{P} = [1, 2]$.

(iii) Neka je $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Evidentno je da je $p = 0$ najbolja realna konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu $(0, 1)$ i da je $p = -1$ najbolja realna konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na intervalu $(0, 1)$.



Slika 2.2: Familija funkcija definisana sa (2.2) za neke vrednosti parametra p

□

Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.1 Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ familija funkcija, definisana za $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, i neka je

$$\mathbb{P}^+ = \{p \in \mathbb{P} \mid (\forall x \in \mathbb{S}) \varphi_p(x) > 0\} \quad \text{i} \quad \mathbb{P}^- = \{p \in \mathbb{P} \mid (\forall x \in \mathbb{S}) \varphi_p(x) < 0\}.$$

(i) Ukoliko je familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ rastuće raslojena na skupu \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$, važi:

- (1) konstanta p_1 je najbolja za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na skupu \mathbb{S} za $p \in \mathbb{P}$ ako i samo ako postoji $\min(\mathbb{P}^+)$ i $p_1 = \min(\mathbb{P}^+)$.
- (2) konstanta p_1 je najbolja za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na skupu \mathbb{S} za $p \in \mathbb{P}$ ako i samo ako postoji $\max(\mathbb{P}^-)$ i $p_1 = \max(\mathbb{P}^-)$.

(ii) Ukoliko je familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ opadajuće raslojena na skupu \mathbb{S} po parametru $p \in \mathbb{P}$, važi:

- (1) konstanta p_1 je najbolja za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na skupu \mathbb{S} za $p \in \mathbb{P}$ ako i samo ako postoji $\max(\mathbb{P}^+)$ i $p_1 = \max(\mathbb{P}^+)$.
- (2) konstanta p_1 je najbolja za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na skupu \mathbb{S} za $p \in \mathbb{P}$ ako i samo ako postoji $\min(\mathbb{P}^-)$ i $p_1 = \min(\mathbb{P}^-)$.

2.2.2 Izdvajanje konstanti za neke nejednakosti

Rezultate u ovoj sekciji navodimo prema [125, 136].

Sledeća teorema nam daje neke dovoljne uslove za izdvajanje mogućih realnih vrednosti parametra za koje su funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ pozitivne, odnosno negativne na posmatranom intervalu.

Teorema 2.2 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisana za $x \in \mathbb{S} = [a, b]$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), tako da za svaku funkciju $\varphi_p(x)$ postoje Tejlorovi razvoji u tački a i u tački b sa bar jednim ne-nula koeficijentom (za ma koje $p \in \mathbb{P}$).

(i) Neka je $\mathbf{c}_n^{\varphi_p, a}$ prvi ne-nula koeficijent u Tejlorovom razvoju

$$\varphi_p(x) = \sum_{i=0}^{n+v} \mathbf{c}_i^{\varphi_p, a} (x-a)^i + o((x-a)^{n+v}), \quad (2.3)$$

gde $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{N}$.

Ukoliko jednačina

$$\mathbf{c}_n^{\varphi_p, a} = 0 \quad (2.4)$$

ima rešenje $p = p_a \in \mathbb{P}$ i za p_a postoji $j \leq v$ tako da je

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1}^{\varphi_{p_a}, a} = \mathbf{c}_{n+2}^{\varphi_{p_a}, a} = \dots = \mathbf{c}_{n+j-1}^{\varphi_{p_a}, a} = 0 \wedge \mathbf{c}_{n+j}^{\varphi_{p_a}, a} < 0 \\ \left(\text{tj. } \mathbf{c}_{n+1}^{\varphi_{p_a}, a} = \mathbf{c}_{n+2}^{\varphi_{p_a}, a} = \dots = \mathbf{c}_{n+j-1}^{\varphi_{p_a}, a} = 0 \wedge \mathbf{c}_{n+j}^{\varphi_{p_a}, a} > 0 \right), \end{aligned}$$

tada postoji $b_1 \in (a, b]$ tako da za svako $x \in (a, b_1)$ važi:

$$\varphi_{p_a}(x) < 0 \quad (\text{tj. } \varphi_{p_a}(x) > 0).$$

(ii) Neka je $\mathbf{c}_m^{\varphi_p, b}$ prvi ne-nula koeficijent u Tejlorovom razvoju

$$\varphi_p(x) = \sum_{i=0}^{m+\mu} \mathbf{c}_i^{\varphi_p, b} (x-b)^i + o((x-b)^{m+\mu}), \quad (2.5)$$

gde $m \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Ukoliko jednačina

$$\mathbf{c}_m^{\varphi_p, b} = 0 \quad (2.6)$$

ima rešenje $p = p_b \in \mathbb{P}$ i za p_b postoji $j \leq \mu$ tako da je

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{m+1}^{\varphi_{p_b}, b} = \mathbf{c}_{m+2}^{\varphi_{p_b}, b} = \dots = \mathbf{c}_{m+j-1}^{\varphi_{p_b}, b} = 0 \wedge (-1)^{m+k} \mathbf{c}_{m+j}^{\varphi_{p_b}, b} < 0 \\ \text{(tj. } \mathbf{c}_{m+1}^{\varphi_{p_b}, b} = \mathbf{c}_{m+2}^{\varphi_{p_b}, b} = \dots = \mathbf{c}_{m+j-1}^{\varphi_{p_b}, b} = 0 \wedge (-1)^{m+k} \mathbf{c}_{m+j}^{\varphi_{p_b}, b} > 0), \end{aligned}$$

tada postoji $a_1 \in [a, b)$ tako da za svako $x \in (a_1, b)$ važi:

$$\varphi_{p_b}(x) < 0 \quad \text{(tj. } \varphi_{p_b}(x) > 0).$$

Dokaz. Tvrdjenje važi na osnovu osobina Tejlorovih razvoja funkcija. ■

Ukoliko je u prethodnoj teoremi Tejlorov razvoj (2.3) takav da je vrednost prvog ne-nula koeficijenta $\mathbf{c}_n^{\varphi_p, a}$ stalnog znaka za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}$, tada su sve funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ tog znaka u nekoj desnoj okolini tačke a . Analogno važi i za Tejlorov razvoj (2.5).

Takođe, ukoliko je koeficijent $\mathbf{c}_n^{\varphi_p, a}$ (tj. $\mathbf{c}_m^{\varphi_p, b}$), određen Teoremom 2.2, monotona funkcija po $p \in \mathbb{P}$, tada je rešenje jednačine (2.4) (tj. jednačine (2.6)) po p jedinstveno, ako postoji. Prvi ne-nula koeficijent $\mathbf{c}_n^{\varphi_p, a}$ (tj. $\mathbf{c}_m^{\varphi_p, b}$) Tejlorovog razvoja (2.3) (tj. Tejlorovog razvoja (2.5)) zovemo *glavnim koeficijentom*. ■

Sledeća teorema nam omogućava određivanje najboljih konstanti u nejednakostima.

Teorema 2.3 Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ familija funkcija, definisana za $x \in \mathbb{S} = [a, b]$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), za koju važi:

- (1) familija je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,
- (2) familija ispunjava uslove (i) i (ii) iz Teoreme 2.2,
- (3) glavni koeficijenti Tejlorovih razvoja iz Teoreme 2.2 su monotone funkcije po $p \in \mathbb{P}$,
- (4) skup \mathbb{P} sadrži konstante p_a i p_b iz Teoreme 2.2.

Tada važi:

- (i) Za svako $d \in (a, b]$ takvo da je $(\forall x \in (a, d)) \varphi_{p_a}(x) < 0$ i za svako $p' < p_a$ (tj. za svako $p' > p_a$) važi da je

$$x \in (a, d) \implies \varphi_{p'}(x) < \varphi_{p_a}(x) < 0. \quad (2.7)$$

Posebno, ukoliko je $d = b$, tada je p_a najbolja moguća konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}$.

- (ii) Za svako $c \in [a, b)$ takvo da je $(\forall x \in (c, b)) \varphi_{p_b}(x) > 0$ i za svako $p'' > p_b$ (tj. za svako $p'' < p_b$) važi da je

$$x \in (c, b) \implies 0 < \varphi_{p_b}(x) < \varphi_{p''}(x). \quad (2.8)$$

Posebno, ukoliko je $c = a$, tada je p_b najbolja moguća konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}$.

- (iii) Za svako $d \in (a, b]$ takvo da je $(\forall x \in (a, d)) \varphi_{p_a}(x) > 0$ i za svako $p'' > p_a$ (tj. za svako $p'' < p_a$) važi da je

$$x \in (a, d) \implies 0 < \varphi_{p_a}(x) < \varphi_{p''}(x). \quad (2.9)$$

Posebno, ukoliko je $d = b$, tada je p_a najbolja moguća konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}$.

- (iv) Za svako $c \in [a, b)$ takvo da je $(\forall x \in (c, b)) \varphi_{p_b}(x) < 0$ i za svako $p' < p_b$ (tj. za svako $p' > p_b$) važi da je

$$x \in (c, b) \implies \varphi_{p'}(x) < \varphi_{p_b}(x) < 0. \quad (2.10)$$

Posebno, ukoliko je $c = a$, tada je p_b najbolja moguća konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}$.

Dokaz. Iz uslova (2), (3) i (4), sledi da su konstante p_a i p_b jedinstvene. Implikacije (2.7), (2.8), (2.9) i (2.10) slede iz uslova (1). Na osnovu uslova (1) i činjenice da glavni koeficijenti menjaju znak u tačkama p_a i p_b (uslov (3)), zaključujemo da za $c = a$ i $d = b$ ne postoje bolje konstante od p_a i p_b na intervalu (a, b) za skup \mathbb{P} . ■

Izdvajanje konstanti za višeparametarske familije funkcija. Sledeća teorema iz [136] se može primeniti za određivanje vrednosti više parametara za koje su funkcije iz višeparametarske familije stalnog znaka na posmatranom intervalu.

Teorema 2.4 (Višeparametarsko uopštenje Teoreme 2.2) *Neka je data višeparametarska familija funkcija $\{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}(x)\}_{p_1 \in \mathbb{P}_1, p_2 \in \mathbb{P}_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}_k}$, definisana za $x \in \mathbb{S} = [a, b]$ i za $p_1 \in \mathbb{P}_1, p_2 \in \mathbb{P}_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}_k$ ($\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots, \mathbb{P}_k \neq \emptyset$ i $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots, \mathbb{P}_k \subseteq \mathbb{R}$), tako da za svaku funkciju $\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}(x)$ postoje Tejlorovi razvoji u tački a i u tački b sa bar k ne-nula koeficijenata.*

- (i) Neka su $\mathfrak{c}_{n_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a}, \mathfrak{c}_{n_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a}, \dots, \mathfrak{c}_{n_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a}$ prvih k ne-nula koeficijenata u Tejlorovom razvoju

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}(x) = & \mathfrak{c}_{n_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} (x-a)^{n_1} + \mathfrak{c}_{n_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} (x-a)^{n_2} + \dots + \\ & + \mathfrak{c}_{n_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} (x-a)^{n_k} + \sum_{i=n_k+1}^{\nu} \mathfrak{c}_i^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} (x-a)^i + o((x-a)^\nu), \end{aligned}$$

gde je $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \nu$ ($n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0, \nu \in \mathbb{N}$).

Ukoliko sistem jednačina

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_{n_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{n_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathfrak{c}_{n_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, a} &= 0 \end{aligned}$$

ima rešenje $p_1 = p_1^{(a)} \in \mathbb{P}_1, p_2 = p_2^{(a)} \in \mathbb{P}_2, \dots, p_k = p_k^{(a)} \in \mathbb{P}_k$ i za $p_1^{(a)}, p_2^{(a)}, \dots, p_k^{(a)}$ postoji $j \leq v$ tako da je

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(a), a} = \mathfrak{c}_{n_k+1}^{(a), a} &= \mathfrak{c}_{n_k+2}^{(a), a} = \dots = \mathfrak{c}_{n_k+j-1}^{(a), a} = 0 \wedge \mathfrak{c}_{n_k+j}^{(a), a} < 0 \\ \left(\text{tj. } \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(a), a} = \mathfrak{c}_{n_k+1}^{(a), a} &= \mathfrak{c}_{n_k+2}^{(a), a} = \dots = \mathfrak{c}_{n_k+j-1}^{(a), a} = 0 \wedge \mathfrak{c}_{n_k+j}^{(a), a} > 0 \right), \end{aligned}$$

tada postoji $b_1 \in (a, b]$ tako da za svako $x \in (a, b_1)$ važi:

$$\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(a)}(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(a)}(x) > 0 \right).$$

(ii) Neka su $\mathfrak{c}_{m_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b}, \mathfrak{c}_{m_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b}, \dots, \mathfrak{c}_{m_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b}$ prvih k ne-nula koeficijenata u Tejlorovom razvoju

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}(x) &= \mathfrak{c}_{m_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} (x-b)^{m_1} + \mathfrak{c}_{m_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} (x-b)^{m_2} + \dots + \\ &+ \mathfrak{c}_{m_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} (x-b)^{m_k} + \sum_{i=m_k+1}^{\mu} \mathfrak{c}_i^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} (x-b)^i + o((x-b)^\mu), \end{aligned}$$

gde je $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \mu$ ($m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{N}$).

Ukoliko sistem jednačina

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_{m_1}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} &= 0 \\ \mathfrak{c}_{m_2}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathfrak{c}_{m_k}^{\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}, b} &= 0 \end{aligned}$$

ima rešenje $p_1 = p_1^{(b)} \in \mathbb{P}_1, p_2 = p_2^{(b)} \in \mathbb{P}_2, \dots, p_k = p_k^{(b)} \in \mathbb{P}_k$ i za $p_1^{(b)}, p_2^{(b)}, \dots, p_k^{(b)}$ postoji $j \leq \mu$ tako da je

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(b), b} = \mathfrak{c}_{m_k+1}^{(b), b} &= \mathfrak{c}_{m_k+2}^{(b), b} = \dots = \mathfrak{c}_{m_k+j-1}^{(b), b} = 0 \wedge (-1)^{m_k+j} \mathfrak{c}_{m_k+j}^{(b), b} < 0 \\ \left(\text{tj. } \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(b), b} = \mathfrak{c}_{m_k+1}^{(b), b} &= \mathfrak{c}_{m_k+2}^{(b), b} = \dots = \mathfrak{c}_{m_k+j-1}^{(b), b} = 0 \wedge (-1)^{m_k+j} \mathfrak{c}_{m_k+j}^{(b), b} > 0 \right), \end{aligned}$$

tada postoji $a_1 \in [a, b)$ tako da za svako $x \in (a_1, b)$ važi:

$$\varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(b)}(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \varphi_{p_1, p_2, \dots, p_k}^{(b)}(x) > 0 \right).$$

Dokaz. Tvrdjenje važi na osnovu osobina Tejlorovih razvoja funkcija. ■

Prethodna teorema je primenjena u napomenama 5.3, 5.4, 5.5, 5.11 i 5.13.

2.3 Neka uopštenja i poboljšanja Nike teoreme

Nike teoreme [116, 127], tj. Teoreme 1.3 i 1.4, daju neke dovoljne uslove da funkcija ima tačno jedan minimum i tačno jednu nulu na intervalu $(0, c)$, $c \in \mathbb{R}^+$. S obzirom na to da se ove dve teoreme razlikuju samo po jednom uslovu (uslov **(a)**), moguće ih je objediniti u jednu opštu formu Nike teoreme. Takođe, moguće je dodatno uopštiti ove teoreme tako da važe i na realnom intervalu (a, b) . Ova uopštenja dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 2.5 (Opšta forma Nike teoreme)

Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, takva da:

- (a)** važi da je $f^{(m)}(x) > 0$ za $x \in (a, b)$ ili
 važi da $f^{(m)}(x)$ ima tačno jednu nulu x_m na intervalu (a, b) tako da je $f^{(m)}(x) > 0$ na intervalu (a, x_m) i $f^{(m)}(x) < 0$ na intervalu (x_m, b) ,
- (b)** postoji desna okolina tačke a u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f < 0, f' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0,$$

- (c)** postoji leva okolina tačke b u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f > 0, f' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (a, b)$ i važi da je $f(x) < 0$ za $x \in (a, x_0)$ i da je $f(x) > 0$ za $x \in (x_0, b)$. Takođe, funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu (a, b) . Preciznije, postoji tačno jedna tačka $t \in (a, x_0) \subset (a, b)$ takva da je $f(t) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu (a, b) , odnosno na intervalu (a, x_0) .

Prethodna teorema daje neke dovoljne uslove da funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima tačno jedan ekstremum, koji je minimum, i tačno jednu nulu x_0 , pri čemu je $f(x) < 0$ na intervalu (a, x_0) i $f(x) > 0$ na intervalu (x_0, b) . Sledeća teorema takođe daje neke dovoljne uslove da funkcija $f(x)$ ima tačno jedan ekstremum, koji je minimum, i tačno jednu nulu x_0 na intervalu (a, b) , ali tako da je $f(x) > 0$ na intervalu (a, x_0) i da je $f(x) < 0$ na intervalu (x_0, b) .

Teorema 2.6 (Ogledalska Nike teorema)

Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, takva da:

- (a)** važi da je $f^{(m)}(x) > 0$ za $x \in (a, b)$ ili
 važi da $f^{(m)}(x)$ ima tačno jednu nulu x_m na intervalu (a, b) tako da je $f^{(m)}(x) > 0$ na intervalu (a, x_m) i $f^{(m)}(x) < 0$ na intervalu (x_m, b) ,
- (b)** postoji desna okolina tačke a u kojoj je $f > 0$ i u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f' < 0, f'' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0,$$

- (c)** postoji leva okolina tačke b u kojoj $f < 0$ i u kojoj važe sledeće nejednakosti:

$$f' > 0, f'' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (a, b)$ i važi da je $f(x) > 0$ za $x \in (a, x_0)$ i da je $f(x) < 0$ za $x \in (x_0, b)$. Takođe, funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu (a, b) . Preciznije, postoji tačno jedna tačka $t \in (x_0, b) \subset (a, b)$ takva da je $f(t) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu (a, b) , odnosno na intervalu (x_0, b) .

Dokaz. Primenom Opšte forme Nike teoreme na funkciju $f'(x)$, dobija se da $f'(x)$ ima tačno jednu nulu x_1 na intervalu (a, b) i da je $f'(x) < 0$ na intervalu (a, x_1) i $f'(x) > 0$ na intervalu (x_1, b) . Odavde zaključujemo da je funkcija $f(x)$ opadajuća na intervalu (a, x_1) i rastuća na intervalu (x_1, b) . Kako je $f(x) > 0$ u nekoj desnoj okolini tačke a i kako je $f(x) < 0$ u nekoj levoj okolini tačke b (uslovi **(b)** i **(c)**) i, na osnovu monotonosti funkcije $f(x)$, zaključujemo da funkcija $f(x)$ ima tačno jednu nulu x_0 i tačno jedan minimum na intervalu (x_0, b) . Takođe, zaključujemo i da je $f(x) > 0$ za $x \in (a, x_0)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (x_0, b)$. ■

Na sličan način bi se mogle formulisati teoreme za funkcije koje imaju tačno jednu nulu i tačno jedan ekstremum, koji je maksimum, na posmatranom intervalu.

2.4 Minimaks aproksimanti

2.4.1 Neke osobine minimaks aproksimanta

U ovoj sekciji pojmove minimaks aproksimanta, funkcije greške, minimaks aproksimacije i greške aproksimacije određujemo prema [135] sledećom definicijom.

Definicija 2.4 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ koja je definisana za $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Ako postoji funkcija $\varphi_{p_0}(x)$, za neko $p_0 \in \mathbb{P}$, za koju je

$$\inf_{p \in \mathbb{P}} \sup_{x \in \mathbb{S}} |\varphi_p(x)| = \sup_{x \in \mathbb{S}} |\varphi_{p_0}(x)|, \quad (2.11)$$

tada kažemo da je funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ minimaks aproksimant na skupu \mathbb{S} za datu familiju.

(ii) Funkciju

$$d^{(p)} = \sup_{x \in \mathbb{S}} |\varphi_p(x)|$$

zovemo funkcijom greške.

(iii) Aproksimaciju

$$\varphi_{p_0}(x) \approx 0$$

zovemo minimaks aproksimacijom na skupu \mathbb{S} za datu familiju, a broj

$$d_0 = d^{(p_0)} = \sup_{x \in \mathbb{S}} |\varphi_{p_0}(x)|$$

zovemo greškom aproksimacije.

Primetimo da za grešku aproksimacije d_0 i za proizvoljan parametar $p \in \mathbb{P}$ važi da je $d^{(p)} \geq d_0$. ■

Ukoliko za razmatranu familiju funkcija važi da je

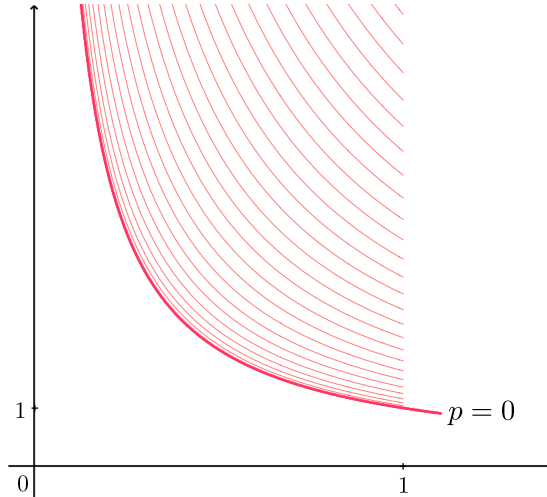
$$\sup_{x \in \mathbb{S}} |\varphi_p(x)| = +\infty$$

za svako $p \in \mathbb{P}$, tada ne postoji minimaks aproksimant familije. Navodimo primer jedne takve familije.

Primer 2.3 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{S} = (0, 1)$ i $\mathbb{P} = \mathbb{R}_0^+$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = \frac{1+p^2}{x}, \quad (2.12)$$

važi da je $\sup_{x \in (0,1)} |\varphi_p(x)| = +\infty$ za svako $p \in \mathbb{P}$. Dakle, minimaks aproksimant za ovako definisanu familiju funkcija ne postoji.



Slika 2.3: Familija funkcija definisana sa (2.12) za neke vrednosti parametra p □

Ukoliko je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ familija neprekidnih funkcija po argumentu x i po parametru p i ukoliko su $\mathbb{S} = [a, b]$ i $\mathbb{P} = [c, d]$ segmenti, tada se (2.11) svodi na

$$\min_{p \in [c, d]} \max_{x \in [a, b]} |\varphi_p(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi_{p_0}(x)|.$$

U narednom primeru razmatramo postojanje i određivanje minimaks aproksimanta u zavisnosti od izbora skupa \mathbb{P} .

Primer 2.4 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{S} = [0, 1]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x^2 + p,$$

važi da je rastuće raslojena na intervalu $[0, 1]$ za svaki izbor skupa \mathbb{P} . Razmotrimo sledeće slučajeve:

(i) Neka je $\mathbb{P} = (0, 1)$.

Važi da je

$$\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x)| = \max_{x \in [0,1]} |x^2 + p| = |1 + p| = 1 + p.$$

Odavde je

$$\inf_{p \in (0,1)} \left(\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x)| \right) = \inf_{p \in (0,1)} (1 + p) = 1.$$

Međutim, ne postoji vrednost parametra $p_0 \in (0, 1)$ za koju je $\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_{p_0}(x)| = 1$. Dakle, minimaks aproksimant za ovako definisanu familiju funkcija ne postoji.

(ii) Neka je $\mathbb{P} = [0, 1]$.

Važi da je

$$\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x)| = \max_{x \in [0,1]} |x^2 + p| = |1 + p| = 1 + p.$$

Odavde je

$$\inf_{p \in [0,1]} \left(\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x)| \right) = \min_{p \in [0,1]} (1 + p) = 1.$$

Primitimo da sada postoji vrednost parametra $p_0 = 0 \in [0, 1]$ za koju je $\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_{p_0}(x)| = 1$. Dakle, funkcija

$$\varphi_0(x) = x^2$$

je minimaks aproksimant za ovako definisanu familiju funkcija. □

Familija funkcija iz prethodnog primera ilustrovana je na Slici 2.2. ■

Za raslojene familije funkcija važi sledeća teorema o jedinstvenosti minimaks aproksimanta.

Teorema 2.7 *Ako je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ familija neprekidnih funkcija po argumentu x i po parametru p , koja je raslojena na $\mathbb{S} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ po parametru $p \in \mathbb{P} = [c, d] \subset \mathbb{R}$, tada je za ovu familiju minimaks aproksimant na $[a, b]$, ako postoji, jedinstven.*

Dokaz. Neka je funkcija $\varphi_{p_0}(x)$, za neko $p_0 \in [c, d]$, minimaks aproksimant posmatrane familije. Tada je

$$\inf_{p \in [c,d]} \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_p(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_{p_0}(x)| = \max_{x \in [a,b]} |\varphi_{p_0}(x)| = |\varphi_{p_0}(x_0)|$$

za neko $x_0 \in [a, b]$. Pretpostavimo da minimaks aproksimant nije jedinstven, tj. da postoji vrednost parametra $p_1 \in [c, d]$ takva da je $p_1 \neq p_0$ i da važi da je

$$\inf_{p \in [c,d]} \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_p(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_{p_1}(x)| = \max_{x \in [a,b]} |\varphi_{p_1}(x)| = |\varphi_{p_1}(x_1)|$$

za neko $x_1 \in [a, b]$. Pretpostavimo da je

$$p_0 < p_1 \quad \text{i} \quad (\forall x \in [a, b]) \quad \varphi_{p_0}(x) < \varphi_{p_1}(x)$$

i da je $\varphi_{p_0}(x_0) > 0$ (inače se može razmatrati familija funkcija $\{-\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$). Tada dobijamo

$$\min_{p \in [c,d]} \max_{x \in [a,b]} |\varphi_p(x)| = \varphi_{p_0}(x_0) < \varphi_{p_1}(x_0) \leq |\varphi_{p_1}(x_1)| = \min_{p \in [c,d]} \max_{x \in [a,b]} |\varphi_p(x)|,$$

što je kontradikcija. ■

Ukoliko skup \mathbb{P} nije segment, minimaks aproksimant ne mora da bude jedinstven, kao što ilustrujemo u primeru koji sledi.

Primer 2.5 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{S} = [0, 1]$ i $p \in \mathbb{P} = [-2, -1] \cup [0, 1]$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x^2 + p,$$

važi da je rastuće raslojena na intervalu $[0, 1]$ po parametru $p \in [-2, -1] \cup [0, 1]$. Za $p \in [-2, -1]$ važi da je

$$\inf_{p \in [-2, -1]} \left(\sup_{x \in [0,1]} |\varphi_p(x)| \right) = \min_{p \in [-2, -1]} |0 + p| = 1.$$

Za $p \in [0, 1]$ važi da je

$$\inf_{p \in [0, 1]} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_p(x)| \right) = \min_{p \in [0, 1]} |1 + p| = 1.$$

Dakle,

$$\inf_{p \in [-2, -1] \cup [0, 1]} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_p(x)| \right) = 1.$$

Postoje $p_1 = -1 \in [-2, -1]$ i $p_2 = 0 \in [0, 1]$ za koje je $\sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_{p_1}(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_{p_2}(x)| = 1$. Dakle, funkcije

$$\varphi_{-1}(x) = x^2 - 1 \quad \text{i} \quad \varphi_0(x) = x^2$$

jesu minimaks aproksimanti za ovako definisanu familiju funkcija. □

2.4.2 Teorema o postojanju i određivanju minimaks aproksimanta

U Teoremama 1.1 i 1.2 razmatra se postojanje i određivanje minimaks aproksimanta za određene rastuće, tj. opadajuće raslojene familije funkcija. Primetimo da u tim teoremama nije na jedinstven način određena funkcija $\varphi_c(x)$, tj. funkcija $\varphi_d(x)$. U [128] te teoreme su objedinjene i poboljšane (Teorema 3 [128]). Određivanje funkcije $\varphi_c(x)$, tj. $\varphi_d(x)$, na jedinstven način postignuto je tako što se dodatno zahteva da postoji leva okolina tačke b u kojoj je $\varphi_p(x) > 0$ za svako $p \in (c, d)$.

U nastavku dajemo tvrđenje iz [135] ekvivalentno pomenutim teoremama u kome se zahteva raslojenost familije u tački b , čime se obezbeđuje da funkcije $\varphi_c(x)$ i $\varphi_d(x)$ budu određene na jedinstven način. Pri tome je familija kompresovana samo u tački a .

Teorema 2.8 *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{S} = [a, b]$ i za $p \in \mathbb{P} = [c, d]$, familija neprekidnih funkcija po argumentu x , koja je kompresovana u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in [c, d]$. Ukoliko važi:*

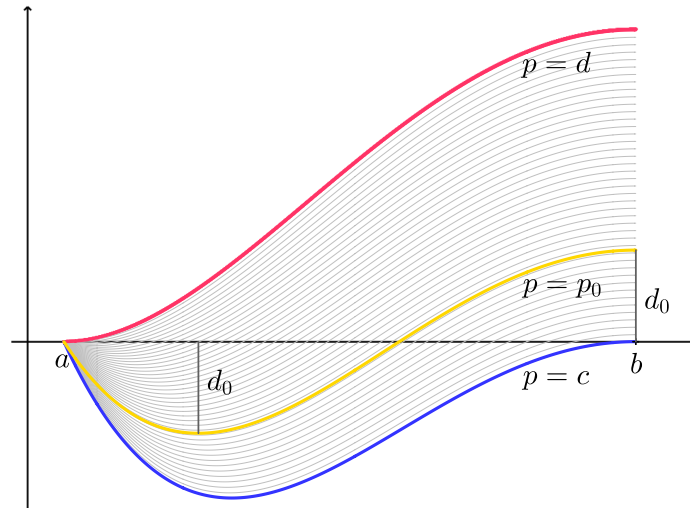
- (a) $\varphi_c(x) < 0$ (tj. $\varphi_c(x) > 0$) i $\varphi_d(x) > 0$ (tj. $\varphi_d(x) < 0$) za svako $x \in (a, b)$ i $\varphi_c(b) = 0$ (tj. $\varphi_d(b) = 0$),
- (b) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in (a, b]$,
- (c) za svako $p \in (c, d)$ postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$,
- (d) za svako $p \in (c, d)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jedan ekstremum $t^{(p)}$ na intervalu (a, b) , koji je minimum,

tada postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (c, d)$ sledeće jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p(b)$$

i za $d_0 = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0}(b)$ imamo

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{P}} \sup_{x \in (a, b)} |\varphi_p(x)|.$$



Slika 2.4: Jedna raslojena familija funkcija koja zadovoljava uslove iz Teoreme 2.8

Za familije funkcija koje su kompresovane samo u tački b važi sledeća analogna teorema.

Teorema 2.9 (Ogledalska verzija Teoreme 2.8) *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{S} = [a, b]$ i za $p \in \mathbb{P} = [c, d]$, familija neprekidnih funkcija po argumentu x , koja je kompresovana u tački b i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $[a, b]$ po parametru $p \in [c, d]$. Ukoliko važi:*

- (a) $\varphi_c(x) < 0$ (tj. $\varphi_c(x) > 0$) i $\varphi_d(x) > 0$ (tj. $\varphi_d(x) < 0$) za svako $x \in (a, b)$ i $\varphi_c(a) = 0$ (tj. $\varphi_d(a) = 0$),
- (b) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in [a, b]$,
- (c) za svako $p \in (c, d)$ postoji leva okolina tačke b u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$,
- (d) za svako $p \in (c, d)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jedan ekstremum $t^{(p)}$ na intervalu (a, b) , koji je minimum,

tada postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (c, d)$ sledeće jednačine

$$\varphi_p(a) = \left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right|$$

i za $d_0 = \varphi_{p_0}(a) = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right|$ imamo

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{P}} \sup_{x \in (a, b)} |\varphi_p(x)|.$$

Na sličan način bi se mogle formulisati teoreme za funkcije koje imaju tačno jedan ekstremum, koji je maksimum, na posmatranom intervalu.

2.5 Parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti

U ovom potpoglavlju je prema [124], uz izvesna poboljšanja, dat Parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti.

Polazimo od familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ koja je definisana za vrednosti argumenta $x \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{S} \neq \emptyset$, i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Posmatrajmo za neko $x \in \mathbb{S}$ jednačinu

$$\varphi_p(x) = 0$$

po parametru p . Jasno je da ova jednačina može, ali i ne mora, da bude rešiva po $p \in \mathbb{P}$. U nastavku razmatramo familije funkcija za koje je prethodna jednačina rešiva po $p \in \mathbb{P}$ za svako $x \in \mathbb{S}$. Neki dovoljni uslovi pod kojima je prethodna jednačina rešiva po $p \in \mathbb{P}$ su dati sledećom teoremom.

Teorema 2.10 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisana za $x \in \mathbb{S} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i za $p \in \mathbb{P} = [c, d] \subset \mathbb{R}$ takva da je $\varphi_p(a) = 0$ za $p \in [c, d]$. Ukoliko važi:

(a) $\varphi_c(x) < 0$ i $\varphi_d(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$, $\varphi_c(b) = 0$, $\varphi_d(b) \in \mathbb{R}^+$,

(b) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in [a, b]$,

tada za svako $x \in [a, b]$ jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima rešenje po $p \in [c, d]$.

Sledeća teorema daje neke dovoljne uslove pod kojima jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje po $p \in \mathbb{P}$.

Teorema 2.11 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisanu za $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}$, i za $p \in \mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, koja ispunjava uslove Teoreme 2.10 i koja je raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in [c, d]$, važi da jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima tačno jedno rešenje po $p \in [c, d]$ za svako $x \in (a, b)$.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.10, za svako $x \in (a, b)$ postoji rešenje jednačine $\varphi_p(x) = 0$ po $p \in [c, d]$. Raslojenost obezbeđuje jedinstvenost rešenja. ■

Napomenimo da se rešivost jednačine $\varphi_p(x) = 0$ po parametru p , pod odgovarajućim uslovima za familiju, razmatra i sa dobro poznatom Teoremom o implicitno zadanoj funkciji [172]. ■

U ovom potpoglavlju nadalje razmatramo familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ sa argumentom $x \in \mathbb{I}$, gde je \mathbb{I} otvoren, poluotvoren ili zatvoren interval, i parametrom $p \in \mathbb{P}$ takve da postoji neprekidna funkcija $g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{P}$ za koju važi sledeća ekvivalencija:

$$g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0. \quad (2.13)$$

Funkcija g određuje koje funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ imaju nulu za $x \in \mathbb{I}$. Napomenimo da ova funkcija može, ali i ne mora, biti određena nekim konkretnim simboličkim izrazom.

Primer 2.6 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{I} = [0, \frac{\pi}{2}]$ i $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}^+$, definisana sa

$$\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}, \quad (2.14)$$

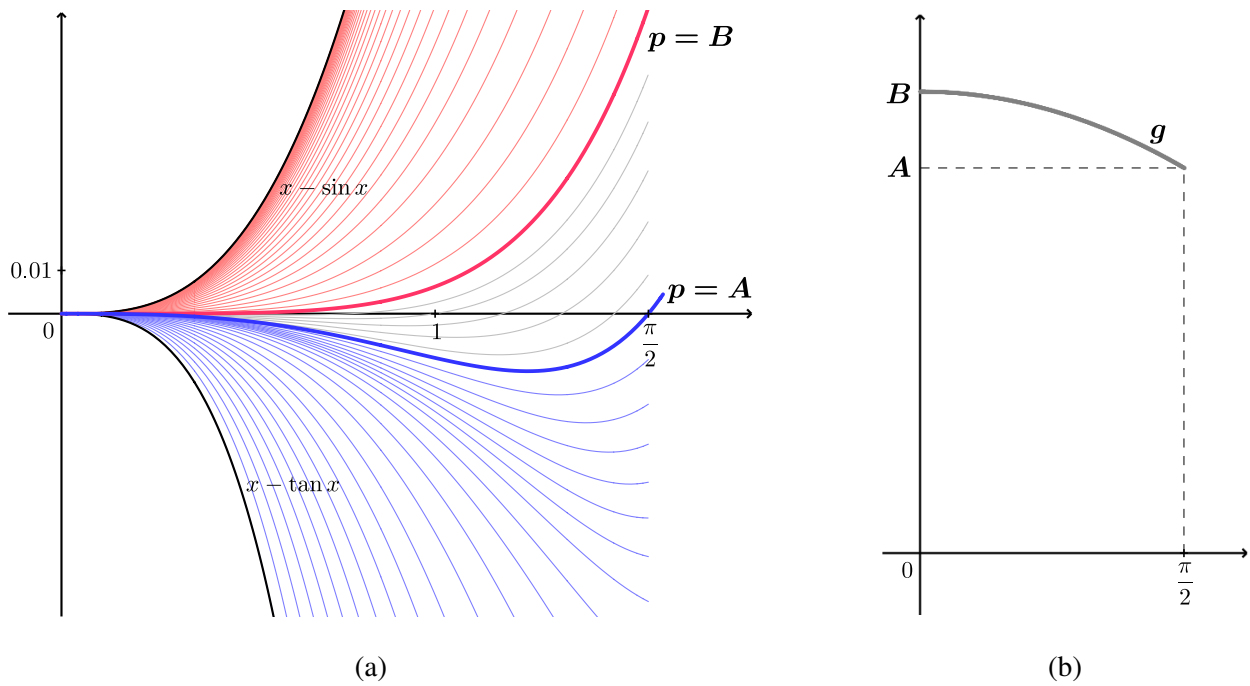
rastuće je raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}^+$ (videti Sekciju 5.1.1). Važi sledeća ekvivalencija

$$\varphi_p(x) = 0 \iff p = g(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x - x}, \quad (2.15)$$

kojom uvodimo funkciju $g(x)$. U Sekciji 5.1.1 je dokazano da je funkcija $g(x)$ opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i da je

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193... \quad \text{i} \quad B = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2.$$

Dakle, funkcije $\varphi_p(x)$ za $p \in (A, B)$ imaju tačno jednu nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, dok su funkcije $\varphi_p(x)$ za $p \in \mathbb{P} \setminus (A, B)$ stalnog znaka na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je $\varphi_A(x) < 0$ i $\varphi_B(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i pri tome su konstante A i B najbolje za posmatrane nejednakosti. Na osnovu raslojenosti mogu se formirati odgovarajuće nejednakosti i za ostale vrednosti parametra $p \in \mathbb{R}^+$.



Slika 2.5: (a) Familija funkcija definisana sa (2.14) za neke vrednosti parametra p
 (b) funkcija g definisana sa (2.15)

□

U sledećem primeru funkcija g ne postoji jer nijedna funkcija iz familije nema realnu nulu na posmatranom intervalu.

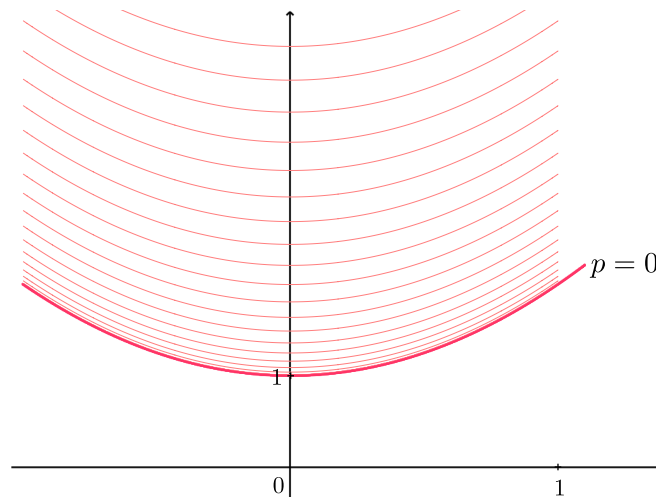
Primer 2.7 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}_0^+$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x^2 + p^2 + 1, \quad (2.16)$$

važi da je

$$\varphi_p(x) = 0 \iff p = \sqrt{-x^2 - 1}.$$

Dakle, ne postoji realna funkcija g za koju važi (2.13). Stoga su sve funkcije stalnog znaka na posmatranom intervalu.



Slika 2.6: Familija funkcija definisana sa (2.16) za neke vrednosti parametra p

□

U nastavku razmatramo slučajeve kada funkcija g postoji i navodimo odgovarajuća tvrđenja u zavisnosti od monotonosti funkcije g .

Teorema 2.12 *Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana za $x \in \mathbb{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$) tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *postoji neprekidna monotono opadajuća funkcija $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$, pri čemu je $(A, B) \subseteq \mathbb{P}$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq A$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako je $p \in (A, B)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right).$$

(iii) *Ako je $p \geq B$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0))$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Dokaz. Iz uslova (2) i (3) sledi da funkcije $\varphi_p(x)$, $p \in (A, B)$, imaju nulu na intervalu (a, b) . Na osnovu opadajuće monotonosti funkcije g i rastuće (tj. opadajuće) raslojenosti familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, slede navedene nejednakosti. ■

Teorema 2.13 *Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana za $x \in \mathbb{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$) tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *postoji neprekidna monotono rastuća funkcija $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$, pri čemu je $(A, B) \subseteq \mathbb{P}$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq A$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iii) Ako je $p \geq B$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0 \right) \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0 \right) \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.12. ■

U okviru narednih tvrđenja, razmatramo slučaj kada g nije monotona funkcija. Prvo razmatramo funkciju g koja ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum, na posmatranom intervalu.

Teorema 2.14 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana za $x \in \mathbb{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$) tako da važe uslovi:

(1) familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,

(2) postoji neprekidna funkcija $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$ i koja je, za neko $x_m \in (a, b)$, opadajuća na (a, x_m) i rastuća na (x_m, b) ,

(3) postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, tako da za

$$A = g(x_m), \quad B = \min \left\{ \lim_{x \rightarrow a+} g(x), \lim_{x \rightarrow b-} g(x) \right\} \quad \text{i} \quad C = \max \left\{ \lim_{x \rightarrow a+} g(x), \lim_{x \rightarrow b-} g(x) \right\}$$

važi $[A, C] \subseteq \mathbb{P}$.

Tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) \leq 0 \right) \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) \geq 0 \right) \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima dva rešenja $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i $x_1^{(p)} \in (a, b)$ i važi:

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right).$$

(iii) Ako $p \in [B, C)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$.

Ukoliko je $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) < \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$, tada je

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

$$i \quad \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

Ukoliko je $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) > \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$, tada je

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right)$$

$$i \quad \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right).$$

(iv) Ako je $p \geq C$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_C(x) > 0 \right) \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_C(x) < 0 \right) \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.12. ■

U sledećoj teoremi razmatramo slučaj kada funkcija g ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na posmatranom intervalu.

Teorema 2.15 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana za $x \in \mathbb{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$) tako da važe uslovi:

- (1) familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,
- (2) postoji neprekidna funkcija $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$ i koja je, za neko $x_m \in (a, b)$, rastuća na (a, x_m) i opadajuća na (x_m, b) ,
- (3) postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, tako da za

$$A = \min \left\{ \lim_{x \rightarrow a^+} g(x), \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \right\}, \quad B = \max \left\{ \lim_{x \rightarrow a^+} g(x), \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \right\} \quad \text{i} \quad C = g(x_m)$$

važi $(A, C] \subseteq \mathbb{P}$.

Tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0 \right) \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0 \right) \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B]$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$.

Ukoliko je $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) < \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$, tada je

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

$$i \quad \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

Ukoliko je $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) > \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$, tada je

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right)$$

$$i \quad \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right).$$

(iii) Ako $p \in (B, C)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima dva rešenja $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i $x_1^{(p)} \in (a, b)$ i važi:

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iv) Ako je $p \geq C$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_C(x) \geq 0 \right) \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_C(x) \leq 0 \right) \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.12. ■

U opštem slučaju, za proizvoljnu funkciju g (nezavisno od njene monotonosti) važi sledeća teorema.

Teorema 2.16 Neka je data familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana za $x \in \mathbb{I}$, gde je \mathbb{I} otvoren, polu-otvoren ili zatvoren realan interval, i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$) tako da važe uslovi:

(1) familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu \mathbb{I} po parametru $p \in \mathbb{P}$,

(2) postoji neprekidna funkcija $g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$,

(3) postoji $\inf_{x \in \mathbb{I}} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\sup_{x \in \mathbb{I}} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$, pri čemu je $(A, B) \subseteq \mathbb{P}$.

Ukoliko je $A \neq B$, tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$\left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) \leq 0 \right) \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) \geq 0 \right) \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako je $p \geq B$, tada je

$$\left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) \geq 0 \right) \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) \leq 0 \right) \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Ukoliko je $A = B$, tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$\left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) = 0 \right) \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) = 0 \right) \right)$$

i ne postoji najbolja konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) na intervalu \mathbb{I} .

(ii) Ako je $p = A$, tada je

$$\left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \varphi_p(x) = 0.$$

(iii) Ako je $p \geq A$, tada je

$$\left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) = 0 \right) \quad \left(\text{tj.} \left(\forall x \in \mathbb{I} \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) = 0 \right) \right)$$

i ne postoji najbolja konstanta za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) na intervalu \mathbb{I} .

Dokaz. Na osnovu osobina raslojenih familija funkcija. ■

2.6 Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimacija

U ovom potpoglavlju, prema [135], uz izvesne dopune, dajemo Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimacija.

Parametarski metod za dokazivanje nejednakosti, koji je opisan u prethodnom potpoglavlju, zasniva se na izdvajanju onih funkcija iz raslojene familije koje menjaju znak na posmatranom intervalu. U nastavku dajemo metod koji se zasniva na izdvajanju funkcija iz familije koje imaju stacionarnu tačku po argumentu na posmatranom intervalu.

Nadalje razmatramo familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ koje su definisane za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i za $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{P} \neq \emptyset$, takve da su sve funkcije iz familije diferencijabilne po argumentu x i da postoji neprekidna funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ za koju važi sledeća ekvivalencija:

$$g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Funkcija g_1 određuje koje funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ imaju stacionarnu tačku po argumentu x na posmatranom intervalu. Napomenimo da funkcija g_1 za koju važi (2.17) može, ali i ne mora, biti određena nekim konkretnim simboličkim izrazom.

Primer 2.8 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ iz Primera 2.6, definisana sa

$$\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}, \quad (2.18)$$

rastuće je raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}^+$ (videti Sekciju 5.1.1). Važi sledeća ekvivalencija

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 1 - \frac{(p+1)(1+p \cos x)}{(p + \cos x)^2} = 0 &\iff p = g_1^-(x) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5 + 4 \cos x}) \\ &\vee p = g_1^+(x) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5 + 4 \cos x}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Funkcija g_1^- nema vrednosti u skupu $\mathbb{P} = \mathbb{R}^+$ i stoga je ne razmatramo.

Funkcija g_1^+ ima vrednosti u skupu $\mathbb{P} = \mathbb{R}^+$ i opadajuća je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, pri čemu je

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g_1^+(x) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots \quad \text{i} \quad C = \lim_{x \rightarrow 0^+} g_1^+(x) = 2.$$

Dakle, funkcije $\varphi_p(x)$ za $p \in (A, C)$ imaju tačno jednu stacionarnu tačku po argumentu x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, dok su funkcije $\varphi_p(x)$ za $p \in \mathbb{P} \setminus (A, C)$ monotone na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$\varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{p+1}{p} = 0$$

za

$$p = B = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots \in (A, C).$$

Može se zaključiti da je $\varphi_B(x) < 0$ i $\varphi_C(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i pri tome su konstante B i C najbolje za posmatrane nejednakosti. Na osnovu raslojenosti mogu se formirati odgovarajuće nejednakosti i za ostale vrednosti parametra $p \in \mathbb{R}^+$.

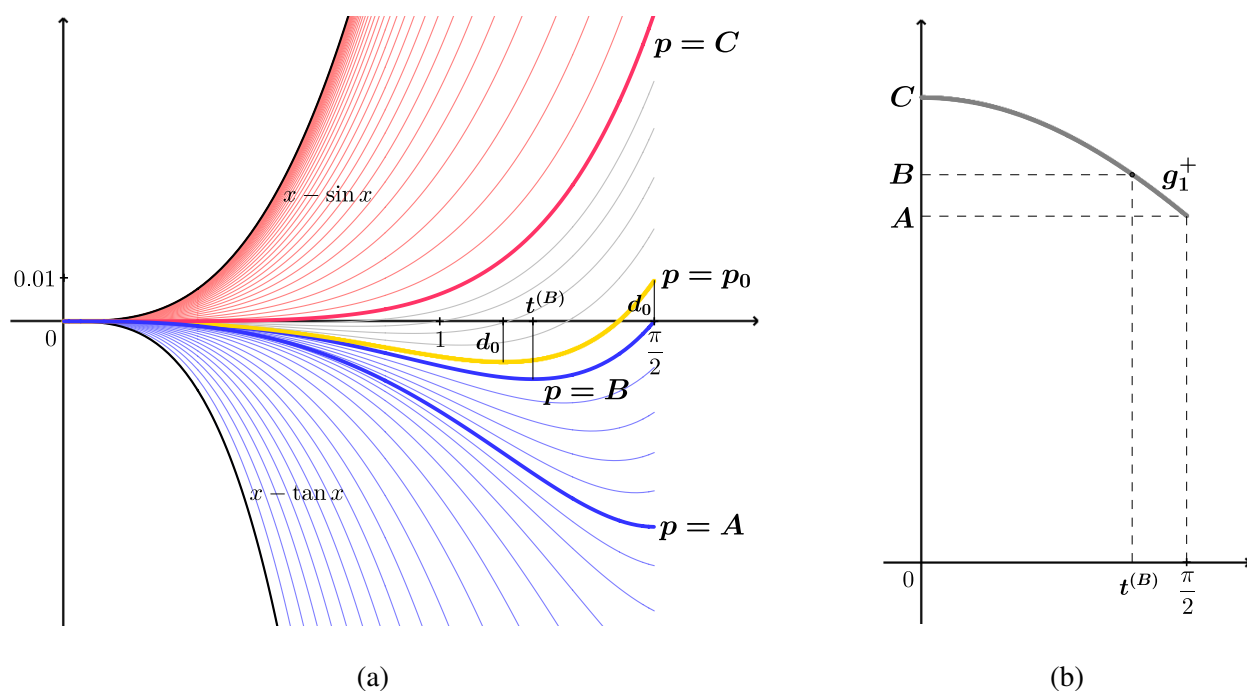
Na osnovu Tejlorovog razvoja u okolini tačke 0, može se pokazati da za $p \in (B, C)$ važi da je $\varphi_p(x) < 0$ u desnoj okolini tačke 0. Dodatno, važi da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, imaju tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Za vrednost parametra

$$p_0 = 1.78114\dots$$

dobija se minimaks aproksimant

$$\varphi_{p_0}(x) = x - \frac{(p_0 + 1) \sin x}{p_0 + \cos x}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za datu familiju funkciju.



Slika 2.7: (a) Familija funkcija definisana sa (2.18) za neke vrednosti parametra p
 (b) funkcija g_1^+ definisana sa (2.19) □

U sledećem primeru funkcija g_1 ne postoji jer nijedna funkcija iz familije nema stacionarnu tačku po argumentu na posmatranom intervalu.

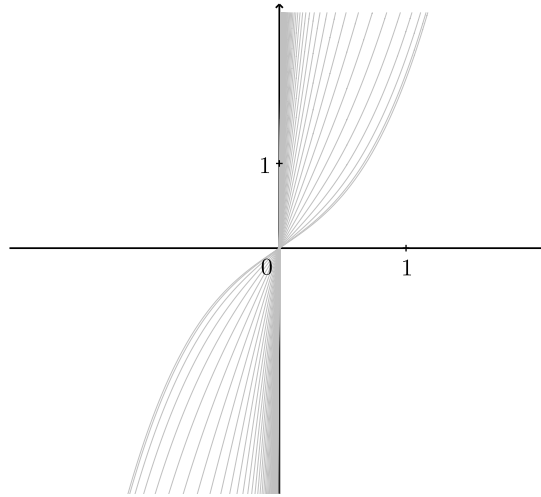
Primer 2.9 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je $\mathbb{P} = \mathbb{R}^+$ i $x \in \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = x^3 + p^2x + x, \quad (2.20)$$

važi da je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = x^2 + p^2 + 1 = 0 \iff p = \sqrt{-1 - x^2}.$$

Dakle, ne postoji realna funkcija g_1 za koju važi (2.17). Stoga su sve funkcije iz familije monotone na posmatranom intervalu.



Slika 2.8: Familija funkcija definisana sa (2.20) za neke vrednosti parametra p □

Do kraja ove sekcije razmatramo slučajeve kada funkcija g_1 postoji i navodimo odgovarajuća tvrđenja u zavisnosti od monotonosti funkcije g_1 i u zavisnosti od kompresovanosti familije funkcija. Prvo, u naredne dve teoreme razmatramo slučaj kada je familija funkcija kompresovana samo u tački a .

Teorema 2.17 *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija koje su neprekidne po p i po x za svako $x \in [a, b]$ i za svako $p \in \mathbb{P}$ tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna monotono opadajuća funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a+} g_1(x) = C \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b-} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$, pri čemu je $(A, C) \subseteq \mathbb{P}$,*
- (4) *postoji vrednost parametra $p = B \in (A, C)$ tako da je $\varphi_B(b) = 0$,*
- (5) *postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) za svako $p \in (A, C)$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq B$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0))$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (B, C)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0).$$

(iii) Ako je $p \geq C$, tada je

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_C(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_C(x) < 0))$$

i konstanta C je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum (tj. maksimum), na intervalu (a, b) u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (B, C)$ jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p(b) \quad (\text{tj. } \varphi_p(t^{(p)}) = |\varphi_p(b)|).$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije na intervalu (a, b) .

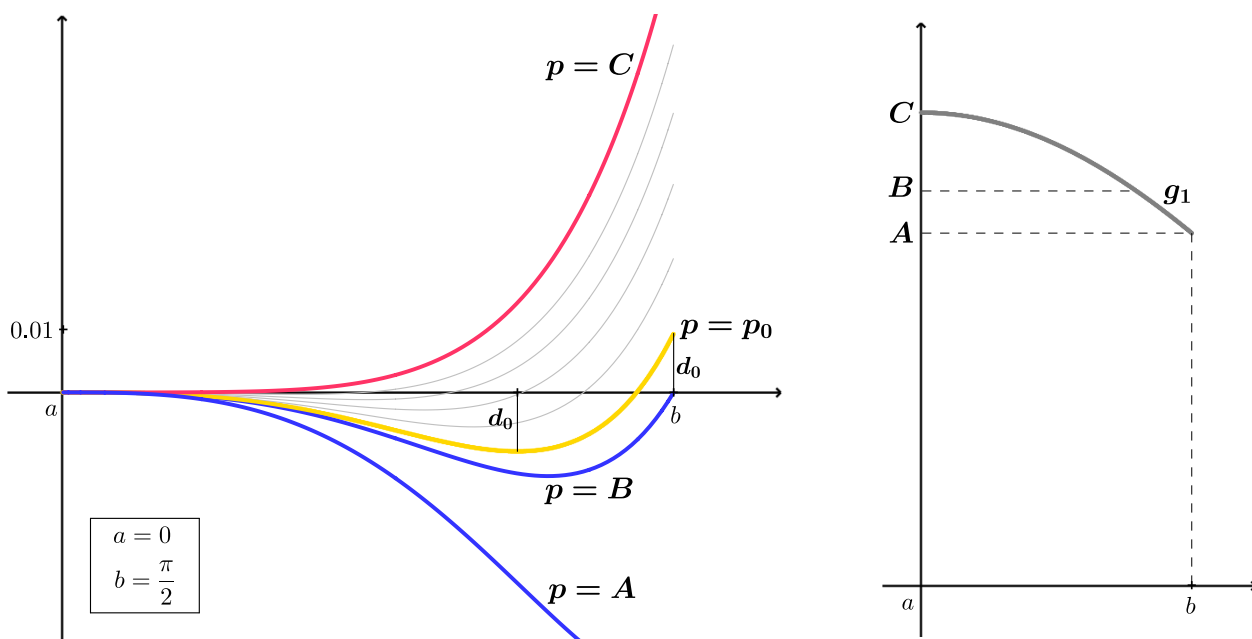
Greška aproksimacije je $d_0 = |\varphi_{p_0}(t^{(p_0)})| = \varphi_{p_0}(b)$ (tj. $d_0 = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) = |\varphi_{p_0}(b)|$).

Dokaz. Razmotrimo slučaj kada je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ rastuće raslojena familija funkcija. Slučaj kada je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ opadajuće raslojena familija funkcija se analogno razmatra.

Iz uslova (2) i (3) sledi da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, C)$, imaju tačno jednu stacionarnu tačku na intervalu (a, b) , dok su funkcije $\varphi_p(x)$, $p \in \mathbb{P} \setminus (A, C)$ monotone na intervalu (a, b) .

(i) Funkcija $\varphi_B(x)$ ima jednu stacionarnu tačku na intervalu (a, b) . Kako je $\varphi_B(a) = 0$ (uslov (1)), $\varphi_B(x) < 0$ u desnoj okolini tačke a (uslov (5)) i $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), zaključujemo da funkcija $\varphi_B(x)$ ima tačno jedan minimum na intervalu (a, b) . Takođe, zaključujemo i da je $\varphi_B(x) < 0$ na intervalu (a, b) i da na osnovu raslojenosti važe navedene nejednakosti.

(ii), (iv) S obzirom na to da je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)) i da je familija rastuće raslojena u tački b , važi da je $(\forall p \in (B, C)) \varphi_p(b) > 0$. Dodatno, iz $\varphi_p(a) = 0$ za $p \in (B, C)$ (uslov (1)) i činjenice da je $\varphi_p(x) < 0$, za $p \in (B, C)$, u desnoj okolini tačke a (uslov (5)), sledi da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, opadajuće i negativne u desnoj okolini tačke a . Stoga, zaključujemo da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, imaju tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum, i tačno jednu nulu na intervalu (a, b) i da važe navedene nejednakosti.



Slika 2.9: Neke funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ (videti Primer 2.8) koja zadovoljava uslove Teoreme 2.17 i odgovarajuća funkcija g_1

(iii) Funkcija $\varphi_C(x)$ je monotona na intervalu (a, b) . Kako je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da je $\varphi_C(b) > 0$. Dodatno, s obzirom na to da važi da je $\varphi_C(a) = 0$ (uslov (1)), zaključujemo da je $\varphi_C(x) > 0$ na intervalu (a, b) i da na osnovu raslojenosti važe navedene nejednakosti.

(v) Na osnovu Teoreme 2.8. ■

Teorema 2.18 *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija koje su neprekidne po p i po x za svako $x \in [a, b]$ i za svako $p \in \mathbb{P}$ tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna monotono rastuća funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a^+} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} g_1(x) = C \in \mathbb{R}$, pri čemu je $(A, C) \subseteq \mathbb{P}$,*
- (4) *postoji vrednost parametra $p = B \in (A, C)$ tako da je $\varphi_B(b) = 0$,*
- (5) *postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) za svako $p \in (A, C)$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq A$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iii) *Ako je $p \geq B$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0))$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum (tj. minimum), na intervalu (a, b) u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (A, B)$ jednačine*

$$\varphi_p(t^{(p)}) = |\varphi_p(b)| \quad \left(\text{tj. } \left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p(b) \right).$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije na intervalu (a, b) .

$$\text{Greška aproksimacije je } d_0 = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) = |\varphi_{p_0}(b)| \quad \left(\text{tj. } d_0 = \left| \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) \right| = \varphi_{p_0}(b) \right).$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.17. ■

U naredne dve teoreme, koje su analogne prethodnim teoremama, razmatra se slučaj kada je familija funkcija kompresovana samo u tački b .

Teorema 2.19 (Ogledalska verzija Teoreme 2.18) *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija koje su neprekidne po p i po x za svako $x \in [a, b]$ i za svako $p \in \mathbb{P}$ tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački b i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $[a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna monotono opadajuća funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a+} g_1(x) = C \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b-} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$, pri čemu je $(A, C) \subseteq \mathbb{P}$,*
- (4) *postoji vrednost parametra $p = B \in (A, C)$ tako da je $\varphi_B(a) = 0$,*
- (5) *postoji leva okolina tačke b u kojoj važi da je $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) za svako $p \in (A, C)$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq A$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0).$$

(iii) *Ako je $p \geq B$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0))$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum (tj. minimum), na intervalu (a, b) u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (A, B)$ jednačine*

$$|\varphi_p(a)| = \varphi_p(t^{(p)}) \quad (\text{tj. } \varphi_p(a) = |\varphi_p(t^{(p)})|).$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije na intervalu (a, b) .

Greška aproksimacije je $d_0 = |\varphi_{p_0}(a)| = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)})$ (tj. $d_0 = \varphi_{p_0}(a) = |\varphi_{p_0}(t^{(p_0)})|$).

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.17. ■

Teorema 2.20 (Ogledalska verzija Teoreme 2.17) *Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija koje su neprekidne po p i po x za svako $x \in [a, b]$ i za svako $p \in \mathbb{P}$ tako da važe uslovi:*

- (1) *familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački b i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $[a, b)$ po parametru $p \in \mathbb{P}$,*
- (2) *funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna monotono rastuća funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$,*
- (3) *postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a^+} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} g_1(x) = C \in \mathbb{R}$, pri čemu je $(A, C) \subseteq \mathbb{P}$,*
- (4) *postoji vrednost parametra $p = B \in (A, C)$ tako da je $\varphi_B(a) = 0$,*
- (5) *postoji leva okolina tačke b u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) za svako $p \in (A, C)$.*

Tada je ispunjeno:

(i) *Ako je $p \leq B$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_B(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_B(x) > 0))$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (B, C)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iii) *Ako je $p \geq C$, tada je*

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_C(x) > 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_C(x) < 0))$$

i konstanta C je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum (tj. maksimum), na intervalu (a, b) u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje p_0 po parametru $p \in (B, C)$ jednačine*

$$\varphi_p(a) = \left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| \quad \left(\text{tj. } |\varphi_p(a)| = \varphi_p(t^{(p)}) \right).$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije na intervalu (a, b) .

Greška aproksimacije je $d_0 = \varphi_{p_0}(a) = \left| \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) \right|$ (tj. $d_0 = |\varphi_{p_0}(a)| = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)})$).

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.17. ■

Sledeća teorema važi u slučaju kada je funkcija g_1 rastuća i u rubnoj tački posmatranog intervala ima beskonačnu graničnu vrednost.

Teorema 2.21 Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b)$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija takva da važe uslovi:

- (1) familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana samo u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}$,
- (2) funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna monotono rastuća funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$,
- (3) postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a+} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b-} g_1(x) = +\infty$, pri čemu je $(A, +\infty) \subseteq \mathbb{P}$,
- (4) postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) za svako $p \in (A, +\infty)$ i leva okolina tačke b u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) za svako $p \in (A, +\infty)$.

Tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p > A$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi da je

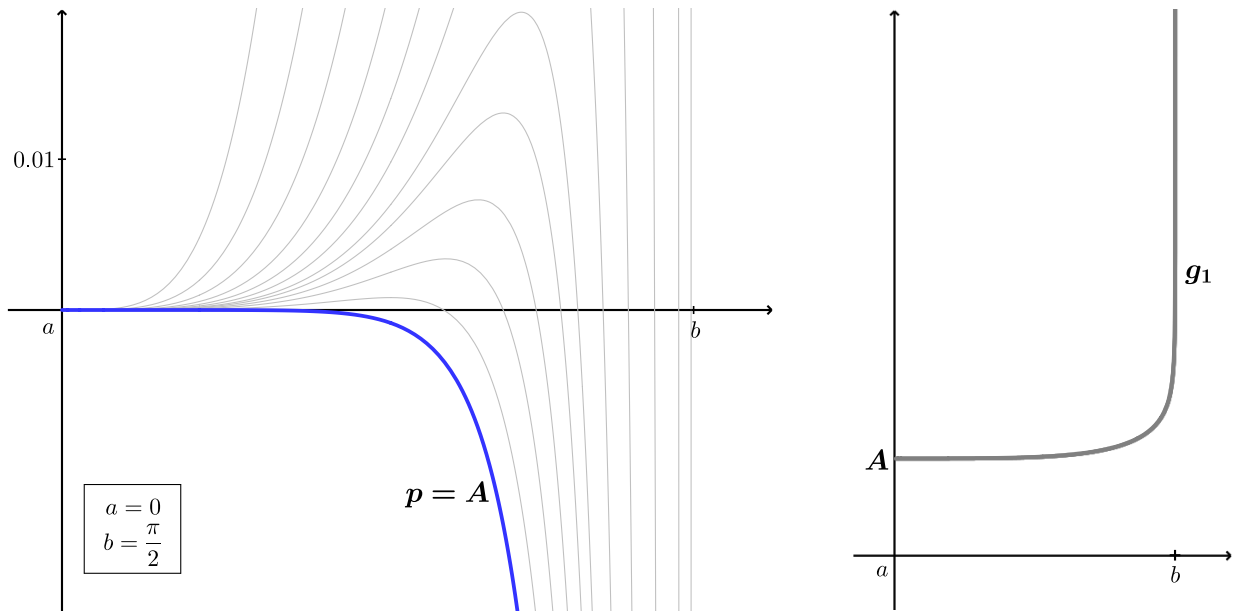
$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad (\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0).$$

(iii) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, +\infty)$, ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum (tj. minimum), na intervalu (a, b) u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

Dokaz. Razmotrimo slučaj kada je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ rastuće raslojena familija funkcija. Iz uslova (2) i (3) sledi da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, +\infty)$, imaju tačno jednu stacionarnu tačku na intervalu (a, b) , dok su funkcije $\varphi_p(x)$, $p \in \mathbb{P} \setminus (A, +\infty)$ monotone na intervalu (a, b) . Kako postoji leva okolina tačke b u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ za svako $p \in (A, +\infty)$, na osnovu rastuće raslojenosti familije je i $\varphi_A(x) < 0$ u levoj okolini tačke b . S obzirom na to da je familija kompresovana u tački a (uslov (1)) i da je funkcija $\varphi_A(x)$ monotona na intervalu (a, b) , važi da je $\varphi_A(x) < 0$ na intervalu (a, b) . Iz $\varphi_p(a) = 0$ za $p \in (A, +\infty)$ (uslov (1)) i uslova (2), (3) i (4) sledi da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, +\infty)$, imaju tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na intervalu (a, b) . Na osnovu rastuće raslojenosti familije funkcija, slede navedene nejednakosti. Analogan dokaz važi za opadajuće raslojenu familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$.



Slika 2.10: Neke funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ (videti Potpoglavlje 5.3) koja zadovoljava uslove Teorema 2.21 i odgovarajuća funkcija g_1 ■

Na sličan način se mogu formulirati teoreme za slučajeve kada je funkcija g_1 opadajuća i/ili kada je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ kompresovana samo u tački b .

Sledeća teorema važi u slučaju kada funkcija g_1 ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na posmatranom intervalu.

Teorema 2.22 Neka je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in \mathbb{I} = [a, b]$ i $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), familija funkcija takva da važe uslovi:

- (1) familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}$,
- (2) funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in \mathbb{P}$, diferencijabilne su na intervalu (a, b) i postoji neprekidna funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}$ koja ispunjava $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$ i koja je, za neko $x_m \in (a, b)$, rastuća na (a, x_m) i opadajuća na (x_m, b) ,
- (3) postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow a^+} g_1(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} g_1(x) = B_1 \in \mathbb{R}$ tako da je $A \leq B_1$, pri čemu je $(A, C_1) \subseteq \mathbb{P}$, gde je $C_1 = g_1(x_m)$,
- (4) funkcija $\varphi_{g_1(x)}(x)$ ima nulu u tački $x_0 \in (a, b)$ i za $C = g_1(x_0)$ postoji vrednost parametra $p = B \in (B_1, C)$ tako da je $\varphi_B(b) = 0$,
- (5) postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) za svako $p \in (A, C_1)$.

Tada je ispunjeno:

(i) Ako je $p \leq A$, tada je

$$(\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \leq \varphi_A(x) < 0) \quad (\text{tj. } (\forall x \in (a, b)) (\varphi_p(x) \geq \varphi_A(x) > 0))$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B]$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i važi:

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iii) Ako $p \in (B, C)$, tada jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima dva rešenja $x_0^{(p)} \in (a, b)$ i $x_1^{(p)} \in (a, b)$ i važi:

$$\left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(a, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, b \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \right)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) < 0 \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) \varphi_p(x) > 0 \right).$$

(iv) Ako je $p \geq C$, tada je

$$\left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \geq \varphi_C(x) \geq 0 \right) \quad \left(\text{tj. } \left(\forall x \in (a, b) \right) \left(\varphi_p(x) \leq \varphi_C(x) \leq 0 \right) \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

Dokaz. Razmotrimo slučaj kada je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ rastuće raslojena familija funkcija. Slučaj kada je $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ opadajuće raslojena familija funkcija se analogno razmatra.

Iz uslova (2) i (3) sledi da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B_1]$, imaju tačno jednu stacionarnu tačku na intervalu (a, b) , funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B_1, C_1)$, imaju tačno dve stacionarne tačke na intervalu (a, b) , dok su funkcije $\varphi_p(x)$, $p \in \mathbb{P} \setminus (A, C_1)$ monotone na intervalu (a, b) .

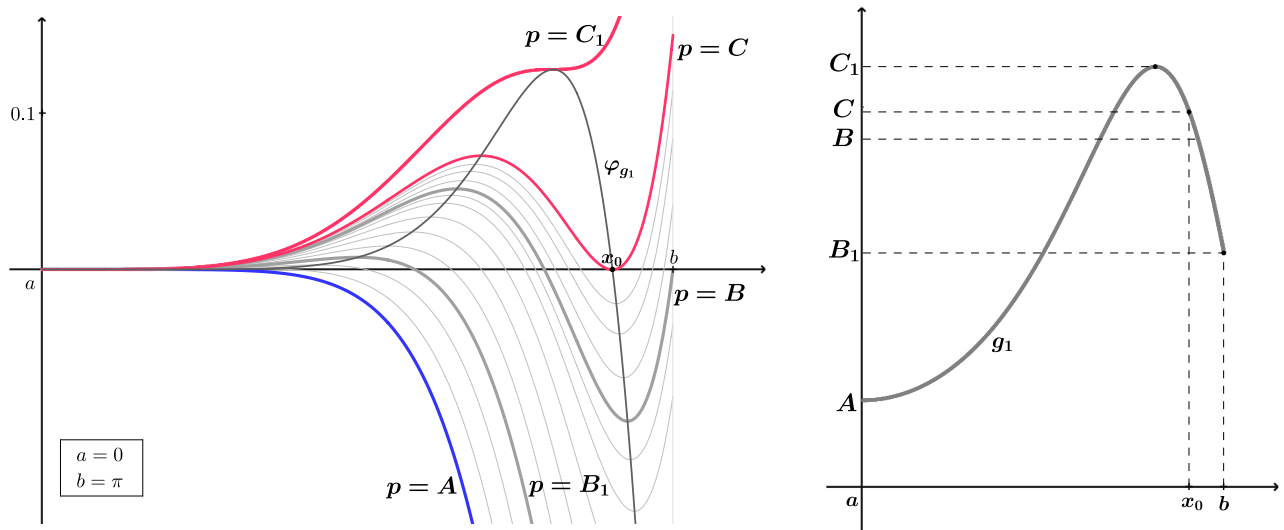
(i) Funkcija $\varphi_A(x)$ je monotona na intervalu (a, b) . Kako je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da je $\varphi_A(b) < 0$. Dodatno, s obzirom na to da važi da je $\varphi_A(a) = 0$ (uslov (1)), zaključujemo da je $\varphi_A(x) < 0$ na intervalu (a, b) i da na osnovu raslojenosti važe navedene nejednakosti.

(ii) Iz uslova (5) i kompresovanosti familije, sledi da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B] \subset (A, C_1)$, rastuće i pozitivne u desnoj okolini tačke a . S obzirom na to da je $\varphi_C(x_0) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da je $\varphi_B(x_0) < 0$. Kako je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)) i funkcija $\varphi_B(x)$ ima dve stacionarne tačke na intervalu (a, b) , zaključujemo da funkcija $\varphi_B(x)$ ima tačno jednu nulu na intervalu (a, b) . Iz $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, takođe zaključujemo da $(\forall p \in (A, B)) \varphi_p(b) < 0$. Razmotrimo dva podslučaja – kada $p \in (A, B_1]$ i kada $p \in (B_1, B)$.

U prvom podslučaju funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B_1]$, imaju tačno jednu stacionarnu tačku na intervalu (a, b) . S obzirom na to da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B_1]$, pozitivne i rastuće u desnoj okolini tačke a i negativne u tački b , zaključujemo da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B_1]$, imaju tačno jednu nulu na intervalu (a, b) .

U drugom podslučaju funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B_1, B)$, imaju tačno dve stacionarne tačke na intervalu (a, b) . S obzirom na to da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B_1, B)$, pozitivne i rastuće u desnoj okolini tačke a i negativne u tački b , na osnovu postojanja tačno dve stacionarne tačke, zaključujemo da ove funkcije imaju tačno jednu nulu na intervalu (a, b) .

Na osnovu prethodnog razmatranja, zaključujemo da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B]$, imaju tačno jednu nulu na intervalu (a, b) i da važe navedene nejednakosti.



Slika 2.11: Neke funkcije iz familije $\{\psi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ (videti Primer 2.10) koja zadovoljava uslove Teoreme 2.22 i odgovarajuća funkcija g_1

- (iii) Iz uslova (5) i kompresovanosti familije, sledi da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C) \subset (A, C_1)$, rastuće i pozitivne u desnoj okolini tačke a . Kako je $\varphi_C(x_0) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da $(\forall p \in (B, C)) \varphi_p(x_0) < 0$. Takođe, s obzirom na to da je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da $(\forall p \in (B, C)) \varphi_p(b) > 0$. Na osnovu prethodnog razmatranja i činjenice da funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, imaju tačno dve stacionarne tačke na intervalu (a, b) , zaključujemo da ove funkcije imaju tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum (i to tim redom) i dve nule na intervalu (a, b) i da važe navedene nejednakosti.
- (iv) Funkcija $\varphi_C(x)$ ima dve stacionarne tačke na intervalu (a, b) . Kako je $\varphi_B(b) = 0$ (uslov (4)), na osnovu rastuće raslojenosti familije, zaključujemo da je $\varphi_C(b) > 0$. Dodatno, s obzirom na to da važi da je $\varphi_C(a) = 0$ (uslov (1)), $\varphi_C(x) > 0$ u nekoj desnoj okolini tačke a (uslov (5)), $\varphi_C(x_0) = 0$, gde je x_0 stacionarna tačka funkcije $\varphi_C(x)$ (uslov (4)), zaključujemo da funkcija $\varphi_C(x)$ ima tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum (i to tim redom) na intervalu (a, b) i da na osnovu raslojenosti važe navedene nejednakosti. ■

U sledećem primeru navodimo jednu familiju koja zadovoljava uslove prethodne teoreme.

Primer 2.10 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ iz Podsekcije 5.1.3.1, definisana sa

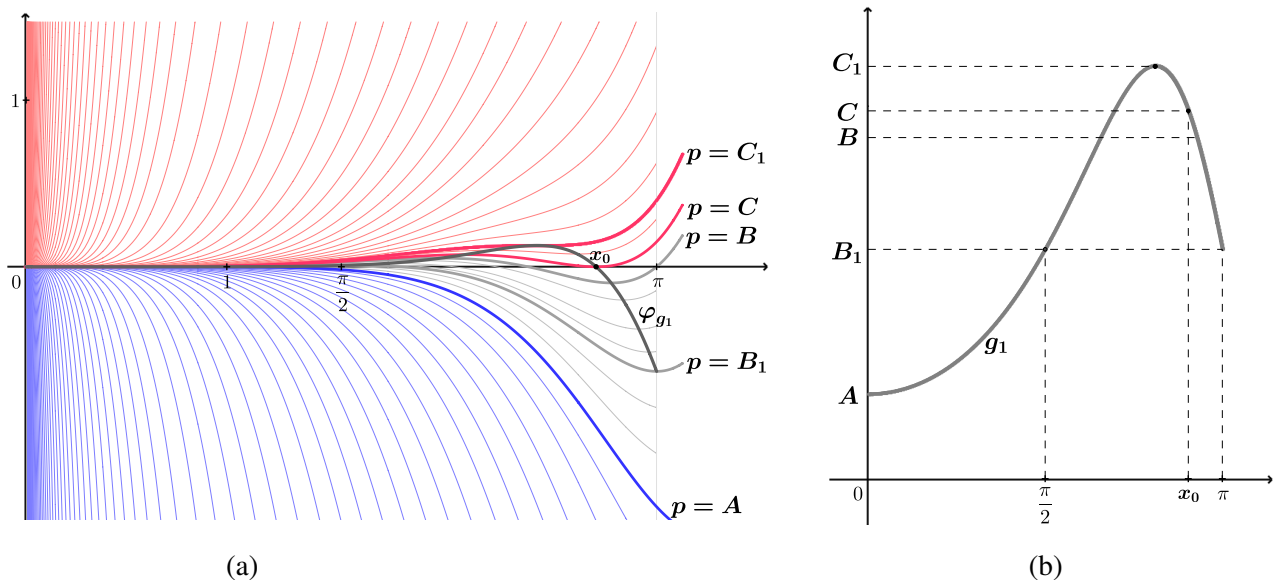
$$\varphi_p(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - px^5,$$

opadajuće je raslojena na intervalu $(0, \pi]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$ i ispunjava uslove prethodne teoreme. Uočimo familiju funkcija $\{\psi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, definisanu sa

$$\psi_p(x) = -\varphi_p(x), \quad (2.21)$$

koja je rastuće raslojena na intervalu $(0, \pi]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$ i takođe ispunjava uslove prethodne teoreme. Važi da je

$$\frac{\partial \psi_p(x)}{\partial x} = -\frac{(1 - \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2} + 5px^4 = 0 \iff p = g_1(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{5x^4(2 + \cos x)^2}. \quad (2.22)$$



Slika 2.12: (a) Familija funkcija definisana sa (2.21) za neke vrednosti parametra p
 (b) funkcija g_1 definisana sa (2.22) □

Analogno se mogu razmotriti slučajevi kada funkcija g_1 ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum, na posmatranom intervalu i/ili kada je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ kompresovana samo u tački b .

U Potpoglavljju 5.9 analiziramo jednu familiju funkcija na koju ne može da se primeni Parametarski metod bez upotrebe neke od specijalnih funkcija (na primer, Lambertove funkcije), ali može direktno da se primeni Novi parametarski metod. Takođe, analiziramo jednu familiju funkcija na koju ne može da se primeni Novi parametarski metod bez upotrebe neke od specijalnih funkcija (na primer, Lambertove funkcije), ali može direktno da se primeni Parametarski metod.

2.7 Neke strategije za primenu raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti

U teoriji analitičkih nejednakosti, jedan od osnovnih problema jeste dokazivanje nejednakosti

$$f(x) > 0 \quad (\text{tj. } f(x) < 0)$$

za $x \in (a, b)$, gde je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Jedan pristup za dokazivanje ovih nejednakosti jeste da se uoči familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $p \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{P} \neq \emptyset$), takva da je funkcija f član te familije za neku vrednost parametra p ([138], Poglavlje 2.14.6; [27, 108, 109, 114, 121–128, 133–136]).

Na primer, česte su nejednakosti oblika

$$h_1(x) + c_1 h_2(x) < \phi(x) \quad \text{ili} \quad \phi(x) < h_1(x) + c_2 h_2(x)$$

za $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, gde su date funkcije $h_1, h_2, \phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i realne konstante c_1 i c_2 , na osnovu kojih se može uvesti familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, za $x \in (a, b)$ i $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$, koja je definisana sa

$$\varphi_p(x) = \phi(x) - f(x) - p \cdot h(x).$$

Nekada je dato samo gornje ili samo donje ograničenje funkcije $\phi(x)$ zato što jedna od konstanti c_1 ili c_2 nije određena (videti teoreme 5.8, 5.24, 5.25 i 5.32) ili ne postoji (videti Teoremu 5.9 i Teoremu 5.18).

Uočavanje familije funkcija nekada nije očigledno (videti Sekciju 5.1.1).

Za mnoge nejednakosti može se uvesti i nekoliko raslojenih familija funkcija (videti Sekciju 5.7.3 i Potpoglavlje 5.8).

Kako bi se odredile obe strane nekih dvojnih nejednakosti, nekada je potrebno uvesti dvoparametarsku familiju funkcija (videti Sekciju 5.9.1). Dvoparametarske familije funkcija su uvedene i razmatrane i u napomenama 5.3, 5.4, 5.5, 5.11 i 5.13.

U sledećim sekcijama, na osnovu teorijskih rezultata iz sekcija 2.1–2.6, dajemo neke strategije za dokazivanje za koje vrednosti parametra p je

$$\varphi_p(x) > 0 \quad (\text{tj. } \varphi_p(x) < 0)$$

na intervalu (a, b) i za određivanje minimaks aproksimanta za familiju $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$.

Strategije su predstavljene nizom uslova koji su označeni sa „•” i „o”.

2.7.1 Strategija za određivanje najboljih konstanti u nejednakostima

Na osnovu Teoreme 2.2 i Teoreme 2.3 (Potpoglavlje 2.2), dajemo jednu strategiju za određivanje vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}$ za koje važi

$$\varphi_p(x) > 0 \quad (\text{tj. } \varphi_p(x) < 0)$$

na intervalu (a, b) .

Pretpostavimo da je familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana na segmentu $[a, b]$ tako da važi:

- (1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,
- (2) sve funkcije $\varphi_p(x)$ imaju Tejlorove razvoje, u tačkama a i b , takve da u razvojinama postoji bar jedan ne-nula koeficijent.

Strategija za određivanje najboljih konstanti sastoji se od sledećih koraka:

- Određujemo, ukoliko postoji, skup $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$ tako da je ispunjeno:
 - o familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je monotono raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}_0$,
 - o glavni koeficijenti Tejlorovih razvoja funkcije $\varphi_p(x)$ u tačkama a i b su monotone funkcije za $p \in \mathbb{P}_0$ i pri tome njihove nule $p_a, p_b \in \mathbb{P}_0$.
- Ako je $\varphi_{p_a}(x) > 0$ (tj. $\varphi_{p_a}(x) < 0$) na intervalu (a, b) , tada je *konstanta p_a najbolja moguća za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}_0$.*

Dodatno:

- o ako je familija rastuće raslojena, za svako $p > p_a$ (tj. za svako $p < p_a$) važi da je

$$x \in (a, b) \implies 0 < \varphi_{p_a}(x) < \varphi_p(x) \quad (\text{tj. } x \in (a, b) \implies 0 > \varphi_{p_a}(x) > \varphi_p(x)).$$
- o ako je familija opadajuće raslojena, za svako $p < p_a$ (tj. za svako $p > p_a$) važi da je

$$x \in (a, b) \implies 0 < \varphi_{p_a}(x) < \varphi_p(x) \quad (\text{tj. } x \in (a, b) \implies 0 > \varphi_{p_a}(x) > \varphi_p(x)).$$
- Ako je $\varphi_{p_b}(x) > 0$ (tj. $\varphi_{p_b}(x) < 0$) na intervalu (a, b) , tada je *konstanta p_b najbolja moguća za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}_0$.*

Dodatno:

- o ako je familija rastuće raslojena, za svako $p > p_b$ (tj. za svako $p < p_b$) važi da je

$$x \in (a, b) \implies 0 < \varphi_{p_b}(x) < \varphi_p(x) \quad (\text{tj. } x \in (a, b) \implies 0 > \varphi_{p_b}(x) > \varphi_p(x)).$$

- o ako je familija opadajuće raslojena, za svako $p < p_b$ (tj. za svako $p > p_b$) važi da je

$$x \in (a, b) \implies 0 < \varphi_{p_b}(x) < \varphi_p(x) \quad (\text{tj. } x \in (a, b) \implies 0 > \varphi_{p_b}(x) > \varphi_p(x)).$$

Prethodno opisana strategija je primenjena u [125] na nekim tipovima D'Aurizio-Sándor nejednakosti, kao i u [126] za uopštavanje nekih ograničenja funkcije sinc.

2.7.2 Strategija za dokazivanje nejednakosti zasnovana na Parametarskom metodu

Na osnovu teorema 2.12–2.16 (Potpoglavlje 2.5), dajemo jednu strategiju za ispitivanje znaka funkcija iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, tj. za dokazivanje odgovarajućih nejednakosti.

Strategija zasnovana na Parametarskom metodu sastoji se od sledećih koraka:

- Određujemo, ukoliko postoji, skup $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$ tako da važi:
 - o familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je monotono raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}_0$,
 - o postoji neprekidna funkcija $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{P}_0$ takva da $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$.
- Određujemo $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$, $\inf_{x \in (a, b)} g(x)$ i $\sup_{x \in (a, b)} g(x)$.
- Ako je funkcija g opadajuća na intervalu (a, b) , formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.12 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .
- Ako je funkcija g rastuća na intervalu (a, b) , formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.13 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .
- Ako funkcija g ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je minimum, na intervalu (a, b) , formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.14 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .
- Ako funkcija g ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na intervalu (a, b) , formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.15 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .
- Ako funkcija g ima više od jednog lokalnog ekstremuma na intervalu (a, b) , formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.16 za one vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$ za koje su funkcije $\varphi_p(x)$ stalnog znaka na intervalu (a, b)* .

Prethodno opisana strategija je primenjena u [124] na Cusa-Huygens nejednakosti, jednom tipu Wilker-ove nejednakosti i na dva tipa Mitrinović-Adamović nejednakosti i u [122] na jednom tipu Cusa-Huygens nejednakosti.

2.7.3 Strategija za određivanje minimaks aproksimanta primenom Nike teoreme

Na osnovu Teoreme 2.5 i Teoreme 2.8 (Potpoglavlja 2.3 i 2.4), dajemo jednu strategiju za određivanje minimaks aproksimanta za familiju $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde $x \in [a, b]$, za koju važi:

- (1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,
- (2) sve funkcije $\varphi_p(x)$ imaju Tejlorove razvoje, u tačkama a i b , takve da u razvojjima postoji bar jedan ne-nula koeficijent.

Strategija zasnovana na Nike teoremi sastoji se od sledećih koraka:

- Određujemo, ukoliko postoji, skup $\mathbb{P}_0 = [c, d] \subseteq \mathbb{P}$ tako da je ispunjeno:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i monotono raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_0$,
 - funkcije $\varphi_c(x)$ i $\varphi_d(x)$ su stalnog znaka na intervalu (a, b) , pri čemu je jedna funkcija pozitivna, a druga negativna,
 - funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (c, d)$, menjaju znak na intervalu (a, b) ,
- Određujemo najmanje $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$), ukoliko postoji, tako da važi

$$(\forall p \in \mathbb{P}_0) (\forall x \in (a, b)) \varphi_p^{(m)}(x) > 0$$

ili

$$(\forall p \in \mathbb{P}_0) (\exists x_m^{(p)}(a, b)) ((\forall x \in (a, x_m^{(p)})) (\varphi_p^{(m)}(x) > 0 \wedge (\forall x \in (x_m^{(p)}, b)) \varphi_p^{(m)}(x) < 0)).$$

- Dokazujemo (na osnovu Tejlorovog razvoja u tački a) da su funkcije $\varphi_p(x)$, $\varphi_p'(x)$, $\varphi_p''(x)$, ..., $\varphi_p^{(m-1)}(x)$ negativne u nekoj desnoj okolini tačke a .
- Dokazujemo (na osnovu Tejlorovog razvoja u tački b) da su funkcije $\varphi_p(x)$, $\varphi_p'(x)$, $\varphi_p''(x)$, ..., $\varphi_p^{(m-1)}(x)$ pozitivne u nekoj levoj okolini tačke b .
- Određujemo jedinstveno rešenje (p_0, x_0) sistema

$$-\varphi_p(x) = \varphi_p(b)$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$$

za $p \in (c, d)$ i $x \in (a, b)$.

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$ na intervalu (a, b) .

Prethodno opisana strategija je primenjena u [127] na Cusa-Huygens nejednakosti i na dve Sándor-ove nejednakosti, u [114] na jednom tipu Cusa-Huygens nejednakosti, u [27] na nekim Wilker-Cusa-Huygens nejednakostima i u [128] na nekim D'Aurizio-ovim nejednakostima. ■

Za familiju funkcija koja je kompresovana u tački b i monotono raslojena na intervalu $[a, b)$ po parametru $p \in \mathbb{P}_0$ može se formirati analogna strategija primenom Teorema 2.6 i 2.9, a može se analizirati i familija funkcija $\{\phi_p(t)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$, gde je $\phi_p(t) = \varphi_p(b-t)$, za $t \in (0, b-a]$.

U slučaju kada funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (c, d)$, imaju tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na intervalu (a, b) , takođe se može formirati analogna strategija. Alternativno, može se razmatrati familija funkcija $\{\psi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$, gde je $\psi_p(x) = -\varphi_p(x)$ za $x \in (a, b)$.

2.7.4 Strategija za dokazivanje nejednakosti i određivanje minimaks aproksimanta zasnovana na Novom parametarskom metodu

Na osnovu Teoreme 2.17 i Teoreme 2.18 (Potpoglavlje 2.6), dajemo jednu strategiju za ispitivanje znaka funkcija iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, tj. za dokazivanje odgovarajućih nejednakosti, i za određivanje minimaks aproksimanta familije.

Pretpostavimo da je familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ definisana na segmentu $[a, b]$ tako da važi:

- (1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,
- (2) sve funkcije $\varphi_p(x)$ imaju Tejlorove razvoje u tački a takve da u razvojmima postoji bar jedan ne-nula koeficijent.

Strategija zasnovana na Novom parametarskom metodu sastoji se od sledećih koraka:

- Određujemo, ukoliko postoji, skup $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$ tako da je ispunjeno:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i rastuće (tj. opadajuće) raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_0$,
 - postoji neprekidna funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}_0$ takva da $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$.
- Ako je g_1 monotona funkcija na intervalu (a, b) , određujemo vrednosti $A = \inf_{x \in (a, b)} g_1(x)$ i $C = \sup_{x \in (a, b)} g_1(x)$.
- Određujemo, ako postoji, jedinstvenu vrednost parametra $p = B \in (A, C)$ takvu da je $\varphi_B(b) = 0$.
- Ispitujemo, na osnovu glavnog koeficijenta Tejlorovog razvoja $\varphi_p(x)$ u tački a , znak funkcija $\varphi_p(x)$ u desnoj okolini tačke a za $p \in (A, C)$.
- Ako je funkcija g_1 opadajuća na intervalu (a, b) i ako postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ (tj. $\varphi_p(x) > 0$) za svako $p \in (A, C)$, formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.17 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .

Određujemo jedinstveno rešenje (p_0, x_0) sistema

$$-\varphi_p(x) = \varphi_p(b) \quad (\text{tj. } \varphi_p(x) = -\varphi_p(b))$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$$

za $p \in (B, C)$ i $x \in (a, b)$.

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$ na intervalu (a, b) .

- Ako je funkcija g_1 rastuća na intervalu (a, b) i ako postoji desna okolina tačke a u kojoj važi da je $\varphi_p(x) > 0$ (tj. $\varphi_p(x) < 0$) za svako $p \in (A, C)$, formiramo *odgovarajuće nejednakosti iz Teoreme 2.18 za sve vrednosti parametra $p \in \mathbb{P}_0$* .

Određujemo jedinstveno rešenje (p_0, x_0) sistema

$$\varphi_p(x) = -\varphi_p(b) \quad (\text{tj. } -\varphi_p(x) = \varphi_p(b))$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$$

za $p \in (A, B)$ i $x \in (a, b)$.

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$ na intervalu (a, b) .

Prethodno opisana strategija je primenjena u [135] na Cusa-Huygens nejednakosti i na jednom tipu Mitrinović-Adamović nejednakosti. ■

Za familiju funkcija koja je kompresovana u tački b i monotono raslojena na intervalu $[a, b)$ po parametru $p \in \mathbb{P}_0$ može se formirati analogna strategija primenom Teoreme 2.19 i Teoreme 2.20. Ta strategija je primenjena u [133, 135] na jednom tipu Jordan-ove nejednakosti.

Za slučajeve kada funkcija g_1 ima beskonačnu graničnu vrednost u rubnoj tački posmatranog intervala ili tačno jedan ekstremum na posmatranom intervalu, može se na analogan način formirati strategija za dokazivanje nejednakosti.

Poglavlje 3

Neka poboljšanja i uopštenja metoda za dokazivanje nejednakosti svodenjem na polinomske nejednakosti

U ovom poglavlju metod za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3 proširujemo na neke nove klase analitičkih nejednakosti.

3.1 Neke dopune metoda za dokazivanje MTP nejednakosti

3.1.1 Neka poboljšanja Leme 1.1 i Leme 1.2

Sledeća teorema daje proširenje intervala na kom važe navišne i nanižne polinomske aproksimacije sinusne funkcije iz Leme 1.1.

Teorema 3.1 *Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

važi:

(i) *Ukoliko je $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$(\forall x \in (0, +\infty)) T_n(x) > \sin x$$

i

$$(\forall x \in (-\infty, 0)) T_n(x) < \sin x.$$

(ii) *Ukoliko je $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$(\forall x \in (0, +\infty)) T_n(x) < \sin x$$

i

$$(\forall x \in (-\infty, 0)) T_n(x) > \sin x.$$

Dokaz.

(i) Precizirajmo: oznaka $T_n(x)$ je zamena za $T_n^{\sin,0}(x)$. Takođe, u dokazu ćemo koristiti i oznaku $T_n^{\cos,0}(x)$.

Uočimo funkciju

$$F_n(x) = T_n^{\sin,0}(x) - \sin x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Za ovu funkciju važi da je

$$F_n^{(2j)}(x) = (-1)^j \left(T_{n-2j}^{\sin,0}(x) - \sin x \right)$$

za $j \leq \frac{n}{2}$ i

$$F_n^{(2j+1)}(x) = (-1)^j \left(T_{n-2j-1}^{\cos,0}(x) - \cos x \right)$$

za $j \leq \frac{n-1}{2}$, gde $j \in \mathbb{N}_0$.

Važi da je

$$F_{4k+1}^{(4k)}(x) = x - \sin x$$

za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Evidentno je $F_{4k+1}^{(4k)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Dakle, sledi da je funkcija $F_{4k+1}^{(4k-1)}(x)$ rastuća na intervalu $(0, +\infty)$. Kako je $F_{4k+1}^{(4k-1)}(0) = 0$, važi da je $F_{4k+1}^{(4k-1)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Nastavljajući ovaj postupak, s obzirom na to da je $F_n^{(2j)}(0) = 0$ i $F_n^{(2j+1)}(0) = 0$, zaključujemo da je i $F_{4k+1}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$, tj. da je

$$(\forall x \in (0, +\infty)) \quad T_{4k+1}^{\sin,0}(x) > \sin x.$$

Slučaj kada $x \in (-\infty, 0)$ sledi na osnovu činjenice da je funkcija $F_n(x)$ neparna.

(ii) Dokaz je analogan dokazu dela (i), pri čemu se razmatra funkcija

$$F_{4k+3}^{(4k+2)}(x) = -x + \sin x,$$

gde $k \in \mathbb{N}_0$, koja je evidentno opadajuća i negativna na intervalu $(0, +\infty)$. ■

U sledeće dve teoreme preciziramo poredak Tejlorovih razvoja sinusne funkcije iz Leme 1.1.

Teorema 3.2 *Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

važi:

(i) *Ukoliko je $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$(\forall x \in (-\infty, -\sqrt{(n+3)(n+4)}) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) \quad T_n(x) > T_{n+4}(x) \quad (3.1)$$

i

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (\sqrt{(n+3)(n+4)}, +\infty)) \quad T_n(x) < T_{n+4}(x). \quad (3.2)$$

Za $x = 0$ ili $x = \pm \sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi da je $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

(ii) Ukoliko je $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (-\infty, -\sqrt{(n+3)(n+4)}) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) T_n(x) < T_{n+4}(x) \quad (3.3)$$

i

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (\sqrt{(n+3)(n+4)}, +\infty)) T_n(x) > T_{n+4}(x). \quad (3.4)$$

Za $x = 0$ ili $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi da je $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

Dokaz. Dokažimo nejednakost (3.1). Važi da je $T_{4k+1}(x) > T_{4k+5}(x)$, tj. da je

$$\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} - \frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!} > 0$$

za $x \in (-\infty, -\sqrt{(4k+4)(4k+5)}) \cup (0, \sqrt{(4k+4)(4k+5)})$. Nejednakosti (3.2), (3.3) i (3.4) se slično dokazuju. ■

Teorema 3.3 Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

važi:

(i) Ukoliko je $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > T_{n+8}(x) > \dots > \sin x) \quad (3.5)$$

i

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0)) (T_n(x) < T_{n+4}(x) < T_{n+8}(x) < \dots < \sin x). \quad (3.6)$$

(ii) Ukoliko je $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) < T_{n+4}(x) < T_{n+8}(x) < \dots < \sin x) \quad (3.7)$$

i

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0)) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > T_{n+8}(x) > \dots > \sin x). \quad (3.8)$$

(iii) Za $x \in (0, \sqrt{20}) = (0, 4.472\dots)$ i $k \in \mathbb{N}_0$ važi da je

$$T_3(x) < T_7(x) < \dots < T_{4k+3}(x) < \dots < \sin x < \dots < T_{4k+1}(x) < \dots < T_5(x) < T_1(x) = x.$$

Dokaz. Dokažimo nejednakost (3.5) indukcijom. Na osnovu Leme 1.1, važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > \sin x).$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $\ell \in \mathbb{N}$, tj. da važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > \underbrace{T_{n+8}(x) > \dots > T_{n+4\ell}(x)}_{(\ell+1)} > \sin x).$$

Dokažimo induktivni korak, tj. da za $\ell + 1$ važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > \underbrace{T_{n+8}(x) > \dots > T_{n+4\ell}(x) > T_{n+4\ell+4}(x)}_{(\ell+2)} > \sin x). \quad (3.9)$$

Na osnovu Leme 1.1, važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+4\ell+3)(n+4\ell+4)})) (T_{n+4\ell}(x) > T_{n+4\ell+4}(x) > \sin x).$$

S obzirom na to da je $\sqrt{(n+4\ell+3)(n+4\ell+4)} > \sqrt{(n+3)(n+4)}$, zaključujemo da važi tvrđenje (3.9). Dakle, na osnovu matematičke indukcije, važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > T_{n+8}(x) > T_{n+12}(x) > \dots > \sin x).$$

Nejednakosti (3.6), (3.7) i (3.8) se slično dokazuju. Tvrđenje (iii) sledi iz (i) i (ii). ■

Napomena 3.1 Za zadati interval $(0, b) \subset \mathbb{R}^+$ može se odrediti najmanje $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tako da (3.5) važi na tom intervalu. Iz $b < \sqrt{(4k+4)(4k+5)}$, dobijamo da za

$$k \geq \max \left(\left\lceil \frac{\sqrt{4b^2+1}-9}{8} \right\rceil, 0 \right),$$

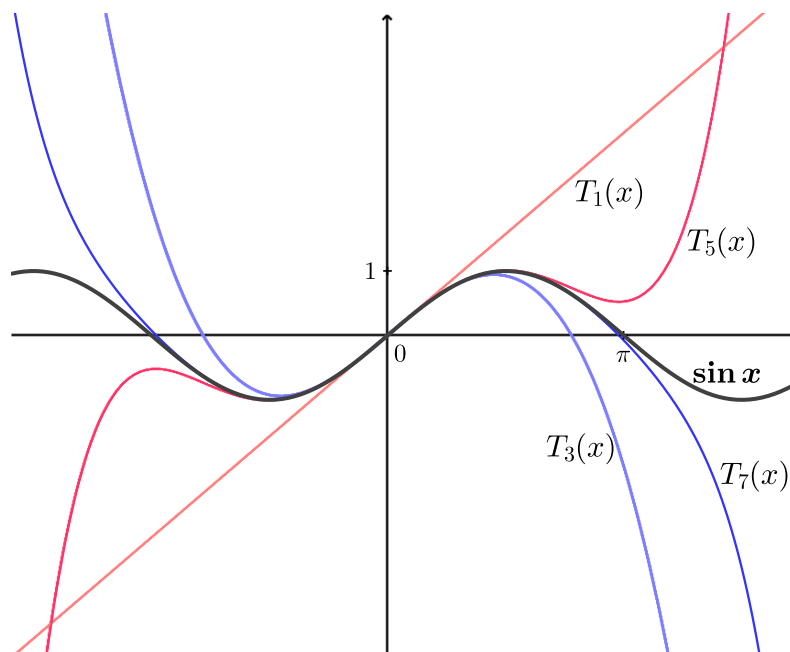
tj. da za

$$n \geq 4 \cdot \max \left(\left\lceil \frac{\sqrt{4b^2+1}-9}{8} \right\rceil, 0 \right) + 1,$$

važi (3.5) na intervalu $(0, b)$.

Na sličan način se može odrediti najmanje n za koje formule (3.6), (3.7) i (3.8) važe na intervalu $(0, b)$.

Ovakvo određivanje stepena n rađeno je i u [24].



Slika 3.1: Neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije iz Teoreme 3.1 za sinusnu funkciju ■

U sledećoj teoremi dajemo proširenje intervala na kom važe navišne i nanižne polinomske aproksimacije kosinusne funkcije iz Leme 1.2.

Teorema 3.4 *Za Tejlorov razvoj kosinusne funkcije*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

važi:

(i) *Ukoliko je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad T_n(x) \geq \cos x,$$

pri čemu jednakost $T_n(x) = \cos x$ važi samo u tački $x = 0$.

(ii) *Ukoliko je $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad T_n(x) \leq \cos x,$$

pri čemu jednakost $T_n(x) = \cos x$ važi samo u tački $x = 0$.

Dokaz.

(i) Precizirajmo: oznaka $T_n(x)$ je zamena za $T_n^{\cos,0}(x)$. Takođe, u dokazu ćemo koristiti i oznaku $T_n^{\sin,0}(x)$.

Uočimo funkciju

$$F_n(x) = T_n^{\cos,0}(x) - \cos x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Za ovu funkciju važi da je

$$F_n^{(2j)}(x) = (-1)^j \left(T_{n-2j}^{\cos,0}(x) - \cos x \right)$$

za $j \leq \frac{n}{2}$ i

$$F_n^{(2j+1)}(x) = (-1)^{j+1} \left(T_{n-2j-1}^{\sin,0}(x) - \sin x \right)$$

za $j \leq \frac{n-1}{2}$, gde $j \in \mathbb{N}_0$.

Važi da je

$$F_{4k}^{(4k-1)}(x) = x - \sin x$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Evidentno je $F_{4k}^{(4k-1)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Dakle, sledi da je funkcija $F_{4k}^{(4k-2)}(x)$ rastuća na intervalu $(0, +\infty)$. Kako je $F_{4k}^{(4k-2)}(0) = 0$, važi da je $F_{4k}^{(4k-2)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Nastavljajući ovaj postupak, s obzirom na to da je $F_n^{(2j)}(0) = 0$ i $F_n^{(2j+1)}(0) = 0$, zaključujemo da je i $F_{4k}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$, tj. da je

$$(\forall x \in (0, +\infty)) \quad T_{4k}^{\cos,0}(x) > \cos x.$$

Slučaj kada $x \in (-\infty, 0)$ sledi na osnovu činjenice da je funkcija $F_n(x)$ parna.

(ii) Dokaz je analogan dokazu dela (i), pri čemu se razmatra funkcija

$$F_{4k+2}^{(4k+1)}(x) = -x + \sin x,$$

gde $k \in \mathbb{N}_0$, koja je evidentno opadajuća i negativna na intervalu $(0, +\infty)$. ■

U sledeće dve teoreme preciziramo poredak Tejlorovih razvoja kosinusne funkcije iz Leme 1.2.

Teorema 3.5 Za Tejlorov razvoj kosinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

važi:

(i) Ukoliko je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) T_n(x) > T_{n+4}(x)$$

i

$$(\forall x \in (-\infty, -\sqrt{(n+3)(n+4)}) \cup (\sqrt{(n+3)(n+4)}, +\infty)) T_n(x) < T_{n+4}(x).$$

Za $x = 0$ ili $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi da je $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

(ii) Ukoliko je $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) T_n(x) < T_{n+4}(x)$$

i

$$(\forall x \in (-\infty, -\sqrt{(n+3)(n+4)}) \cup (\sqrt{(n+3)(n+4)}, +\infty)) T_n(x) > T_{n+4}(x).$$

Za $x = 0$ ili $x = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi da je $T_n(x) = T_{n+4}(x)$.

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 3.2 ■

Teorema 3.6 Za Tejlorov razvoj kosinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

važi:

(i) Ukoliko je $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) > T_{n+4}(x) > T_{n+8}(x) > \dots > \cos x).$$

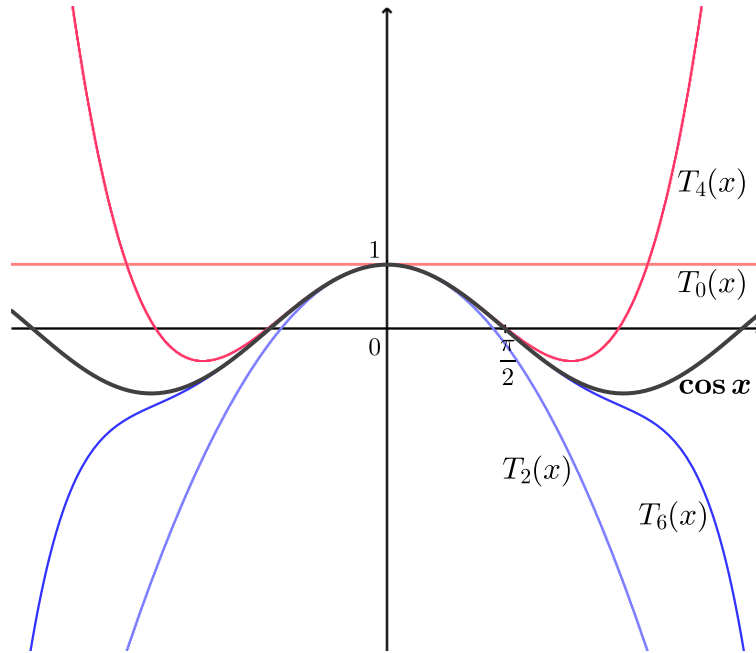
(ii) Ukoliko je $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0) \cup (0, \sqrt{(n+3)(n+4)})) (T_n(x) < T_{n+4}(x) < T_{n+8}(x) < \dots < \cos x).$$

(iii) Za $x \in (0, \sqrt{12}) = (0, 3.464\dots)$ i $k \in \mathbb{N}_0$ važi da je

$$T_2(x) < T_6(x) < \dots < T_{4k+2}(x) < \dots < \cos x < \dots < T_{4k}(x) < \dots < T_4(x) < T_0(x) = 1.$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 3.3. ■



Slika 3.2: Neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije iz Teoreme 3.4 za kosinusnu funkciju

3.1.2 Dokazivanje nekih uopštenja MTP nejednakosti

Za određivanje nanižnih i navišnih polinomske aproksimacije za funkcije $\cos(\tau x)$ i $\sin(\tau x)$, gde $\tau \in \mathbb{R}$, mogu se, prema [125], koristiti Lema 1.1 i Lema 1.2, tj. Teorema 3.1 i Teorema 3.4.

Neka je

$$\phi_\tau(x) = \phi(\tau x),$$

gde je $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $\tau \in \mathbb{R}$. Za svaki $\tau \in \mathbb{R}$ važi da je

$$T_n^{\phi_\tau, 0}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_\tau^{(i)}(x)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^n \frac{\phi^{(i)}(x) \tau^i}{i!} x^i = T_n^{\phi, 0}(\tau x).$$

Jednakost

$$T_n^{\phi_\tau, 0}(x) = T_n^{\phi, 0}(\tau x) \quad (3.10)$$

za $\tau \in \mathbb{R}$, za izbor $\phi = \cos$ ili $\phi = \sin$, omogućava nam određivanje navišnih i nanižnih polinomske aproksimacije za funkcije $\cos(\tau x)$ i $\sin(\tau x)$ korišćenjem Teoreme 3.1 i Teoreme 3.4.

Dakle, na isti način kao što se dokazuju MTP nejednakosti, može se dokazivati i jedno *uopštenje MTP nejednakosti* oblika

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i}(\tau_i x) \sin^{r_i}(\tau_i x) > 0 \quad (3.11)$$

za $x \in (0, b) \subset \mathbb{R}^+$, gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$ i $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$. Ne-nula funkciju sa desne strane nejednakosti (3.11) nazivamo *uopštenom MTP funkcijom*. Pri tome, ako je $\tau_i \in \mathbb{Q}$, uopštena MTP funkcija se odgovarajućom smenom može svesti na MTP funkciju. ■

Metod za dokazivanje MTP nejednakosti moguće je primeniti i na uopštenja MTP funkcija koja sadrže sabirke oblika

$$\alpha x^p \prod_{j=1}^m \cos^{q_j}(\mu_j x + a_j) \sin^{r_j}(\nu_j x + b_j), \quad (3.12)$$

gde je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu_j, \nu_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ i $p, q_j, r_j \in \mathbb{N}_0$, jer se primenom dobro poznatih formula za proizvod trigonometrijskih funkcija i adicijonih formula sabirci oblika (3.12) mogu svesti na zapis preko trigonometrijskih funkcija „višestrukih” uglova.

3.1.3 Dokazivanje nejednakosti na proizvoljnom konačnom intervalu

U ovoj sekciji uopštavamo metod za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3 tako da se mogu dokazati MTP nejednakosti

$$f(x) > 0$$

ne samo na intervalu $(0, b) \subset \mathbb{R}^+$ već i na proizvoljnom konačnom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$. Na sličan način bi se moglo razmotriti i dokazivanje nejednakosti na proizvoljnom konačnom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, kao i dokazivanje uopštenja MTP nejednakosti koja su razmatrana u prethodnoj sekciji.

Primitimo da su MTP funkcije definisane za svako $x \in \mathbb{R}$, a samim tim i u tačkama a i b .

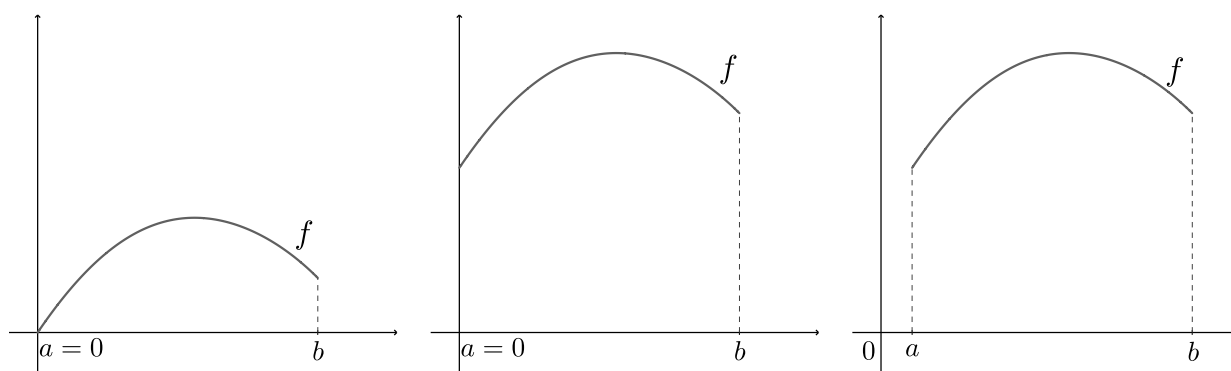
Prvo razmatramo slučaj kada je $f(b) > 0$. U okviru ovog slučaja analiziraćemo podslučajeve $a = 0$, $a > 0$, $f(a) = 0$ i $f(a) > 0$.

Metod za dokazivanje MTP nejednakosti svođenjem na polinomsku nejednakost moguće je direktno primeniti, prema teorijskim rezultatima iz Potpoglavlja 1.3, u sledeća tri slučaja:

Slučaj 1.1. $a = 0$, $f(a) = 0$ i $f(b) > 0$

Slučaj 1.2. $a = 0$, $f(a) > 0$ i $f(b) > 0$

Slučaj 1.3.¹ $a > 0$, $f(a) > 0$ i $f(b) > 0$



Slika 3.3: Primeri nekih funkcija na koje se može primeniti metod za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3

U sledećem primeru pokazujemo da u slučaju kada je $a > 0$, $f(a) = 0$ i $f(b) > 0$ primenom metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3 dobijamo nanižne polinomske aproksimacije koje nisu pozitivne na intervalu (a, b) .

Primer 3.1 Za funkciju $f(x) = \sin x$ i za $x \in (a, b) = (2\pi, \frac{5\pi}{2})$ važi da je $a > 0$, $f(a) = 0$ i $f(b) > 0$.

Nanižne polinomske aproksimacije za funkciju $f(x)$ na intervalu $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$ su

$$P_\ell(x) = T_{4\ell+3}^{\sin, 0}(x),$$

gde $\ell \in \mathbb{N}_0$. Na osnovu Teoreme 3.1, važi da je

$$P_\ell(a) < f(a) = \sin 2\pi = 0$$

za svako $\ell \in \mathbb{N}_0$ i zato ne postoji vrednost indeksa ℓ takva da je $P_\ell(x) > 0$ u desnoj okolini tačke $a = 2\pi$, što pokazuje da se primenom metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3 dobijaju nanižne polinomske aproksimacije koje nisu pozitivne na posmatranom intervalu (a, b) . \square

¹ Određivanjem nanižnih polinomskih aproksimacija na širem intervalu $(0, b)$ ujedno određujemo i nanižne polinomske aproksimacije na intervalu (a, b) .

U opštem slučaju, za proizvoljnu MTP funkciju $f(x)$, u slučaju kada je $a > 0$, $f(a) = 0$ i $f(b) > 0$, primenom metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3 dobijaju se nanižne polinomske aproksimacije koje nisu pozitivne na intervalu (a, b) .

Razmotrimo na kraju:

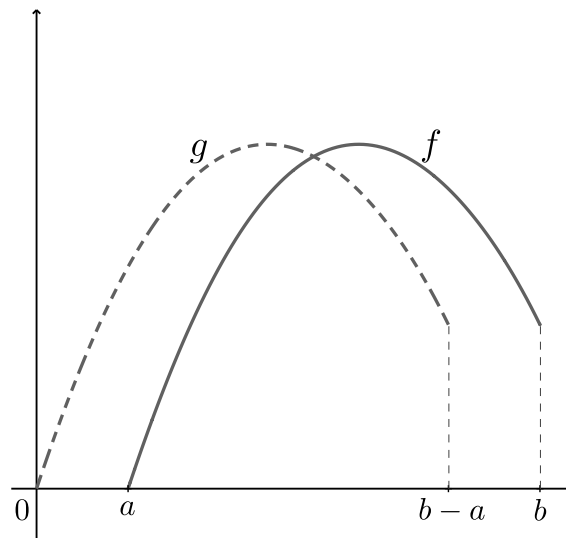
Slučaj 1.4. $a > 0$, $f(a) = 0$ i $f(b) > 0$

Uvođenjem smene $x = t + a$ vrši se translacija funkcije f u koordinatni početak. Na taj način formiramo funkciju $g(t) = f(t + a)$, čime se nejednakost $f(x) > 0$ za $x \in (a, b)$ svodi na nejednakost

$$g(t) > 0, \text{ za } t \in (0, b - a).$$

Funkcija $g(t)$ se, primenom adicionih formula, može transformisati u MTP funkciju, čime se prethodna nejednakost svodi na slučaj **1.1**.

Prehodno opisani pristup za dokazivanje nejednakosti zvaćemo *Dokazivanje translacijom*.



Slika 3.4: Primer funkcije na koju se primenjuje Dokazivanje translacijom

U sledećem primeru, primenom pristupa Dokazivanje translacijom, dokazujemo nejednakost iz prethodnog primera.

Primer 3.2 Nejednakost

$$f(x) = \sin x > 0$$

za $x \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$ se uvođenjem smene $x = t + 2\pi$ svodi na nejednakost

$$g(t) = f(t + 2\pi) = \sin(t + 2\pi) = \sin t > 0$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $g(t)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$P(t) = T_3^{g,0}(t) = -\frac{t^3}{3!} + t.$$

Važi da je $P(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, odakle je $g(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana i nejednakost $f(x) > 0$ na intervalu $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$. \square

Primetimo da se u slučaju kada je $a > 0$, $f(a) > 0$ i $f(b) > 0$ može primeniti metod za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3, a takođe i pristup Dokazivanje translacijom, što ilustrujemo u sledećem primeru.

Primer 3.3 Dokažimo da je

$$f(x) = \sin x > 0$$

za $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}^+$ za sledeće izbore intervala:

(i) $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

(ii) $(a, b) = (20, 21)$.

Dokaz:

(i) $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Primena metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3. Jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $f(x)$ na intervalu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je

$$P(x) = T_3^{f,0}(x) = -\frac{x^3}{3!} + x.$$

Važi da je $P(x) > 0$ na intervalu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, odakle je i $f(x) > 0$ na intervalu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dokazivanje translacijom. Uvođenjem smene $x = t + \frac{1}{2}$, nejednakost $f(x) > 0$ za $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se svodi na nejednakost

$$g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\right) = \cos\frac{1}{2}\sin t + \sin\frac{1}{2}\cos t > 0, \text{ za } t \in \left(0, \frac{\pi-1}{2}\right).$$

Jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $g(t)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi-1}{2}\right)$ je

$$\begin{aligned} P(t) &= \cos\frac{1}{2}T_3^{\sin,0}(t) + \sin\frac{1}{2}T_2^{\cos,0}(t) = \\ &= \cos\frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3!}\right) + \sin\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) = -\frac{\cos\frac{1}{2}}{3!}t^3 - \frac{\sin\frac{1}{2}}{2!}t^2 + \cos\frac{1}{2}t + \sin\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme se može dokazati da je $P(t) > 0$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi-1}{2}\right)$, odakle je $g(t) > 0$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi-1}{2}\right)$, čime je dokazana i nejednakost $f(x) > 0$ na intervalu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

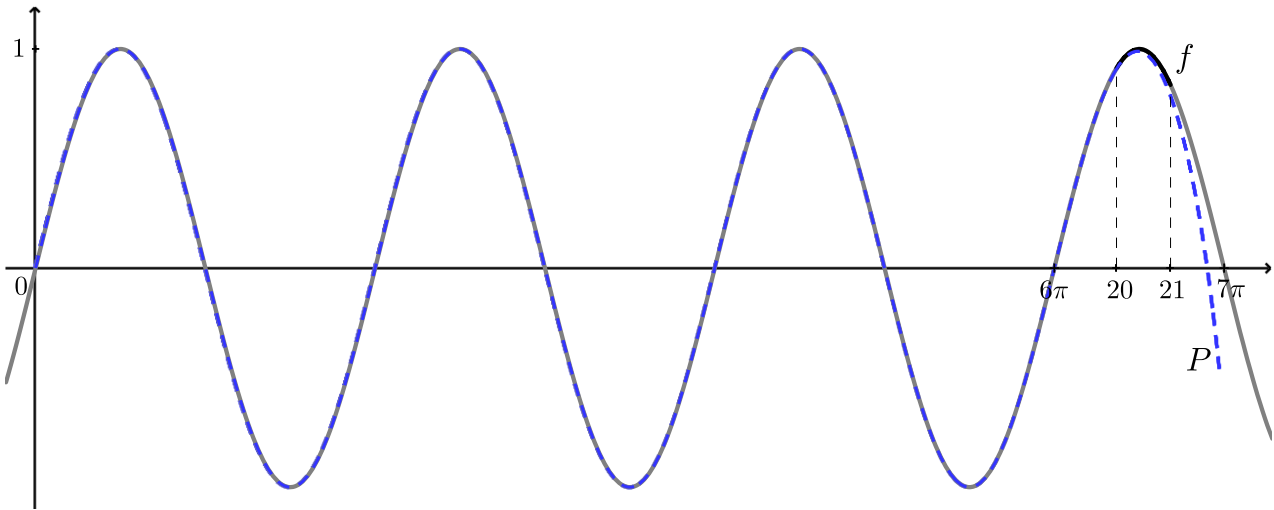
(ii) $(a, b) = (20, 21)$

Primena metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3. Jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $f(x)$ na intervalu $(20, 21)$ je

$$P(x) = T_{55}^{f,0}(x) = \sum_{i=0}^{27} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}.$$

Primenom Šturmove teoreme se može dokazati da je $P(x) > 0$ na intervalu $(20, 21)$, odakle je i $f(x) > 0$ na intervalu $(20, 21)$. Napomenimo da je stepen² 55 Tejlorovog razvoja $T_{55}^{f,0}(x)$ najmanji mogući stepen za koji je $P(x) > 0$ na intervalu $(20, 21)$.

² O poretku Tejlorovih razvoja biće reči u Sekciji 4.1.3.

Slika 3.5: Funkcija f i polinomska aproksimacija P

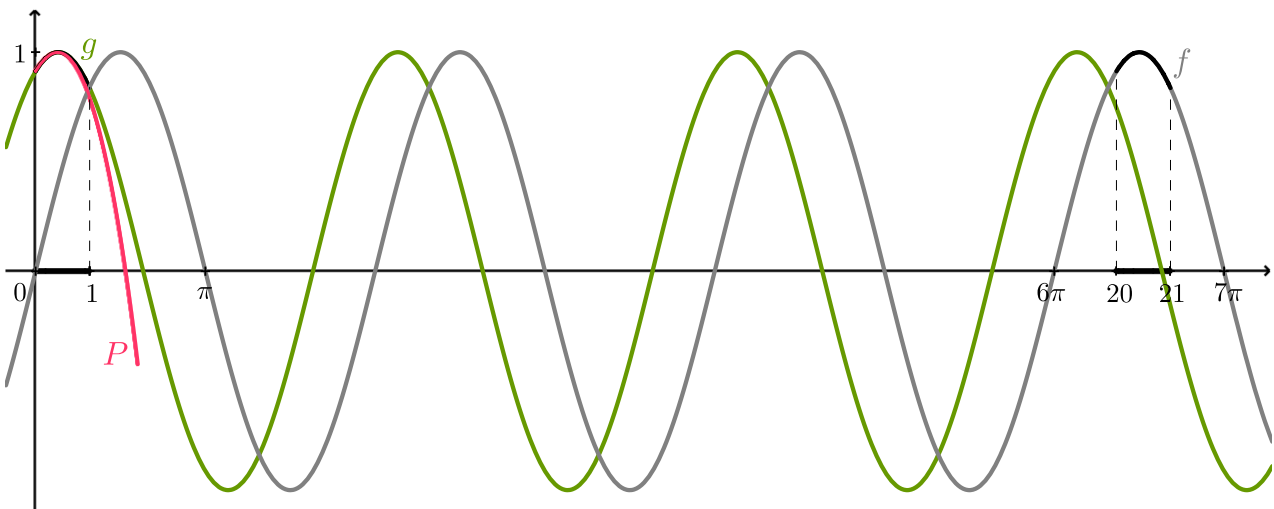
Dokazivanje translacijom. Uvođenjem smene $x = t + 20$, nejednakost $f(x) > 0$ za $x \in (20, 21)$ se svodi na nejednakost

$$g(t) = f(t + 20) = \sin(t + 20) = \cos 20 \sin t + \sin 20 \cos t > 0, \text{ za } t \in (0, 1).$$

Jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju $g(t)$ na intervalu $(0, 1)$ je

$$\begin{aligned} P(t) &= \cos 20 T_3^{\sin, 0}(t) + \sin 20 T_2^{\cos, 0}(t) = \\ &= \cos 20 \left(t - \frac{t^3}{3!} \right) + \sin 20 \left(1 - \frac{t^2}{2!} \right) = -\frac{\cos 20}{3!} t^3 - \frac{\sin 20}{2!} t^2 + \cos 20 t + \sin 20. \end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme se može dokazati da je $P(t) > 0$ na intervalu $(0, 1)$, odakle je $g(t) > 0$ na intervalu $(0, 1)$, čime je dokazana i nejednakost $f(x) > 0$ na intervalu $(20, 21)$.

Slika 3.6: Funkcije f i g i polinomska aproksimacija P

□

U nastavku razmatramo dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu (a, b) u slučaju kada je $f(b) = 0$. U okviru ovog slučaja razmotrićemo podslučajeve $f(a) > 0$ i $f(a) = 0$:

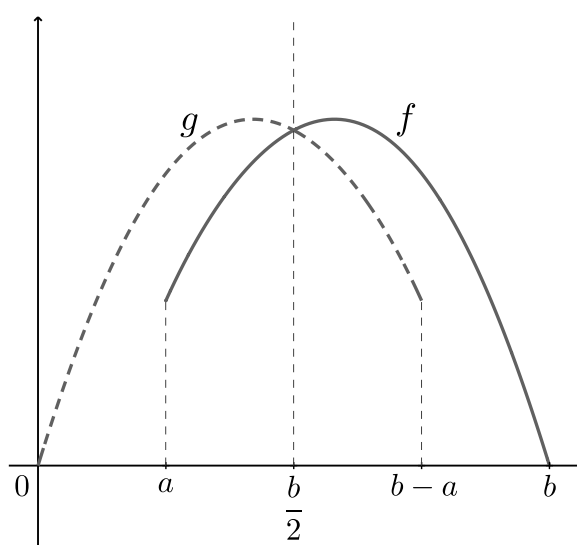
Slučaj 2.1. $f(a) > 0$ i $f(b) = 0$

Na osnovu teorijskih rezultata iz Potpoglavlja 1.3, formiramo funkciju $g(t) = f(b - t)$, koja je simetrična funkciji f u odnosu na pravu $x = \frac{b}{2}$. Na taj način se nejednakost $f(x) > 0$, za $x \in (a, b)$, svodi na nejednakost

$$g(t) > 0, \text{ za } t \in (0, b - a).$$

Funkcija $g(t)$ se, primenom adicijonih formula, može transformisati u MTP funkciju, čime se prethodna nejednakost svodi na ranije opisani slučaj 1.1 ($g(0) = 0$ i $g(b - a) > 0$).

Prehodno opisani pristup za dokazivanje nejednakosti zvaćemo *Dokazivanje simetrijom*.



Slika 3.7: Primer funkcije na koju se primenjuje Dokazivanje simetrijom

Slučaj 2.2. $f(a) = 0$ i $f(b) = 0$

Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, nejednakost $f(x) > 0$ ne važi na intervalu (a, b) . Stoga u nastavku smatramo da je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$.

Dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(a, \frac{a+b}{2})$ i na intervalu $(\frac{a+b}{2}, b)$ svodi se na prethodno opisane slučajeve.

Ovaj pristup za dokazivanje nejednakosti zvaćemo *Dokazivanje deljenjem intervala*.

3.2 Dokazivanje miksovano eksponencijalno polinomskih nejednakosti

U ovom potpoglavlju, prema [121], dajemo jedan metod za dokazivanje miksovano eksponencijalno polinomskih (MEP) nejednakosti, koji je analogan metodu za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3.

Definicija 3.1

(i) Eksponencijalni polinomi su konačne linearne kombinacije izraza oblika $x^n e^{ax}$, gde je $n \in \mathbb{N}_0$ i $a \in \mathbb{C}$.

(ii) Miksovano eksponencijalno polinomska funkcija (MEP funkcija) je funkcija oblika

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} (e^{-x})^{q_i},$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $p_i, q_i \in \mathbb{N}_0$, koja je definisana za $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Miksovano eksponencijalno polinomska nejednakost (MEP nejednakost) je nejednakost oblika

$$f(x) > 0$$

za $x \in \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, gde je $f(x)$ MEP funkcija.

3.2.1 Neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije za eksponencijalnu funkciju

Sledeća teorema daje neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije za funkciju e^{-x} , koje koristimo za formiranje nanižne polinomske aproksimacije za datu MEP funkciju.

Teorema 3.7 Za Tejlorov razvoj funkcije e^{-x} dat sa

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

važi:

(i) Ukoliko je $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, +\infty)) T_n(x) > e^{-x}.$$

(ii) Ukoliko je $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, +\infty)) T_n(x) < e^{-x}.$$

Dokaz.

(i) Uočimo funkciju

$$F_n(x) = T_n(x) - e^{-x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Za ovu funkciju važi da je

$$F_n^{(j)}(x) = (-1)^j (T_{n-j}(x) - e^{-x}),$$

gde je $j \leq n$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Važi da je

$$F_{2k}^{(2k)}(x) = 1 - e^{-x}$$

za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Evidentno $F_{2k}^{(2k)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Dakle, sledi da je funkcija $F_{2k}^{(2k-1)}(x)$ rastuća na intervalu $(0, +\infty)$. Kako je $F_{2k}^{(2k-1)}(0) = 0$, važi da je $F_{2k}^{(2k-1)}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Nastavljajući ovaj postupak, s obzirom na to da je $F_n^{(j)}(0) = 0$, zaključujemo da je $F_{2k}(x) > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$, tj. da je

$$(\forall x \in (0, +\infty)) T_{2k}(x) > e^{-x}.$$

(ii) Analogno dokazu dela (i). ■

Sledeće dve teoreme daju poredak Tejlorovih razvoja funkcije e^{-x} .

Teorema 3.8 Za Tejlorov razvoj funkcije e^{-x} dat sa

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

važi:

(i) Za svaki Maklorenov polinom $T_{2k+1}(x)$, gde $k \in \mathbb{N}_0$, neparnog stepena postoji tačno jedan koren c_{2k+1} na intervalu $(0, +\infty)$. Pri tome je $c_1 = 1 < c_3 < \dots$.

(ii) Ukoliko je $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, n+2)) T_n(x) > T_{n+2}(x)$$

i

$$(\forall x \in (n+2, +\infty)) T_n(x) < T_{n+2}(x).$$

Za $x = 0$ ili $x = n+2$ važi da je $T_n(x) = T_{n+2}(x)$.

(iii) Ukoliko je $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, n+2)) T_n(x) < T_{n+2}(x)$$

i

$$(\forall x \in (n+2, +\infty)) T_n(x) > T_{n+2}(x).$$

Za $x = 0$ ili $x = n+2$ važi da je $T_n(x) = T_{n+2}(x)$.

Dokaz. Poznato je da svaki Maklorenov polinom neparnog stepena ima bar jedan koren. Dokažimo da za Maklorenov polinom $T_{2k+1}(x)$, za $k \in \mathbb{N}_0$, postoji tačno jedan koren c_{2k+1} na intervalu $(0, +\infty)$. Ispitajmo monotonost funkcije $T_{2k+1}(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$. Prvi izvod funkcije $T_{2k+1}(x)$ je

$$T'_{2k+1}(x) = -1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \dots - \frac{1}{(2k)!}x^{2k} = -T_{2k}(x).$$

Kako na osnovu Teoreme 3.7 važi da je $T_{2k}(x) > e^{-x} > 0$ na intervalu $(0, +\infty)$, zaključujemo da je $T'_{2k+1}(x) < 0$, odnosno da je $T_{2k+1}(x)$ opadajuća funkcija na intervalu $(0, +\infty)$.

Primitimo da za polinom

$$T_{2k+1}(x) = -\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \dots + \frac{1}{2!}x^2 - x + 1$$

važi da je

$$T_{2k+1}(0) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T_{2k+1}(x) = -\infty.$$

Kako je polinomska funkcija $T_{2k+1}(x)$ neprekidna i opadajuća na intervalu $(0, +\infty)$, zaključujemo da postoji tačno jedan koren c_{2k+1} funkcije $T_{2k+1}(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Jasno je da je $c_1 = 1$. Dokažimo da važi poredak $c_1 = 1 < c_3 < \dots$. Primitimo da je

$$T_{2k-1}(x) < T_{2k+1}(x) \iff 0 < x < 2k+1$$

za $k \in \mathbb{N}$. Pri tome važi da je

$$T_{2k+1}(2k+1) = \underbrace{(1 - (2k+1))}_{(<0)} + \underbrace{\left(\frac{(2k+1)^2}{2!} - \frac{(2k+1)^3}{3!} \right)}_{(<0)} + \dots + \underbrace{\left(\frac{(2k+1)^{2k}}{2k!} - \frac{(2k+1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)}_{(<0)} < 0.$$

Stoga, možemo zaključiti da je

$$c_{2k-1} < c_{2k+1}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$, čime je dokazano tvrđenje (i). Tvrđenja (ii) i (iii) se dokazuju slično kao Teorema 3.2. ■

Teorema 3.9 Za Tejlorov razvoj funkcije e^{-x} dat sa

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

važi:

(i) Ukoliko je $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, n+2)) (T_n(x) > T_{n+2}(x) > T_{n+4}(x) > \dots > e^{-x}).$$

(ii) Ukoliko je $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(\forall x \in (0, n+2)) (T_n(x) < T_{n+2}(x) < T_{n+4}(x) < \dots < e^{-x}).$$

(iii) Za $x \in (0, 2)$ i $k \in \mathbb{N}_0$ važi da je

$$T_1(x) < T_3(x) < \dots < T_{2k+1}(x) < \dots < e^{-x} < \dots < T_{2k}(x) < \dots < T_2(x) < T_0(x) = 1.$$

Dokaz.

(i) Dokažimo tvrđenje indukcijom. Na osnovu Teoreme 3.7 i Teoreme 3.8, važi da je

$$(\forall x \in (0, n+2)) (T_n(x) > T_{n+2}(x) > e^{-x}).$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $\ell \in \mathbb{N}$, tj. da važi da je

$$(\forall x \in (0, n+2)) \underbrace{(T_n(x) > T_{n+2}(x) > T_{n+4}(x) > \dots > T_{n+2\ell}(x))}_{(\ell+1)} > e^{-x}.$$

Dokažimo induktivni korak, tj. da za $\ell+1$ važi da je

$$(\forall x \in (0, n+2)) \underbrace{(T_n(x) \geq T_{n+2}(x) > T_{n+3}(x) > \dots > T_{n+2\ell}(x) > T_{n+2\ell+2}(x))}_{(\ell+2)} > e^{-x}. \quad (3.13)$$

Na osnovu Teoreme 3.7 i Teoreme 3.8, važi da je

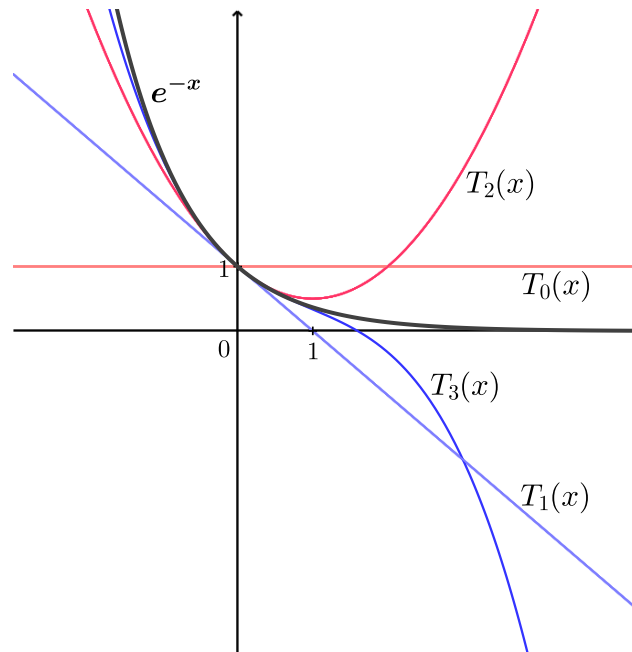
$$(\forall x \in (0, n+2\ell+2)) (T_{n+2\ell}(x) > T_{n+2\ell+2}(x) > e^{-x}).$$

S obzirom na to da je $n+2\ell+2 > n+2$, zaključujemo da važi tvrđenje (3.13). Dakle, na osnovu matematičke indukcije, važi da je

$$(\forall x \in (0, n+2\ell+2)) (T_n(x) > T_{n+2}(x) > T_{n+4}(x) > T_{n+6}(x) > \dots > e^{-x}).$$

(ii) Analogno dokazu dela (i).

(iii) Sledi iz (i) i (ii). ■



Slika 3.8: Neke navišne i nanižne polinomske aproksimacije iz Teoreme 3.7 za funkciju e^{-x}

3.2.2 Određivanje nanižne polinomske aproksimacije i neka uopštenja MEP funkcija

U ovoj sekciji dajemo opis metoda za dokazivanje MEP nejednakosti

$$f(x) > 0$$

na konačnom intervalu $(0, b) \subset \mathbb{R}^+$.

Uvedimo oznaku $\exp^-(x) = e^{-x}$. Neka je $T_n^{\exp^-, c}(x)$ Tejlorov razvoj stepena n funkcije \exp^- u okolini tačke $c \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da je $f(b-) > 0$.

Za svaki sabirak $\alpha_i x^{p_i} (e^{-x})^{q_i}$ MEP funkcije f , funkciju $(e^{-x})^{q_i}$, u nekoj desnoj okolini tačke 0, aproksimiramo na sledeći način:

- (1) Ukoliko je $\alpha_i > 0$, funkciju $(e^{-x})^{q_i}$ aproksimiramo polinomom $T_{2\ell_i+1}^{\exp^-, 0}(q_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$(e^{-x})^{q_i} > T_{2\ell_i+1}^{\exp^-, 0}(q_i x).$$

- (2) Ukoliko je $\alpha_i < 0$, funkciju $(e^{-x})^{q_i}$ aproksimiramo polinomom $T_{2\ell_i}^{\exp^-, 0}(q_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$(e^{-x})^{q_i} < T_{2\ell_i}^{\exp^-, 0}(q_i x).$$

Na osnovu (1) i (2), svaka funkcija $(e^{-x})^{q_i}$ se aproksimira odgovarajućim Tejlorovim polinomom i tako se formira polinom

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} T_{\vartheta_i}^{\exp^-, 0}(q_i x),$$

gde je

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\ell_i) = \begin{cases} 2\ell_i + 1, & \text{ako je } \alpha_i > 0, \\ 2\ell_i, & \text{ako je } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Broj ℓ_i nazivamo *indeksom Tejlorovog razvoja* $T_{\vartheta_i}^{\text{exp}^-,0}(q_i x)$, a niz $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ nazivamo *nizom indeksa Tejlorovih razvoja za polinom* $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n}(x)$ (videti Definiciju 1.7).

Prema načinu formiranja polinoma $P(x)$ važi da je

$$f(x) > P(x)$$

na intervalu $(0, b)$. Ako se prema pravilima (1) i (2) izaberu vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ takve da je

$$P(x) > 0$$

za $x \in (0, b)$, tada je dokazana nejednakost

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, b)$.

Dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalima oblika $[0, b)$, $(0, b]$ ili $[0, b]$ je analogno.

Slučaj kada je $f(b-) = 0$ razmatra se na isti način kao u Potpoglavlju 1.3, gde je f jedna MTP funkcija.

Dokazivanje nejednakosti na proizvoljnom konačnom intervalu. Dokazivanje MEP nejednakosti $f(x) > 0$ na konačnom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$ razmatra se slično kao u Sekciji 3.1.3. ■

Jedno poboljšanje metoda. Prethodno opisani metod može se poboljšati u nekim slučajevima. Ako u MEP funkciji f postoji više sabiraka koji sadrže istu eksponencijalnu funkciju $(e^{-x})^{q_i}$, tada se zbir takvih sabiraka predstavlja sabirkom oblika $h(x) \cdot (e^{-x})^{q_i}$, gde je $h(x)$ polinom. Ukoliko je polinom $h(x)$ stalnog znaka na intervalu $(0, b)$, tada se funkcija $(e^{-x})^{q_i}$ u sabirku $h(x) \cdot (e^{-x})^{q_i}$ aproksimira prema pravilima:

(1') Ukoliko je $h(x) > 0$, funkciju $(e^{-x})^{q_i}$ aproksimiramo polinomom $T_{2\ell_i+1}^{\text{exp}^-,0}(q_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$(e^{-x})^{q_i} > T_{2\ell_i+1}^{\text{exp}^-,0}(q_i x).$$

(2') Ukoliko je $h(x) < 0$, funkciju $(e^{-x})^{q_i}$ aproksimiramo polinomom $T_{2\ell_i}^{\text{exp}^-,0}(q_i x)$, gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, jer važi da je

$$(e^{-x})^{q_i} < T_{2\ell_i}^{\text{exp}^-,0}(q_i x).$$

Ukoliko polinom $h(x)$ nije stalnog znaka na intervalu $(0, b)$, tada ga razdvajamo na zbir dva polinoma: $h^+(x)$, koji sadrži sve pozitivne sabirke polinoma, i $h^-(x)$, koji sadrži sve negativne sabirke polinoma. U tom slučaju, funkciju $(e^{-x})^{q_i}$ u sabircima $h^+(x) \cdot (e^{-x})^{q_i}$ i $h^-(x) \cdot (e^{-x})^{q_i}$ aproksimiramo prema pravilima (1') i (2') i tako formiramo polinom $P(x)$. ■

Za određivanje nanižnih i navišnih polinomskih aproksimacija za funkciju $(e^{-x})^\tau$, gde $\tau \in \mathbb{R}^+$, može se, na osnovu jednakosti (3.10) za izbor $\phi = \text{exp}^-$, takođe koristiti Teorema 3.7. Dakle, na isti način kao što se dokazuju MEP nejednakosti, može se dokazivati i jedno *uopštenje MEP nejednakosti* oblika

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} (e^{-x})^{\tau_i} > 0 \quad (3.14)$$

za $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^+$, gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $p_i \in \mathbb{N}_0$ i $\tau_i \in \mathbb{R}_0^+$. Desna strana nejednakosti (3.14) određuje *uopštenu MEP funkciju*. ■

Metod za dokazivanje MEP nejednakosti je moguće primeniti i na realne eksponencijalno polinomske funkcije koje sadrže sabirke oblika

$$\alpha_i x^{p_i} (e^{-x})^{\mu_i},$$

gde je $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i \in \mathbb{N}_0$ i $\mu_i \in \mathbb{R}^-$. Množenjem takve funkcije sa e^{Mx} , gde je $M = \min\{\mu_i\}$, ta funkcija se svodi na uopštenu MEP funkciju. ■

Na osnovu razmatranja iz prethodnih sekcija, uvodimo *M-klasnu funkciju*, koja se sastoji od:

- (1) MTP funkcija i uopštenih MTP funkcija iz Sekcije 3.1.2,
- (2) MEP funkcija i uopštenih MEP funkcija iz ove sekcije,
- (3) funkcija koje se dobijaju konačnim sabiranjem funkcija određenih sa (1) i (2).

Dokazivanje nejednakosti oblika $f(x) > 0$, za $f \in \mathcal{M}$ i $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^+$, može se, analogno prethodnim razmatranjima, svesti na dokazivanje polinomske nejednakosti.

3.2.3 Primena u dokazivanju MHTP nejednakosti i nekih uopštenja MHTP nejednakosti

Na osnovu rezultata iz prethodne sekcije, u ovoj sekciji dajemo jedan metod za dokazivanje MHTP nejednakosti

$$f(x) > 0$$

na konačnom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$.

MHTP funkcija $f(x)$ se, primenom smena iz Teoreme 2.5 iz [107], može zapisati u obliku

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} \text{trigh}_i(t_i x), \quad (3.15)$$

gde je $m \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s_i, t_i \in \mathbb{N}_0$ i $\text{trigh}_i = \cosh$ ili $\text{trigh}_i = \sinh$.

Na osnovu formula

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{i} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

funkcija $f(x)$ se svodi na realnu eksponencijalno polinomsku funkciju.

U prethodnoj sekciji je opisano kako se metod za dokazivanje MEP nejednakosti može primeniti i na realne eksponencijalno polinomske funkcije. ■

Napomenimo da se analogno može dokazivati i jedno *uopštenje MHTP nejednakosti* oblika

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i}(\tau_i x) \sinh^{r_i}(\tau_i x) > 0 \quad (3.16)$$

za $x \in \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^+$, gde je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$ i $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$. Ne-nula funkciju sa desne strane nejednakosti (3.16) nazivamo *uopštenom MHTP funkcijom*. ■

Takođe, metod je analogno moguće primeniti i na uopštenja MHTP funkcija koja sadrže sabirke oblika

$$\alpha x^p \prod_{j=1}^m \cosh^{q_j}(\mu_j x + a_j) \sinh^{r_j}(\nu_j x + b_j),$$

gde je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu_j, \nu_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ i $p, q_j, r_j \in \mathbb{N}_0$, jer se primenom formula za proizvod hiberboličkih funkcija i adicionih formula za hiberboličke funkcije ovo uopštenje MHTP funkcije može svesti na zapis oblika (3.15).

3.3 Izolovanje nula i izolovanje ekstremuma realnih funkcija

U ovom potpoglavlju dajemo, prema [124], metod za izolovanje nula i metod za izolovanje ekstremuma proizvoljne funkcije $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

3.3.1 Metod za izolovanje nula funkcija

Važi tvrđenje:

Teorema 3.10 (Metod za izolovanje nula) *Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je diferencijabilna na intervalu (a, b) . Ako postoje tačke $a_0, b_0 \in (a, b)$, $a_0 < b_0$, takve da važi:*

- (1) $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$,
- (2) f je stalnog znaka na intervalima $(a, a_0]$ i $[b_0, b)$,
- (3) f' je stalnog znaka na segmentu $[a_0, b_0]$,

tada funkcija f ima tačno jednu nulu na intervalu (a, b) , tj. preciznije – na podintervalu (a_0, b_0) .

Ukoliko je u prethodnoj teoremi funkcija f iz klase \mathcal{M} , tada se uslovi (2) i (3) mogu proveriti primenom ranije opisanih metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomsku nejednakost.

Prethodna teorema se ne može primeniti za izolovanje nula parnog reda. Međutim, s obzirom na to da su ove nule ujedno i lokalni ekstremumi funkcija, moguće ih je izolovati primenom metoda za izolovanje ekstremuma koji je dat u Sekciji 3.3.2.

Funkcije iz klase \mathcal{M} su realno analitičke funkcije, što znači da ne-nula funkcija iz klase \mathcal{M} na konačnom intervalu ima konačno mnogo nula [96]. Stoga je za funkcije iz klase \mathcal{M} , primenom Teoreme 3.10, moguće izolovati sve nule na konačnim intervalima.

Prethodno opisani metod je primenjen u [27, 122, 124] za izolovanje nula MTP funkcija.

3.3.2 Metod za izolovanje ekstremuma funkcija

Važi tvrđenje:

Teorema 3.11 (Metod za izolovanje ekstremuma) *Neka je $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je dva puta diferencijabilna na intervalu (a, b) . Ako postoje tačke $a_0, b_0 \in (a, b)$, $a_0 < b_0$, takve da važi:*

- (1) $f'(a_0) \cdot f'(b_0) < 0$,
- (2) f' je stalnog znaka na intervalima $(a, a_0]$ i $[b_0, b)$,
- (3) f'' je stalnog znaka na segmentu $[a_0, b_0]$,

tada funkcija f ima tačno jedan ekstremum na intervalu (a, b) , tj. preciznije – na podintervalu (a_0, b_0) .

Ukoliko je u prethodnoj teoremi funkcija f iz klase \mathcal{M} , tada se uslovi (2) i (3) mogu proveriti primenom ranije opisanih metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomsku nejednakost.

Ukoliko je f'' stalnog znaka na intervalu (a, b) , tada je za dokazivanje postojanja tačno jednog ekstremuma i izolovanje podintervala (a_0, b_0) na kom se taj ekstremum nalazi dovoljno dokazati da postoje tačke $a_0, b_0 \in (a, b)$ takve da je $a_0 < b_0$ i $f'(a_0) \cdot f'(b_0) < 0$.

Funkcija iz klase \mathcal{M} koja nije konstanta na konačnom intervalu ima konačno mnogo ekstremuma. Stoga je za funkcije iz klase \mathcal{M} , primenom Teoreme 3.11, moguće izolovati sve ekstremume na konačnim intervalima.

Poglavlje 4

Jedan sistem za automatsko dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti

Na osnovu teorijskih rezultata iz Potpoglavlja 1.3 i 1.4 i iz Poglavlja 3, razvijen je jedan novi sistem za automatsko dokazivanje nekih nejednakosti oblika

$$f_1(x) > f_2(x) \quad (\text{tj. } f_1(x) < f_2(x))$$

na intervalu \mathbb{I} , gde je \mathbb{I} otvoren, poluotvoren ili zatvoren konačan nenegativan realan interval, i gde su f_1 i f_2 ne-nula funkcije oblika

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i x^{p_i} e^{-\tau_i x} + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i}(\tau_i x) \sin^{r_i}(\tau_i x), \quad (4.1)$$

gde je $m_1 \leq m_2$, $m_1, m_2, p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\tau_i \in \mathbb{R}_0^+$, definisane za svako $x \in \mathbb{R}$. Funkcije oblika (4.1) su u klasi \mathcal{M} .

4.1 Neke strategije za određivanje vrednosti indeksa Tejlorovih razvoja u nanižnim polinomskim aproksimacijama

Na osnovu teorijskih rezultata iz Potpoglavlja 1.3, funkcija $f \in \mathcal{M}$ oblika (4.1) može se transformisati u ekvivalentan oblik

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i x^{p_i} \exp^{-\tau_i x} + \sum_{i=m_1+1}^m \beta_i x^{s_i} \text{trig}_i(t_i x),$$

gde je $m_1 \leq m$, $m_1, m, p_i, s_i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau_i, t_i \in \mathbb{R}_0^+$ i $\text{trig}_i = \sin$ ili $\text{trig}_i = \cos$, odnosno u oblik

$$\sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} \phi_i(t_i x), \quad (4.2)$$

gde je $\phi_i = \exp^{-}$ ili $\phi_i = \text{trig}_i$.

Primenom metoda iz Potpoglavlja 1.3 i 3.2, jedna nanižna polinomska aproksimacija za funkciju (4.2) na intervalu $(0, b) \subset \mathbb{R}^+$ je data sa

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} T_{\phi_i}^{\phi_i, 0}(t_i x), \quad (4.3)$$

gde je $m, s_i \in \mathbb{N}_0$, $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t_i \in \mathbb{R}_0^+$, $\phi_i = \exp^-$ ili $\phi_i = \sin$ ili $\phi_i = \cos$ i

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\ell_i) = \begin{cases} 2\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } \beta_i > 0, \\ 2\ell_i, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } \beta_i < 0, \\ 4\ell_i + 3, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } \beta_i < 0, \\ 4\ell_i + 2, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } \beta_i < 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$.

U ovom potpoglavlju dajemo neke strategije za određivanje, ukoliko postoje, vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ takvih da je $P(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$.

U strategijama koje dajemo koristimo oznaku dg_i za stepen sabiraka $\beta_i x^{s_i} T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x)$ u polinomskoj aproksimaciji (4.3), za $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$.

4.1.1 O polinomskoj nejednakosti $P(x) > 0$

Ispitivanje znaka polinoma primenom Šturmove teoreme može biti složeno i vremenski zahtevno. Stoga, u ovoj disertaciji, pozitivnost polinoma $P(x)$ na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ispitujemo u sledeće dve faze:

- (a) Proveravamo znak polinoma $P(x)$ na nekom unapred izabranom skupu diskretnih tačaka $\mathcal{S} \subset (a, b)$. Ako $(\exists x_0 \in \mathcal{S}) P(x) \leq 0$, tada polinom $P(x)$ nije pozitivan na intervalu (a, b) i nije potrebno primenjivati fazu (b).
- (b) Ako je $P(x) > 0$ za svako $x \in \mathcal{S}$, tada primenjujemo Šturmovu teoremu, na osnovu koje zaključujemo da li polinom $P(x)$ jeste ili nije pozitivan na intervalu (a, b) .

U primenama se često odgovor o nepozitivnosti polinoma $P(x)$ na intervalu (a, b) dobija u fazi (a), što znači da u slučaju kada polinom $P(x)$ nije pozitivan na intervalu (a, b) često nije potrebno primenjivati Šturmovu teoremu.

4.1.2 Strategija za redukovanje broja indeksa grupisanjem sabiraka polazne funkcije

Primenom metoda iz Potpoglavlja 1.3 i Sekcije 3.2.2, može se redukovati broj indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ nanižne polinomske aproksimacije (4.3) date funkcije f .

- Ako u funkciji (4.2) postoji više sabiraka koji sadrže istu funkciju $\phi_i(t_i x)$, zbir svih takvih sabiraka predstavljamo sabirkom $h(x) \cdot \phi_i(t_i x)$, gde je $h(x)$ odgovarajući polinom.
- Ako polinom $h(x)$ menja znak na intervalu $(0, b)$, tada grupisanjem svih pozitivnih sabiraka polinoma $h(x)$ formiramo polinom $h^+(x)$ i grupisanjem svih negativnih sabiraka polinoma $h(x)$ formiramo polinom $h^-(x)$.

Na taj način se funkcija (4.2) predstavlja u sređenom obliku

$$\sum_{i=1}^k h_i(x) \phi_i(t_i x), \quad (4.5)$$

gde $k \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{R}_0^+$, $\phi_i = \exp^-$ ili $\phi_i = \sin$ ili $\phi_i = \cos$ i polinomi $h_i(x)$ su stalnog znaka na intervalu $(0, b)$.

- U svakom sabirku $h_i(x) \cdot \phi_i(t_i x)$ iz (4.5) funkciju $\phi_i(t_i x)$ aproksimiramo prema pravilima (1')–(4') iz Potpoglavlja 1.3 ili pravilima (1') i (2') iz Sekcije 3.2.2.

Tako dobijamo nanižnu polinomsku aproksimaciju za funkciju f na intervalu $(0, b)$ datu sa

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k}(x) = \sum_{i=1}^k h_i(x) T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x), \quad (4.6)$$

gde je $k \leq m$ ($k \in \mathbb{N}$), $t_i \in \mathbb{R}_0^+$, $\phi_i = \exp^-$ ili $\phi_i = \sin$ ili $\phi_i = \cos$, $h_i(x)$ polinom i

$$\vartheta_i = \vartheta_i(l_i) = \begin{cases} 2\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } h_i(x) > 0, \\ 2\ell_i, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } h_i(x) < 0, \\ 4\ell_i + 3, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } h_i(x) > 0, \\ 4\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } h_i(x) < 0, \\ 4\ell_i + 2, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } h_i(x) > 0, \\ 4\ell_i, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } h_i(x) < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$.

Ova strategija redukuje broj indeksa: očigledno je da smo u polinomskoj aproksimaciji (4.3) imali m indeksa, a u polinomskoj aproksimaciji (4.6) imamo $k \leq m$ indeksa.

Primer 4.1 Za funkciju

$$f(x) = 8x^5 \sin x - 3x^2 \sin x - 45x \sin x + \frac{45}{4}x^3 \cos x + 90x^2 \cos x - \frac{45}{4}x \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x + 2x$$

jedna nanižna polinomsku aproksimacija na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je oblika

$$P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7}(x) = 8x^5 T_{4\ell_1+3}^{\sin, 0}(x) - 3x^2 T_{4\ell_2+1}^{\sin, 0}(x) - 45x T_{4\ell_3+1}^{\sin, 0}(x) + \frac{45}{4}x^3 T_{4\ell_4+2}^{\cos, 0}(x) + 90x^2 T_{4\ell_5+2}^{\cos, 0}(x) - \frac{45}{4}x T_{4\ell_6}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4} T_{4\ell_7+2}^{\cos, 0}(3x) + 2x,$$

gde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7 \in \mathbb{N}_0$.

Na osnovu sabiraka koji sadrže funkciju $\sin x$, formiramo polinom $h_1(x) = 8x^5 - 3x^2 - 45x$ koji je negativan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Na osnovu sabiraka koji sadrže funkciju $\cos x$, formiramo polinom $h_2(x) = \frac{45}{4}x^3 + 90x^2 - \frac{45}{4}x$ koji menja znak na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Grupisanjem svih pozitivnih sabiraka polinoma $h_2(x)$ formiramo polinom $h_2^+(x) = \frac{45}{4}x^3 + 90x^2$ i grupisanjem svih negativnih sabiraka polinoma $h_2(x)$ formiramo polinom $h_2^-(x) = -\frac{45}{4}x$.

Dakle, primenom prethodno opisane strategije, polaznu funkciju svodimo na

$$f(x) = \underbrace{(8x^5 - 3x^2 - 45x)}_{h_1(x)} \sin x + \underbrace{\frac{45}{4}(x^3 + 8x^2)}_{h_2^+(x)} \cos x - \underbrace{\frac{45}{4}x \cos x}_{h_2^-(x)} + \frac{45}{4} \cos 3x + 2x$$

i tako dobijamo nanižnu polinomsku aproksimaciju oblika

$$P_{l_1, l_2, l_3, l_4}(x) = \underbrace{(8x^5 - 3x^2 - 45x)}_{h_1(x) < 0} T_{4l_1+1}^{\sin, 0}(x) + \underbrace{\frac{45}{4}(x^3 + 8x^2)}_{h_2^+(x)} T_{4l_2+2}^{\cos, 0}(x) - \underbrace{\frac{45}{4}x}_{h_2^-(x)} T_{4l_3}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4} T_{4l_4+2}^{\cos, 0}(3x) + 2x,$$

gde $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{N}_0$. □

4.1.3 Još neki teorijski rezultati o poretku Tejlorovih razvoja trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija

U ovoj sekciji dajemo neke nove teorijske rezultate koji predstavljaju matematičku osnovu strategija (datih u narednim sekcijama) za određivanje vrednosti indeksa Tejlorovih aproksimacija.

Definicija 4.1 Neka su date funkcije $P_1, P_2, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija P_2 je bolja aproksimacija funkcije f na intervalu (a, b) od funkcije P_1 ako je

$$(\forall x \in (a, b)) (P_1(x) > P_2(x) > f(x)) \quad \text{ili} \quad (\forall x \in (a, b)) (P_1(x) < P_2(x) < f(x)).$$

Neka su $P_1(x)$ i $P_2(x)$ nanižne polinomske aproksimacije funkcije $f \in \mathcal{M}$ na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$ takve da je

$$(\forall x \in (a, b)) (P_1(x) < P_2(x) < f(x)).$$

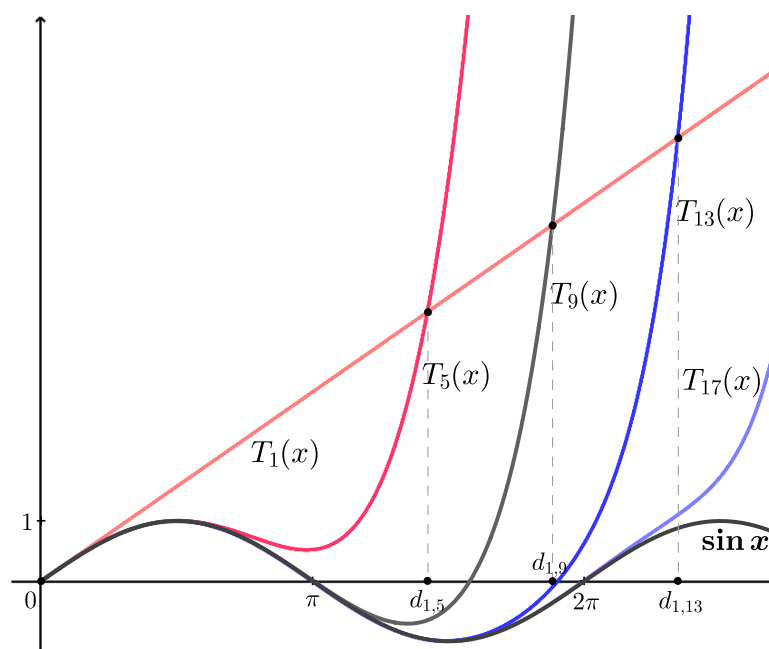
Tada važi:

- (i) Ako polinom $P_2(x)$ nije pozitivan na intervalu (a, b) , tada ni polinom $P_1(x)$ nije pozitivan na intervalu (a, b) .
- (ii) Ako je $P_1(x) > 0$ na intervalu (a, b) , tada je i $P_2(x) > 0$ na intervalu (a, b) . ■

U ovoj disertaciji formiramo nanižne polinomske aproksimacije koje su nastale od Tejlorovih razvoja funkcija $\sin x$, $\cos x$ i e^{-x} i od interesa je da razmotrimo poredak Tejlorovih razvoja tih funkcija.

Na Slici 4.1 su prikazane neke navišne Tejlorove aproksimacije $T_{4L+1}(x)$, $L \in \mathbb{N}_0$, funkcije $\sin x$. U Teoremi 4.1 pokazaćemo da za polinom $T_{4L+1}(x) - T_1(x)$ postoji najmanja pozitivna nula $d_{1,4L+1}$.

Konkretno, na intervalu $(0, d_{1,9})$, Tejlorov razvoj $T_9(x)$ je bolja aproksimacija sinusne funkcije od Tejlorovih razvoja $T_1(x)$ i $T_5(x)$, a van tog intervala poredak se ne zadržava. Ovu činjenicu uopštavamo u Teoremi 4.1.



Slika 4.1: Neke navišne aproksimacije sinusne funkcije

Lema 4.1 Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

i za svaki prirodan broj k važi

$$(\forall x \in (\sqrt{4k(4k+1)}, +\infty)) T_{4k+1}(x) > T_1(x).$$

Dokaz. Dokažimo tvrđenje indukcijom. Za $k = 1$, na osnovu Teoreme 3.2, važi da je

$$(\forall x \in (\sqrt{20}, +\infty)) T_5(x) > T_1(x).$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo induktivni korak, tj. da za $k + 1$ važi da je

$$(\forall x \in (\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, +\infty)) T_{4k+5}(x) > T_1(x). \quad (4.8)$$

Na osnovu Teoreme 3.2, važi da je

$$(\forall x \in (\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, +\infty)) T_{4k+5}(x) > T_{4k+1}(x).$$

Kako je na osnovu induktivne pretpostavke

$$(\forall x \in (\sqrt{4k(4k+1)}, +\infty)) T_{4k+1}(x) > T_1(x),$$

i s obzirom na to da je $(\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, +\infty) \subset (\sqrt{4k(4k+1)}, +\infty)$, zaključujemo da važi (4.8). ■

Teorema 4.1 Za Tejlorov razvoj sinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

i za svaki prirodan broj L važi:

(i) Polinom $T_{4L+1}(x) - T_1(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{1,4L+1} \in [\sqrt{20}, \sqrt{4L(4L+1)}] = [4.472\dots, \sqrt{4L(4L+1)}]$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{1,4L+1})) (T_{4k+1}(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x). \quad (4.9)$$

(ii) Polinom $T_{4L+3}(x) - T_3(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{3,4L+3} \in [\sqrt{42}, \sqrt{(4L+2)(4L+3)}] = [6.480\dots, \sqrt{(4L+2)(4L+3)}]$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{3,4L+3})) (\sin x > T_{4L+3}(x) > T_{4k+3}(x)).$$

Dokaz.

(i) Na osnovu Teoreme 3.3, važi da je

$$\begin{aligned} & (\forall x \in (0, \sqrt{20})) T_{4L+1}(x) < T_1(x) \\ \iff & (\forall x \in (0, \sqrt{20})) T_{4L+1}(x) - T_1(x) < 0, \end{aligned}$$

dok na osnovu Leme 4.1, važi da je

$$\begin{aligned} & (\forall x \in (\sqrt{4L(4L+1)}, +\infty)) T_{4L+1}(x) > T_1(x) \\ \iff & (\forall x \in (\sqrt{4L(4L+1)}, +\infty)) T_{4L+1}(x) - T_1(x) > 0. \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da polinom $T_{4L+1}(x) - T_1(x)$ mora imati bar jednu nulu na segmentu $[\sqrt{20}, \sqrt{4L(4L+1)}]$.

S obzirom na to da je polinom $T_{4L+1}(x) - T_1(x)$ realno analitička funkcija, a koreni realno analitičkih ne-nula funkcija nemaju tačke nagomilavanja ([96], Poglavlje 4; [43], Lema 2.1.), postoji najmanja pozitivna nula $d_{1,4L+1}$ tog polinoma.

Dokažimo sada formulu (4.9) za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$.

Na osnovu Teoreme 3.3, važi da je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(4k+4)(4k+5)})) (T_{4k+1}(x) > T_{4k+5}(x) > T_{4k+9}(x) > \dots > \sin x),$$

odakle je

$$(\forall x \in (0, \sqrt{(4k+4)(4k+5)})) (T_{4k+1}(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x). \quad (4.10)$$

Razmotrimo sledeća dva slučaja:

Slučaj 1. Ako $d_{1,4L+1} \in (0, \sqrt{(4k+4)(4k+5)})$, formula (4.9) sledi na osnovu (4.10).

Slučaj 2. Neka je $d_{1,4L+1} \in [\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, +\infty)$. Na osnovu (4.10), za dokaz formule (4.9), dovoljno je dokazati da je

$$(\forall x \in [\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, d_{1,4L+1})) (T_{4k+1}(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x).$$

Na osnovu Leme 4.1, za $k \in \{1, 2, 3, \dots, L-1\}$, imamo

$$(\forall x \in (\sqrt{4k(4k+1)}, +\infty)) T_{4k+1}(x) > T_1(x),$$

odakle je

$$(\forall x \in [\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, d_{1,4L+1})) T_{4k+1}(x) > T_1(x). \quad (4.11)$$

Na osnovu Teoreme 3.1, važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{1,4L+1})) (T_1(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x). \quad (4.12)$$

Dakle, kako je $[\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, d_{1,4L+1}) \subset (0, d_{1,4L+1})$, iz (4.11) i (4.12), za $k \in \{1, 2, 3, \dots, L-1\}$ važi

$$(\forall x \in [\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, d_{1,4L+1})) (T_{4k+1}(x) > T_1(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x).$$

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ prethodna formula se može zapisati i u obliku

$$(\forall x \in [\sqrt{(4k+4)(4k+5)}, d_{1,4L+1})) (T_{4k+1}(x) > T_{4L+1}(x) > \sin x),$$

čime je dokazana formula (4.9) u ovom slučaju.

(ii) Analogno dokazu dela (i). ■

Primer 4.2 Primenom prethodne teoreme, za sinusnu funkciju dobijamo:

- (i) Za $L = 1$ polinom $T_{4L+1}(x) - T_1(x)$ ima jedinstvenu pozitivnu nulu $x = d_{1,5} = \sqrt{20}$. Na osnovu Teoreme 4.1, važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{1,5})) (T_1(x) > T_5(x) > \sin x),$$

što znači da je na intervalu $(0, d_{1,5})$ polinom $T_5(x)$ bolja aproksimacija sinusne funkcije od polinoma $T_1(x)$.

- (ii) Za $L = 2$ polinom

$$T_{4L+1}(x) - T_1(x) = \frac{x^9}{9!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} = x^3 \left(\frac{x^6}{9!} - \frac{x^4}{7!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{1}{3!} \right)$$

ima jedinstvenu pozitivnu nulu¹

$$x = d_{1,9} = \sqrt{6\sqrt[3]{36 + 12\sqrt{21}} - 6\sqrt[3]{-36 + 12\sqrt{21}} + 24} = 5.91429\dots$$

Na osnovu Teoreme 4.1, važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{1,9})) (T_1(x) > T_9(x) > \sin x)$$

i

$$(\forall x \in (0, d_{1,9})) (T_5(x) > T_9(x) > \sin x),$$

što znači da je na intervalu $(0, d_{1,9})$ polinom $T_9(x)$ bolja aproksimacija sinusne funkcije i od polinoma $T_1(x)$ i od polinoma $T_5(x)$.

Primitimo da važi

$$(\forall x \in (0, d_{1,5})) (T_1(x) > T_5(x) > \sin x)$$

i

$$(\forall x \in (d_{1,5}, d_{1,9})) (T_5(x) > T_1(x) > \sin x). \quad \square$$

Za kosinusnu i eksponencijalnu funkciju važe sledeće analogne teoreme.

Teorema 4.2 Za Tejlorov razvoj kosinusne funkcije

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

i za svaki prirodan broj L važi:

- (i) Polinom $T_{4L}(x) - T_0(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{0,4L} \in [\sqrt{12}, 2\pi) = [3.464\dots, 6.283\dots)$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{0,4L})) (T_{4k}(x) > T_{4L}(x) > \cos x).$$

¹ Ova nula je simbolički određena primenom apleta [132].

(ii) Ako je $L > 1$, polinom $T_{4L}(x) - T_4(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{4,4L} \in [\sqrt{56}, \sqrt{(4L-1)4L}] = [7.483\dots, \sqrt{(4L-1)4L}]$.

Za $k \in \{1, 2, 3, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{4,4L})) (T_{4k}(x) > T_{4L}(x) > \cos x).$$

(iii) Polinom $T_{4L+2}(x) - T_2(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{2,4L+2} \in [\sqrt{30}, \sqrt{(4L+1)(4L+2)}] = [5.477\dots, \sqrt{(4L+1)(4L+2)}]$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

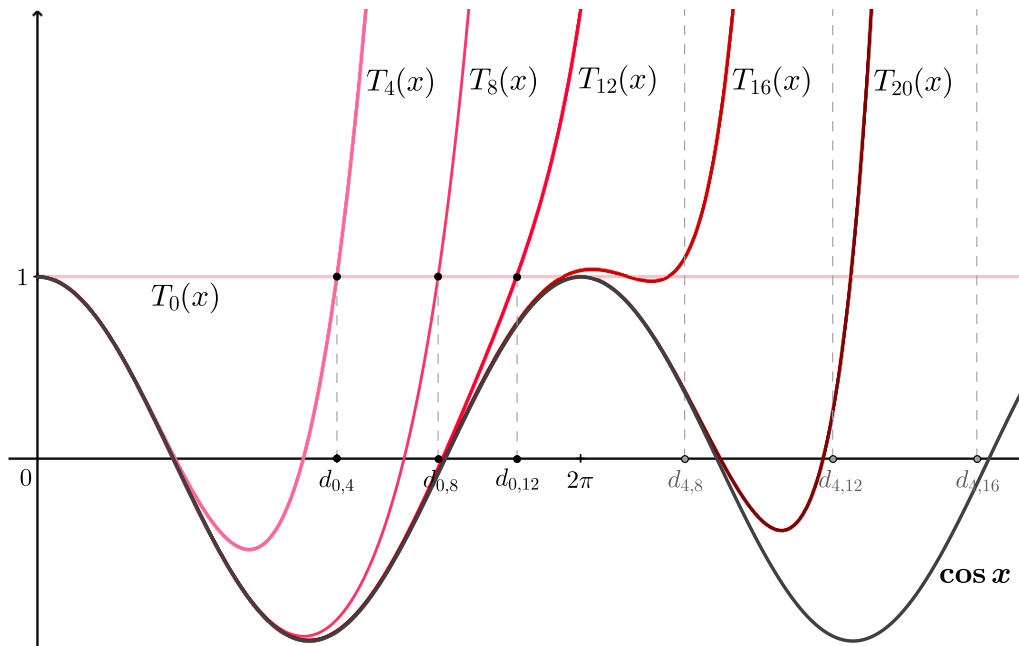
$$(\forall x \in (0, d_{2,4L+2})) (\cos x > T_{4L+2}(x) > T_{4k+2}(x)).$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 4.1. ■

Primer 4.3 Na Slici 4.2 prikazane su neke navišne Tejllove aproksimacije $T_{4L}(x)$, $L \in \mathbb{N}_0$, funkcije $\cos x$. Oznaka $d_{p,q}$, gde $p, q \in \mathbb{N}_0$, predstavlja najmanju pozitivnu nulu polinoma $T_q(x) - T_p(x)$.

Važi da je $T_0(x) = \cos x = 1$ za svako $x = 2s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$. Dakle, u tačkama $x = 2s\pi$ Tejllov razvoj T_0 je najbolja aproksimacija kosinusne funkcije.

Takođe, lako je pokazati (na primer, primenom Teoreme 3.4) da je $d_{0,4L} < 2\pi$ za svako $L > 0$.



Slika 4.2: Neke navišne aproksimacije kosinusne funkcije □

Teorema 4.3 Za Tejllov razvoj funkcije e^{-x} dat sa

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

i za svaki prirodan broj L važi:

(i) Polinom $T_{2L}(x) - T_0(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{0,2L} \in [2, 2L]$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{0,2L})) (T_{2k}(x) > T_{2L}(x) > e^{-x}).$$

(ii) Polinom $T_{2L+1}(x) - T_1(x)$ ima najmanju pozitivnu nulu $d_{1,2L+1} \in [3, 2L+1]$.

Za $k \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ važi da je

$$(\forall x \in (0, d_{1,2L+1})) (e^{-x} > T_{2L+1}(x) > T_{2k+1}(x)).$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 4.1. ■

Primer 4.4 Za funkciju

$$f(x) = -\sin 3x + x \cos 4x + 2 \quad (4.13)$$

jedna nanižna polinomska aproksimacija na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je oblika

$$P_{\ell_1, \ell_2}(x) = -T_{4\ell_1+1}^{\sin, 0}(3x) + x T_{4\ell_2+2}^{\cos, 0}(4x) + 2, \quad (4.14)$$

gde $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}_0$.

Za $\ell_1 = \ell_2 = 2$ dobija se polinom

$$P_{2,2}(x) = -\frac{4096}{14175}x^{11} + \frac{63349}{40320}x^9 - \frac{5297}{1008}x^7 + \frac{1037}{120}x^5 - \frac{7}{2}x^3 - 2x + 2,$$

koji ima prvu pozitivnu nulu u tački $x = 1.45994... < \frac{\pi}{2}$. Može se pokazati da je $P_{2,2}(x) > 0$ na intervalu $(0, 1.45994...)$ i da je $P_{2,2}(x) < 0$ na intervalu $(1.45994..., \frac{\pi}{2})$. Dakle, nanižna polinomska aproksimacija $P_{2,2}(x)$ nije pozitivna na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Primenom Teoreme 4.1, pokazaćemo da nijedna polinomska aproksimacija $P_{\ell_1, \ell_2}(x)$, za $\ell_1, \ell_2 \in \{0, 1, 2\}$ i $(\ell_1, \ell_2) \neq (2, 2)$, nije pozitivna na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Na primer, za polinomsku aproksimaciju $P_{1,2}(x)$, dokazaćemo da je $P_{1,2}(x) < P_{2,2}(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, a na sličan način se može dokazati i da je $P_{\ell_1, \ell_2}(x) < P_{2,2}(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za bilo koji polinom $P_{\ell_1, \ell_2}(x) \in \{P_{0,0}(x), P_{0,1}(x), P_{1,0}(x), P_{1,1}(x), P_{0,2}(x), P_{2,0}(x), P_{2,1}(x)\}$.

Na osnovu Teoreme 4.1, važi da je

$$\sin t < T_9^{\sin, 0}(t) < T_5^{\sin, 0}(t) \quad \text{i} \quad \sin t < T_9^{\sin, 0}(t) < T_1^{\sin, 0}(t)$$

za $t \in (0, d_{1,9})$, gde je $d_{1,9} = 5.91429...$ (videti Primer 4.2).

Za $t = 3x$, gde $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi da je

$$\sin(3x) < T_9^{\sin, 0}(3x) < T_5^{\sin, 0}(3x) \quad \text{i} \quad \sin(3x) < T_9^{\sin, 0}(3x) < T_1^{\sin, 0}(3x)$$

jer je $d_{1,9} > 3\frac{\pi}{2}$.

Dakle, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$P_{1,2}(x) = -T_5^{\sin, 0}(3x) + x T_{10}^{\cos, 0}(4x) + 2 < -T_9^{\sin, 0}(3x) + x T_{10}^{\cos, 0}(4x) + 2 = P_{2,2}(x),$$

odnosno

$$P_{1,2}(x) < P_{2,2}(x) < f(x),$$

što znači da ni polinomska aproksimacija $P_{1,2}(x)$ nije pozitivna na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

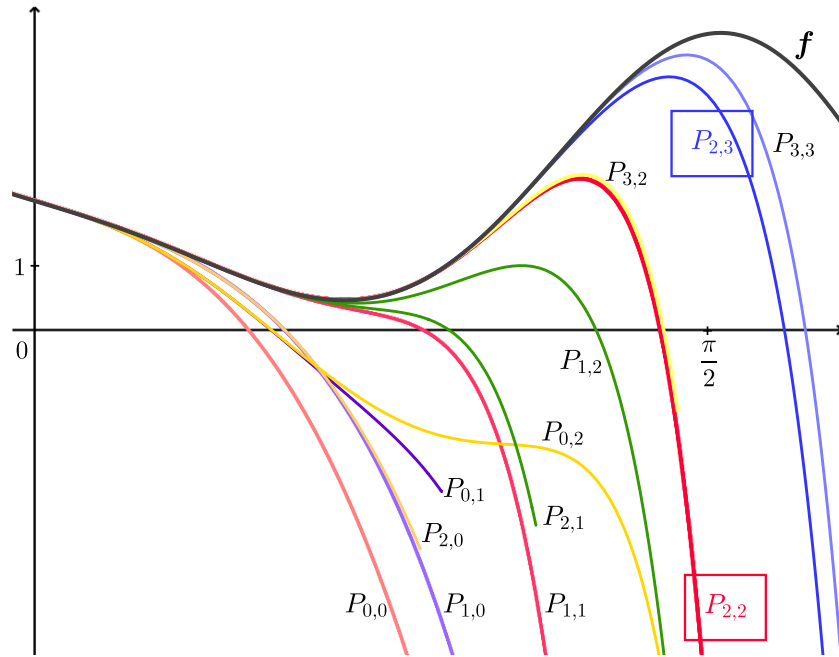
Na osnovu prethodnog razmatranja i činjenice da polinom $P_{2,2}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, možemo zaključiti da nije potrebno proveravati ni pozitivnost polinoma $P_{0,0}(x), P_{0,1}(x), P_{1,0}(x), P_{1,1}(x), P_{0,2}(x), P_{2,0}(x), P_{1,2}(x)$ i $P_{2,1}(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Posmatrajmo sada polinomsku aproksimaciju

$$P_{2,3}(x) = -\frac{131072}{42567525}x^{15} + \frac{16384}{467775}x^{13} - \frac{4096}{14175}x^{11} + \frac{63349}{40320}x^9 - \frac{5297}{1008}x^7 + \frac{1037}{120}x^5 - \frac{7}{2}x^3 - 2x + 2.$$

Može se dokazati (primenom Šturmove teoreme) da je $P_{2,3}(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Dodatno, na osnovu Teoreme 3.3 i Teoreme 3.6, može se zaključiti da za $\ell_1 \in \{2, 3, 4, \dots\}$ i $\ell_2 \in \{3, 4, 5, \dots\}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$0 < P_{2,3}(x) \leq P_{\ell_1, \ell_2}(x) < f(x).$$



Slika 4.3: Funkcija f definisana sa (4.13) i neke nanižne polinomske aproksimacije za funkciju f definisane sa (4.14) □

Razmotrimo polinomsku aproksimaciju

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i x^{s_i} T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x), \quad (4.15)$$

gde je $m, s_i \in \mathbb{N}_0$, $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t_i \in \mathbb{R}_0^+$, $\phi_i = \exp^-$ ili $\phi_i = \sin$ ili $\phi_i = \cos$ i

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\ell_i) = \begin{cases} 2\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } \beta_i > 0, \\ 2\ell_i, & \text{ako je } \phi_i = \exp^- \text{ i } \beta_i < 0, \\ 4\ell_i + 3, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i + 1, & \text{ako je } \phi_i = \sin \text{ i } \beta_i < 0, \\ 4\ell_i + 2, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } \beta_i > 0, \\ 4\ell_i + 4, & \text{ako je } \phi_i = \cos \text{ i } \beta_i < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

gde $\ell_i \in \mathbb{N}_0$, na intervalu $(0, b) \subset \mathbb{R}^+$. Stepeni Tejlorovih razvoja (4.16) razlikuju se od stepena Tejlorovih razvoja (4.4) samo za $\phi_i = \cos$ i $\beta_i < 0$.

Podsetimo se da je d_{p_i, q_i} , gde $p_i, q_i \in \mathbb{N}_0$, najmanja pozitivna nula polinoma $T_{q_i}^{\phi_i, 0}(x) - T_{p_i}^{\phi_i, 0}(x)$.

Za niz indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ iz (4.15) izaberimo vrednosti $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{N}_0^m$.

Posmatrajmo sabirak $\beta_i x^{s_i} T_{\vartheta_i(L_i)}^{\phi_i, 0}(t_i x)$ polinomske aproksimacije (4.15).

Prema Teoremi 4.1, Teoremi 4.2 (slučajevi **(ii)** i **(iii)**) i Teoremi 4.3, za $x \in \left(0, \frac{d_{\vartheta_i(0), \vartheta_i(L_i)}}{t_i}\right)$, Tejlorov razvoj $T_{\vartheta_i(L_i)}^{\phi_i, 0}(t_i x)$ je bolja aproksimacija funkcije $\phi_i(t_i x)$ od Tejlorovih razvoja $T_{\vartheta_i(\ell_i)}^{\phi_i, 0}(t_i x)$ za $\ell_i < L_i$, tj.

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{d_{\vartheta_i(0), \vartheta_i(L_i)}}{t_i}\right)\right) \left(\forall \ell_i < L_i\right) \left|T_{\vartheta_i(L_i)}^{\phi_i, 0}(t_i x) - \phi_i(t_i x)\right| < \left|T_{\vartheta_i(\ell_i)}^{\phi_i, 0}(t_i x) - \phi_i(t_i x)\right|.$$

Neka je $d_{min} = \min \left\{ \frac{d_{\vartheta_1(0), \vartheta_1(L_1)}}{t_1}, \frac{d_{\vartheta_2(0), \vartheta_2(L_2)}}{t_2}, \frac{d_{\vartheta_3(0), \vartheta_3(L_3)}}{t_3}, \dots, \frac{d_{\vartheta_m(0), \vartheta_m(L_m)}}{t_m} \right\}$.

Tada, na intervalu $(0, d_{min})$, za svako $\ell_1 \leq L_1, \ell_2 \leq L_2, \dots, \ell_m \leq L_m$ važi da je

$$P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) \leq P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x) \leq f(x). \quad (4.17)$$

Pri tome, ako postoji bar jedno $\ell_i \neq L_i$, važi da je $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) < P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x)$.

U ovoj disertaciji analiziraćemo slučaj kada su izabrane vrednosti L_i takve da je $(0, b) \subseteq (0, d_{min})$.

Ako polinom $P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, b) \subseteq (0, d_{min})$, tada, na osnovu (4.17), nije dan polinom $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$, za $\ell_1 \leq L_1, \ell_2 \leq L_2, \dots, \ell_m \leq L_m$, nije pozitivan na intervalu $(0, b)$, što znači da nije ni potrebno proveravati znak tih polinoma.

Ako je $P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x) > 0$ na intervalu $(0, b) \subseteq (0, d_{min})$, tada je izbor vrednosti indeksa $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (L_1, L_2, \dots, L_m)$ dovoljan za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$, tj. polinomska aproksimacija $P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x)$ je dovoljna za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$.

Takođe, primenom teorema 3.3, 3.6 i 3.9, na intervalu $(0, b) \subseteq (0, d_{min})$, za svako $\ell_1 \geq L_1, \ell_2 \geq L_2, \dots, \ell_m \geq L_m$ može se zaključiti da je

$$P_{L_1, L_2, \dots, L_m}(x) \leq P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) \leq f(x). \quad \blacksquare$$

Napomena o Tejlorovom razvoju za kosinusnu funkciju. Uočimo da se polinomska aproksimacija (4.3) razlikuje od polinomske aproksimacije (4.15) jedino po tome što (4.15) ne sadrži Tejlorov razvoj oblika $T_0^{\cos, 0}(t_i x)$.

Razlog zbog kog smo razmatrali polinomsku aproksimaciju (4.15) umesto polinomske aproksimacije (4.3) jeste taj što sa (4.3), na intervalu $(0, b)$, za $b \geq \frac{2\pi}{t_i}$, ne važi poredak (4.17) jer je $T_0^{\cos, 0}(x) = 1$ bolja aproksimacija funkcije $\cos x$ u tačkama $x = 2s\pi$ ($s \in \mathbb{Z}$) od $T_{4\ell}^{\cos, 0}(x)$ za $\ell \in \{1, 2, 3, \dots\}$ (videti Primer 4.3).

Nezavisno od analiziranja poretka (4.17), za dokazivanje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$, može se koristiti i polinomska aproksimacija (4.3).

4.1.4 Strategija simultanog uvećavanja vrednosti indeksa

Za polinomsku aproksimaciju $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ datu sa (4.3) dajemo strategiju za određivanje vrednosti, ukoliko postoje, indeksa $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{N}_0^m$ koje su dovoljne za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$.

Ako funkcija f nije pozitivna na intervalu $(0, b)$, tada ne postoje vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ takve da je $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$. Ukoliko bi se povećavale vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ za 1, tada se sa takvim uvećavanjima ne bi ostvarila pozitivnost polinoma $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ na intervalu $(0, b)$ i stoga je potrebno uvesti neki uslov zaustavljanja pri određivanju vrednosti indeksa. Na primer, jedan uslov zaustavljanja može biti $(\exists i) \ell_i \geq M$, gde je M neki unapred izabran prirodan broj. Drugi uslov zaustavljanja može biti dostizanje unapred fiksiranog broja iteracija pri određivanju vrednosti indeksa. ■

Strategija simultanog uvećavanja vrednosti indeksa sastoji se od sledećih koraka:

- Postaviti $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (0, 0, \dots, 0)$.
- Dok nije ispunjen izabran uslov zaustavljanja, ponavljati sledeće:
 - Ako je $(\forall x \in (0, b)) P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) > 0$:
završiti rad sa *tekućim izborom vrednosti indeksa* $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$;
inače:
uvećati vrednost svih indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ za 1.

Primer 4.5 Primenom prethodne strategije na polinomsku aproksimaciju

$$P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x) = -45xT_{4\ell_1+1}^{\sin, 0}(x) + 8x^5T_{4\ell_2+3}^{\sin, 0}(x) - \frac{45}{4}T_{4\ell_3}^{\cos, 0}(x) + 90x^2T_{4\ell_4+2}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4}T_{4\ell_5+2}^{\cos, 0}(3x)$$

koja odgovara MTP nejednakosti

$$-45x \sin x + 8x^5 \sin x - \frac{45}{4} \cos x + 90x^2 \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x > 0,$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, iz Primera 1.7, dobijamo sledeće:

1. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ može se pokazati da polinom

$$P_{0,0,0,0,0}(x) = -\frac{4}{3}x^8 + 8x^6 - 45x^4 - \frac{45}{8}x^2$$

nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

2. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$ može se pokazati da polinom

$$P_{1,1,1,1,1}(x) = -\frac{1}{630}x^{12} + \frac{1}{15}x^{10} - \frac{35}{24}x^8 - \frac{1}{64}x^6$$

nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$ može se dokazati, pomoću Šturmove teoreme, da je polinom

$$P_{2,2,2,2,2}(x) = -\frac{1}{4989600}x^{16} + \frac{1}{45360}x^{14} - \frac{13}{8064}x^{12} - \frac{7373}{64512}x^{10} + \frac{8}{21}x^8$$

pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime smo odredili vrednosti indeksa dovoljne za dokaz zadate nejednakosti. □

4.1.5 Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije

Pri određivanju vrednosti, ukoliko postoje, indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ iz (4.3) koje su dovoljne za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$, od značaja je da dobijena polinomska aproksimacija $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ bude što nižeg stepena, jer pozitivnost polinoma $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ dokazujemo primenom Šturmove teoreme, a za polinome nižeg stepena Šturmov niz se sastoji od manjeg broja polinoma.

U prethodnoj sekciji je data jedna strategija za određivanje vrednosti, ukoliko postoje, indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ iz (4.3) koje su dovoljne za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$.

Primitimo da se primenom te strategije često dobija viši stepen polinomske aproksimacije $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ nego što je neophodno.

Stoga, dajemo strategiju za smanjenje, ukoliko je moguće, nekih vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ (koji su određeni kao dovoljni za dokaz zadate nejednakosti) tako da za takve smanjene vrednosti indeksa stepen polinomske aproksimacije $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ bude niži i da pri tome takve vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ i dalje budu dovoljne za dokaz zadate nejednakosti.

Pretpostavimo da su, primenom Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa, vrednosti $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{N}_0^m$ određene kao dovoljne za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$.

Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije sastoji se od sledećih koraka:

- (1) Odrediti vrednost $D = \max\{dg_1, dg_2, \dots, dg_m\}$.
- (2) Dodeliti $(preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, \dots, preth_{\ell_m}) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$.
- (3) Za svaki ℓ_i za koji važi da je $dg_i = D$ uraditi sledeće:
 - o Ako je $\ell_i > 0$:
 - umanjiti ℓ_i za 1;
 - inače:
 - završiti rad sa izborom vrednosti indeksa $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, \dots, preth_{\ell_m})$.
- (4) Ako je $(\forall x \in (0, b)) P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) > 0$:
 - vratiti se na korak (1);
 - inače:
 - završiti rad sa izborom vrednosti indeksa $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, \dots, preth_{\ell_m})$.

Primer 4.6 Primenom Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa na polinomsku aproksimaciju

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x) = -45xT_{4\ell_1+1}^{\sin,0}(x) + 8x^5T_{4\ell_2+3}^{\sin,0}(x) - \frac{45}{4}T_{4\ell_3}^{\cos,0}(x) + 90x^2T_{4\ell_4+2}^{\cos,0}(x) + \frac{45}{4}T_{4\ell_5+2}^{\cos,0}(3x),$$

dobili smo da su vrednosti indeksa $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$ dovoljne za dokaz nejednakosti

$$-45x \sin x + 8x^5 \sin x - \frac{45}{4} \cos x + 90x^2 \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x > 0,$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, iz Primera 1.7 (videti Primer 4.5).

Primenom Strategije za smanjenje stepena polinomske aproksimacije, mogu se smanjiti vrednosti nekih indeksa $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$ na sledeći način:

1. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$ odgovarajući stepeni sabiraka polinoma $P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x)$ su $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (10, 16, 8, 12, 10)$.

Prema koraku (1), određujemo $D = \max\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_2 = 16$.

Prema koraku (2), dodeljujemo $(preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, preth_{\ell_3}, preth_{\ell_4}, preth_{\ell_5}) = (2, 2, 2, 2, 2)$.

Prema koraku (3), umanjujemo vrednost indeksa ℓ_2 za 1, čime dobijamo $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 1, 2, 2, 2)$.

Važi da je $P_{2,1,2,2,2}(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, što znači da se vraćamo na korak (1) strategije.

2. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 1, 2, 2, 2)$ važi da je $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (10, 12, 8, 12, 10)$.

Prema koraku (1), određujemo $D = \max\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_2 = dg_4 = 12$.

Prema koraku (2), dodeljujemo $(preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, preth_{\ell_3}, preth_{\ell_4}, preth_{\ell_5}) = (2, 1, 2, 2, 2)$.

Prema koraku (3) umanjujemo vrednosti indeksa ℓ_2 i ℓ_4 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 0, 2, 1, 2)$.

Može se pokazati da polinom $P_{2,0,2,1,2}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Dakle, za izbor $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (preth_{\ell_1}, preth_{\ell_2}, preth_{\ell_3}, preth_{\ell_4}, preth_{\ell_5}) = (2, 1, 2, 2, 2)$, dobijamo polinomsku aproksimaciju

$$P_{2,1,2,2,2}(x) = -\frac{13}{8064}x^{12} - \frac{7373}{64512}x^{10} + \frac{8}{21}x^8,$$

koja je dovoljna za dokaz zadate nejednakosti.

Prethodno određivanje vrednosti indeksa možemo predstaviti sledećom tabelom.

Tabela 4.1: Određivanje vrednosti indeksa za polinom $P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x)$ primenom Strategije za smanjenje stepena polinomske aproksimacije

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	dg_1	dg_2	dg_3	dg_4	dg_5	$dg P(x)$	$P(x) > 0 ?$
2	2	2	2	2	10	16	8	12	10	16	Da
2	1	2	2	2	10	12	8	12	10	12	Da
2	0	2	1	2	10	8	8	8	10	10	Ne

□

4.1.6 Strategija postepenog uvećavanja vrednosti indeksa

U ovom potpoglavlju dajemo još jednu strategiju za određivanje vrednosti, ukoliko postoje, indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ polinomske aproksimacije $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ koje su dovoljne za dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, b)$. S obzirom na to da takve vrednosti indeksa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ ne moraju da postoje, biramo uslov zaustavljanja slično² kao u Strategiji simultanog uvećavanja vrednosti indeksa.

Budući da je od značaja da dobijena polinomska aproksimacija $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x)$ bude što nižeg stepena, u strategiji koju ćemo predstaviti nastojimo da uvećavamo vrednosti indeksa Tejlorovih razvoja kod onih sabiraka koji su najnižeg stepena.

² Jedan uslov zaustavljanja može biti $(\exists i) \ell_i \geq M$, gde je M neki unapred izabran prirodan broj. Drugi uslov zaustavljanja može biti dostizanje unapred fiksiranog broja iteracija pri određivanju vrednosti indeksa.

Strategija postepenog uvećavanja vrednosti indeksa sastoji se od sledećih koraka:

- (1) Postaviti $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) = (0, 0, \dots, 0)$.
- (2) Dok nije ispunjen izabran uslov zaustavljanja, ponavljati sledeće:
 - (2.1) Ako je $(\forall x \in (0, b)) P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m}(x) > 0$:
završiti rad sa *tekućim izborom vrednosti indeksa* $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$.
 - (2.2) Odrediti vrednost $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_m\}$.
 - (2.3) Uvećati za 1 vrednost *svakog* indeksa ℓ_i za koji važi da je $dg_i = D$.

Primer 4.7 Primenom opisane strategije na polinomsku aproksimaciju

$$P(x) = P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x) = -45x T_{4\ell_1+1}^{\sin, 0}(x) + 8x^5 T_{4\ell_2+3}^{\sin, 0}(x) - \frac{45}{4} T_{4\ell_3}^{\cos, 0}(x) + 90x^2 T_{4\ell_4+2}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4} T_{4\ell_5+2}^{\cos, 0}(3x)$$

iz Primera 4.5, koja odgovara MTP nejednakosti

$$-45x \sin x + 8x^5 \sin x - \frac{45}{4} \cos x + 90x^2 \cos x + \frac{45}{4} \cos 3x > 0,$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, iz Primera 1.7, dobijamo sledeće:

1. Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ može se pokazati da polinom $P_{0,0,0,0,0}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i odgovarajući stepeni sabiraka polinoma $P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x)$ su $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (2, 8, 0, 4, 2)$.

Prema koraku (2.2), određujemo $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_3 = 0$.

Prema koraku (2.3), uvećavamo vrednost indeksa ℓ_3 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (0, 0, 1, 0, 0)$.

2. Može se pokazati da polinom $P_{0,0,1,0,0}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i važi da je $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (2, 8, 4, 4, 2)$.

Prema koraku (2.2), određujemo $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_1 = dg_5 = 2$.

Prema koraku (2.3), uvećavamo vrednosti indeksa ℓ_1 i ℓ_5 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (1, 0, 1, 0, 1)$.

3. Može se pokazati da polinom $P_{1,0,1,0,1}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i važi da je $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (6, 8, 4, 4, 6)$.

Prema koraku (2.2), određujemo $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_3 = dg_4 = 4$.

Prema koraku (2.3), uvećavamo vrednosti indeksa ℓ_3 i ℓ_4 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (1, 0, 2, 1, 1)$.

4. Može se pokazati da polinom $P_{1,0,2,1,1}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i važi da je $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (6, 8, 8, 8, 6)$.

Prema koraku (2.2), određujemo $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_1 = dg_5 = 6$.

Prema koraku (2.3), uvećavamo vrednosti indeksa ℓ_1 i ℓ_5 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 0, 2, 1, 2)$.

5. Može se pokazati da polinom $P_{2,0,2,1,2}(x)$ nije pozitivan na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ i važi da je $(dg_1, dg_2, dg_3, dg_4, dg_5) = (10, 8, 8, 8, 10)$.

Prema koraku (2.2), određujemo $D = \min\{dg_1, dg_2, \dots, dg_5\} = dg_2 = dg_3 = dg_4 = 8$.

Prema koraku (2.3), uvećavamo vrednosti indeksa ℓ_2, ℓ_3 i ℓ_4 za 1, čime dobijamo da je $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 1, 3, 2, 2)$.

6. Polinom

$$P_{2,1,3,2,2}(x) = -\frac{68641}{42577920}x^{12} - \frac{4}{35}x^{10} + \frac{8}{21}x^8$$

pozitivan je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (može se dokazati pomoću Šturmove teoreme), što znači da su vrednosti indeksa $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (2, 1, 3, 2, 2)$ dovoljne za dokaz zadate nejednakosti.

Prethodne iteracije određivanja vrednosti indeksa možemo predstaviti sledećom tabelom.

Tabela 4.2: Određivanje vrednosti indeksa za polinom $P_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5}(x)$ primenom Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa

iteracija	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	dg_1	dg_2	dg_3	dg_4	dg_5	$dg P(x)$	$P(x) > 0 ?$
1.	0	0	0	0	0	2	8	0	4	2	8	Ne
2.	0	0	1	0	0	2	8	4	4	2	8	Ne
3.	1	0	1	0	1	6	8	4	4	6	8	Ne
4.	1	0	2	1	1	6	8	8	8	6	8	Ne
5.	2	0	2	1	2	10	8	8	8	10	10	Ne
6.	2	1	3	2	2	10	12	12	12	10	12	Da

□

4.1.7 Diskusija i neka poboljšanja razmatranih strategija

Leksikografska strategija. Ako indeksi u (4.3) dobijaju redom vrednosti prema leksikografskom poretku, često je potreban veliki broj iteracija određivanja vrednosti indeksa dok se ne pronađu, ukoliko postoje, takve vrednosti koje su dovoljne za dokaz zadate nejednakosti (videti Primer 1.7). Takođe, u ovoj strategiji, broj iteracija određivanja vrednosti indeksa može zavistiti i od redosleda zapisivanja sabiraka u (4.3), što nije slučaj u strategijama predloženim u ovom potpoglavlju.

Prema [24], primenom Leksikografske strategije, potrebno je 212 iteracija određivanja vrednosti indeksa da bi se dokazala nejednakost iz Primera 1.7, na kojoj su, u prethodnim sekcijama, testirane i strategije predložene u ovom potpoglavlju. ■

Neleksikografske strategije. Primenom predloženih strategija se, u odnosu na Leksikografsku strategiju, često znatno brže dolazi do vrednosti indeksa koje dovode do rešenja, tj. do vrednosti indeksa koje su dovoljne za dokaz zadate nejednakosti.

Strategije iz ovog potpoglavlja zasnivaju se na teorijskim rezultatima iz Poglavlja 3, Potpoglavlja 1.3 i Sekcije 4.1.3, što znači da predložene strategije imaju svojstvo saglasnosti³.

Takođe, sve predložene strategije završavaju rad u konačnom vremenu. U Strategiji simultanog uvećavanja vrednosti indeksa i Strategiji postepenog uvećavanja vrednosti indeksa, uvedeni su uslovi

³ Prema [87], saglasnost je svojstvo algoritma koje kaže da ako algoritam tvrdi da je neko tvrđenje tačno, onda ono jeste tačno.

zaustavljanja. Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije se primenjuje samo kada su (primenom Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa) već određene vrednosti indeksa koje dovode do rešenja i ova strategija završava rad ili sa tim vrednostima ili sa nekim nižim pozitivnim vrednostima indeksa.

Strategija za redukovanje broja indeksa ne određuje vrednosti indeksa, već samo smanjuje njihov broj. Ostale razvijene strategije određuju vrednosti indeksa i mogu se primeniti neposredno posle primene Strategije za redukovanje broja indeksa ili nezavisno od nje.

Primenom Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa često se u malom broju iteracija dolazi do rešenja. Međutim, vrednosti indeksa određene ovom strategijom neretko dovode do višeg stepena polinomske aproksimacije (4.3) nego što je neophodno. Na primer, potrebno je 3 iteracije određivanja vrednosti indeksa da bi se dokazala nejednakost iz Primera 1.7 i dobija se polinomska aproksimacija stepena 16 (videti Primer 4.5).

U Strategiji za smanjenje stepena polinomske aproksimacije i Strategiji postepenog uvećavanja vrednosti indeksa od značaja je i da dobijena polinomska aproksimacija bude što nižeg stepena. Primenom obe strategije se, prilikom dokazivanja nejednakosti iz Primera 1.7, dobila polinomska aproksimacija stepena 12 (videti Primer 4.6 i Primer 4.7).

Primenom Strategije za smanjenje stepena polinomske aproksimacije (uključujući i primenu Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa), potrebno je 5 iteracija određivanja vrednosti indeksa da bi se dokazala nejednakost iz Primera 1.7, dok je primenom Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa potrebno 6. Međutim, primetimo da to ne mora da znači da će algoritam koji koristi Strategiju za smanjenje stepena polinomske aproksimacije imati bolje performanse. Primenom Strategije za smanjenje stepena polinomske aproksimacije, pet puta se primenjuje faza **(a)** ispitivanja pozitivnosti dobijenih polinomskih aproksimacija i dva puta faza **(b)**, dok se primenom Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa faza **(a)** primenjuje šest puta, a faza **(b)** samo jednom (videti Sekciju 4.1.1). Iteracije određivanja vrednosti indeksa koje uključuju fazu **(b)** mogu biti znatno sporije od iteracija koje uključuju samo fazu **(a)**.

Strategija postepenog uvećavanja vrednosti indeksa daje samo jednu polinomsku aproksimaciju, ukoliko postoji, koja je pozitivna na posmatranom intervalu. Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije zahteva prethodnu primenu Strategije simultanog uvećavanja vrednosti indeksa i može dati više pozitivnih polinomskih aproksimacija.

Strategijom simultanog uvećavanja vrednosti indeksa brže se dolazi do većih vrednosti indeksa u odnosu na Strategiju postepenog uvećavanja vrednosti indeksa. U Strategiji simultanog uvećavanja vrednosti indeksa stepen dobijene polinomske aproksimacije se u svakoj iteraciji povećava za 4 ukoliko polazna funkcija sadrži trigonometrijsku funkciju, a ukoliko polazna funkcija sadrži samo eksponencijalne funkcije, tada se stepen dobijene polinomske aproksimacije u svakoj iteraciji povećava za 2.

Primetimo da u Strategiji simultanog uvećavanja vrednosti indeksa možemo da uvećavamo sve vrednosti indeksa za 2 (ili za neko $k \in \mathbb{N}$) umesto za 1. Zatim, ako se dođe do rešenja, možemo umanjiti sve vrednosti indeksa za 1 i proveriti da li se i sa tim vrednostima indeksa dolazi do rešenja. Na sličan način se mogu razmotriti i neka poboljšanja Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa.

Na osnovu prethodne diskusije i na osnovu analize većeg broja analitičkih nejednakosti koje se javljaju u radovima, u implementaciji dokazivača koristićemo Strategiju za redukovanje broja indeksa i Strategiju postepenog uvećavanja vrednosti indeksa.

4.2 Rad sistema – Menadžer i ostali algoritmi

U ovom potpoglavlju, na osnovu teorijskih rezultata iz Poglavlja 3 i Potpoglavlja 1.3, 1.4 i 4.1, predstavljamo algoritam rada sistema za dokazivanje nekih nejednakosti oblika

$$f(x) > 0$$

na konačnom intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$, gde je $f \in \mathcal{M}$ ne-nula funkcija oblika (4.1) data sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i x^{p_i} e^{-\tau_i x} + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i}(\tau_i x) \sin^{r_i}(\tau_i x),$$

gde je $m_1 \leq m_2$, $m_1, m_2, p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\tau_i \in \mathbb{R}_0^+$.

Dokazivanje nejednakosti oblika

$$f(x) < 0$$

analogno je, pri čemu se umesto nanižne pozitivne, određuje, ukoliko postoji, navišna negativna polinomska aproksimacija za funkciju $f(x)$ na intervalu (a, b) .

Nejednakosti na poluotvorenim ili zatvorenim nenegativnim konačnim intervalima dokazuju se analogno.

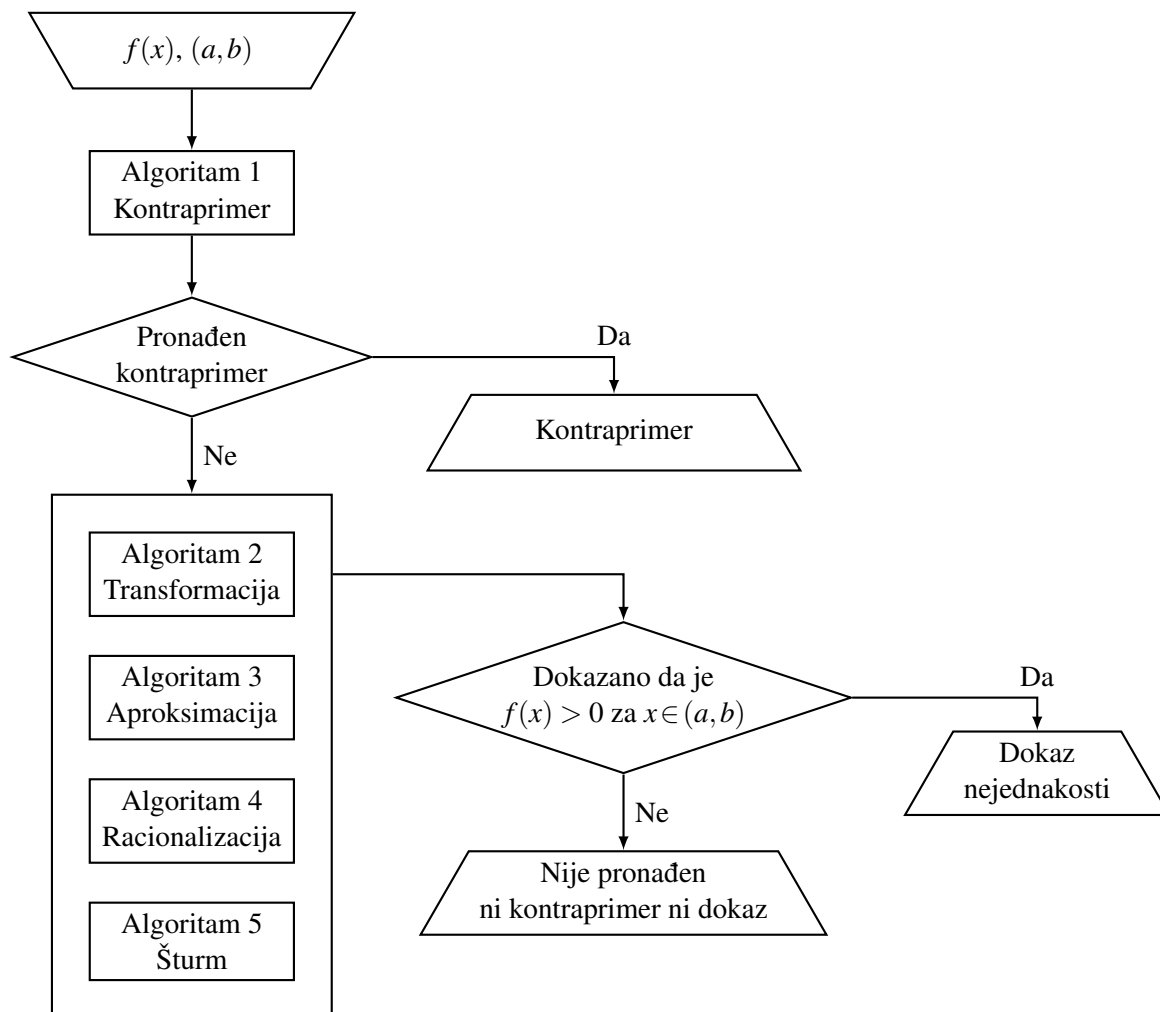
Rad sistema – algoritam Menadžer. Sistem prvo testira, u okviru Algoritma 1 (Kontraprimer), da li je nejednakost $f(x) > 0$ tačna za neke diskretne tačke iz intervala (a, b) . Ako se pronađe tačka $x_0 \in (a, b)$ u kojoj zadata nejednakost ne važi, korisnik dobija obaveštenje da je pronađen *kontraprimer* x_0 .

Ukoliko se ne pronađe kontraprimer, sistem, u okviru Algoritama 2–5, pokušava da dokaže zadatu nejednakost:

- U Algoritmu 2 (Transformacija) vrši se transformacija funkcije f u zapis preko višestrukih uglova i u zavisnosti od toga da li je $f(a) \neq 0$, $f(a) = 0$, $f(b) \neq 0$ ili $f(b) = 0$, poziva se Algoritam 3 za ispitivanje pozitivnosti odgovarajuće funkcije na odgovarajućem intervalu.
- U Algoritmu 3 (Aproksimacija) određuju se nanižne polinomske aproksimacije zadate funkcije na zadatom intervalu, pri čemu se pozitivnost dobijenih aproksimacija ispituje primenom Algoritma 4.
- U Algoritmu 4 (Racionalizacija) se, ukoliko zadati polinom ima iracionalne koeficijente, određuje nanižna polinomska aproksimacija sa racionalnim koeficijentima tog polinoma i poziva se Algoritam 5.
- U Algoritmu 5 (Šturm) se proverava pozitivnost zadatog polinoma na zadatom intervalu primenom Šturmove teoreme.

U slučaju da sistem ne uspe da pronađe kontraprimer, a ni da dokaže zadatu nejednakost, korisnik dobija poruku da prema zadatim postavkama sistema (videti Sekciju 4.4.3) nejednakost nije dokazana.

Sledećom šemom je predstavljen algoritam Menadžer.



Napomenimo da je u implementaciji Menadžera dodatno implementiran i algoritam za memorisanje činjenica koje su do tog trenutka dokazane i koje smo smatrali bitnim za razumevanje dokaza u slučaju da se isti pronađe. Na osnovu memorisanih činjenica formira se odgovarajući tekst dokaza u stilu koji je blizak ljudskom načinu pisanja dokaza. Primeri ispisa koje generiše sistem mogu se videti u Potpoglavljju 4.4.

4.2.1 Algoritam 1: Kontraprimer

Algoritam ispituje vrednost funkcije f u određenim tačkama intervala (a, b) . Prvo se ispituje vrednost funkcije f u tački x_1 , koja je na polovini intervala (a, b) . Ako x_1 nije kontraprimer, ispituje se vrednost funkcije f u tačkama x_2 i x_3 , koje su na polovini intervala (a, x_1) i (x_1, b) , respektivno. Ukoliko nije pronađen kontraprimer, dalje se ispituju vrednosti funkcije f u tačkama koje su na polovini intervala (a, x_2) , (x_2, x_1) , (x_1, x_3) i (x_3, b) . Ovaj postupak se zatim ponavlja, pri čemu se za sve nove tačke u kojima se ispituje vrednost funkcije f primenjuje isti princip polovljenja intervala.

U slučaju da je $f(x) > 0$ za $x \in (a, b)$, ne može se naći kontraprimer. Zbog toga je potrebno uvesti neki uslov zaustavljanja ovog algoritma. Na primer, jedan uslov zaustavljanja može biti da se pretraga zaustavi kada širina dobijenih intervala u nekoj iteraciji postane manja od neke zadate vrednosti. Drugi uslov zaustavljanja može biti da se pretraga zaustavi kada se dostigne unapred određeni broj iteracija polovljenja intervala.

Prednost prvog uslova zaustavljanja algoritma jeste u tome što se garantuje maksimalan razmak između testiranih tačaka. Prednost drugog uslova zaustavljanja jeste u tome što se izbegavaju veli-

ke oscilacije u vremenu izvršavanja algoritma za različite širine unetih intervala s obzirom na to da se uvek testira isti broj tačaka.

U implementaciji ovog algoritma korišćen je drugi uslov zaustavljanja.

Algoritam 1 Kontraprimer

Ulaz: funkcija $f(x)$ oblika (4.1),
interval (a, b) (gde $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ i $a < b$)

Izlaz: KONTRAPRIMER $x_0 \in (a, b)$ (ukoliko se pronade)

- 1: $iteracija := 1$;
 - 2: **Dok god** nije ispunjen izabran uslov zaustavljanja **ponavljati**:
 - 3: $širina_intervala := \frac{b-a}{2^{iteracija-1}}$;
 - 4: $x_0 := a + \frac{širina_intervala}{2}$;
 - 5: **Dok god** je $x_0 < b$ **ponavljati**:
 - 6: **Ako** je $f(x_0) \leq 0$ **onda**
 - 7: **Vratiti** KONTRAPRIMER x_0 i **završiti rad**;
 - 8: $x_0 := x_0 + širina_intervala$;
 - 9: $iteracija := iteracija + 1$;
 - 10: **Obavestiti** da nije pronađen kontraprimer i **završiti rad**;
-

Primer 4.8 Primenom Algoritma 1 na MTP funkciju $f(x) = 3x \sin x \cos x + x \sin x$ za $x \in (a, b) = (0, \pi)$, dobijamo sledeće:

1. Za $iteracija = 1$ imamo da je $širina_intervala = \pi$ i $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Važi

$$f(x_0) = \frac{\pi}{2} > 0,$$

što znači da prelazimo na sledeću iteraciju algoritma.

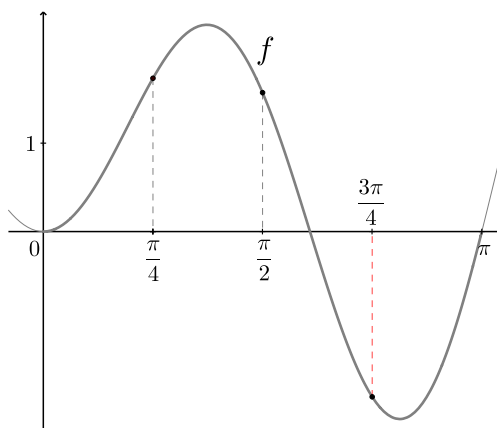
2. Za $iteracija = 2$ imamo da je $širina_intervala = \frac{\pi}{2}$ i $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Važi

$$f(x_0) = \frac{\pi(3 + \sqrt{2})}{8} > 0.$$

Zatim je $x_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Važi

$$f(x_0) = -\frac{3\pi(3 - \sqrt{2})}{8} < 0.$$

Algoritam 1 završava rad i vraća kontraprimer $x_0 = \frac{3\pi}{4}$.



Slika 4.4: Grafik funkcije f

□

4.2.2 Algoritam 2: Transformacija

U pokušaju dokazivanja nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu (a, b) , na osnovu teorijskih razmatranja iz Sekcije 3.1.3, Algoritam 2 razlikuje slučajeve $f(a) \neq 0$, $f(a) = 0$, $f(b) \neq 0$, $f(b) = 0$ i poziva Algoritam 3, koji treba da dokaže odgovarajuću nejednakost.

Algoritam 2 Transformacija

Ulaz: funkcija $f(x)$ oblika (4.1),

interval (a, b) (gde $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ i $a < b$)

Izlaz: **tačno** (ako je dokazano da je $f(x) > 0$ za $x \in (a, b)$)

ili **netačno** (ako se ne pronade dokaz da je $f(x) > 0$ za $x \in (a, b)$)

- 1: Funkciju f transformisati u oblik (4.2); /* primenom smena iz Tabele 1.1 na sabirke oblika */
/* $\alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i}(\tau_i x) \sin^{r_i}(\tau_i x)$ */
 - 2: **Ako je $f(b) \neq 0$ onda**
 - 3: **Ako je $a = 0$ ili je $f(a) \neq 0$ onda**
 - 4: **Vratiti Algoritam 3($f(x)$, (a, b)) i završiti rad;**
 - 5: **inače** /* $a > 0$ i $f(a) = 0$ */
 /* Dokazivanje translacijom */
 - 6: Uvesti funkciju $g(t) = f(t + a)$;
 - 7: Funkciju g transformisati u oblik (4.2); /* primenom adicijonih formula */
 - 8: **Vratiti Algoritam 3($g(t)$, $(0, b - a)$) i završiti rad;**
 - 9: **inače** /* $f(b) = 0$ */
 - 10: **Ako je $f(a) \neq 0$ onda**
 /* Dokazivanje simetrijom */
 - 11: Uvesti funkciju $g(t) = f(b - t)$;
 - 12: Funkciju g transformisati u oblik (4.2); /* primenom adicijonih formula */
 - 13: **Vratiti Algoritam 3($g(t)$, $(0, b - a)$) i završiti rad;**
 - 14: **inače** /* $f(a) = 0$ i $f(b) = 0$ */
 /* Dokazivanje deljenjem intervala (a, b) na dva podintervala */
 - 15: Uvesti funkciju $g_1(t) = f(t + a)$;
 - 16: **Ako je $a > 0$ onda**
 /* Dokazivanje translacijom */
 - 17: Funkciju g_1 transformisati u oblik (4.2); /* primenom adicijonih formula */
 - 18: **Ako je $g_1(\frac{b-a}{2}) > 0$ i Algoritam 3($g_1(t)$, $(0, \frac{b-a}{2})$) = tačno onda**
 /* Dokazivanje simetrijom */
 - 19: Uvesti funkciju $g_2(t) = f(b - t)$;
 - 20: Funkciju g_2 transformisati u oblik (4.2); /* primenom adicijonih formula */
 - 21: **Vratiti Algoritam 3($g_2(t)$, $(0, \frac{b-a}{2})$) i završiti rad;**
 - 22: **inače** /* $g_1(\frac{b-a}{2}) \leq 0$ ili Algoritam 3($g_1(t)$, $(0, \frac{b-a}{2})$) = netačno */
 - 23: **Vratiti netačno i završiti rad;** /* dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na */
 /* intervalu (a, b) nije pronađen */
-

4.2.3 Algoritam 3: Aproksimacija

Na osnovu Strategije za redukovanje broja indeksa i Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa, Algoritam 3 pokušava da odredi, ako postoji, nanižnu polinomsku aproksimaciju koja je dovoljna za dokaz nejednakosti koja je data na ulazu algoritma.

Algoritam 3 Aproksimacija

Ulaz: funkcija $f(x)$ oblika (4.2),
interval (a, b) (gde $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a < b$ i $f(b) \neq 0$)

Izlaz: tačno ili netačno

- 1: Funkciju f transformisati u oblik (4.5); /* tj. u oblik $f(x) = \sum_{i=1}^k h_i(x) \phi_i(t_i x)$ */
/* primenom Strategije za redukovanje broja indeksa */
 - 2: Odrediti, na osnovu (4.7), vrednosti stepena $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$ za $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k) = (0, 0, \dots, 0)$;
 - 3: $P(x) := \sum_{i=1}^k h_i(x) T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x)$;
 - 4: **Dok god** nije ispunjen izabran uslov zaustavljanja **ponavljati:**
 - 5: **Ako** je $P(b) \geq 0$ i Algoritam 4($P(x)$, (a, b)) = **tačno** onda
 - 6: **Vratiti tačno** i završiti rad; /* $f(x) > 0$ na intervalu (a, b) */
 - 7: **inače**
 - 8: $D := \min \left\{ \text{dg}(h_1(x) T_{\vartheta_1}^{\phi_1, 0}(t_1 x)), \text{dg}(h_2(x) T_{\vartheta_2}^{\phi_2, 0}(t_2 x)), \dots, \text{dg}(h_k(x) T_{\vartheta_k}^{\phi_k, 0}(t_k x)) \right\}$;
 - 9: **Za** svaki sabirak $h_i(x) T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x)$ za koji važi da je $\text{dg}(h_i(x) T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x)) = D$ **raditi:**
 - 10: **Ako** je $\phi_i = \exp^-$ onda
 - 11: $\vartheta_i := \vartheta_i + 2$;
 - 12:
$$P(x) := P(x) + h_i(x) \cdot \underbrace{\left((-1)^{\vartheta_i-1} \frac{(t_i x)^{\vartheta_i-1}}{(\vartheta_i-1)!} + (-1)^{\vartheta_i} \frac{(t_i x)^{\vartheta_i}}{\vartheta_i!} \right)}_{(= T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x) - T_{\vartheta_i-2}^{\phi_i, 0}(t_i x))}$$
;
 - 13: **inače** /* ako je $\phi_i = \sin$ ili $\phi_i = \cos$ */
 - 14: $\vartheta_i := \vartheta_i + 4$;
 - 15:
$$P(x) := P(x) + h_i(x) \cdot \underbrace{\left((-1)^{\lfloor \frac{\vartheta_i-2}{2} \rfloor} \frac{(t_i x)^{\vartheta_i-2}}{(\vartheta_i-2)!} + (-1)^{\lfloor \frac{\vartheta_i}{2} \rfloor} \frac{(t_i x)^{\vartheta_i}}{\vartheta_i!} \right)}_{(= T_{\vartheta_i}^{\phi_i, 0}(t_i x) - T_{\vartheta_i-4}^{\phi_i, 0}(t_i x))}$$
;
 - 16: **Vratiti netačno** i završiti rad; /* dokaz nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu (a, b) */
/* nije pronađen */
-

Primitimo da je za ma koji redosled unosa sabiraka funkcije $f(x)$ rezultat rada prethodnog algoritma isti.

4.2.4 Algoritam 4: Racionalizacija

Na osnovu teorijskih rezultata iz Potpoglavlja 1.4, Algoritam 4 ispituje pozitivnost polinoma $P(x)$ na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$ pozivanjem Algoritma 5 (Šturmove teorema).

Algoritam 4 Racionalizacija

Ulaz: polinom $P(x)$, /* $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{p_i}$ (gde $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, p_i \in \mathbb{N}_0$) */
interval (a, b) (gde $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ i $a < b$)

Izlaz: tačno ili netačno

- 1: **Ako** je $P(x)$ polinom sa racionalnim koeficijentima **onda**
 - 2: **Vratiti** Algoritam 5($P(x), (a, b)$) i **završiti rad**;
 - 3: **inače**
 - 4: $k := 1$; /* početni broj značajnih cifara, odnosno decimala na koji zaokružujemo */
 /* iracionalne koeficijente polinoma $P(x)$ pri formiranju polinoma $Q(x)$ */
 - 5: **Dok god** je⁴ $k < MAX_BROJ_CIFARA$ **ponavljati**:
 - 6: $Q(x) := 0$;
 - 7: **Za** svaki sabirak $a_i x^{p_i}$ polinoma $P(x)$ **raditi**:
 - 8: **Ako** je koeficijent a_i iracionalan broj **onda**
 - 9: **Ako** je $-1 < a_i < 1$ **onda**
 - 10: Odbaciti sve decimale broja a_i nakon k -te značajne cifre;
 - 11: **inače** /* $a_i < -1$ ili $a_i > 1$ */
 - 12: Odbaciti sve decimale broja a_i nakon k -te decimala;
 - 13: **Ako** je $a_i < 0$ **onda**
 - 14: Uvećati poslednju decimalu broja a_i za 1;
 - 15: $Q(x) := Q(x) + a_i x^{p_i}$;
 - 16: **Ako** je Algoritam 5($Q(x), (a, b)$) = **tačno** **onda**
 - 17: **Vratiti tačno** i **završiti rad**; /* $P(x) > 0$ na intervalu (a, b) */
 - 18: $k := k + 1$;
 - 19: **Vratiti netačno** i **završiti rad**; /* dokaz nejednakosti $P(x) > 0$ na intervalu (a, b) */
 /* nije pronađen */
-

4.2.5 Algoritam 5: Šturm

Primenom Šturmove teoreme (Teorema 1.5), može se odrediti broj nula polinoma $P(x)$ na segmentu $[a, b]$ ako polinom $P(x)$ nema nule u rubnim tačkama a i b . Ukoliko polinom $P(x)$ ima nulu u tački a i/ili u tački b , tada određujemo polinom $\mathbf{P}(x) \neq P(x)$ takav da je

$$P(x) = (x - a)^i (b - x)^j \mathbf{P}(x),$$

gde $i, j \in \mathbb{N}_0$, i da je $\mathbf{P}(a) \neq 0$ i $\mathbf{P}(b) \neq 0$ i primenjujemo Šturmove teoremu na polinom $\mathbf{P}(x)$.

Ako se primenom Šturmove teoreme dobije da polinom $\mathbf{P}(x)$ nema nulu na segmentu $[a, b]$, za određivanje znaka ovog polinoma dovoljno je ispitati vrednost ovog polinoma u bilo kojoj tački segmenta $[a, b]$.

⁴ MAX_BROJ_CIFARA je unapred definisana vrednost.

Algoritam 5 Šturm

Ulaz: polinom $P(x)$,
interval (a, b) (gde $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a < b$)

Izlaz: tačno ili netačno

- 1: Transformisati polinom $P(x)$ u zapis oblika $P(x) = (x - a)^i (b - x)^j \mathbf{P}(x)$, gde $i, j \in \mathbb{N}_0$, tako da je $\mathbf{P}(a) \neq 0$ i $\mathbf{P}(b) \neq 0$;
- 2: Formirati Šturmov niz polinoma $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_r$, gde $r \in \mathbb{N}$, za polinom $\mathbf{P}(x)$; /* primenom */
/* Teoreme 1.5 */
- 3: Neka je V_a broj promena znakova u nizu realnih brojeva $\mathbf{P}_0(a), \mathbf{P}_1(a), \dots, \mathbf{P}_r(a)$;
- 4: Neka je V_b broj promena znakova u nizu realnih brojeva $\mathbf{P}_0(b), \mathbf{P}_1(b), \dots, \mathbf{P}_r(b)$;
- 5: Ako je $V_a = V_b$ i $P\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ onda
- 6: **Vratiti tačno i završiti rad;** /* $P(x) > 0$ na intervalu (a, b) */
- 7: **Vratiti netačno i završiti rad;** /* nije $P(x) > 0$ na intervalu (a, b) */

4.2.6 Primer rada sistema

Rad Algoritma Menadžer ilustrujemo za funkciju

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{4} - x \sin \frac{x}{4} - \sin^2 x \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

i za izbore intervala:

- (i) $(a, b) = (0, \frac{\pi}{2})$,
- (ii) $(a, b) = (0, \frac{\pi}{4})$,
- (iii) $(a, b) = (4\pi, 5\pi)$,
- (iv) $(a, b) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Algoritam 1 u sva četiri slučaja vraća obaveštenje da nije pronađen kontraprimer.

Poziva se **Algoritam 2** ($f(x)$, (a, b)):

- (i) **Algoritam 2** ($f(x)$, $(0, \frac{\pi}{2})$):

Funkcija f se, primenom smena iz Tabele 1.1, transformiše u oblik

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{4} - x \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

Važi da je

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Kako je

$$f(a) = f(0) = 0,$$

uvodi se funkcija $g_1(t) = f(t)$ za $t \in (0, \frac{b-a}{2}) = (0, \frac{\pi}{4})$.

S obzirom na to da je

$$g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = 0.29967... > 0,$$

poziva se, u liniji 18, **Algoritam 3** ($g_1(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

Funkcija $g_1(t)$ se zapisuje u obliku

$$g_1(t) = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}_{(>0)} \sin \frac{t}{4} + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t.$$

Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = (0, 0, 0, 0)$ dobija se $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) = (3, 3, 0, 2)$, tj.

$$\begin{aligned} P(t) = P_{0,0,0,0}(t) &= \left(\frac{\pi}{2} - t\right) T_{\vartheta_1}^{\sin,0} \left(\frac{t}{4}\right) + \frac{1}{2} T_{\vartheta_2}^{\sin,0} (2t) - \frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\cos,0} (t) + \frac{1}{4} T_{\vartheta_4}^{\cos,0} (3t) = \\ &= \frac{1}{384} t^4 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{768}\right) t^3 - \frac{11}{8} t^2 + \left(\frac{\pi}{8} + 1\right) t. \end{aligned}$$

Kako je

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.078318... < 0,$$

određuje se

$$\begin{aligned} D &= \min \left\{ \text{dg} \left(\left(\frac{\pi}{2} - t\right) T_{\vartheta_1}^{\sin,0} \left(\frac{t}{4}\right) \right), \text{dg} \left(\frac{1}{2} T_{\vartheta_2}^{\sin,0} (2t) \right), \text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\cos,0} (t) \right), \text{dg} \left(\frac{1}{4} T_{\vartheta_4}^{\cos,0} (3t) \right) \right\} \\ &= \min\{4, 3, 0, 2\} = 0. \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $\text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\cos,0} (t) \right) = D$, uvećava se vrednost stepena ϑ_3 za 4.

Za $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) = (3, 3, 4, 2)$ dobija se

$$\begin{aligned} P(t) = P_{0,0,1,0}(t) &= P_{0,0,0,0}(t) - \frac{1}{4} \left(-\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \right) = \\ &= -\frac{1}{128} t^4 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{768} \right) t^3 - \frac{5}{4} t^2 + \left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) t. \end{aligned}$$

Kako je

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.0051760... < 0,$$

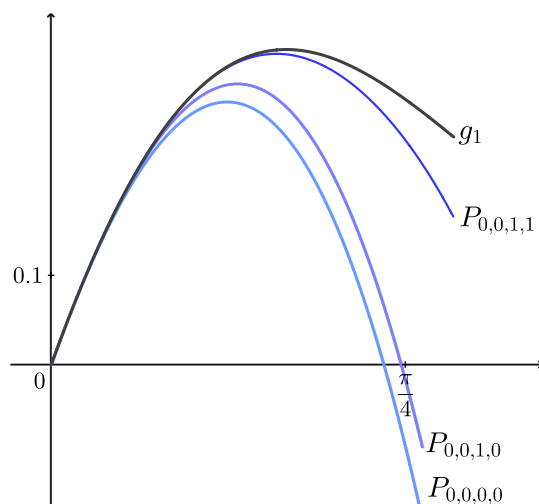
određuje se

$$\begin{aligned} D &= \min \left\{ \text{dg} \left(\left(\frac{\pi}{2} - t\right) T_{\vartheta_1}^{\sin,0} \left(\frac{t}{4}\right) \right), \text{dg} \left(\frac{1}{2} T_{\vartheta_2}^{\sin,0} (2t) \right), \text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\cos,0} (t) \right), \text{dg} \left(\frac{1}{4} T_{\vartheta_4}^{\cos,0} (3t) \right) \right\} \\ &= \min\{4, 3, 4, 2\} = 2. \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $\text{dg} \left(\frac{1}{4} T_{\vartheta_4}^{\cos,0} (3t) \right) = D$, uvećava se vrednost stepena ϑ_4 za 4.

Za $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) = (3, 3, 4, 6)$ dobija se

$$\begin{aligned} P(t) = P_{0,0,1,1}(t) &= P_{0,0,1,0}(t) + \frac{1}{4} \left(\frac{(3t)^4}{4!} - \frac{(3t)^6}{6!} \right) = \\ &= -\frac{81}{320} t^6 + \frac{107}{128} t^4 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{768} \right) t^3 - \frac{5}{4} t^2 + \left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) t. \end{aligned}$$



Slika 4.5: Polinomske aproksimacije $P_{0,0,0,0}$, $P_{0,0,1,0}$ i $P_{0,0,1,1}$ za funkciju g_1

Kako je

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.25646... > 0,$$

poziva se **Algoritam 4** ($P(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

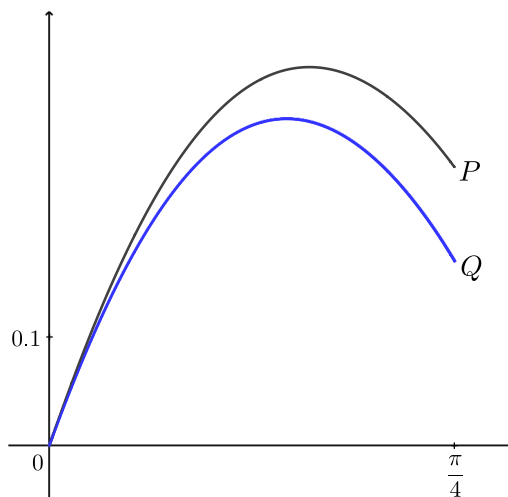
S obzirom na to da polinom

$$\begin{aligned} P(t) &= -\frac{81}{320}t^6 + \frac{107}{128}t^4 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{768}\right)t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \left(\frac{\pi}{8} + 1\right)t = \\ &= -\frac{81}{320}t^6 + \frac{107}{128}t^4 - 0.67... t^3 - \frac{5}{4}t^2 + 1.39... t \end{aligned}$$

ima iracionalne koeficijente, određuje se, za ovaj polinom, nanižna polinomska aproksimacija sa racionalnim koeficijentima $Q(t)$.

Za $k = 1$ dobija se

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{81}{320}t^6 + \frac{107}{128}t^4 - 0.7t^3 - \frac{5}{4}t^2 + 1.3t = \\ &= -\frac{81}{320}t^6 + \frac{107}{128}t^4 - \frac{7}{10}t^3 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{13}{10}t. \end{aligned}$$



Slika 4.6: Polinom P i polinomska aproksimacija Q

Poziva se **Algoritam 5** ($Q(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

Važi da je

$$Q(t) = tP(t),$$

gde je

$$P(t) = -\frac{81}{320}t^5 + \frac{107}{128}t^3 - \frac{7}{10}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{13}{10}$$

i pri tome je $P(0) \neq 0$ i $P(\frac{\pi}{4}) \neq 0$.

Šturmov niz polinoma je⁵:

$$P_0(t) = -t^5 + \frac{535}{162}t^3 - \frac{224}{81}t^2 - \frac{400}{81}t + \frac{416}{81}$$

$$P_1(t) = -t^4 + \frac{107}{54}t^2 - \frac{448}{405}t - \frac{80}{81}$$

$$P_2(t) = -t^3 + \frac{672}{535}t^2 + \frac{320}{107}t - \frac{416}{107}$$

$$P_3(t) = t^2 + \frac{45200320}{119950383}t - \frac{180641120}{119950383}$$

$$P_4(t) = -t + \frac{6003834918325}{3653210792747}$$

$$P_5(t) = -1.$$

U nizu brojeva

$$P_0(0) = \frac{416}{81}, \quad P_1(0) = -\frac{80}{81}, \quad P_2(0) = -\frac{416}{107},$$

$$P_3(0) = -\frac{180641120}{119950383}, \quad P_4(0) = \frac{6003834918325}{3653210792747} \quad \text{i} \quad P_5(0) = -1$$

postoji $V_0 = 3$ promene znaka.

U nizu brojeva

$$P_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.85254\dots, \quad P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.01466\dots, \quad P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.24865\dots,$$

$$P_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.59315\dots, \quad P_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.85804\dots \quad \text{i} \quad P_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

postoji $V_{\frac{\pi}{4}} = 3$ promene znaka.

Kako je

$$V_0 = V_{\frac{\pi}{4}} \quad \text{i} \quad Q\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.29430\dots > 0,$$

Algoritam 5 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $Q(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 4 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $P(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 3 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $g_1(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 2 nastavlja rad na sledeći način.

Uvodi se funkcija

$$g_2(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = t \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{t}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 3t \quad (4.18)$$

⁵ Za više detalja videti Primere 1.5 i 1.6.

za $t \in (0, \frac{b-a}{2}) = (0, \frac{\pi}{4})$. Funkcija $g_2(t)$ se, primenom adicionih formula, transformiše u oblik

$$g_2(t) = -t \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{t}{4} + t \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 3t \quad (4.19)$$

i poziva se, u liniji 21, **Algoritam 3** ($g_2(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

Funkcija $g_2(t)$ je već zapisana u obliku (4.5).

Za $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ dobija se $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5) = (1, 2, 1, 3, 1)$, tj.

$$\begin{aligned} P(t) = P_{0,0,0,0,0}(t) &= -t \sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) T_{\vartheta_1}^{\sin,0} \left(\frac{t}{4} \right) + t \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) T_{\vartheta_2}^{\cos,0} \left(\frac{t}{4} \right) - \frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\sin,0}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} T_{\vartheta_4}^{\sin,0}(2t) - \frac{1}{4} T_{\vartheta_5}^{\sin,0}(3t) = \\ &= \left(-\frac{2}{3} - \frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{32} \right) t^3 - \frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{4} t^2 + \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) t \end{aligned}$$

Kako je

$$P \left(\frac{\pi}{4} \right) = -0.17069... < 0,$$

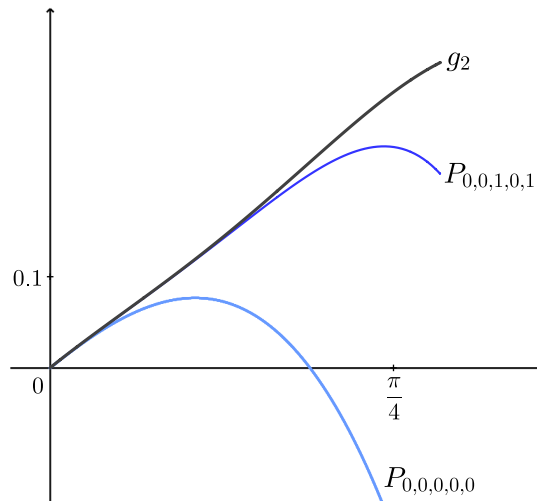
određuje se

$$\begin{aligned} D &= \min \left\{ \text{dg} \left(-t \sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) T_{\vartheta_1}^{\sin,0} \left(\frac{t}{4} \right) \right), \text{dg} \left(t \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) T_{\vartheta_2}^{\cos,0} \left(\frac{t}{4} \right) \right), \text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\sin,0}(t) \right), \right. \\ &\quad \left. \text{dg} \left(\frac{1}{2} T_{\vartheta_4}^{\sin,0}(2t) \right), \text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_5}^{\sin,0}(3t) \right) \right\} \\ &= \min \{ 2, 3, 1, 3, 1 \} = 1. \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $\text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_3}^{\sin,0}(t) \right) = \text{dg} \left(-\frac{1}{4} T_{\vartheta_5}^{\sin,0}(3t) \right) = D$, uvećavaju se vrednosti stepena ϑ_3 i ϑ_5 za 4.

Za $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5) = (1, 2, 5, 3, 5)$ dobija se

$$\begin{aligned} P(t) = P_{0,0,1,0,1}(t) &= P_{0,0,0,0,0}(t) - \frac{1}{4} \left(-\frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{(3t)^3}{3!} + \frac{(3t)^5}{5!} \right) = \\ &= -\frac{61}{120} t^5 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{32} \right) t^3 - \frac{\sin \frac{3\pi}{8}}{4} t^2 + \cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) t. \end{aligned}$$



Slika 4.7: Polinomske aproksimacije $P_{0,0,0,0,0}$ i $P_{0,0,1,0,1}$ za funkciju g_2

Kako je

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.24261... > 0,$$

poziva se **Algoritam 4** ($P(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

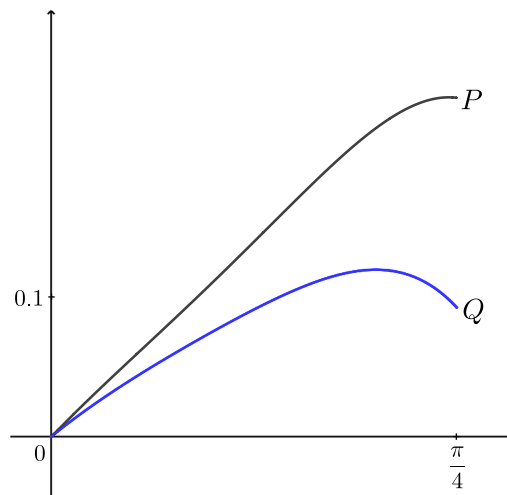
S obzirom na to da polinom

$$\begin{aligned} P(t) &= -\frac{61}{120}t^5 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{32}\right)t^3 - \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{4}t^2 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)t = \\ &= -\frac{61}{120}t^5 + 0.48... t^3 - 0.23... t^2 + 0.38... t \end{aligned}$$

ima iracionalne koeficijente, određuje se, za ovaj polinom, nanižna polinomska aproksimacija sa racionalnim koeficijentima $Q(t)$.

Za $k = 1$ dobija se

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{61}{120}t^5 + 0.4t^3 - 0.3t^2 + 0.3t = \\ &= -\frac{61}{120}t^5 + \frac{2}{5}t^3 - \frac{3}{10}t^2 + \frac{3}{10}t. \end{aligned}$$



Slika 4.8: Polinom P i polinomska aproksimacija Q

Poziva se **Algoritam 5** ($Q(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

Važi da je

$$Q(t) = tP(t),$$

gde je

$$P(t) = -\frac{61}{120}t^4 + \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{10}t + \frac{3}{10}$$

i pri tome je $P(0) \neq 0$ i $P(\frac{\pi}{4}) \neq 0$.

Šturmov niz polinoma je:

$$P_0(t) = -t^4 + \frac{48}{61}t^2 - \frac{36}{61}t + \frac{36}{61}$$

$$P_1(t) = -t^3 + \frac{24}{61}t - \frac{9}{61}$$

$$P_2(t) = -t^2 + \frac{9}{8}t - \frac{3}{2}$$

$$P_3(t) = -t - \frac{2004}{817}$$

$$P_4(t) = 1.$$

U nizu brojeva

$$P_0(0) = \frac{36}{61}, \quad P_1(0) = -\frac{9}{61}, \quad P_2(0) = -\frac{3}{2}, \quad P_3(0) = -\frac{2004}{817} \quad \text{i} \quad P_4(0) = 1$$

postoje $V_0 = 2$ promene znaka.

U nizu brojeva

$$P_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.231\dots, \quad P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.323\dots, \quad P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.233\dots,$$

$$P_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3.238\dots \quad \text{i} \quad P_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

postoje $V_{\frac{\pi}{4}} = 2$ promene znaka.

Kako je

$$V_0 = V_{\frac{\pi}{4}} \quad \text{i} \quad Q\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.091022\dots > 0,$$

Algoritam 5 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $Q(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 4 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $P(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 3 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $g_2(t) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

Algoritam 2 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$).

Algoritam Menadžer generiše tekst dokaza za korisnika, koji je u ovom slučaju prikazan u Podsekciji 4.4.2.3.

(ii) **Algoritam 2** ($f(x)$, $(0, \frac{\pi}{4})$):

Funkcija f se, primenom smena iz Tabele 1.1, transformiše u oblik

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{4} - x \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

Važi da je

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = 0.29967\dots > 0.$$

Kako je i $a = 0$, u liniji 4 se poziva **Algoritam 3** ($f(x)$, $(0, \frac{\pi}{4})$), koji, kao i u slučaju (i), vraća **tačno**.

Dakle, i Algoritam 2 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$).

(iii) **Algoritam 2** ($f(x)$, $(4\pi, 5\pi)$):

Funkcija f se, primenom smena iz Tabele 1.1, transformiše u oblik

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{4} - x \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

Važi da je

$$f(b) = f(5\pi) = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4} = 9.99648... > 0.$$

Kako je

$$a = 4\pi > 0 \quad \text{i} \quad f(a) = f(4\pi) = 0,$$

uvodi se funkcija

$$g(t) = f(t + 4\pi) = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{t}{4} + (t + 4\pi) \sin \frac{t}{4} + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$$

i poziva se, u liniji 8, **Algoritam 3** ($g(t)$, $(0, \pi)$), koji vraća **tačno**.

Dakle, i Algoritam 2 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $f(x) > 0$ na intervalu $(4\pi, 5\pi)$).

(iv) **Algoritam 2** ($f(x)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$):

Funkcija f se, primenom smena iz Tabele 1.1, transformiše u oblik

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{4} - x \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

Važi da je

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Kako je

$$f(a) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

uvodi se funkcija

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = t \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{t}{4}\right) - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 3t$$

za $t \in (0, b - a) = (0, \frac{\pi}{4})$, data sa (4.18). Funkcija $g(t)$ se, primenom adicijonih formula, transformiše u oblik

$$g(t) = -t \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{t}{4} + t \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 3t$$

dat sa (4.19).

Zatim se, u liniji 13, poziva **Algoritam 3** ($g(t)$, $(0, \frac{\pi}{4})$), koji, kao i u slučaju (i), vraća **tačno**.

Dakle, i Algoritam 2 vraća **tačno** i završava rad (što znači da je $f(x) > 0$ na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$).

4.3 Korišćene tehnologije

Sistem je implementiran u vidu internet aplikacije kako bi korisnicima bilo omogućeno jednostavno korišćenje bez potrebe za instalacijom softvera.

Klijentska strana aplikacije (engl. „front-end”) implementirana je korišćenjem radnog okvira Angular [74]. Kod je napisan u HTML, SCSS i TypeScript jeziku. Za kreiranje nekih delova stranica korišćen je Bootstrap [153]. Unos nejednakosti i intervala u LaTeX formatu urađen je korišćenjem biblioteke MathQuill [79]. Ispis dokaza nejednakosti u LaTeX sintaksi urađen je pomoću biblioteke Katex [94]. Za iscrtavanje grafika korišćena je biblioteka Desmos [68].

Serverska strana aplikacije (engl. „back-end”) implementirana je u programskom jeziku Python na osnovu algoritma koji je dat u Potpoglavlju 4.2. U implementaciji serverske strane aplikacije korišćena je biblioteka SymPy [131], koja omogućava simbolička izračunavanja i izvođenje brojnih matematičkih operacija. Za transformisanje nejednakosti i intervala koje je korisnik uneo iz LaTeX zapisa u simbolički izraz, korišćena je biblioteka latex2sympy2 [98].

Serverska strana aplikacije realizovana je korišćenjem radnog okvira Flask [76] kako bi se omogućile serverske komponente. Zahtevi koje klijentska strana šalje serverskoj i odgovori koje serverska strana vraća klijentskoj su u JSON formatu.

Zahtev koji klijentska strana aplikacije šalje serverskoj sa ciljem dokazivanja nejednakosti sadrži sledeće podatke:

- (1) nejednakost u LaTeX sintaksi,
- (2) interval u LaTeX sintaksi,
- (3) informacije o postavkama sistema (videti Sekciju 4.4.3).

Na serverskoj strani aplikacije proverava se ispravnost unetih podataka. Serverska strana aplikacije može vratiti poruku o neispravnosti nekog podatka, kontraprimer, dokaz nejednakosti, kao i poruku da sa zadatim postavkama sistema nije pronađen ni kontraprimer niti je dokazana nejednakost.

4.4 Funkcionalnosti i korisnički interfejs sistema

Sistem se sastoji od tri stranice. U okviru stranice „O sistemu” date su osnovne informacije o razvijenom sistemu. Uputstvo za citiranje se nalazi na stranici „Kako citirati”. Glavni deo sistema predstavlja stranica „Dokazivač”, koja je prikazana na sledećoj slici.

O sistemu Dokazivač Kako citirati

Dokazujemo nejednakost

na intervalu

Dokaži

Sistem dokazuje nejednakosti oblika

$$f_1(x) > f_2(x) \quad (\text{tj. } f_1(x) < f_2(x))$$

na intervalu \mathbb{I} , gde je \mathbb{I} otvoren, poluotvoren ili zatvoren ograničen nenegativan realan interval, i gde su $f_1, f_2 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije oblika

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i x^{p_i} e^{-\tau_i x} + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i}(\tau_i x) \sin^{r_i}(\tau_i x),$$

gde je $m_1 \leq m_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$ i $\tau_i \in \mathbb{R}^+$.

Metod za dokazivanje nejednakosti $f_1(x) > f_2(x)$ (tj. $f_1(x) < f_2(x)$) zasniava se na određivanju nanižne (tj. navišne) polinomske aproksimacije $P(x)$ za funkciju $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ na intervalu \mathbb{I} , a zatim na dokazivanju polinomske nejednakosti $P(x) > 0$ (tj. $P(x) < 0$) na intervalu \mathbb{I} , ako takva polinomska aproksimacija postoji.

Polinomske nejednakosti dokazuju se primenom Šturmove teoreme.

Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.9: Korisnički interfejs dokazivača

U okviru stranice „Dokazivač” dat je kratak opis dokazivača. Takođe, u okviru ove stranice se nalazi i forma za unošenje nejednakosti i intervala.

Dokazujemo nejednakost

$$(8x^5 - 45x) \sin(x) - 45 \cos(x) \sin^2(x) + 90x^2 \cos(x) > 0$$

na intervalu

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Slika 4.10: Forma za unošenje nejednakosti i intervala

Nejednakost i interval je moguće uneti putem tastature ili putem simboličkog menija. Simbolički meni se sastoji od dve stranice koje su prikazane na sledećoj slici.

(a) Prvi deo simboličkog menija

(b) Drugi deo simboličkog menija

Slika 4.11: (a) Prvi deo simboličkog menija
(b) Drugi deo simboličkog menija

Deo stranice u kojem se nalaze forma za unošenje nejednakosti i intervala i kalkulator moguće je podešavati po širini, a moguće ga je i u potpunosti ukloniti kako bi se preko celog ekrana prikazao dokaz nejednakosti. Dugme „Kopiraj LaTeX kod”, koje se nalazi u donjem desnom uglu ekrana, omogućava korisniku da preuzme dokaz u LaTeX sintaksi.

U nastavku dajemo primere rada sistema na nekim klasama analitičkih nejednakosti. Ukoliko zadata nejednakost sadrži trigonometrijske i/ili eksponencijalne funkcije i ako je sistem dokaže, ispisuju se svi koraci svođenja dokaza na dokaz polinomske nejednakosti bez ispisivanja dokaza odgovarajućih polinomskih nejednakosti. Ukoliko korisnik unese polinomsku nejednakost i ako je sistem dokaže, tada se ispisuje kompletan dokaz zadate polinomske nejednakosti (zasnovan na Šturmovoj teoremi).

4.4.1 Pronalaženje kontraprimera

Na Slici 4.12 ilustrovan je rad dokazivača u slučaju kada zadata nejednakost ne važi i kada je sistem pronašao kontraprimer. Broj tačaka u kojima se traži kontraprimer na otvorenim intervalima je $2^n - 1$, gde je $n \in \mathbb{N}_0$ postavljeno na 5 i može da se menja u postavkama sistema (videti Sekciju 4.4.3). Traženje kontraprimera za ovu nejednakost razmatrano je i u Primeru 4.8.

The screenshot shows a software interface for finding counterexamples. On the left, there is a control panel with the following elements:

- Navigation links: "O sistemu", "Dokazivač", "Kako citirati".
- Settings and language icons.
- A section titled "Dokazujemo nejednakost" with a double-left arrow icon. Below it is a text input field containing the inequality $3x \sin x \cos x + x \sin x > 0$.
- A section titled "na intervalu" with a text input field containing the interval $(0, \pi)$.
- A large green button labeled "Dokaži".

On the right, the main display area shows the result of the search on a grid background:

Da bismo dokazali nejednakost

$$3x \sin(x) \cos(x) + x \sin(x) > 0$$

na intervalu $(0, \pi)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 3x \sin(x) \cos(x) + x \sin(x)$$

na intervalu $(0, \pi)$. Važi da je

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.86821\dots < 0.$$

Stoga, zadata nejednakost ne važi na posmatranom intervalu.

Slika 4.12: Pronalaženje kontraprimera

4.4.2 Dokazivanje raznih klasa nejednakosti

4.4.2.1 Dokazivanje polinomskih nejednakosti

Dokazivanje polinomske nejednakosti sa racionalnim koeficijentima ilustrujemo na primeru nejednakosti

$$-\frac{68641}{42577920}x^{12} - \frac{4}{35}x^{10} + \frac{8}{21}x^8 > 0, \text{ za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

iz Primera 4.7.

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$-\frac{68641x^{12}}{42577920} - \frac{4x^{10}}{35} + \frac{8x^8}{21} > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, posmatrajmo polinom

$$P(x) = x^8 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = -\frac{68641}{42577920}x^4 - \frac{4}{35}x^2 + \frac{8}{21},$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Primenom Šturmovog algoritma na polinom $\mathbf{P}(x)$ dobija se Šturmov niz polinoma:

$$\mathbf{P}_0(x) = -x^4 - \frac{4866048}{68641}x^2 + \frac{16220160}{68641}$$

$$\mathbf{P}_1(x) = -x^3 - \frac{2433024}{68641}x$$

$$\mathbf{P}_2(x) = x^2 - \frac{20}{3}$$

$$\mathbf{P}_3(x) = x$$

$$\mathbf{P}_4(x) = 1.$$

U nizu vrednosti, za $x = 0$,

$$\mathbf{P}_0(0) = \frac{16220160}{68641}, \quad \mathbf{P}_1(0) = 0, \quad \mathbf{P}_2(0) = -\frac{20}{3}, \quad \mathbf{P}_3(0) = 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_4(0) = 1$$

postoji $V(0) = 2$ promene znaka.

Sa druge strane, u nizu vrednosti, za $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\mathbf{P}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 55.29897\dots, \quad \mathbf{P}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -59.55366\dots, \quad \mathbf{P}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4.19926\dots,$$

$$\mathbf{P}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.57079\dots \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

postoji $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ promene znaka.

Odatle zaključujemo da polinom $\mathbf{P}(x)$ ima $N = V(0) - V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ realnih nula na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.044859\dots > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

📄 Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.13: Dokazivanje polinomske nejednakosti sa racionalnim koeficijentima iz Primera 4.7

Dokazivanje polinomske nejednakosti sa iracionalnim koeficijentima ilustrujemo na primeru nejednakosti

$$-\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{768}\right)x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{\pi}{8} + 1 > 0, \quad \text{za } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

iz Potpoglavlja 1.4.

Da bismo dokazali nejednakost



$$-\frac{81x^5}{320} + \frac{107x^3}{128} - x^2 \left(\frac{\pi}{768} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5x}{4} + \frac{\pi}{8} + 1 > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, posmatrajmo polinom

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{81x^5}{320} + \frac{107x^3}{128} - x^2 \left(\frac{\pi}{768} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5x}{4} + \frac{\pi}{8} + 1 \\ &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - 0.67\dots x^2 - \frac{5}{4}x + 1.39\dots \end{aligned}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$. Jedna nanižna polinomska aproksimacija polinoma $P(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ data je sa

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - 0.7x^2 - \frac{5}{4}x + 1.3 \\ &= -\frac{81}{320}x^5 + \frac{107}{128}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{13}{10}. \end{aligned}$$

Primenom Šturmovog algoritma na polinom $Q(x)$ dobija se Šturmov niz polinoma:

$$Q_0(x) = -x^5 + \frac{535}{162}x^3 - \frac{224}{81}x^2 - \frac{400}{81}x + \frac{416}{81}$$

$$Q_1(x) = -x^4 + \frac{107}{54}x^2 - \frac{448}{405}x - \frac{80}{81}$$

$$Q_2(x) = -x^3 + \frac{672}{535}x^2 + \frac{320}{107}x - \frac{416}{107}$$

$$Q_3(x) = x^2 + \frac{45200320}{119950383}x - \frac{180641120}{119950383}$$

$$Q_4(x) = \frac{6003834918325}{3653210792747} - x$$

$$Q_5(x) = -1.$$

U nizu vrednosti, za $x = 0$,

$$\begin{aligned} Q_0(0) &= \frac{416}{81}, & Q_1(0) &= -\frac{80}{81}, & Q_2(0) &= -\frac{416}{107}, & Q_3(0) &= -\frac{180641120}{119950383}, & Q_4(0) &= \frac{6003834918325}{3653210792747} & \text{i} \\ Q_5(0) &= -1 \end{aligned}$$

postoji $V(0) = 3$ promene znaka.

Sa druge strane, u nizu vrednosti, za $x = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} Q_0\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 0.85254\dots, & Q_1\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -1.01466\dots, & Q_2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -1.24865\dots, & Q_3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -0.59315\dots, \\ Q_4\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 0.85804\dots & \text{i} & & Q_5\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -1 \end{aligned}$$

postoji $V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ promene znaka.

Odatle zaključujemo da polinom $Q(x)$ ima $N = V(0) - V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ realnih nula na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$. S obzirom na to da je $Q\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.74943\dots > 0$, važi da je

$$Q(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$. Kako je $P(x) > Q(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

 Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.14: Dokazivanje polinomske nejednakosti sa iracionalnim koeficijentima iz Sekcije 4.2.6

4.4.2.2 Dokazivanje MTP nejednakosti

Dokazivanje MTP nejednakosti ilustrujemo na primeru nejednakosti (1.12) date sa

$$8x^5 \sin x + 90x^2 \cos x - 45x \sin x - 45 \cos x \sin^2 x > 0, \text{ za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

na kojoj su, u Potpoglavlju 1.5, testirani i neki postojeći sistemi za automatsko dokazivanje nejednakosti.

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$8x^5 \sin(x) + 90x^2 \cos(x) - 45x \sin(x) - 45 \sin^2(x) \cos(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 90x^2 \cos(x) + x(8x^4 - 45) \sin(x) - 45 \sin^2(x) \cos(x)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$\sin^2(x) \cos(x) = \frac{\cos(x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{4}.$$

Stoga je

$$f(x) = x(8x^4 - 45) \sin(x) + \frac{45(8x^2 - 1) \cos(x)}{4} + \frac{45 \cos(3x)}{4}.$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ data je sa

$$P(x) = -45xT_9^{\sin, 0}(x) + 8x^5T_7^{\sin, 0}(x) - \frac{45}{4}T_{12}^{\cos, 0}(x) + 90x^2T_{10}^{\cos, 0}(x) + \frac{45}{4}T_{10}^{\cos, 0}(3x)$$

$$= -\frac{68641}{42577920}x^{12} - \frac{4}{35}x^{10} + \frac{8}{21}x^8.$$

Primetimo da je

$$P(x) = x^8 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = -\frac{68641}{42577920}x^4 - \frac{4}{35}x^2 + \frac{8}{21}.$$

Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. S obzirom na to da je $P(\frac{\pi}{4}) = 0.044859\dots > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je $f(x) > P(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

📄 Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.15: Dokazivanje nejednakosti (1.12)

4.4.2.3 Dokazivanje uopštenih MTP nejednakosti

Dokazivanje uopštene MTP nejednakosti ilustrujemo na primeru nejednakosti

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin \frac{x}{4} - \sin^2 x \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x > 0, \text{ za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

iz Sekcije 4.2.6, na kojoj je prikazan rad predloženog algoritma za dokazivanje nejednakosti.

O sistemu
Dokazivač
Kako citirati
⚙️
🌐

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \sin \left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2(x) \cos(x) + \frac{\sin(2x)}{2} > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = -\frac{(2x - \pi) \sin \left(\frac{x}{4}\right)}{2} - \sin^2(x) \cos(x) + \frac{\sin(2x)}{2}$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Važi da je

$$\sin^2(x) \cos(x) = \frac{\cos(x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{4}.$$

Stoga je

$$f(x) = -\frac{(2x - \pi) \sin \left(\frac{x}{4}\right)}{2} + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\cos(x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{4}.$$

Kako je $f(0) = 0$ i $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, razmatramo sledeće slučajeve:

1. $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$:

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ data je sa

$$P_1(x) = \underbrace{-\frac{2x - \pi}{2} T_3^{\sin, 0} \left(\frac{x}{4}\right)}_{(>0)} + \frac{1}{2} T_3^{\sin, 0}(2x) - \frac{1}{4} T_4^{\cos, 0}(x) + \frac{1}{4} T_6^{\cos, 0}(3x)$$

$$= -\frac{81x^6}{320} + \frac{107x^4}{128} + x^3 \left(-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{768}\right) - \frac{5x^2}{4} + x \left(\frac{\pi}{8} + 1\right),$$

(izdvojene polinomske nejednakosti proverene su primenom Šturmove teoreme). Primitimo da je

$$P_1(x) = x \mathbf{P}_1(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}_1(x) = -\frac{81x^5}{320} + \frac{107x^3}{128} + x^2 \left(-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{768}\right) - \frac{5x}{4} + \frac{\pi}{8} + 1.$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}_1(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Stoga, polinom $P_1(x)$ nema nulu na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. S obzirom na to da je $P_1\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.33247\dots > 0$, važi da je

$$P_1(x) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Kako je $f(x) > P_1(x)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$2. x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right):$$

Dokažimo da je $f(x) > 0$ i na intervalu $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Uvođenjem smene $x = \frac{\pi}{2} - t$, dobijamo funkciju:

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = t \cos\left(\frac{t}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) - \frac{\sin(t)}{4} + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin(3t)}{4},$$

gde $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Važi da je

$$g(x) = -\frac{t\sqrt{\sqrt{2}+2}\sin\left(\frac{t}{4}\right)}{2} + \frac{t\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{4}\right)}{2} - \frac{\sin(t)}{4} + \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin(3t)}{4}.$$

Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $g(t)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ data je sa

$$\begin{aligned} P_2(t) &= -t\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}T_1^{\sin,0}\left(\frac{t}{4}\right) + t\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}T_2^{\cos,0}\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{1}{4}T_5^{\sin,0}(t) + \frac{1}{2}T_3^{\sin,0}(2t) - \frac{1}{4}T_5^{\sin,0}(3t) \\ &= -\frac{61t^5}{120} + t^3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}}{32}\right) - \frac{t^2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}{4} + t\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}. \end{aligned}$$

Primetimo da je

$$P_2(t) = t\mathbf{P}_2(t),$$

gde je

$$\mathbf{P}_2(t) = -\frac{61t^4}{120} + t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}}{32}\right) - \frac{t\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}}{4} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}_2(t)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Stoga, polinom $P_2(t)$ nema nulu na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. S obzirom na to da je $P_2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.13946\dots > 0$, važi da je

$$P_2(t) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Kako je $g(t) > P_2(t)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, važi da je

$$g(t) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Zaključak. Na osnovu prethodna dva slučaja, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

 Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.16: Dokazivanje nejednakosti iz Sekcije 4.2.6

4.4.2.4 Dokazivanje MEP nejednakosti

Dokazivanje MEP nejednakosti ilustrujemo na primeru nejednakosti

$$-x^3 e^{-x} - x^3 e^{-2x} + 2 - 6e^{-x} + 6e^{-2x} - 2e^{-3x} > 0, \text{ za } x \in (0, 1), \quad (4.20)$$

iz [121].

O sistemu
Dokazivač
Kako citirati
⚙️
🌐

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$-x^3 e^{-x} - x^3 e^{-2x} + 2 - 6e^{-x} + 6e^{-2x} - 2e^{-3x} > 0$$

na intervalu $(0, 1)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = (6 - x^3) e^{-2x} + (-x^3 - 6) e^{-x} + 2 - 2e^{-3x}$$

na intervalu $(0, 1)$. Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ data je sa

$$P(x) = \underbrace{(-x^3 - 6) T_8^{\exp, 0}(-x)}_{(<0)} + \underbrace{(6 - x^3) T_9^{\exp, 0}(-2x)}_{(>0)} + 2 - 2T_{12}^{\exp, 0}(-3x)$$

$$= -\frac{64507}{79833600} x^{12} + \frac{1387}{554400} x^{11} - \frac{467}{67200} x^{10} + \frac{589}{60480} x^9 - \frac{1}{80} x^8 + \frac{1}{120} x^7,$$

(izdvojene polinomske nejednakosti proverene su primenom Šturmove teoreme). Primitimo da je

$$P(x) = x^7 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = -\frac{64507}{79833600} x^5 + \frac{1387}{554400} x^4 - \frac{467}{67200} x^3 + \frac{589}{60480} x^2 - \frac{1}{80} x + \frac{1}{120}.$$

Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, 1]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, 1)$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1931569}{65399685120} = 2.9534 \dots \cdot 10^{-5} > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, 1)$. Kako je $f(x) > P(x)$ na intervalu $(0, 1)$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, 1)$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

📄 Kopiraj LaTeX kod

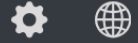
Slika 4.17: Dokazivanje MEP nejednakosti (4.20)

4.4.2.5 Dokazivanje uopštenih MEP nejednakosti

Dokazivanje uopštenih MEP nejednakosti ilustrujemo na primeru nejednakosti

$$-x^3 e^{-\sqrt{2}x} - x^3 e^{-x} + 2 - 6e^{-x} + 6e^{-2x} - 2e^{-3x} < 0, \text{ za } x \in (0, 1). \quad (4.21)$$

O sistemu Dokazivač Kako citirati



Da bismo dokazali nejednakost



$$-x^3 e^{-\sqrt{2}x} - x^3 e^{-x} + 2 - 6e^{-x} + 6e^{-2x} - 2e^{-3x} < 0$$

na intervalu $(0, 1)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = -x^3 e^{-\sqrt{2}x} + (-x^3 - 6) e^{-x} + 2 + 6e^{-2x} - 2e^{-3x}$$

na intervalu $(0, 1)$. Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna navišna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ data je sa

$$\begin{aligned} P(x) &= -x^3 T_5^{\exp, 0}(-\sqrt{2}x) + \underbrace{(-x^3 - 6)}_{(<0)} T_5^{\exp, 0}(-x) + 2 + 6T_8^{\exp, 0}(-2x) - 2T_9^{\exp, 0}(-3x) \\ &= \frac{243x^9}{2240} + x^8 \left(-\frac{125}{448} + \frac{\sqrt{2}}{30} \right) + \frac{71x^7}{140} + x^6 \left(-\frac{53}{40} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + x^5 + x^4 (-2 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

(izdvojene polinomske nejednakosti proverene su primenom Šturmove teoreme). Primitimo da je

$$P(x) = x^4 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = \frac{243x^5}{2240} + x^4 \left(-\frac{125}{448} + \frac{\sqrt{2}}{30} \right) + \frac{71x^3}{140} + x^2 \left(-\frac{53}{40} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + x - 2 + \sqrt{2}.$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, 1]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, 1)$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{1}{2}\right) = -0.01543\dots < 0$, važi da je

$$P(x) < 0$$

na intervalu $(0, 1)$. Kako je $f(x) < P(x)$ na intervalu $(0, 1)$, važi da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $(0, 1)$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.18: Dokazivanje uopštene MEP nejednakosti (4.21)

4.4.2.6 Dokazivanje nejednakosti koje sadrže i trigonometrijske i eksponencijalne funkcije

Dokazivanje nejednakosti koje sadrže i trigonometrijske i eksponencijalne funkcije ilustrujemo na primeru nejednakosti⁶

$$10^{-5} x^{100} \sin^7 x < x^3 e^{-\sqrt{2}x} + 10^3 x \cos \frac{x}{2}, \text{ za } x \in (0, 1). \quad (4.22)$$

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

$$\frac{x^{100} \sin^7(x)}{100000} < x^3 e^{-\sqrt{2}x} + 1000x \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

na intervalu $(0, 1)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \frac{x^{100} \sin^7(x)}{100000} - x^3 e^{-\sqrt{2}x} - 1000x \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

na intervalu $(0, 1)$. Važi da je

$$\sin^7(x) = \frac{35 \sin(x)}{64} - \frac{21 \sin(3x)}{64} + \frac{7 \sin(5x)}{64} - \frac{\sin(7x)}{64}.$$

Stoga je

$$f(x) = \frac{7x^{100} \sin(x)}{1280000} - \frac{21x^{100} \sin(3x)}{6400000} + \frac{7x^{100} \sin(5x)}{6400000} - \frac{x^{100} \sin(7x)}{6400000} - x^3 e^{-\sqrt{2}x} - 1000x \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Neka je $T_n^{\phi,a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna navišna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ data je sa

$$P(x) = \frac{7x^{100}}{1280000} T_1^{\sin,0}(x) - \frac{21x^{100}}{6400000} T_3^{\sin,0}(3x) + \frac{7x^{100}}{6400000} T_1^{\sin,0}(5x) - \frac{x^{100}}{6400000} T_3^{\sin,0}(7x) - x^3 T_1^{\exp,0}(-\sqrt{2}x) - 1000x T_2^{\cos,0}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{91x^{103}}{3840000} + \sqrt{2}x^4 + 124x^3 - 1000x.$$

Primetimo da je

$$P(x) = x \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = \frac{91x^{102}}{3840000} + \sqrt{2}x^3 + 124x^2 - 1000.$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, 1]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, 1)$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{1}{2}\right) = -484.41161 \dots < 0$, važi da je

$$P(x) < 0$$

na intervalu $(0, 1)$. Kako je $f(x) < P(x)$ na intervalu $(0, 1)$, važi da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $(0, 1)$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.19: Dokazivanje nejednakosti (4.22) koja sadrži i trigonometrijske i eksponencijalne funkcije

⁶ Ovu nejednakost je tokom analize dokazivača zadao prof. Bojan Banjac.

4.4.3 Postavke sistema

U okviru algoritma Menadžer uvedeni su sledeći uslovi zaustavljanja:

- (1) linija 2 Algoritma 1 (Kontraprimer) – maksimalni broj polovljenja intervala u procesu traženja kontraprimera,
- (2) linija 4 Algoritma 3 (Aproksimacija) – maksimalni broj polinomskih aproksimacija u procesu traženja dokaza,
- (3) linija 5 Algoritma 4 (Racionalizacija) – maksimalni broj značajnih cifara/decimala na koji zaokružujemo iracionalne koeficijente (pri formiranju polinomske aproksimacije sa racionalnim koeficijentima u Šturmovom algoritmu).

Ukoliko se ne dobije ni kontraprimer ni dokaz nejednakosti, javlja se poruka da sa zadatim postavkama sistema nije dobijen ni kontraprimer ni dokaz, pa korisnik može da izmeni postavke sistema.

Dokazivač je implementiran tako da se uslovi zaustavljanja mogu podešavati u okviru forme sa sledeće slike.

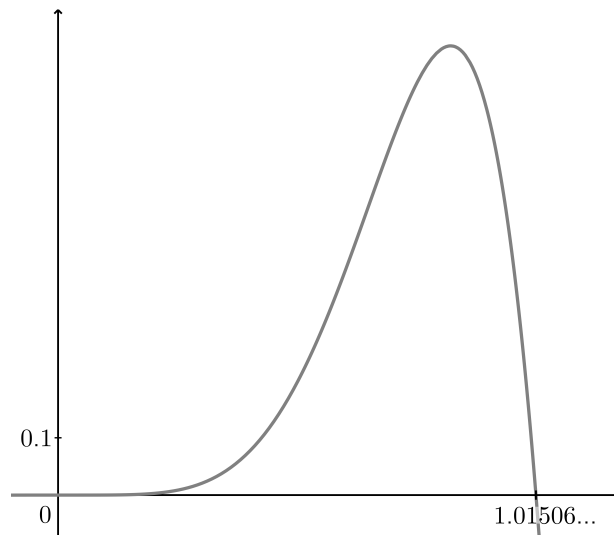
Slika 4.20: Forma za menjanje postavki sistema

U nastavku ilustrujemo kako promena u postavkama sistema može da utiče na odgovor koji sistem daje. Na primer⁷, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 3x^4 \sin 3x + 5x^3 \cos x - 5 \sin^3 x \quad (4.23)$$

na intervalu $(0, 1.01507)$.

⁷ Ovu funkciju i interval je tokom analize dokazivača zadala prof. Bojana Mihailović.

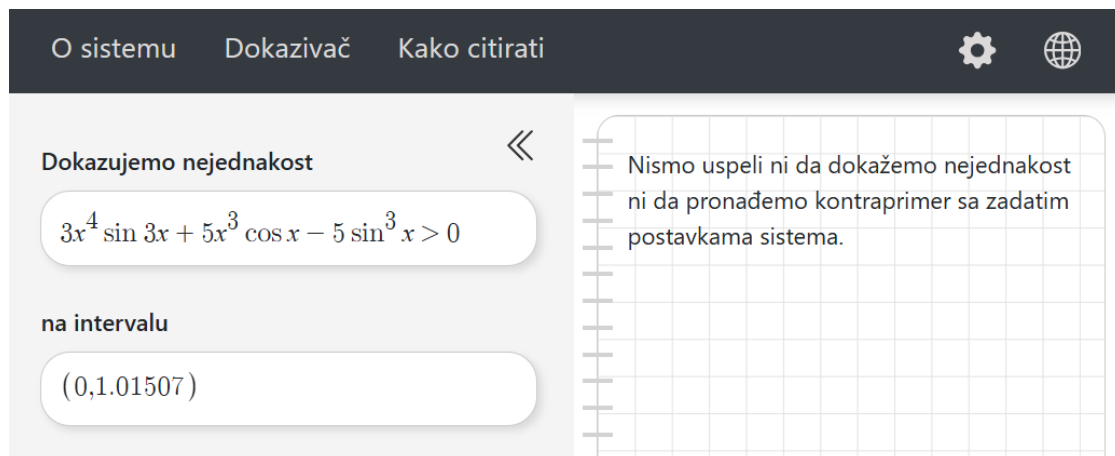


Slika 4.21: Grafik funkcije (4.23)

Nejednakost

$$f(x) > 0$$

ne važi za $x \in (0, 1.01507)$. Ukoliko korisnik izabere da je maksimalni broj polovljenja intervala u procesu traženja kontraprimera 5, za razmatranu nejednakost se ne bi pronašao kontraprimer i dobila bi se sledeća poruka:

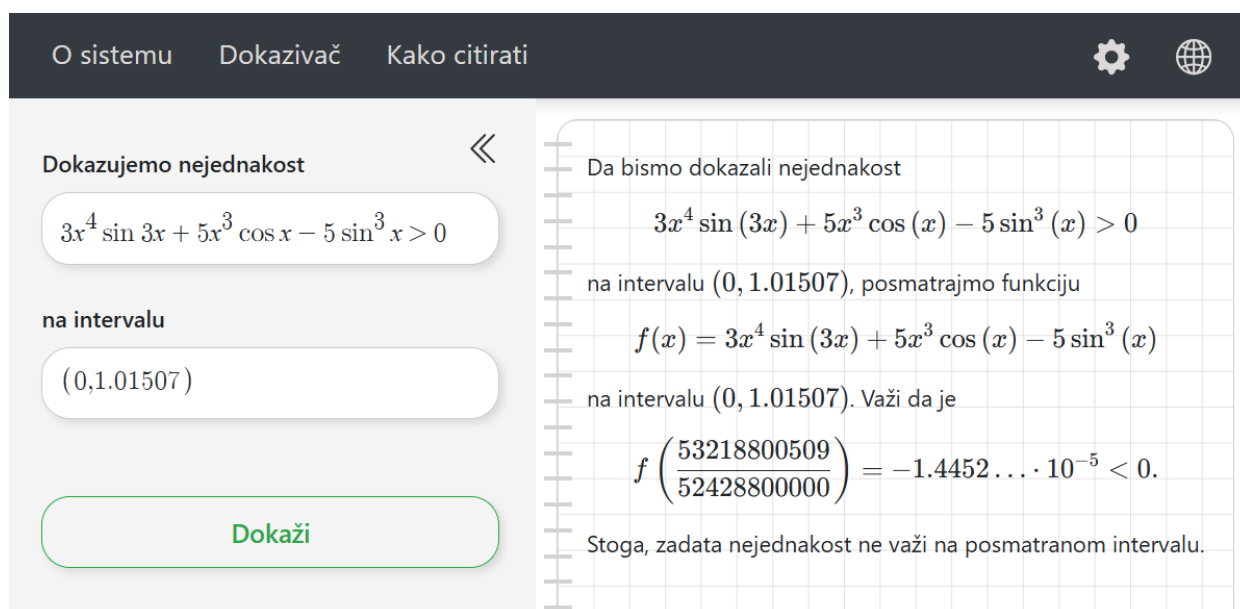


Slika 4.22: Slučaj kada nije pronađen ni kontraprimer ni dokaz nejednakosti

Poruka sa prethodne slike se dobija i ukoliko za razmatranu nejednakost korisnik izabere da je maksimalni broj polovljenja intervala u procesu traženja kontraprimera manji od 19.

Za razmatranu nejednakost sistem bi pronašao kontraprimer ukoliko korisnik izabere da maksimalni broj polovljenja intervala u procesu traženja kontraprimera bude bar⁸ 19.

⁸ Ako je maksimalni broj polovljenja intervala u procesu traženja kontraprimera 19, vrednost funkcije $f(x)$ testira se u najviše $2^{19} - 1 = 524287$ tačaka.



O sistemu Dokazivač Kako citirati ⚙️ 🌐

Dokazujemo nejednakost

$$3x^4 \sin 3x + 5x^3 \cos x - 5 \sin^3 x > 0$$

na intervalu

$$(0, 1.01507)$$

Dokaži

Da bismo dokazali nejednakost

$$3x^4 \sin(3x) + 5x^3 \cos(x) - 5 \sin^3(x) > 0$$

na intervalu $(0, 1.01507)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 3x^4 \sin(3x) + 5x^3 \cos(x) - 5 \sin^3(x)$$

na intervalu $(0, 1.01507)$. Važi da je

$$f\left(\frac{53218800509}{52428800000}\right) = -1.4452 \dots \cdot 10^{-5} < 0.$$

Stoga, zadata nejednakost ne važi na posmatranom intervalu.

Slika 4.23: Razmatranje nejednakosti $f(x) > 0$ na intervalu $(0, 1.01507)$

4.4.4 Primena sistema u izolovanju nula i izolovanju ekstremuma funkcija

U ovoj sekciji, primenom razvijenog dokazivača i Teoreme 3.10, dokazujemo da funkcija

$$g(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{5x^4 (2 + \cos x)^2}$$

iz [122] ima tačno jedan ekstremum na intervalu $(0, \pi]$, koji je maksimum i koji se dostiže u tački $x_1 = 2.54595\dots$ (numerički određenoj).

Važi da je

$$g'(x) = \frac{2(1 - \cos x)}{5x^5 (2 + \cos x)^3} \cdot h(x),$$

gde je

$$h(x) = 3x \sin x + 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 4.$$

Primenimo Teoremu 3.10 za⁹ $a_0 = 2.54$ i $b_0 = 2.55$:

- (1) Na Slici 4.24 (slika ekrana) je dat dokaz da je $h(x) > 0$ na intervalu $(0, a_0]$.
- (2) Na Slici 4.25 je dat dokaz da je $h(x) < 0$ na intervalu $[b_0, \pi]$.
- (3) Na Slici 4.26 je dat dokaz da je



$$h'(x) = 3x \cos x - 4 \sin x \cos x + \sin x < 0$$

na intervalu $[a_0, b_0]$.

Stoga, na osnovu Teoreme 3.10, funkcija $h(x)$ ima tačno jednu nulu na intervalu $(0, \pi]$ u tački $x_1 = 2.54595\dots$. Pri tome je $h(x) > 0$ na intervalu $(0, x_1)$ i $h(x) < 0$ na intervalu $(x_1, \pi]$. Odavde zaključujemo da je funkcija $g(x)$ rastuća na intervalu $(0, x_1)$ i opadajuća na intervalu $(x_1, \pi]$, tj. da ima tačno jedan lokalni maksimum u tački x_1 .

Na sličan način se može primeniti Teorema 3.11 za izolovanje intervala na kojima se nalaze ekstremumi funkcija.

⁹ a_0 i b_0 su nanižna i navišna racionalna aproksimacija korena x_1 .

O sistemu Dokazivač Kako citirati  

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$3x \sin(x) + 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - 4 < 0$$

na intervalu $[2.55, \pi]$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 3x \sin(x) + 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - 4$$

na intervalu $[2.55, \pi]$. Važi da je

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$f(x) = 3x \sin(x) + 2 \cos(x) + \cos(2x) - 3.$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna navišna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $[2.55, \pi]$ data je sa

$$P(x) = 3xT_{13}^{\sin, 0}(x) + 2T_{16}^{\cos, 0}(x) + T_{16}^{\cos, 0}(2x) - 3$$

$$= \frac{331}{105670656000}x^{16} - \frac{227}{1210809600}x^{14} + \frac{677}{79833600}x^{12} - \frac{83}{302400}x^{10} + \frac{13}{2240}x^8 - \frac{1}{15}x^6 + \frac{1}{4}x^4.$$


Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $P(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[2.55, \pi]$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{51}{40} + \frac{\pi}{2}\right) = -1.58873 \dots < 0$, važi da je

$$P(x) < 0$$



na intervalu $[2.55, \pi]$. Kako je $f(x) < P(x)$ na intervalu $[2.55, \pi]$, važi da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $[2.55, \pi]$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

 Kopiraj LaTeX kod

Slika 4.25: Dokazivanje nejednakosti $h(x) < 0$ na intervalu $[b_0, \pi]$

O sistemu Dokazivač Kako citirati  

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$3x \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x) + \sin(x) < 0$$

na intervalu $[2.54, 2.55]$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 3x \cos(x) - 4 \sin(x) \cos(x) + \sin(x)$$

na intervalu $[2.54, 2.55]$. Važi da je

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

Stoga je

$$f(x) = 3x \cos(x) + \sin(x) - 2 \sin(2x).$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna navišna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $[2.54, 2.55]$ data je sa

$$P(x) = 3xT_8^{\cos, 0}(x) + T_9^{\sin, 0}(x) - 2T_{11}^{\sin, 0}(2x)$$

$$= \frac{16}{155925}x^{11} - \frac{83}{30240}x^9 + \frac{13}{280}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + x^3.$$


Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $P(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[2.54, 2.55]$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{509}{200}\right) = -\frac{783012150556674367460184014429}{22809600000000000000000000000000} = -3.43281\dots < 0$, važi da je

$$P(x) < 0$$

na intervalu $[2.54, 2.55]$. Kako je $f(x) < P(x)$ na intervalu $[2.54, 2.55]$, važi da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $[2.54, 2.55]$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square



Slika 4.26: Dokazivanje nejednakosti $h'(x) < 0$ na intervalu $[a_0, b_0]$

4.5 O korektnosti rada sistema

Prilikom implementacije sistema autor je standardno naišao na ograničenja koja svi računarski sistemi danas imaju. Sama korektnost implementacije zavisi od implementacionih detalja poput preciznosti evaluacije u sistemu, količine računarskih resursa i realnog računskog vremena koje je moguće posvetiti u proceni pojedinačnih vrednosti. Usled toga, korektnost rada sistema zavisi od svih ovih detalja. Takođe, u implementaciji sistema su korišćene i neke biblioteke, tako da korektnost dobijenih rezultata, pored korektnosti implementacije algoritama, zavisi i od korektnosti rada korišćenih biblioteka.

Primetimo da se u Algoritmu 1 u liniji 6 radi evaluacija vrednosti funkcije u nekoj tački, što u sistemima računarske algebre nosi određenu numeričku grešku. Napomenimo da u situacijama u kojima nam je to neprihvatljivo možemo odabrati, u postavkama sistema, da se Algoritam 1 ne izvršava jer njegovo uklanjanje neće sprečiti dalju potragu za dokazom.

4.6 Diskusija i poređenje sa nekim postojećim sistemima

Za zadatu nejednakost koju treba da dokažemo, sistem u konačnom vremenu vraća odgovor jer svi algoritmi (Potpoglavlje 4.2) koji su implementirani u sistemu završavaju rad u konačnom vremenu. Kako bi se to ostvarilo, u nekim algoritmima su uvedeni uslovi zaustavljanja. U zavisnosti od odabranih uslova zaustavljanja algoritama, u nekim slučajevima se neće dobiti ni kontraprimer ni dokaz nejednakosti, ali će sistem dati obaveštenje da navedeno nije uspeo pri zadatim postavkama sistema.

S obzirom na to da je algoritam rada sistema, koji je dat u Potpoglavlju 4.2, zasnovan na teorijskim rezultatima iz Poglavlja 3 i iz Potpoglavlja 1.3 i 4.1, jedan od ciljeva daljeg istraživanja je formalno dokazivanje saglasnosti korišćenih algoritama.

U implementaciji sistema, algoritmi iz Potpoglavlja 4.2 su prošireni tako da se mogu tražiti dokazi nejednakosti i na poluotvorenim i na zatvorenim konačnim intervalima, kao i dokazi nejednakosti oblika $f(x) < 0$ (određivanjem navišne negativne polinomske aproksimacije za funkciju $f \in \mathcal{M}$).

Sistem je testiran na većem broju nejednakosti iz radova koji su uglavnom objavljeni u časopisima sa JCR liste i svaku nejednakost na kojoj je testiran sistem je dokazao¹⁰.

Dokazi dobijeni primenom razvijenog dokazivača oponašaju ljudski način dokazivanja nejednakosti. Svaki korak u dokazu proističe jasno iz prethodno izvedenih zaključaka, tj. koraka, i jasno je kako se iz jednog koraka dokaza dolazi do sledećeg. Takođe, dobijeni dokazi su proverljivi, tj. mogu se verifikovati, na primer, korišćenjem nekog sistema računarske algebre. ■

Poređenje razvijenog sistema sa nekim postojećim sistemima. U ovom delu, izvršićemo poređenje razvijenog sistema sa postojećim sistemima koji su analizirani u Potpoglavlju 1.5: **(1)** MetiTarski [160], **(2)** SimTheP [24], **(3)** RootOfMTP [43], **(4)** neki drugi sistemi bazirani na veštačkoj inteligenciji.

- (1)** Sistem MetiTarski podržava dokazivanje nejednakosti koje sadrže širu klasu funkcija od klase \mathcal{M} . Međutim, MetiTarski daje rezolucijske dokaze koji su teški za praćenje, a često se sastoje od više desetina linija koda. Kako ne postoji grafički korisnički interfejs, već samo konzolno okruženje, upotreba ovog sistema može biti zahtevna. MetiTarski vrši numeričke aproksimacije iracionalnih brojeva koji se javljaju u nejednakosti koja se proverava [9, 24, 36].
- (2)** Dokazivač razvijen u ovoj disertaciji koristi isti metod dokazivanja kao dokazivač SimTheP, s tim što je u ovoj disertaciji taj metod poboljšan i proširen. SimTheP dokazuje MTP nejednakosti na intervalima oblika $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}^+$, dok razvijeni dokazivač dokazuje i nejednakosti iz nekoliko drugih klasa na nenegativnim konačnim intervalima. Takođe, u sistemu SimTheP su za vrednosti koeficijenata podržani samo brojevi iz polja $\mathbb{Q}(\pi)$. Razvijeni dokazivač se razlikuje od sistema SimTheP i po strategijama¹¹ za određivanje vrednosti indeksa Tejlrorovih razvoja koje su dovoljne za dokaz zadate nejednakosti. Primenom Strategije za redukovanje broja indeksa, dobija se manji ili jednak broj indeksa u odnosu na broj indeksa koji bi dobio SimTheP. Primenom Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa, broj iteracija za određivanje vrednosti indeksa, koje su dovoljne za dokaz polazne nejednakosti, invarijantan je u odnosu na redosled sabiraka u polaznoj nejednakosti, a često i manji, kao što ilustrujemo u sledećoj tabeli¹².

Tabela 4.3: Broj iteracija određivanja vrednosti indeksa koje su dovoljne za dokaz zadate nejednakosti u dokazivaču SimTheP i u razvijenom dokazivaču

MTP nejednakost	interval	SimTheP	razvijeni dokazivač
$\sin^2 x \cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	44	4
$x(2 + \cos x) - 3 \sin x > 0$	$(0, 1)$	4	3
$-2\pi^2 x + \pi^3 \sin x - x(\pi^2 - 4x^2) > 0$	$(0, 1)$	1	1
$\pi^3 x - 4\pi x^3 + 8x^3 - \pi^3 \sin x > 0$	$(0, 1)$	4	2
$(2 + \pi) \sin x - x(\pi - 2 \cos x) > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	4	2
$2 \sin x - x - x \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	2	2

¹⁰ Dobijeni dokazi su verifikovani korišćenjem sistema računarske algebre Maple.

¹¹ Za više detalja o poređenju strategija videti Sekciju 4.1.7.

¹² Broj iteracija za određivanje vrednosti indeksa u dokazivaču SimTheP preuzet je iz Tabele 5.1 iz [24].

$8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	212	6
$x - \sin x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	2	2
$\pi - x^2 - \pi \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	2	2
$2x + x \cos x - 3 \sin x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	4	3
$(\pi^2 - 3x^2) \sin x + (-\pi^2 x + x^3) \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	3	2
$(\pi^2 x^2 - 2\pi^2 + 2x^2) \sin x + x(2\pi^2 - 2x^2) \cos x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	13	2
$((-\pi^2 + 6)x^2 - 6\pi^2) \sin x - 6x^3 + 6x\pi^2 > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	2	2
$(\pi^2 + x^2) \sin x - x\pi^2 + x^3 > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	2	2
$2x - x \cos x + 3 \sin x > 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$	4	1

- (3) Maple biblioteka RootOfMTP izoluje sve intervale na kojima se nalaze nule razmatrane MTP funkcije, ali ne ispisuje korake kojima se dolazi do tih rezultata. Kako bi se dokazale nejednakosti primenom ove biblioteke, potrebno je analizirati sve te intervale (videti Primer 1.8). Razvijeni dokazivač se, na osnovu metoda iz Potpoglavlja 3.3, može koristiti i za izolovanje intervala koji sadrže nule i ekstremume MTP funkcija, kao i ostalih funkcija iz klase \mathcal{M} (videti Sekciju 4.4.4).
- (4) Razvijeni dokazivač daje dokaze koji su napisani u stilu koji je blizak ljudskom načinu dokazivanja. Ovaj nivo čitljivosti imaju i neki razmatrani sistemi veštačke inteligencije, ali za razliku od razvijenog dokazivača, trenutno mogu biti nepouzdana i praviti greške pri dokazivanju nejednakosti.

Poglavlje 5

Primene

U ovom poglavlju, primenom dobijenih rezultata, dajemo poboljšanja nekih analitičkih nejednakosti.

5.1 Cusa-Huygens nejednakosti

Teorema 5.1 (Cusa-Huygens nejednakost¹) *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je*

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

Na osnovu Cusa-Huygens nejednakosti, može se uvesti aproksimacija

$$x \approx \frac{3 \sin x}{2 + \cos x},$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, [25, 62, 73, 122, 123, 189, 190, 194].

Uvođenjem smene $x = \arcsin t$, za $t \in (0, 1)$, na osnovu prethodne aproksimacije, dobija se aproksimacija

$$\arcsin t \approx \frac{3t}{2 + \sqrt{1 - t^2}},$$

koja se koristila za tabeliranje vrednosti funkcije arcsin.

5.1.1 Neka poboljšanja Cusa-Huygens nejednakosti na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$

Na osnovu Cusa-Huygens nejednakosti, može se uvesti familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}, \quad (5.1)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$, [124, 127].

Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, prema [124], važi tvrđenje:

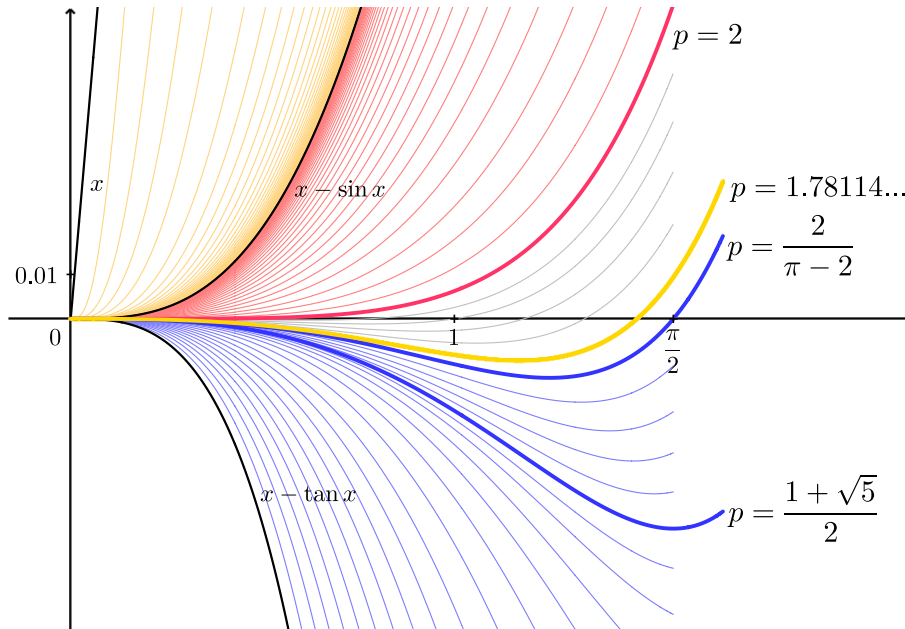
Lema 5.1 *Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ jeste*

- (i) *rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_1 = (0, +\infty)$,*
- (ii) *rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_2 = (-\infty, -1)$.*

¹ Ovu nejednakost je postavio Nicolaus de Cusa (1401–1464), a dokazao ju je Christiaan Huygens (1629–1695) [178, 190].

Primitimo da familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ nije rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ jer za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $p_1 \in \mathbb{P}_1$ i $p_2 \in \mathbb{P}_2$, važi:

$$p_1 > p_2 \quad \text{i} \quad \varphi_{p_1}(x) < \varphi_{p_2}(x).$$



Slika 5.1: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.1)

U narednim podsekcijama, 5.1.1.1–5.1.1.4, na familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ primenjujemo strategije iz Poglavlja 2.7:

- Strategiju za određivanje najboljih konstanti u nejednakostima,
- Strategiju za dokazivanje nejednakosti zasnovanu na Parametarskom metodu,
- Strategiju za određivanje minimaks aproksimanta primenom Nike teorema,
- Strategiju za dokazivanje nejednakosti i određivanje minimaks aproksimanta zasnovanu na Novom parametarskom metodu.

5.1.1.1 Primena Strategije za određivanje najboljih konstanti

Sledeća teorema, u kojoj se određuju najbolje konstante za Cusa-Huygens nejednakost, može se dokazati primenom Strategije za određivanje najboljih konstanti (Sekcija 2.7.1).

Teorema 5.2 *Neka je*

$$A = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193... \quad \text{i} \quad B = 2.$$

Tada važi:

(i) *Za $p \in (B, +\infty)$ važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(x > \frac{(B+1) \sin x}{B + \cos x} > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(ii) Za $p \in (0, A)$ važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} > \frac{(A+1) \sin x}{A + \cos x} > x \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

Dokaz. Za familiju $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, datu sa (5.1), koja je definisana na segmentu $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ važi:

(1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,

(2) Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u okolini tačke a je

$$\varphi_p(x) = \frac{p-2}{6(p+1)}x^3 + \frac{-p^2+13p-16}{120(p+1)^2}x^5 + o(x^5) \quad (5.2)$$

i Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u okolini tačke b je

$$\varphi_p(x) = \frac{(\pi-2)p-2}{2p} + \frac{p^2-p-1}{p^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.3)$$

Prema Strategiji za određivanje najboljih konstanti dobijamo:

- Za skup $\mathbb{P}_1 = (0, +\infty) \subseteq \mathbb{P}$ je ispunjeno:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je, na osnovu Leme 5.1, rastuće raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}_1$,
 - glavni koeficijent $\mathfrak{c}_3^{\varphi_p, a} = \frac{p-2}{6(p+1)}$ Tejlorovog razvoja (5.2) je monotona funkcija za $p \in \mathbb{P}_1$ i ima jedinstvenu nulu $p_a = B \in \mathbb{P}_1$;
 - glavni koeficijent $\mathfrak{c}_0^{\varphi_p, b} = \frac{(\pi-2)p-2}{2p}$ Tejlorovog razvoja (5.3) je monotona funkcija za $p \in \mathbb{P}_1$ i ima jedinstvenu nulu $p_b = A \in \mathbb{P}_1$.
- Za $x \in (a, b)$ važi ekvivalencija

$$\varphi_{p_a}(x) > 0 \iff x(\cos x + 2) - 3 \sin x > 0.$$

Desna MTP nejednakost se primenom razvijenog dokazivača dokazuje na sledeći način:

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

$x(\cos(x) + 2) - 3 \sin(x) > 0$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x \cos(x) + 2x - 3 \sin(x)$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ data je sa

$$P(x) = xT_6^{\cos, 0}(x) + 2x - 3T_5^{\sin, 0}(x)$$

$$= -\frac{1}{720}x^7 + \frac{1}{60}x^5.$$

Primetimo da je

$$P(x) = x^5 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{60} - \frac{1}{720}x^2.$$


Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. S obzirom na to da je $P(\frac{\pi}{4}) = 0.0047247\dots > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je $f(x) > P(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square



Slika 5.2: Dokaz nejednakosti $\varphi_{p_0}(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$

Dakle, konstanta p_a je najbolja moguća za nejednakost $\varphi_p(x) > 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}_1$.

Dodatno:

- s obzirom na to da je familija rastuće raslojena, slede nejednakosti iz dela (i).
- Za $x \in (a, b)$ važi ekvivalencija

$$\varphi_{p_b}(x) < 0 \iff x \left(\frac{2}{\pi - 2} + \cos x \right) - \frac{\pi}{\pi - 2} \sin x < 0.$$

Desna MTP nejednakost može se dokazati primenom razvijenog dokazivača.

Dakle, konstanta p_b je najbolja moguća za nejednakost $\varphi_p(x) < 0$ na intervalu (a, b) za $p \in \mathbb{P}_1$.

Dodatno:

- s obzirom na to da je familija rastuće raslojena, slede nejednakosti iz dela (ii). ■

Napomenimo da je konstanta $\frac{2}{\pi - 2}$ iz prethodne teoreme određena u [108].

5.1.1.2 Primena Strategije zasnovane na Parametarskom metodu

Rezultate u ovoj sekciji navodimo prema [124], uz neke izmene.

Sledeća teorema može se dokazati primenom Strategije zasnovane na Parametarskom metodu (Sekcija 2.7.2).

Teorema 5.3 *Neka je*

$$A = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots \quad i \quad B = 2.$$

Tada važi:

- (i) Za $p \in (0, A)$ važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} > \frac{(A+1) \sin x}{A + \cos x} > x \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Za $p \in (A, B)$ jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} > x$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) x > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}.$$

(iii) Za $p \in (B, +\infty)$ važi da je

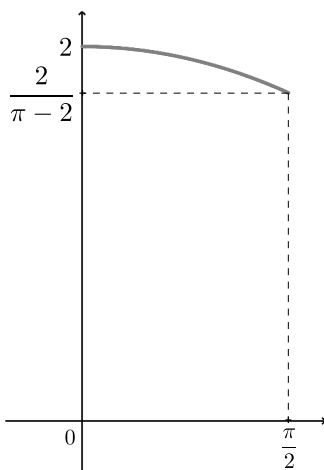
$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(x > \frac{(B+1) \sin x}{B + \cos x} > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Dokaz. Polazimo od familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ koja je definisana sa (5.1). Prema Strategiji zasnovanoj na Parametarskom metodu, dobijamo:

- Za skup $\mathbb{P}_1 = (0, +\infty) \subseteq \mathbb{P}$ važi:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je, na osnovu Leme 5.1, rastuće raslojena na intervalu (a, b) po parametru $p \in \mathbb{P}_1$,
 - postoji neprekidna funkcija $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}_1$ takva da je

$$\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} = 0 \iff p = g(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x - x}. \quad (5.4)$$



Slika 5.3: Funkcija g definisana sa (5.4)

- $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = B$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = A$, $\inf_{x \in (a, b)} g(x) = A$ i $\sup_{x \in (a, b)} g(x) = B$.
- Važi da je

$$g'(x) = \frac{f(x)}{(\sin x - x)^2},$$

gde je

$$f(x) = x^2 \sin x + x \cos x - x + \sin x \cos x - \sin x.$$

Na sledećoj slici je, primenom razvijenog dokazivača, dokazana nejednakost

$$f(x) < 0 \quad (5.5)$$

na intervalu (a, b) .

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

»
$$x^2 \sin(x) + x \cos(x) - x + \sin(x) \cos(x) - \sin(x) < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x \cos(x) - x + (x-1)(x+1) \sin(x) + \sin(x) \cos(x)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

Stoga je

$$f(x) = x \cos(x) - x + (x-1)(x+1) \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2}.$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna navišna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ data je sa

$$P(x) = -T_7^{\sin, 0}(x) + x^2 T_5^{\sin, 0}(x) + x T_8^{\cos, 0}(x) - x + \frac{1}{2} T_9^{\sin, 0}(2x)$$

$$= \frac{53}{72576} x^9 - \frac{1}{180} x^7.$$

Primetimo da je

$$P(x) = x^7 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = \frac{53}{72576} x^2 - \frac{1}{180}.$$

Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. S obzirom na to da je $P(\frac{\pi}{4}) = -0.00094109 \dots < 0$, važi da je

$$P(x) < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je $f(x) < P(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, važi da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

Kopiraj LaTeX kod

Slika 5.4: Dokaz nejednakosti (5.5)

Dakle, $g'(x) < 0$ na intervalu (a, b) , tj. funkcija $g(x)$ je opadajuća na intervalu (a, b) . Primenom Teoreme 2.12, dobijaju se nejednakosti navedene u iskazu teoreme. \blacksquare

Primetimo da se u Teoremi 5.3, primenom Strategije zasnovane na Parametarskom metodu, dobija deo (ii) koji se ne može dobiti primenom Strategije za određivanje najboljih konstanti.

Napomena 5.1 *Nezavisno od Strategije zasnovane na Parametarskom metodu, može se, na osnovu analize funkcije $g(x)$, odrediti i znak funkcija $\varphi_p(x)$ za $p \in \mathbb{P}_2 = (-\infty, -1)$, što pokazujemo u nastavku. Kako funkcija $g(x)$ definisana sa (5.4) ima samo vrednosti iz skupa $(\frac{2}{\pi-2}, 2)$, zaključujemo da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (-\infty, -1)$, stalnog znaka na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je*

$$\varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{p+1}{p} > 0$$

za $p \in (-\infty, -1)$. Dakle, zaključujemo da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (-\infty, -1)$, pozitivne na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. da za $p \in (-\infty, -1)$ važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) x > \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x}.$$

5.1.1.3 Primena Strategije zasnovane na Nike teoremi

Sledeća teorema može se dokazati primenom Strategije zasnovane na Nike teoremi (Sekcija 2.7.3). Dokaz ove teoreme navodimo prema [127].

Teorema 5.4 *Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je*

$$\varphi_{p_0}(x) = x - \frac{(p_0+1)\sin x}{p_0 + \cos x},$$

gde je

$$p_0 = 1.78114\dots$$

jedinstveno numerički određeno rešenje jednačine

$$\left|\varphi_p\left(t^{(p)}\right)\right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

po parametru $p \in (A, B) = (\frac{2}{\pi-2}, 2)$, pri čemu je $t^{(p)}$ stacionarna tačka po argumentu x funkcije $\varphi_p(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Dokaz. Za familiju $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, datu sa (5.1), koja je definisana na segmentu $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$, važi:

- (1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,
- (2) Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u okolini tačke a je

$$\varphi_p(x) = \frac{p-2}{6(p+1)}x^3 + \frac{-p^2+13p-16}{120(p+1)^2}x^5 + o(x^5) \quad (5.6)$$

i Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u okolini tačke b je

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \frac{(\pi-2)p-2}{2p} + \frac{p^2-p-1}{p^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(p+1)(p^2-2)}{2p^3} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \\ & + \frac{(p+1)(2p^2-3)}{3p^4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Prema Strategiji zasnovanoj na Nike teoremi, dobijamo:

- Za skup $\mathbb{P}_0 = [A, B] = \left[\frac{2}{\pi-2}, 2\right]$ je ispunjeno:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i, na osnovu Leme 5.1, rastuće raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_0$,
 - funkcije $\varphi_A(x)$ i $\varphi_B(x)$ su, na osnovu Teoreme 5.2 i Teoreme 5.3, stalnog znaka na intervalu (a, b) , pri čemu je jedna funkcija pozitivna, a druga negativna,
 - funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, na osnovu Teoreme 5.3, menjaju znak na intervalu (a, b) .
- U [127] je dokazano da je $m = 4$ najmanji prirodan broj takav da je

$$(\forall p \in \mathbb{P}_0) (\forall x \in (a, b)) \varphi_p^{(m)}(x) > 0.$$

- Na osnovu Tejlorovog razvoja (5.6), funkcije $\varphi_p(x)$, $\varphi_p'(x)$, $\varphi_p''(x)$ i $\varphi_p'''(x)$, za $p \in (A, B)$, negativne su u nekoj desnoj okolini tačke a .
- Na osnovu Tejlorovog razvoja (5.7), važi:

$$\varphi_p(x) > 0, \text{ za } p > \frac{2}{\pi-2} = 1.75\dots$$

$$\varphi_p'(x) > 0, \text{ za } p > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61\dots$$

$$\varphi_p''(x) > 0, \text{ za } p > \sqrt{2} = 1.41\dots$$

$$\varphi_p'''(x) > 0, \text{ za } p > \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.22\dots$$

Samim tim su funkcije $\varphi_p(x)$, $\varphi_p'(x)$, $\varphi_p''(x)$ i $\varphi_p'''(x)$, za $p \in (A, B)$, pozitivne u nekoj desnoj okolini tačke b .

- Sistem²

$$-\varphi_p(x) = \varphi_p(b)$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$$

za $p \in (A, B)$ i $x \in (a, b)$ ima jedinstveno rešenje koje se može numerički odrediti sa

$$p_0 = 1.78114\dots,$$

$$x_0 = 1.16871\dots$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_0}$ na intervalu (a, b) . ■

Posledica Teoreme 5.4 Na osnovu minimaks aproksimanta $\varphi_{p_0}(x)$, dobijamo minimaks aproksimaciju

$$x \approx \frac{2.78114\dots \sin x}{1.78114\dots + \cos x}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{P}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.0093601\dots$$

² Navedeni sistem je ekvivalentan jednačini $|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p(b)$ za $p \in (A, B)$ i $x \in (a, b)$.

5.1.1.4 Primena Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu

Rezultate u ovoj sekciji navodimo prema [135].

Sledeća teorema može se dokazati primenom Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu (Sekcija 2.7.2).

Teorema 5.5 *Neka je*

$$A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots, \quad B = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots \quad i \quad C = 2.$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (0, B)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} > \frac{(B+1) \sin x}{B + \cos x} > x \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (B, C)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} > x$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) x > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}.$$

(iii) *Ako $p \in (C, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(x > \frac{(C+1) \sin x}{C + \cos x} > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, C)$, ima tačno jednu stacionarnu tačku po argumentu x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Pri tome, za $p \in (B, C)$, funkcije $\varphi_p(x)$ imaju tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje jednačine*

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

po parametru $p \in (B, C)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 1.78114\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = x - \frac{2.78114\dots \sin x}{1.78114\dots + \cos x},$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$x \approx \frac{2.78114\dots \sin x}{1.78114\dots + \cos x}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) \right| = \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.0093601\dots$$

Dokaz. Za familiju $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, datu sa (5.1), koja je definisana na segmentu $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$, važi:

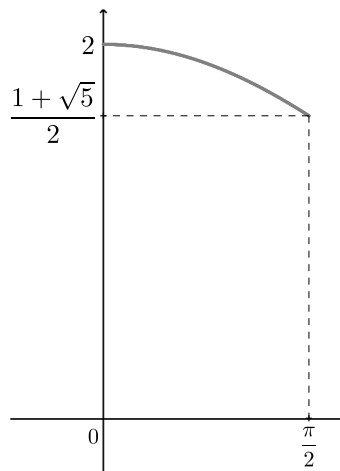
- (1) sve funkcije $\varphi_p(x)$ su diferencijabilne odgovarajući broj puta po argumentu x i bar jednom po parametru p ,
- (2) Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u okolini tačke a je

$$\varphi_p(x) = \frac{p-2}{6(p+1)}x^3 + o(x^3). \quad (5.8)$$

Prema Strategiji zasnovanoj na Novom parametarskom metodu, dobijamo:

- Za skup $\mathbb{P}_1 = (0, +\infty) \subseteq \mathbb{P}$ je ispunjeno:
 - familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je kompresovana u tački a i, na osnovu Leme 5.1, rastuće raslojena na intervalu $(a, b]$ po parametru $p \in \mathbb{P}_1$,
 - postoji neprekidna funkcija $g_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}_1$ takva da je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 1 - \frac{(p+1)(1+p \cos x)}{(p+\cos x)^2} = 0 \iff p = g_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5+4 \cos x} \right). \quad (5.9)$$



Slika 5.5: Funkcija g_1 definisana sa (5.9)

- Funkcija $g_1(x)$ je monotono opadajuća na intervalu (a, b) i važi da je

$$\sup_{x \in (a, b)} g_1(x) = C \quad \text{i} \quad \inf_{x \in (a, b)} g_1(x) = A.$$

- Postoji jedinstvena vrednost parametra

$$p = B \in (A, C)$$

takva da je

$$\varphi_p(b) = \frac{\pi}{2} - \frac{p+1}{p} = 0.$$

- Na osnovu glavnog koeficijenta Tejlorovog razvoja (5.8), važi da je $\varphi_p(x) < 0$ za svako $p \in (A, C)$ u nekoj desnoj okolini tačke a .

- Primenom Teoreme 2.17, dobijaju se nejednakosti navedene u iskazu teoreme.

Sistem

$$-\varphi_p(x) = \varphi_p(b)$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$$

za $p \in (B, C)$ i $x \in (a, b)$ ima jedinstveno rešenje koje se može numerički odrediti sa

$$p_0 = 1.78114\dots,$$

$$x_0 = 1.16871\dots$$

Funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}_1}$ na intervalu (a, b) . ■

Primetimo da se u Teoremi 5.5, primenom Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu, dobijaju svi rezultati svih prethodno primenjenih strategija.

Napomena 5.2 *Nezavisno od Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu, može se, na osnovu analize funkcije $g_1(x)$, odrediti i znak funkcija $\varphi_p(x)$ za $p \in \mathbb{P}_2 = (-\infty, -1)$, što pokazujemo u nastavku.*

Kako funkcija $g_1(x)$ ima samo vrednosti iz skupa $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$, zaključujemo da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (-\infty, -1)$, monotone na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu Tejlorovog razvoja (5.8), postoji desna okolina tačke 0 takva da je $\varphi'_p(x) > 0$ za $p \in (-\infty, -1)$. Dakle, funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (-\infty, -1)$, su rastuće na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je familija kompresovana u tački 0, zaključujemo da su funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (-\infty, -1)$, pozitivne na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. da za $p \in (-\infty, -1)$ važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) x > \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}.$$

5.1.2 Proširenje Cusa-Huygens nejednakosti na beskonačni interval

U ovoj sekciji, prema [122], dajemo proširenje Cusa-Huygens nejednakosti sa intervala $(0, \frac{\pi}{2})$ na beskonačni interval $(-\infty, +\infty)$.

Teorema 5.6

(i) Za $x \in (-\infty, 0)$ važi da je

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} > x.$$

(ii) Za $x \in (0, +\infty)$ važi da je

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

Dokaz. Uvedimo funkciju

$$f(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

Važi da je

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2}{(\cos x + 2)^2} \geq 0$$

za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća na intervalu $(-\infty, +\infty)$. S obzirom na to da je $f(0) = 0$, sledi da je $f(x) > 0$ za $x > 0$ i da je $f(x) < 0$ za $x < 0$. ■

5.1.3 Poboljšanja nekih tipova Cusa-Huygens nejednakosti

Proširenja i poboljšanja Cusa-Huygens nejednakosti su razmatrana u mnogim radovima [15, 16, 18–20, 25, 30, 34, 48, 49, 53, 56, 59, 69, 82, 88, 95, 129, 141, 143, 148, 151, 173, 177, 179, 184, 185, 187, 191, 196, 204–206, 212, 217, 218, 220, 221, 224]. U [129, 218] dato je sledeće tvrđenje.

Teorema 5.7 Za $x \in (0, \pi]$ važi da je

$$\frac{1}{180}x^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < \frac{1}{m_1}x^5 = \frac{1}{92.96406\dots}x^5. \quad (5.10)$$

Za $M_1 = \frac{1}{m_1} = 0.010756\dots$ se dostiže maksimalna vrednost funkcije $g(t) = \frac{(t - \frac{3 \sin t}{2 + \cos t})}{t^5}$ na intervalu $(0, \pi)$.

U [224] su date sledeće dve teoreme.

Teorema 5.8 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -\frac{1}{180}x^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2/7} \quad (5.11)$$

i konstanta $\frac{1}{180}$ je najbolja moguća.

Napomena 5.3 Na osnovu nejednakosti (5.11), uvedimo dvoparametarsku familiju funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p,q \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - px^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^q, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p, q \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Tejlorov razvoj $\varphi_{p,q}(x)$ u okolini tačke 0 je

$$\varphi_{p,q}(x) = \left(\frac{1}{180} - p \right) x^4 + \left(\frac{1}{6}pq - \frac{1}{3780} \right) x^6 + \left(p \left(-\frac{1}{72}q^2 + \frac{1}{180}q \right) + \frac{1}{181440} \right) x^8 + o(x^8).$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_4^{\varphi_{p,q},0} &= \frac{1}{180} - p = 0 \\ \mathfrak{c}_6^{\varphi_{p,q},0} &= \frac{1}{6}pq - \frac{1}{3780} = 0 \end{aligned}$$

dobijamo konstante $p = \frac{1}{180}$ i $q = \frac{2}{7}$ za koje je $\varphi_{p,q}(x) > 0$ u nekoj desnoj okolini tačke 0. Ove vrednosti konstanti se nalaze u nejednakosti (5.11).

Teorema 5.9 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi} \right) (\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)} \quad (5.12)$$

i konstanta $(\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi})$ je najbolja moguća.

Napomena 5.4 Na osnovu nejednakosti (5.12), uvedimo dvoparametarsku familiju funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p,q \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - p(\sin x - x \cos x)^q, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p, q \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Tejlorov razvoj $\varphi_{p,q}(x)$ u okolini tačke $\frac{\pi}{2}$ je

$$\begin{aligned} \varphi_{p,q}(x) &= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi} - p\right) + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}pq\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{\pi^2 - 8}{\pi^3} - p\left(\frac{1}{8}\pi^2q^2 - \frac{1}{8}\pi^2q + \frac{1}{2}q\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$c_0^{\varphi_{p,q}, \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi} - p = 0$$

$$c_1^{\varphi_{p,q}, \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}pq = 0$$

dobijamo konstante $p = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi}$ i $q = \frac{\pi^2 - 12}{3\pi^2 - \pi^3}$ za koje je $\varphi_{p,q}(x) > 0$ u nekoj levoj okolini tačke $\frac{\pi}{2}$. Ove vrednosti konstanti se nalaze u nejednakosti (5.12).

Dokaz Teoreme 5.9 iz [224] se svodio na dokaz MTP nejednakosti

$$\begin{aligned} &2(12 - \pi^2)x^3 \sin x + ((2\pi^2 - \pi^3 + 12)x^2 - 18\pi^2 + 6\pi^3)x \sin x \cos x + \\ &+ (9\pi^2 - 3\pi^3)x^2 + ((4\pi^3 - 9\pi^2 - 36)x^2 + 9\pi^2 - 3\pi^3)\sin^2 x > 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ primenom stepenih redova i osobina Bernulijevih brojeva. Dokaz ove nejednakosti može se dobiti primenom razvijenog dokazivača, što je prikazano na sledećoj slici ekrana.

O sistemu Dokazivač Kako citirati
⚙️ 🌐

Da bismo dokazali nejednakost

» $2x^3(12 - \pi^2)\sin(x) + x^2(-3\pi^3 + 9\pi^2) + (x^2(-9\pi^2 - 36 + 4\pi^3) - 3\pi^3 + 9\pi^2)\sin^2(x) +$

$+ x(x^2(-\pi^3 + 12 + 2\pi^2) - 18\pi^2 + 6\pi^3)\sin(x)\cos(x) > 0$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, posmatrajmo funkciju

$f(x) = -2x^3(-12 + \pi^2)\sin(x) - 3\pi^3x^2 + 9\pi^2x^2 + (-9\pi^2x^2 - 36x^2 + 4\pi^3x^2 - 3\pi^3 + 9\pi^2)\sin^2(x) -$

$-x(-2\pi^2x^2 - 12x^2 + \pi^3x^2 - 6\pi^3 + 18\pi^2)\sin(x)\cos(x)$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Stoga je

$$f(x) = -2x^3(-12 + \pi^2)\sin(x) - \pi^3x^2 - 18x^2 + \frac{9\pi^2x^2}{2} - \frac{x(-2\pi^2x^2 - 12x^2 + \pi^3x^2 - 6\pi^3 + 18\pi^2)\sin(2x)}{2} -$$

$$- \frac{(-9\pi^2x^2 - 36x^2 + 4\pi^3x^2 - 3\pi^3 + 9\pi^2)\cos(2x)}{2} - \frac{3\pi^3}{2} + \frac{9\pi^2}{2}.$$

Kako je $f(0) = 0$ i $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, razmatramo sledeće slučajeve:

$$1. x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]:$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ data je sa

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \underbrace{-2x^3(-12 + \pi^2)}_{(>0)} T_{11}^{\sin, 0}(x) - \underbrace{\frac{x(-2\pi^2 x^2 - 12x^2 + \pi^3 x^2 - 6\pi^3 + 18\pi^2)}{2}}_{(>0)} T_{11}^{\sin, 0}(2x) - \\ &\quad - \underbrace{\frac{-9\pi^2 x^2 - 36x^2 + 4\pi^3 x^2 - 3\pi^3 + 9\pi^2}{2}}_{(>0)} T_{10}^{\cos, 0}(2x) - \pi^3 x^2 - 18x^2 + \frac{9\pi^2 x^2}{2} - \frac{3\pi^3}{2} + \frac{9\pi^2}{2} \\ &= x^{14} \left(-\frac{31\pi^2}{604800} - \frac{19}{61600} + \frac{4\pi^3}{155925} \right) + x^{12} \left(-\frac{46\pi^3}{155925} + \frac{29}{8400} + \frac{1987\pi^2}{3326400} \right) + \\ &\quad + x^{10} \left(-\frac{11\pi^2}{1400} - \frac{3}{70} + \frac{2\pi^3}{525} \right) + x^8 \left(-\frac{\pi^3}{45} + \frac{1}{5} + \frac{\pi^2}{20} \right), \end{aligned}$$

(izdvojene polinomske nejednakosti proverene su primenom Šturmove teoreme). Važi da je

$$P_1(x) = x^8 \mathbf{P}_1(x),$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(x) &= x^6 \left(-\frac{31\pi^2}{604800} - \frac{19}{61600} + \frac{4\pi^3}{155925} \right) + x^4 \left(-\frac{46\pi^3}{155925} + \frac{29}{8400} + \frac{1987\pi^2}{3326400} \right) + \\ &\quad + x^2 \left(-\frac{11\pi^2}{1400} - \frac{3}{70} + \frac{2\pi^3}{525} \right) - \frac{\pi^3}{45} + \frac{1}{5} + \frac{\pi^2}{20}. \end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}_1(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Stoga, polinom $P_1(x)$ nema nulu na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. S obzirom na to da je $P_1\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2.3211 \dots \cdot 10^{-6} > 0$, važi da je

$$P_1(x) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Kako je $f(x) > P_1(x)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$2. x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]:$$

Dokažimo da je $f(x) > 0$ i na intervalu $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Uvođenjem smene $x = \frac{\pi}{2} - t$, dobijamo funkciju:

$$\begin{aligned} g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= -\pi^3 t^2 - 18t^2 + \frac{9\pi^2 t^2}{2} - \frac{9\pi^3 t}{2} + 18\pi t + \pi^4 t + \frac{(-12 + \pi^2)(2t - \pi)^3 \cos(t)}{4} + \\ &\quad + \frac{(2t - \pi)(-8\pi^2 t^2 - 48t^2 + 4\pi^3 t^2 - 4\pi^4 t + 48\pi t + 8\pi^3 t - 24\pi^3 - 2\pi^4 + \pi^5 + 60\pi^2) \sin(2t)}{16} + \\ &\quad + \frac{(-36\pi^2 t^2 - 144t^2 + 16\pi^3 t^2 - 16\pi^4 t + 144\pi t + 36\pi^3 t - 9\pi^4 - 12\pi^3 + 4\pi^5) \cos(2t)}{8} - \frac{\pi^5}{4} - \frac{3\pi^3}{2} + \frac{9\pi^4}{8}, \end{aligned}$$

gde $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $g(t)$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ data je sa

$$\begin{aligned} P_2(t) &= \underbrace{\frac{(2t - \pi)(-8\pi^2 t^2 - 48t^2 + 4\pi^3 t^2 - 4\pi^4 t + 48\pi t + 8\pi^3 t - 24\pi^3 - 2\pi^4 + \pi^5 + 60\pi^2)}{16}}_{(>0)} T_{11}^{\sin, 0}(2t) + \\ &\quad + \underbrace{\frac{(-12 + \pi^2)(2t - \pi)^3}{4}}_{(>0)} T_{10}^{\cos, 0}(t) + \underbrace{\frac{-36\pi^2 t^2 - 144t^2 + 16\pi^3 t^2 - 16\pi^4 t + 144\pi t + 36\pi^3 t - 9\pi^4 - 12\pi^3 + 4\pi^5}{8}}_{(<0)} T_{12}^{\cos, 0}(2t) - \\ &\quad - \pi^3 t^2 - 18t^2 + \frac{9\pi^2 t^2}{2} - \frac{9\pi^3 t}{2} + 18\pi t + \pi^4 t - \frac{\pi^5}{4} - \frac{3\pi^3}{2} + \frac{9\pi^4}{8} \\ &= t^{14} \left(-\frac{4\pi^3}{467775} + \frac{2\pi^2}{155925} + \frac{8}{51975} \right) + t^{13} \left(-\frac{2\pi^3}{51975} - \frac{16\pi}{51975} - \frac{\pi^2}{1814400} + \frac{1}{151200} + \frac{2\pi^4}{93555} \right) + \\ &\quad + t^{12} \left(-\frac{\pi^5}{66825} - \frac{58\pi^2}{155925} - \frac{16}{4725} - \frac{\pi}{100800} + \frac{\pi^4}{34650} + \frac{1027\pi^3}{3628800} \right) + \\ &\quad + t^{11} \left(-\frac{45601\pi^4}{79833600} - \frac{\pi^5}{155925} - \frac{1}{1680} + \frac{11\pi^2}{201600} + \frac{\pi^6}{311850} + \frac{4\pi}{525} + \frac{2\pi^3}{1925} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +t^{10} \left(-\frac{4699\pi^3}{1209600} - \frac{\pi^4}{1350} + \frac{\pi}{1120} + \frac{\pi^2}{315} + \frac{4}{105} + \frac{5633\pi^5}{14515200} \right) + \\
& +t^9 \left(-\frac{2\pi^3}{135} - \frac{4\pi}{35} - \frac{\pi^6}{11340} - \frac{13\pi^2}{4032} + \frac{1}{30} + \frac{\pi^5}{5670} + \frac{2057\pi^4}{241920} \right) + \\
& +t^8 \left(-\frac{205\pi^5}{32256} - \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi^2}{105} + \frac{1067\pi^3}{40320} + \frac{\pi^4}{84} \right) + t^7 \left(-\frac{629\pi^4}{10080} - 1 - \frac{\pi^5}{315} + \frac{13\pi^2}{120} + \frac{\pi^6}{630} + \frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi^3}{21} \right) + \\
& +t^6 \left(-\frac{\pi^4}{10} - \frac{7\pi^2}{15} - \frac{31\pi^3}{240} - 4 + \frac{3\pi}{2} + \frac{161\pi^5}{2880} \right) + t^5 \left(-\frac{7\pi^2}{4} - \frac{\pi^6}{60} + \frac{\pi^5}{30} + 12 + \frac{31\pi^4}{240} \right) + \\
& +t^4 \left(-18\pi - \frac{17\pi^5}{96} + \pi^2 + 24 + \frac{\pi^4}{4} + \frac{13\pi^3}{8} \right) + t^3 \left(-18\pi - \frac{\pi^5}{6} - \pi^3 - \frac{\pi^4}{4} - 24 + \frac{\pi^6}{12} + 11\pi^2 \right) + \\
& +t^2 \left(-\frac{13\pi^3}{2} - \frac{\pi^5}{8} - 36 + \frac{3\pi^4}{4} + 9\pi^2 + 36\pi \right) + t \left(-\frac{15\pi^3}{2} - 18\pi^2 - \frac{\pi^6}{8} + \frac{\pi^5}{4} + 36\pi + \frac{7\pi^4}{2} \right),
\end{aligned}$$

(izdvojene polinomske nejednakosti proverene su primenom Šturmove teoreme). Važi da je

$$P_2(t) = t P_2(t),$$

gde je

$$\begin{aligned}
P_2(t) = & t^{13} \left(-\frac{4\pi^3}{467775} + \frac{2\pi^2}{155925} + \frac{8}{51975} \right) + t^{12} \left(-\frac{2\pi^3}{51975} - \frac{16\pi}{51975} - \frac{\pi^2}{1814400} + \frac{1}{151200} + \frac{2\pi^4}{93555} \right) + \\
& +t^{11} \left(-\frac{\pi^5}{66825} - \frac{58\pi^2}{155925} - \frac{16}{4725} - \frac{\pi}{100800} + \frac{\pi^4}{34650} + \frac{1027\pi^3}{3628800} \right) + \\
& +t^{10} \left(-\frac{45601\pi^4}{79833600} - \frac{\pi^5}{155925} - \frac{1}{1680} + \frac{11\pi^2}{201600} + \frac{\pi^6}{311850} + \frac{4\pi}{525} + \frac{2\pi^3}{1925} \right) + \\
& +t^9 \left(-\frac{4699\pi^3}{1209600} - \frac{\pi^4}{1350} + \frac{\pi}{1120} + \frac{\pi^2}{315} + \frac{4}{105} + \frac{5633\pi^5}{14515200} \right) + \\
& +t^8 \left(-\frac{2\pi^3}{135} - \frac{4\pi}{35} - \frac{\pi^6}{11340} - \frac{13\pi^2}{4032} + \frac{1}{30} + \frac{\pi^5}{5670} + \frac{2057\pi^4}{241920} \right) + \\
& +t^7 \left(-\frac{205\pi^5}{32256} - \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi^2}{105} + \frac{1067\pi^3}{40320} + \frac{\pi^4}{84} \right) + t^6 \left(-\frac{629\pi^4}{10080} - 1 - \frac{\pi^5}{315} + \frac{13\pi^2}{120} + \frac{\pi^6}{630} + \frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi^3}{21} \right) + \\
& +t^5 \left(-\frac{\pi^4}{10} - \frac{7\pi^2}{15} - \frac{31\pi^3}{240} - 4 + \frac{3\pi}{2} + \frac{161\pi^5}{2880} \right) + t^4 \left(-\frac{7\pi^2}{4} - \frac{\pi^6}{60} + \frac{\pi^5}{30} + 12 + \frac{31\pi^4}{240} \right) + \\
& +t^3 \left(-18\pi - \frac{17\pi^5}{96} + \pi^2 + 24 + \frac{\pi^4}{4} + \frac{13\pi^3}{8} \right) + t^2 \left(-18\pi - \frac{\pi^5}{6} - \pi^3 - \frac{\pi^4}{4} - 24 + \frac{\pi^6}{12} + 11\pi^2 \right) + \\
& +t \left(-\frac{13\pi^3}{2} - \frac{\pi^5}{8} - 36 + \frac{3\pi^4}{4} + 9\pi^2 + 36\pi \right) - \frac{15\pi^3}{2} - 18\pi^2 - \frac{\pi^6}{8} + \frac{\pi^5}{4} + 36\pi + \frac{7\pi^4}{2}.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme na polinom $P_2(t)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$. Stoga, polinom $P_2(t)$ nema nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$. S obzirom na to da je $P_2(\frac{\pi}{8}) = 0.0062155 \dots > 0$, važi da je

$$P_2(t) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$. Kako je $g(t) > P_2(t)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, važi da je

$$g(t) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$.

Zaključak. Na osnovu prethodna dva slučaja, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

 Kopiraj LaTeX kod

Slika 5.6: Dokaz nejednakosti (5.13)

U nastavku, primenom koncepta raslojenosti, dajemo neka poboljšanja nejednakosti iz Teorema 5.7, 5.8 i 5.9.

5.1.3.1 Poboljšanje Teoreme 5.7

Rezultate u ovoj podsekciji navodimo prema [122], uz izvesna poboljšanja postojećih dokaza.

Na osnovu nejednakosti (5.10), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - px^5, \quad (5.14)$$

koja je definisana za $x \in [0, \pi]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Ovako definisana familija funkcija uvedena je u [114], gde je, primenom Nike teoreme, analizirana za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p \in \mathbb{R}^+$.

Lema 5.2 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \pi]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U nastavku ispitujemo znak funkcija iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ primenom Parametarskog metoda, tj. primenom Teoreme 2.15.

Za $x \in (0, \pi)$ i $p \in \mathbb{R}$ važi sledeća ekvivalencija

$$\varphi_p(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - px^5 = 0 \iff p = g(x) = \frac{x \cos x - 3 \sin x + 2x}{x^5 (2 + \cos x)}. \quad (5.15)$$

Lema 5.3 Funkcija $g(x)$ ima tačno jedan ekstremum, koji je maksimum, na intervalu $(0, \pi)$ u tački koja je numerički određena sa $x_0 = 2.83982\dots$

Dokaz. Važi da je

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x^6 (2 + \cos x)^2},$$

gde je

$$f(x) = -4x \cos^2 x + 15 \sin x \cos x - 22x \cos x + 30 \sin x - 19x$$

jedna MTP funkcija. Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

- (i) $f(x) > 0$ na segmentu $[0, 2.83]$,
- (ii) $f(x) < 0$ na segmentu $[2.84, \pi]$,
- (iii) $f'(x) < 0$ na segmentu $[2.83, 2.84]$,

odakle, na osnovu metoda za izolovanje nula (Teorema 3.10), funkcija $f(x)$ ima tačno jednu nulu na intervalu $(0, \pi)$, tj. preciznije na intervalu $[2.83, 2.84]$. Ova nula se može numerički odrediti sa $x_0 = 2.83982\dots$. U tački x_0 funkcija $g(x)$ ima maksimum. ■

Primitimo da su ispunjeni uslovi (1), (2) i (3) Teoreme 2.15.

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, na osnovu Leme 5.2, opadajuće raslojena na intervalu $(0, \pi)$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uslov (2) je ispunjen jer, na osnovu Leme 5.3, postoji neprekidna funkcija $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$ i pri tome je funkcija $g(x)$ rastuća na $(0, x_0)$ i opadajuća na (x_0, π) .

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{180} = 0.00\bar{5} \quad \text{i} \quad B = \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \frac{1}{\pi^4} = 0.010265\dots$$

i pri tome se za $x_0 = 2.83982\dots$ dostiže maksimum funkcije $g(x)$, koji iznosi

$$C = g(x_0) = 0.010756\dots$$

Napomenimo da jednačina $g(x) = B$, za $x \in (0, \pi)$, ima jedinstveno rešenje, koje je numerički određeno sa

$$x'_0 = 2.50057\dots$$

Samim tim se, primenom Teoreme 2.15, dobija sledeće poboljšanje Teoreme 5.7.

Teorema 5.10 *Neka je*

$$A = \frac{1}{180} = 0.00\bar{5}, \quad B = \frac{1}{\pi^4} = 0.010265\dots \quad i \quad C = 0.010756\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$(\forall x \in (0, \pi)) \left(px^5 < Ax^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B]$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < px^5$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \pi \right) \right) px^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

(iii) *Ako $p \in (B, C)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima dva rešenja $x_0^{(p)}$ i $x_1^{(p)}$ ($x_0^{(p)} < x_1^{(p)}$) i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \cup \left(x_1^{(p)}, \pi \right) \right) x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < px^5$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)} \right) \right) px^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

(iv) *Ako $p \in (C, +\infty)$, važi da je*

$$(\forall x \in (0, \pi)) \left(x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq Cx^5 < px^5 \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

Dokaz Teoreme 5.10 primenom Novog parametarskog metoda. Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi (1)–(5) Teoreme 2.22 (Novi parametarski metod).

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, na osnovu Leme 5.2, opadajuće raslojena na intervalu $(0, \pi)$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uslov (2) je ispunjen jer funkcija $g_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = \frac{(1 - \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2} - 5px^4 = 0 \iff p = g_1(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{5x^4(2 + \cos x)^2} \quad (5.16)$$

ima tačno jedan lokalni ekstremum, koji je maksimum, na intervalu $(0, \pi)$ u tački koja je numerički određena sa $x_1 = 2.54595\dots$, što je dokazano u Sekciji 4.4.4 primenom razvijenog dokazivača.

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = \frac{1}{180} = 0.00\bar{5} = A \quad i \quad B_1 = \lim_{x \rightarrow \pi^-} g_1(x) = \frac{4}{5\pi^4} = 0.0082127\dots$$

i pri tome se za $x_1 = 2.54595\dots$ dostiže maksimum funkcije $g_1(x)$, koji iznosi

$$C_1 = g_1(x_1) = 0.011573\dots$$

Napomenimo da jednačina $g_1(x) = B_1$, za $x \in (0, \pi)$, ima jedinstveno rešenje

$$x'_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Uslov (4) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Primenom razvijenog dokazivača i metoda za izolovanje nula i ekstremuma funkcija, kao što je urađeno u Sekciji 4.4.4, može se dokazati da funkcija

$$h(x) = \varphi_{g_1(x)}(x) = \frac{4x \cos^2 x + 22x \cos x - 15 \cos x \sin x - 30 \sin x + 19x}{5(2 + \cos^2 x)^2},$$

za $x \in (0, \pi)$ ima jedinstveni minimum

$$C_2 = h(x_1) = -0.12789\dots$$

u tački $x_1 = 2.54595\dots$ i jedinstvenu nulu $x_0 = 2.83982\dots$ (u tački u kojoj funkcija $g(x)$ ima lokalni minimum).

Važi da je

$$g_1(x_0) = 0.010756\dots = C.$$

Jednačina

$$\varphi_p(\pi) = 0$$

ima jedinstveno rešenje po parametru $p \in (B_1, C)$, određeno sa

$$p = \frac{1}{\pi^4} = 0.010265\dots = B.$$

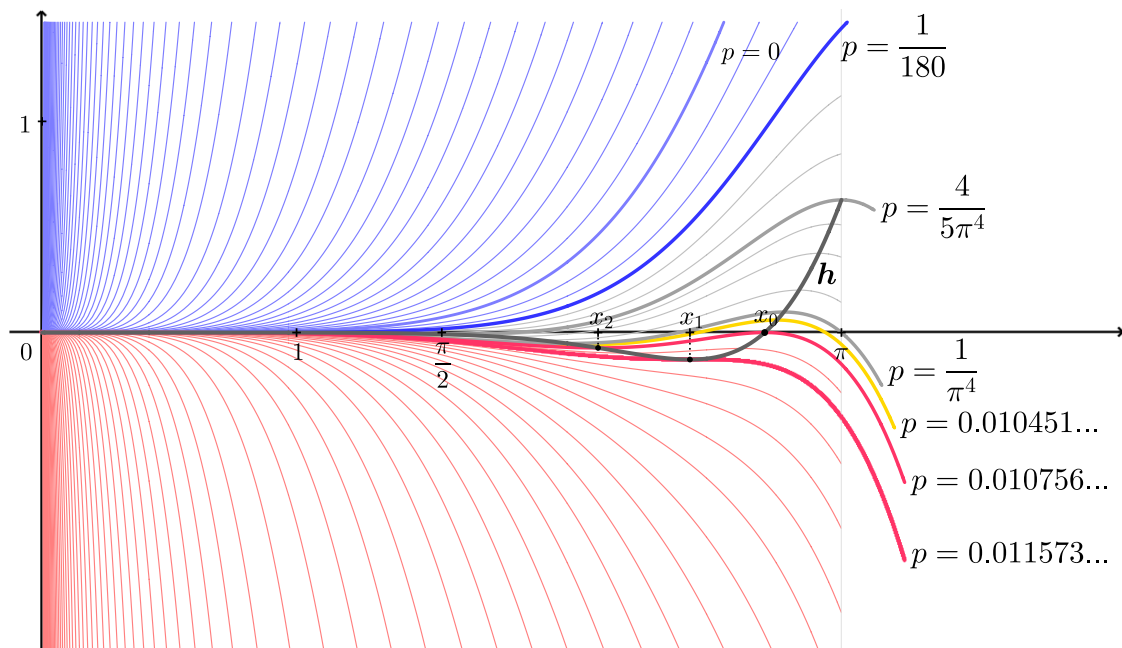
Dakle, uslov (4) je ispunjen.

Uslov (5) je ispunjen jer postoji desna okolina tačke 0 u kojoj važi da je $\varphi_p(x) < 0$ za $p \in (A, C_1)$, što se dobija na osnovu Tejlrovog razvoja

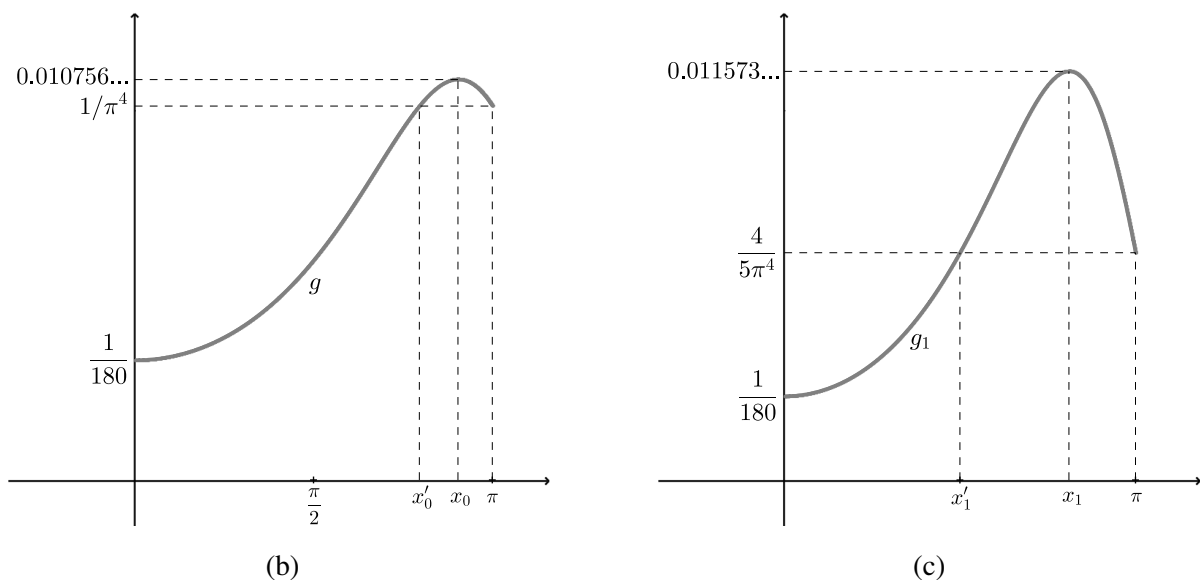
$$\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{180} - p \right) x^5 + o(x^5).$$

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.22, na osnovu koje sledi Teorema 5.10. ■

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \pi]$ i za neke vrednosti parametra p , uz odgovarajuće funkcije g i g_1 .



(a)



Slika 5.7: (a) Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.14)
 (b) funkcija g definisana sa (5.15)
 (c) funkcija g_1 definisana sa (5.16)

U tekstu koji sledi, analizom funkcija $g_1(x)$ i $h(x)$, određujemo minimaks aproksimant familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$.

S obzirom na to da su ispunjeni svi uslovi Teoreme 2.22, važi i sledeće tvrđenje.

Teorema 5.11 Za svako $p \in (B, C)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jedan minimum i tačno jedan maksimum na intervalu $(0, \pi)$ u tačkama $(t_1^{(p)}, \varphi_p(t_1^{(p)}))$ i $(t_2^{(p)}, \varphi_p(t_2^{(p)}))$, respektivno.

Teorema 5.12 Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t_1^{(p)})| = \varphi_p(t_2^{(p)})$$

po parametru $p \in (B, C)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.010451\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \pi)$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - 0.010451\dots x^5,$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \approx 0.010451\dots x^5$$

na intervalu $(0, \pi)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \pi)} |\varphi_p(x)| = -\varphi_{p_0}(t_1^{(p_0)}) = \varphi_{p_0}(t_2^{(p_0)}) = 0.058888\dots$$

Dokaz. Rešavanjem jednačine $h(x) = \varphi_C(x)$ po $x \in (0, \pi)$, dobija se da funkcija $\varphi_C(x)$ ima stacionarnu tačku

$$x_2 = 2.18506\dots$$

Funkcija $h_1(x) = h(x) : [0, x_2] \rightarrow [\varphi_C(x_2), 0]$ je neprekidna monotono opadajuća bijekcija.

Slično, funkcija $h_2(x) = h(x) : [x_0, \pi] \rightarrow [0, \frac{\pi}{5}]$ ($h(\pi) = \frac{\pi}{5}$) je neprekidna monotono rastuća bijekcija.

Primitimo da vrednosti funkcija $h_1(x)$ i $h_2(x)$ odgovaraju stacionarnim tačkama funkcija $\varphi_p(x)$ nad odgovarajućim domenima.

Stoga, može se pokazati da postoje tačno dve vrednosti $t_1^{(p)} \in (0, x_2)$ i $t_2^{(p)} \in (x_0, \pi)$ takve da je

$$-h(t_1^{(p)}) = h(t_2^{(p)}),$$

gde su $t_1^{(p)}$ i $t_2^{(p)}$ stacionarne tačke funkcije $\varphi_p(x)$.

Rešavanjem prethodne jednačine primenom sistema računarske algebre Maple dobijamo numeričke vrednosti

$$\begin{aligned} p &= p_0 = 0.010451\dots, \\ t_1^{(p_0)} &= 2.10829\dots, \\ t_2^{(p_0)} &= 2.88858\dots \end{aligned}$$

Pri tome, važi da je

$$-\varphi_{p_0}(t_1^{(p_0)}) = \varphi_{p_0}(t_2^{(p_0)}) = 0.058888\dots$$

Označimo prethodnu vrednost sa

$$\delta = 0.058888\dots$$

Na osnovu Teoreme 5.11, funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (B, C)$, ima redom tačno jedan minimum i tačno jedan maksimum na intervalu $(0, \pi)$. Dakle, funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ ima tačno jedan minimum u tački $t_1^{(p_0)}$ i tačno jedan maksimum u tački $t_2^{(p_0)}$.

Važi da je $|\varphi_{p_0}(\pi)| = |-0.056851\dots| < \delta$. Dakle,

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_0}(x)| = \delta.$$

Na osnovu raslojenosti, zaključujemo da za $p_1 > p_0$ ($p_1 \in \mathbb{R}$) važi da je

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_1}(x)| \geq |\varphi_{p_1}(t_1^{(p_0)})| > |\varphi_{p_0}(t_1^{(p_0)})| = \sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_0}(x)|,$$

dok za $p_1 < p_0$ važi da je

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_1}(x)| \geq \varphi_{p_1}(t_2^{(p_0)}) > \varphi_{p_0}(t_2^{(p_0)}) = \sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_0}(x)|.$$

Dakle, za svako $p_1 \neq p_0$ važi da je

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_1}(x)| > \sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_0}(x)| = |\varphi_{p_0}(t_1^{(p_0)})| = \varphi_{p_0}(t_2^{(p_0)}) = \delta,$$

odakle je $\inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_p(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |\varphi_{p_0}(x)|$, tj. funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \pi)$. ■

Kao posledica prethodne analize, razmatranjem funkcija $g(x)$ i $g_1(x)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ dobija se i sledeće tvrđenje, koje proširuje rezultate iz [114].

Teorema 5.13 *Neka je*

$$A = \frac{1}{180} = 0.005\bar{5} \quad i \quad B = \frac{16(\pi - 3)}{\pi^5} = 0.0074030\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(px^5 < Ax^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$, za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < px^5$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) px^5 < x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

(iii) *Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < Bx^5 < px^5 \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje jednačine*

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.0072274\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} - 0.0072274\dots x^5,$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \approx 0.0072274\dots x^5$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) \right| = \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.0016797\dots$$

5.1.3.2 Poboljšanje Teoreme 5.8

Rezultate u ovoj podsekciji navodimo prema [123].

Na osnovu nejednakosti (5.11), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.4 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Primenom Novog parametarskog metoda, može se dobiti sledeće poboljšanje Teoreme 5.8.

Teorema 5.14 Neka je

$$A = \frac{1}{180} = 0.00\bar{5} \quad i \quad B = \frac{16(\pi - 3)2^{5/7}}{3\pi^{33/7}} = 0.0056150\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -Ax^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7} < -px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7}\right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) -px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7} < \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7}.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(-px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7} < -Bx^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2/7} < \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3}\right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.0056039\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - 0.0056039\dots x^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2/7},$$

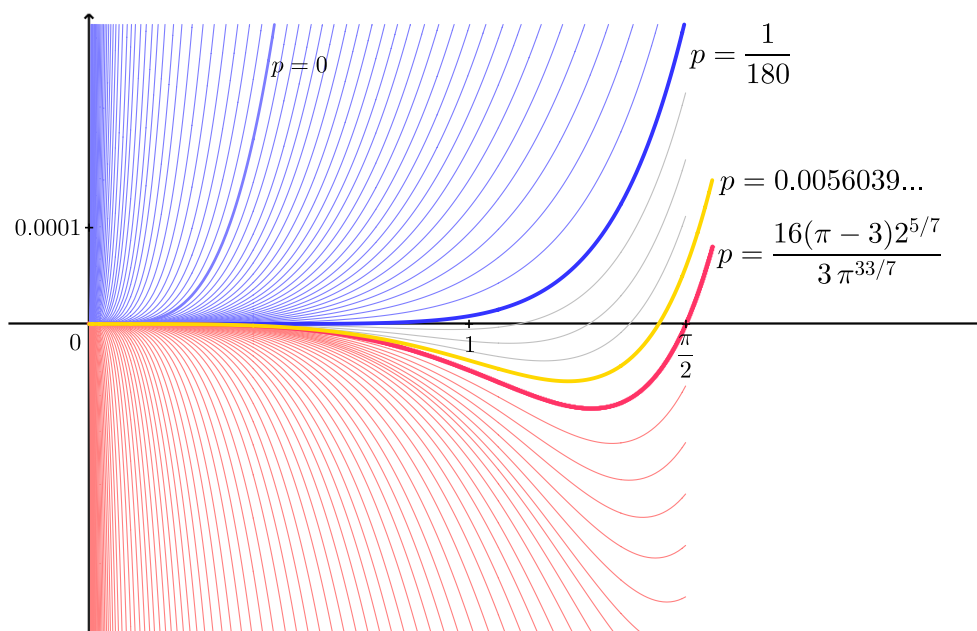
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} \approx -0.0056039\dots x^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2/7}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 5.9487\dots 10^{-5}.$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.8: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.17)

5.1.3.3 Poboljšanje Teoreme 5.9

Rezultate u ovoj podsekciji navodimo prema [123].

Na osnovu nejednakosti (5.12), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - p(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.5 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U nastavku ispitujemo znak funkcija iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ primenom Parametarskog metoda, tj. primenom Teoreme 2.12.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p \in \mathbb{R}$ važi sledeća ekvivalencija

$$\varphi_p(x) = 0 \iff p = g(x) = \frac{x \cos x - 3 \sin x + 2x}{3x(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}}. \quad (5.19)$$

Lema 5.6 Funkcija $g(x)$ je opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Dokaz. Važi da je

$$g'(x) = \frac{1}{3\pi^3 - 9\pi^2} \cdot \frac{(\sin x - x \cos x)^{(\pi^3 - 4\pi^2 + 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}}{x^2} f(x),$$

gde je

$$f(x) = \left((\pi^3 - 2\pi^2 - 12)x^2 - 6\pi^3 + 18\pi^2 \right) x \sin x \cos x + 2(\pi^2 - 12)x^3 \sin x + \\ + \left((4\pi^3 - 9\pi^2 - 36)x^2 - 3\pi^3 + 9\pi^2 \right) \cos^2 x + (-\pi^3 + 36)x^2 + 3\pi^3 - 9\pi^2$$

jedna MTP funkcija. Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$f(x) < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, odakle je

$$g'(x) < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. ■

Primitimo da su ispunjeni uslovi **(1)**, **(2)** i **(3)** Teoreme 2.12.

Uslov **(1)** je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, na osnovu Leme 5.5, opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uslov **(2)** je ispunjen jer, na osnovu Leme 5.6, postoji neprekidna monotono opadajuća funkcija $g: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ koja ispunjava $g(x) = p \iff \varphi_p(x) = 0$.

Uslov **(3)** je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{2\pi - 6}{3\pi} = 0.030046... \quad \text{i} \quad B = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty.$$

Samim tim se, primenom Teoreme 2.12, dobija sledeće poboljšanje Teoreme 5.9.

Teorema 5.15 *Neka je*

$$A = \frac{2\pi - 6}{3\pi} = 0.030046\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -A(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)} \right. \\ \left. < -p(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, +\infty)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -p(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) -p(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)} < \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3}.$$

U nastavku određujemo minimaks aproksimant familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$.

Ispitajmo monotonost funkcija iz posmatrane familije. Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = \frac{-x^2 \sin x - 3x \cos x + 3 \sin x}{3x^2} + p \frac{(\pi^2 - 12)x \sin x (\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}}{(3\pi^2 - \pi^3)(\sin x - x \cos x)}.$$

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p \in \mathbb{R}$ važi sledeća ekvivalencija

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0 \iff p = g_1(x) = \frac{(3\pi^2 - \pi^3)(x^2 \sin x + 3x \cos x - 3 \sin x)(\sin x - x \cos x)}{3(\pi^2 - 12)x^3 \sin x (\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}}. \quad (5.20)$$

Lema 5.7 *Funkcija $g_1(x)$ ima tačno jedan ekstremum, koji je minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački koja je numerički određena sa $c = 1.29610\dots$*

Dokaz. Važi da je

$$g_1'(x) = -\frac{1}{3(\pi^2 - 12)} \cdot \frac{(\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(\pi^3 - 3\pi^2)}}{x^4 \sin^2 x} f_1(x)$$

gde je

$$f_1(x) = ((\pi^3 - 2\pi^2 - 12)x^4 + (-10\pi^3 + 27\pi^2 + 36)x^2 + 9\pi^3 - 27\pi^2) \sin x \cos^2 x + \\ + ((-\pi^3 + 2\pi^2 + 12)x^4 + (7\pi^3 - 18\pi^2 - 36)x^2 - 9\pi^3 + 27\pi^2) \sin x + \\ + ((4\pi^3 - 9\pi^2 - 36)x^2 - 15\pi^3 + 45\pi^2)x \cos^3 x + \\ + ((-7\pi^3 + 18\pi^2 + 36)x^2 + 15\pi^3 - 45\pi^2)x \cos x$$

jedna MTP funkcija.

Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

- (i) $f_1(x) < 0$ na segmentu $[0, 1.29]$,
- (ii) $f_1(x) > 0$ na segmentu $[1.23, \frac{\pi}{2}]$,
- (iii) $f_1'(x) > 0$ na segmentu $[1.29, 1.3]$,

odakle, na osnovu metoda za izolovanje nula (Teorema 3.10), funkcija $f_1(x)$ ima tačno jednu nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. preciznije na intervalu $[1.29, 1.3]$. Ova nula se može numerički odrediti sa $c = 1.29610\dots$. U tački c funkcija $g_1(x)$ ima minimum. ■

Primitimo da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g_1(x) = A \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = B = +\infty.$$

Minimum funkcije $g_1(x)$ se dostiže u tački $c = 1.29610\dots$ i iznosi

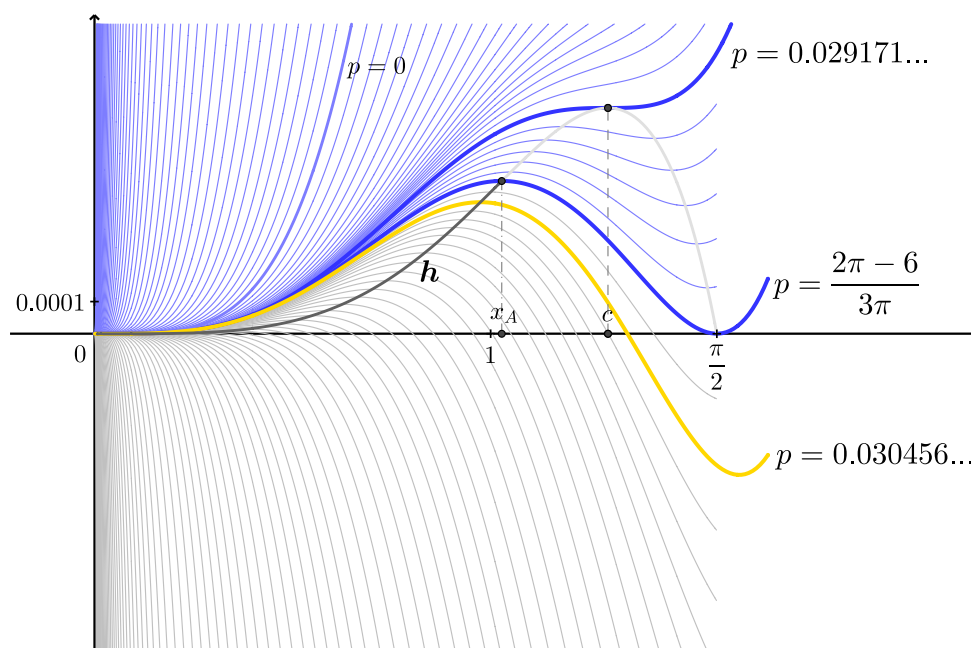
$$C = g_1(c) = 0.029171\dots < A.$$

Važi sledeće tvrđenje.

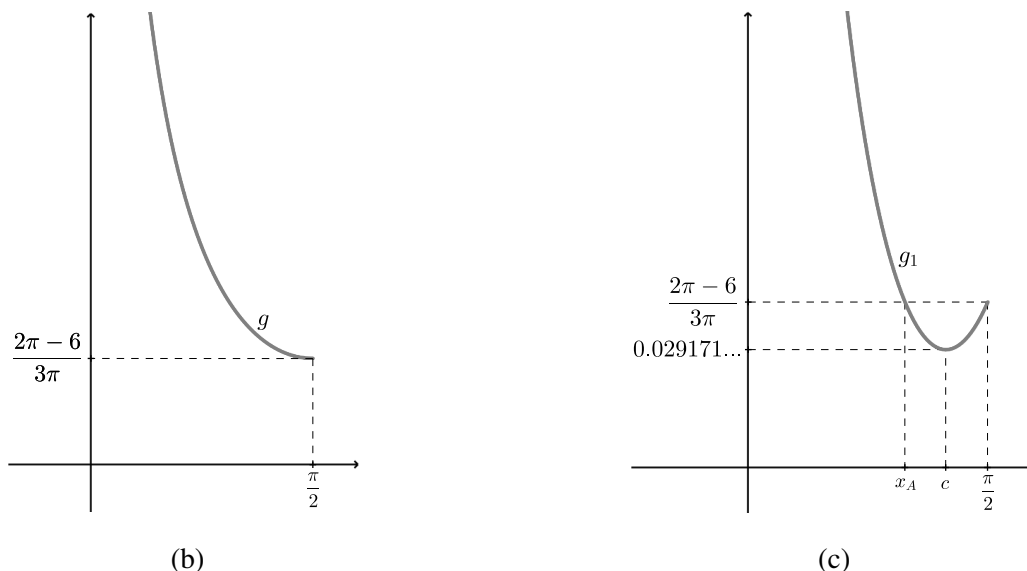
Lema 5.8 Za $x_A = 1.02795\dots \in (0, c)$, gde je x_A stacionarna tačka funkcije $\varphi_A(x)$, funkcija $g_1 : (0, x_A) \rightarrow (A, +\infty)$ je bijekcija.

Dokaz. Funkcija $g_1(x)$ je monotono opadajuća i neprekidna na intervalu $(0, c)$ i pri tome je $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = +\infty$ i $g_1(c) = C = 0.029171\dots < A = \frac{2\pi-6}{3\pi} = 0.030046\dots$. Stoga funkcija $g_1(x)$ i prava $y = \frac{2\pi-6}{3\pi}$ imaju presek u tačno jednoj tački $x_A = 1.02795\dots$. ■

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p , uz odgovarajuće funkcije g i g_1 .



(a)



Slika 5.9: (a) Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.18)

(b) funkcija g definisana sa (5.19)

(c) funkcija g_1 definisana sa (5.20)

Teorema 5.16 Za svako $p \in (A, +\infty)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni maksimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. preciznije, na intervalu $(0, x_A)$, u tački $(g_1^{-1}(p), \varphi_p(g_1^{-1}(p)))$.

Dokaz. Za $p \in (A, +\infty)$, važi:

- (i) $\varphi_p(0) = 0$,
- (ii) $\varphi_p(\frac{\pi}{2}) < 0$ (na osnovu raslojenosti i činjenice da je $\varphi_A(\frac{\pi}{2}) = 0$),
- (iii) funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (jer je funkcija $g(x)$ monotona na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$),
- (iv) funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu stacionarnu tačku po argumentu x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (jer je funkcija $g_1(x)$ monotona na intervalu $(0, x_A)$ i pri tome je $g_1(x) < A$ za $x \in (x_A, \frac{\pi}{2})$),

odakle sledi tvrđenje teoreme. ■

Na osnovu prethodne teoreme, za $p \in [A, +\infty)$ važi da je

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| = |\varphi_p(t^{(p)})| \quad \text{ili} \quad \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| = |\varphi_p(\frac{\pi}{2})|,$$

gde je $t^{(p)}$ tačka u kojoj se dostiže lokalni maksimum funkcije $\varphi_p(x)$.

Za $p \in (-\infty, A)$, na osnovu raslojenosti i činjenice da je $\varphi_A(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, važi da je

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| > \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_A(x)|.$$

Dakle, važi da je

$$\inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| = \inf_{p \in [A, +\infty)} \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)|.$$

U cilju određivanja minimaks aproksimanta, u daljem tekstu ćemo uvesti i razmatrati dve funkcije.

Za $p \in (A, +\infty)$ važi da je $\varphi_p(t^{(p)}) = \varphi_{g_1(t^{(p)})}(t^{(p)})$ i odatle, na osnovu Teoreme 5.16, funkcija

$$h_1(x) = \varphi_{g_1(x)}(x) : (0, x_A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

određuje skup tačaka u kojima funkcije $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, +\infty)$, dostižu maksimum.

Lema 5.9 *Funkcija*

$$h_1(x) = \left(((4\pi^3 - 9\pi^2 - 36)x^2 - 3\pi^3 + 9\pi^2) \cos^2 x + ((\pi^3 - 2\pi^2 - 12)x^3 + (-6\pi^3 + 18\pi^2)x) \sin x \cos x + (2\pi^2 - 24)x^3 \sin x + (-\pi^3 + 36)x^2 + 3\pi^3 - 9\pi^2 \right) / \left(3(\pi^2 - 12)x^3 \sin x \right)$$

je monotono rastuća za $x \in (0, x_A)$.

Dokaz. Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$h_1'(x) > 0$$

na intervalu $(0, 1.03) \supset (0, x_A)$. ■

Za $\bar{p} \in (A, +\infty)$ postoji $\bar{x} \in (0, x_A)$ tako da funkcija $\varphi_{\bar{p}}(x)$ dostiže maksimum u tački \bar{x} i prema tome važi da je $\bar{p} = g_1(\bar{x})$. Jasno je da je $\varphi_{\bar{p}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_{g_1(\bar{x})}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Uvedimo funkciju

$$H_1(x) = \varphi_{g_1(x)}\left(\frac{\pi}{2}\right) : (0, x_A) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lema 5.10 *Funkcija*

$$H_1(x) = -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3} - \pi^2 \left(((\pi - 3)x^2 - 3\pi + 9) \sin^2 x + ((-\pi + 3)x^3 + (6\pi - 18)x) \cos x \sin x + (-3\pi + 9)x^2 \cos^2 x \right) / \left(3(\pi^2 - 12)x^3 \sin x (\sin x - x \cos x)^{-\frac{\pi^2 - 12}{\pi^2(\pi - 3)}} \right)$$

je monotono rastuća za $x \in (0, x_A)$.

Dokaz. Važi da je

$$H_1'(x) = \frac{1}{3(\pi^2 - 12)} \cdot \frac{(\sin x - x \cos x)^{\frac{\pi^2 - 12}{\pi^2(\pi - 3)}}}{x^4 \sin^2 x} f(x),$$

gde je

$$f(x) = \left((4\pi^3 - 9\pi^2 - 36)x^3 + (-15\pi^3 + 45\pi^2)x \right) \cos^3 x + \left((\pi^3 - 2\pi^2 - 12)x^4 + (-10\pi^3 + 27\pi^2 + 36)x^2 + 9\pi^3 - 27\pi^2 \right) \sin x \cos^2 x + \left((-7\pi^3 + 18\pi^2 + 36)x^3 + (15\pi^3 - 45\pi^2)x \right) \cos x + \left((-\pi^3 + 2\pi^2 + 12)x^4 + (7\pi^3 - 18\pi^2 - 36)x^2 - 9\pi^3 + 27\pi^2 \right) \sin x$$

jedna MTP funkcija. Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

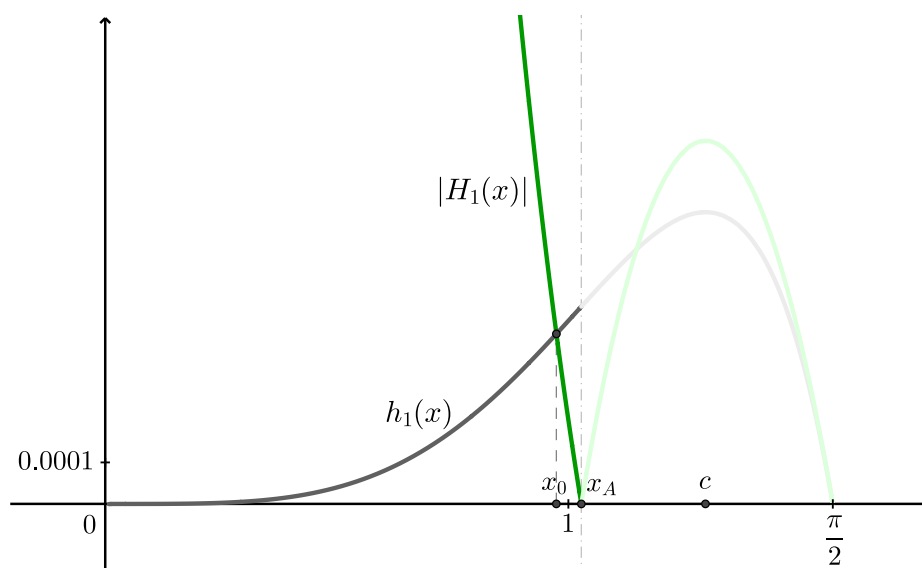
$$f(x) < 0$$

na intervalu $(0, 1.03) \supset (0, x_A)$, odakle je

$$H_1'(x) > 0$$

na intervalu $(0, x_A)$. ■

Na sledećoj slici su prikazani grafici funkcija $h_1(x)$ i $|H_1(x)|$.



Slika 5.10: Grafik funkcija $h_1(x)$ i $|H_1(x)|$

Teorema 5.17 *Jednačina*

$$h_1(x) = |H_1(x)|$$

ima jedinstveno rešenje $x_0 \in (0, x_A)$, koje se može numerički odrediti sa

$$x_0 = 0.97411\dots$$

Za vrednost parametra

$$p_0 = g_1(x_0) = 0.030456\dots$$

važi da je

$$\varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) = \left| \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|.$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = -\frac{\sin x}{x} + \frac{2 + \cos x}{3} - 0.030456\dots (\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)},$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} \approx 0.030456\dots (\sin x - x \cos x)^{(\pi^2 - 12)/(3\pi^2 - \pi^3)}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) = \left| \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 4.10100\dots 10^{-4}.$$

Dokaz. Na osnovu Leme 5.9, Leme 5.10 i činjenice da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H_1(x) = -\infty,$$

$$H_1(x_A) = 0,$$

zaključujemo da jednačina $h_1(x) = |H_1(x)|$ ima jedinstveno rešenje $x_0 \in (0, x_A)$, koje se može numerički odrediti sa $x_0 = 0.97411\dots$

Na osnovu raslojenosti, zaključujemo da za $p_1 > p_0$ ($p_1 \in \mathbb{R}$) važi da je

$$\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_1}(x)| = \left| \varphi_{p_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| > \left| \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_0}(x)|,$$

dok za $p_1 < p_0$ važi da je

$$\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_1}(x)| \geq \varphi_{p_1} \left(t^{(p_0)} \right) > \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_0}(x)|.$$

Dakle, za svako $p_1 \neq p_0$ važi da je

$$\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_1}(x)| > \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_0}(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right),$$

odakle je $\inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_{p_0}(x)|$, tj. funkcija $\varphi_{p_0}(x)$ je minimaks aproksimant familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. ■

5.2 Dokaz Huygens-ove nejednakosti

U Primeru 1.4 je dokazana jedna Huygens-ova nejednakost. U ovom potpoglavlju dokazujemo sledeću Huygens-ovu nejednakost

$$x > \sin x + \frac{10(4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 x)}{12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x + 8 \frac{(2 \sin \frac{x}{2} - \sin x)^2}{12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x}} \quad (5.21)$$

za $x \in (0, \pi)$, koju je, prema [190], Huygens koristio u [86] za određivanje racionalnih aproksimacija broja π . Prema [190], prvi dokaz ove nejednakosti je nedavno dao I. Pinelis [162].

Pokažimo kako se nejednakost (5.21) može svesti na uopštenu MTP nejednakost.

Nejednakost (5.21) je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} & (x - \sin x) \left(12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x + 8 \frac{(2 \sin \frac{x}{2} - \sin x)^2}{12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x} \right) > 10(4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 x) \\ \iff & (x - \sin x) \left((12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x)^2 + 8(2 \sin \frac{x}{2} - \sin x)^2 \right) > 10(4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 x)(12 \sin \frac{x}{2} + 9 \sin x) \\ \iff & 176x \sin^2 \frac{x}{2} + 89x \sin^2 x + 92x \cos \frac{x}{2} - 92x \cos \frac{3x}{2} - 480 \sin^3 \frac{x}{2} - \\ & - 32 \sin \frac{x}{2} + \sin^3 x - 268 \sin x - 16 \sin \frac{3x}{2} + 134 \sin 2x + 16 \sin \frac{5x}{2} > 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Napomenimo da je u prethodnom nizu ekvivalencija u svakom množenju nejednakosti sa odgovarajućim izrazom (u cilju sređivanja i dovođenja nejednakosti do uopštene MTP nejednakosti) taj izraz pozitivan i stoga se smer nejednakosti ne menja.

Primenom razvijenog dokazivača, na sledećoj slici ekrana dajemo dokaz prethodne uopštene MTP nejednakosti, čime je dokazana i polazna nejednakost (5.21).

Da bismo dokazali nejednakost

$$\begin{aligned} & 176x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 89x \sin^2(x) + 92x \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 92x \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - 480 \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \\ & - 32 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^3(x) - 268 \sin(x) - 16 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + 134 \sin(2x) + 16 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

na intervalu $(0, \pi)$, posmatrajmo funkciju

$$\begin{aligned} f(x) = & 176x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 89x \sin^2(x) + 92x \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 92x \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - 480 \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \\ & - 32 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^3(x) - 268 \sin(x) - 16 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + 134 \sin(2x) + 16 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) \end{aligned}$$

na intervalu $(0, \pi)$. Važi da je

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(x)}{2} \\ \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{3 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{4}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} f(x) = & 92x \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 88x \cos(x) - 92x \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{89x \cos(2x)}{2} + \frac{265x}{2} - 392 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \\ & - \frac{1069 \sin(x)}{4} + 104 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + 134 \sin(2x) + 16 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) - \frac{\sin(3x)}{4}. \end{aligned}$$

Neka je $T_n^{\phi, a}$ Tejlorov razvoj reda n funkcije ϕ u okolini tačke a . Jedna nanižna polinomska aproksimacija funkcije $f(x)$ na intervalu $(0, \pi)$ data je sa

$$\begin{aligned} P(x) = & 92x T_{18}^{\cos, 0}\left(\frac{x}{2}\right) - 88x T_{16}^{\cos, 0}(x) - 92x T_{16}^{\cos, 0}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{89x}{2} T_{16}^{\cos, 0}(2x) + \frac{265x}{2} - 392 T_{17}^{\sin, 0}\left(\frac{x}{2}\right) - \\ & - \frac{1069}{4} T_{17}^{\sin, 0}(x) + 104 T_{19}^{\sin, 0}\left(\frac{3x}{2}\right) + 134 T_{19}^{\sin, 0}(2x) + 16 T_{19}^{\sin, 0}\left(\frac{5x}{2}\right) - \frac{1}{4} T_{17}^{\sin, 0}(3x) \\ = & \frac{46995919777}{8760586044388147200} x^{19} + \frac{222347}{2833986355200} x^{17} - \frac{1393657}{413289676800} x^{15} + \frac{10529}{113541120} x^{13} - \frac{23}{15360} x^{11} + \frac{29}{2688} x^9. \end{aligned}$$

Primitimo da je

$$P(x) = x^9 \mathbf{P}(x),$$

gde je

$$\mathbf{P}(x) = -\frac{46995919777}{8760586044388147200} x^{10} + \frac{222347}{2833986355200} x^8 - \frac{1393657}{413289676800} x^6 + \frac{10529}{113541120} x^4 - \frac{23}{15360} x^2 + \frac{29}{2688}.$$

Direktnom primenom Šturmove teoreme na polinom $\mathbf{P}(x)$ može se zaključiti da ovaj polinom nema nulu na segmentu $[0, \pi]$. Stoga, polinom $P(x)$ nema nulu na intervalu $(0, \pi)$. S obzirom na to da je $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.44308 \dots > 0$, važi da je

$$P(x) > 0$$

na intervalu $(0, \pi)$. Kako je $f(x) > P(x)$ na intervalu $(0, \pi)$, važi da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \pi)$, čime je dokazana polazna nejednakost. \square

 Kopiraj LaTeX kod

Slika 5.11: Dokaz nejednakosti (5.22)

5.3 Uopštenje jednog tipa Wilker-ove nejednakosti

U [193], J. B. Wilker je postavio sledeće otvorene probleme:

(1) Dokazati da za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2. \quad (5.23)$$

(2) Naći najveće $c \in \mathbb{R}$ tako da za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2 + cx^3 \tan x. \quad (5.24)$$

Ovi otvoreni problemi su rešeni u [78, 183], gde je dobijeno i dodatno proširenje nejednakosti (5.24). Naime, za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\frac{8}{45}x^3 \tan x > \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 > \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 x^3 \tan x \quad (5.25)$$

i konstante $\frac{8}{45}$ i $\frac{16}{\pi^4}$ su najbolje moguće.

Nejednakosti (5.23) i (5.25) mogu da se svedu na MTP nejednakosti, koje je moguće dokazati primenom razvijenog dokazivača.

Proširenja i poboljšanja nejednakosti (5.23) i (5.25), tj. Wilker-ovih nejednakosti, razmatrana su u mnogim radovima [30–32, 41, 48–50, 53, 55–58, 81, 88, 90, 95, 119, 141–143, 147, 148, 151, 171, 181, 184, 186, 191, 198–201, 206, 209, 216, 217, 222, 225, 226, 229]. U [222] dat je sledeći tip Wilker-ove nejednakosti, koja je dokazana i u [181].

Teorema 5.18 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 > \frac{8}{45}x^4 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{6/7} \quad (5.26)$$

i konstanta $\frac{8}{45}$ je najbolja moguća.

U ovom potpoglavlju, prema [124], primenom Parametarskog metoda (Teoreme 2.13), dajemo jednostavniji dokaz i poboljšanje prethodne teoreme.

Na osnovu nejednakosti (5.26), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 - px^4 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{6/7}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi (1), (2) i (3) Teoreme 2.13.

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uslov (2) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p \in \mathbb{R}$ važi sledeća ekvivalencija

$$\varphi_p(x) = 0 \iff p = g(x) = \frac{\sin^2 x \cos x - 2x^2 \cos x + x \sin x}{x^6 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{6/7} \cos x}. \quad (5.28)$$

Važi da je

$$g'(x) = \frac{f(x)}{7 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{6/7} x^7 \cos^2 x \sin x},$$

gde je $f(x)$ MTP funkcija data sa

$$f(x) = -14x \cos^5 x + 36 \cos^4 x \sin x + 49x \cos^3 x + 44x^2 \cos^2 x \sin x - \\ -36 \cos^2 x \sin x + 12x^3 \cos x - 35x \cos x + x^2 \sin x.$$

Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Samim tim je funkcija $g(x)$ rastuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana ispunjenost uslova (2).

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{8}{45} \quad \text{i} \quad B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty.$$

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.13, na osnovu koje se dobija sledeće poboljšanje Teoreme 5.18.

Teorema 5.19 *Neka je*

$$\frac{8}{45} = 0.1\bar{7}.$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 > Ax^4 \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{6/7} > px^4 \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{6/7} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, +\infty)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) px^4 \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{6/7} > \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 > px^4 \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{6/7}.$$

Primetimo da familija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ nije definisana u tački $\frac{\pi}{2}$ i da ne postoji Tejlorov razvoj $\varphi_p(x)$ u toj tački. Međutim, postoji Loranov razvoj $\varphi_p(x)$ u tački $\frac{\pi}{2}$, koji je dat sa

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & -\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{-1} - p \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left(-\frac{2}{\pi}\right)^{6/7} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{-6/7} + \\ & + \frac{8}{\pi^2} - 2 - \frac{11\pi^3 p}{28} \left(-\frac{2}{\pi}\right)^{6/7} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{1/7} + O\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Na osnovu ovog razvoja se može zaključiti da postoji leva okolina tačke $\frac{\pi}{2}$ u kojoj je $\varphi_p(x) > 0$ za $p \in \mathbb{R}$. ■

Dokaz Teoreme 5.19 primenom Novog parametarskog metoda. Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi (1)–(4) Teoreme 2.21 (Novi parametarski metod).

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ kompresovana u tački 0 i opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uslov (2) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p \in \mathbb{R}$ važi sledeća ekvivalencija

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = & \frac{x^2 + 2x \sin x \cos^3 x - x \sin x \cos x + 2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x}{x^3 \cos^2 x} - p \frac{x^2 (6x + 22 \sin x \cos x)}{7 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/7} \cos^2 x} = 0 \\ \iff p = g_1(x) = & \frac{7(2x \sin x \cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x - x \sin x \cos x)}{2x^5 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{-1/7} (3x \cos^2 x + 3x \sin^2 x + 11 \sin x \cos x)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Važi da je

$$g_1'(x) = \frac{h_1(x)}{h_2(x)} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{-6/7},$$

gde je

$$\begin{aligned} h_1(x) = & 3x^4 + (168 \sin x \cos^5 x - 316 \sin x \cos^3 x + 19 \sin x \cos x)x^3 + \\ & + (-308 \cos^8 x + 978 \cos^6 x - 603 \cos^4 x - 67 \cos^2 x)x^2 + \\ & + (946 \sin x \cos^7 x - 1655 \sin x \cos^5 x + 709 \sin x \cos^3 x)x + \\ & + 792 \cos^8 x - 1584 \cos^6 x + 792 \cos^4 x \end{aligned}$$

i

$$h_2(x) = 18x^9 \cos^2 x + 132x^8 \sin x \cos^3 x - 242 (\cos^6 x - \cos^4 x)x^7.$$

Primenom razvijenog dokazivača, mogu se dokazati MTP nejednakosti $h_1(x) > 0$ i $h_2(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Samim tim je funkcija $g_1(x)$ rastuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana ispunjenost uslova (2).

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = \frac{8}{45} = A \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g_1(x) = +\infty = B.$$

Uslov (4) je ispunjen jer, na osnovu Tejlorovog razvoja

$$\varphi_p(x) = \left(\frac{8}{45} - p\right)x^4 + o(x^4),$$

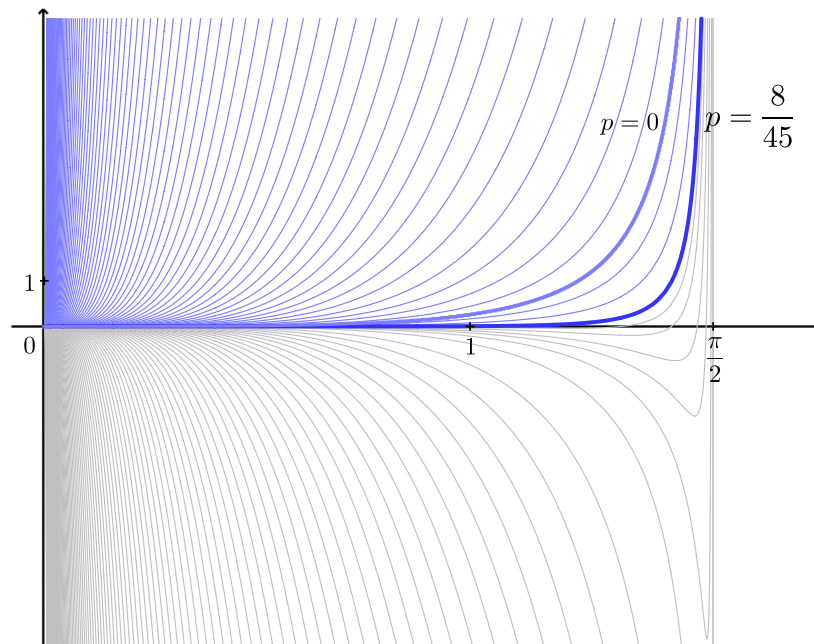
postoji desna okolina tačke 0 u kojoj je $\varphi_p(x) < 0$ za $p \in (A, B)$ i, na osnovu Loranovog razvoja (5.29), postoji leva okolina tačke $\frac{\pi}{2}$ u kojoj je $\varphi_p(x) > 0$ za $p \in \mathbb{R}$. Šta više, važi da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varphi_p(x) = +\infty$$

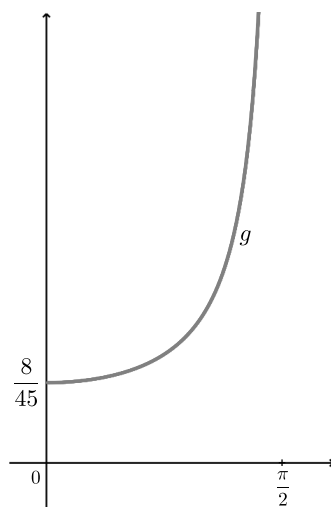
za svako $p \in \mathbb{R}$.

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.21, odakle sledi Teorema 5.19. ■

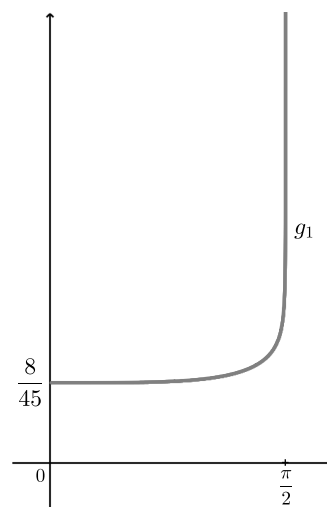
Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra p , uz odgovarajuće funkcije $g(x)$ i $g_1(x)$.



(a)



(b)



(c)

Slika 5.12: (a) Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.27)
 (b) funkcija g definisana sa (5.28)
 (c) funkcija g_1 definisana sa (5.30)

Napomena 5.5 Na osnovu nejednakosti (5.26), može se uvesti i dvoparameterska familija funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p,q \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 - px^4 \left(\frac{\tan x}{x}\right)^q, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za vrednosti parametra $p, q \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Tejlorov razvoj $\varphi_{p,q}(x)$ u okolini tačke 0 je

$$\varphi_{p,q}(x) = \left(\frac{8}{45} - p\right)x^4 + \left(\frac{16}{315} - \frac{1}{3}pq\right)x^6 + \left(\frac{104}{4725} - p\left(\frac{1}{18}q^2 + \frac{7}{90}q\right)\right)x^8 + o(x^8).$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$c_4^{\varphi_{p,q},0} = \frac{8}{45} - p = 0$$

$$c_6^{\varphi_{p,q},0} = \frac{16}{315} - \frac{1}{3}pq = 0$$

dobijamo konstante $p = \frac{8}{45}$ i $q = \frac{6}{7}$ za koje je $\varphi_{p,q}(x) > 0$ u nekoj desnoj okolini tačke 0. Ove vrednosti konstanti se nalaze u nejednakosti (5.26).

5.4 Wilker-Cusa-Huygens nejednakosti

Rezultate u ovom potpoglavlju navodimo prema [27].

U [141] date su i dokazane sledeće teoreme.

Teorema 5.20 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$-\frac{1}{15}x^4 < \cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < -\frac{1}{15}x^4 + \frac{23}{1890}x^6. \quad (5.31)$$

Teorema 5.21 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$-\frac{1}{180}x^4 < \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3} < -\frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{3780}x^6. \quad (5.32)$$

Teorema 5.22 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$3 + \left(\frac{3}{20}x^4 - \frac{3}{140}x^6\right) \frac{1}{\cos x} < 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} < 3 + \frac{3}{20 \cos x} x^4. \quad (5.33)$$

Teorema 5.23 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$2 + \left(\frac{8}{45}x^4 - \frac{4}{105}x^6\right) \frac{1}{\cos x} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \frac{8}{45 \cos x} x^4. \quad (5.34)$$

Teorema 5.24 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} > 2 + \frac{2}{45}x^4. \quad (5.35)$$

Teorema 5.25 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$3 \frac{x}{\sin x} + \cos x > 4 + \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{210}x^6. \quad (5.36)$$

Nejednakosti iz prethodnih teorema su u [27] poboljšane primenom koncepta raslojenosti. Pri tome, dobijeni minimaks aproksimanti su određeni primenom Nike teoreme za one familije za koje je bilo moguće primeniti ovu teoremu.

U narednim sekcijama navodimo dobijene rezultate iz [27] bez dokaza, uz neke dopune (za negativne vrednosti parametra).

5.4.1 Poboljšanje Teoreme 5.20

Na osnovu nejednakosti (5.31), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} -\cos x + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \frac{1}{15}x^4 + px^6, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.37)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.11 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.20.

Teorema 5.26 Neka je

$$A = \frac{4\pi^7 - 7680}{15\pi^9} = 0.0098430\dots \quad i \quad B = \frac{23}{1890} = 0.012169\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(-\frac{1}{15}x^4 + px^6 < -\frac{1}{15}x^4 + Ax^6 < \cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) -\frac{1}{15}x^4 + px^6 < \cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < -\frac{1}{15}x^4 + px^6.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < -\frac{1}{15}x^4 + Bx^6 < -\frac{1}{15}x^4 + px^6\right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.010004\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = -\cos x + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \frac{1}{15}x^4 + 0.010004\dots x^6,$$

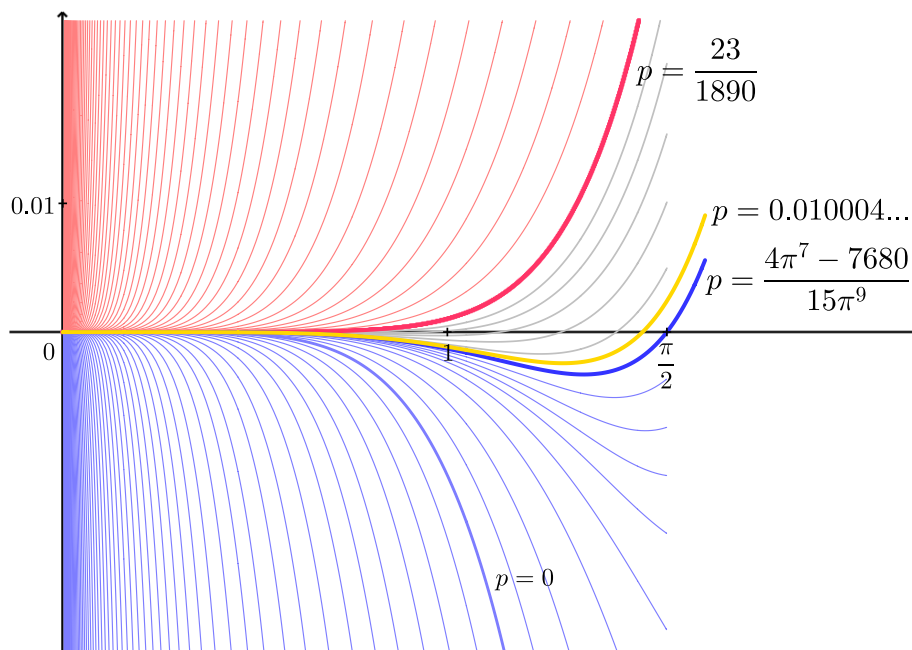
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\cos x - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \approx -\frac{1}{15}x^4 + 0.010004\dots x^6$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.0024209\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.13: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.37)

5.4.2 Poboljšanje Teoreme 5.21

Na osnovu nejednakosti (5.32), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x + 2}{3} - \frac{1}{180}x^4 + px^6, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.38)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.12 *Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.*

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.21.

Teorema 5.27 *Neka je*

$$A = \frac{\pi^5 - 1920\pi + 5760}{45\pi^7} = 0.00025135\dots \quad i \quad B = \frac{1}{3780} = 0.00026455\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(-\frac{1}{180}x^4 + px^6 < -\frac{1}{180}x^4 + Ax^6 < \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3}\right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) -\frac{1}{180}x^4 + px^6 < \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3} < -\frac{1}{180}x^4 + px^6.$$

(iii) *Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3} < -\frac{1}{180}x^4 + Bx^6 < -\frac{1}{180}x^4 + px^6\right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje jednačine*

$$\left|\varphi_p(t^{(p)})\right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.00025234\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = -\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x + 2}{3} - \frac{1}{180}x^4 + 0.00025234\dots x^6,$$

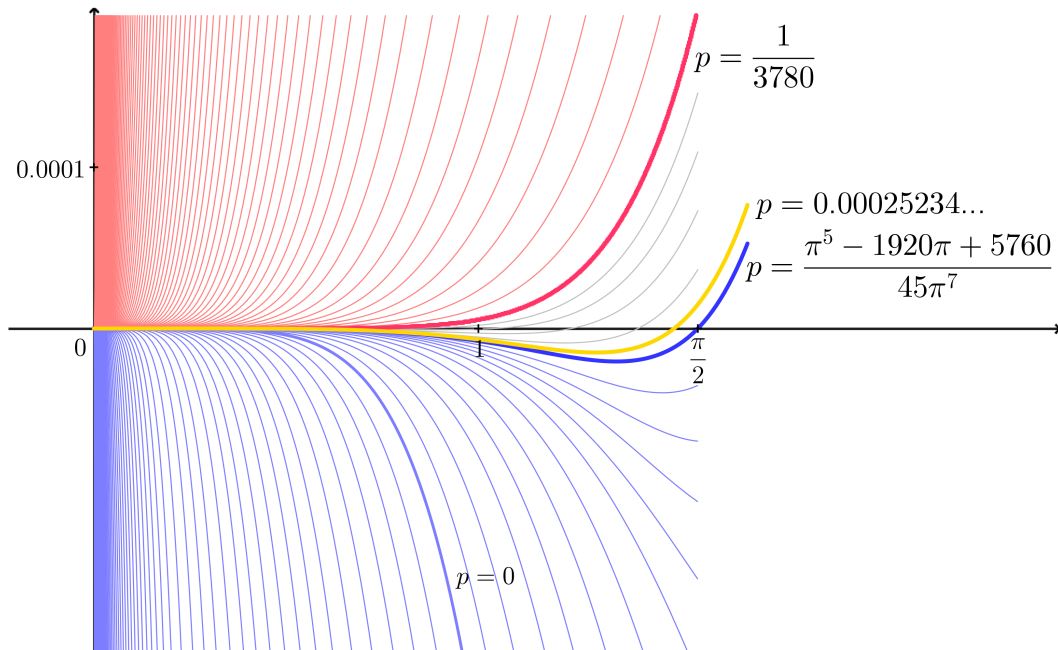
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x + 2}{3} \approx -\frac{1}{180}x^4 + 0.00025234\dots x^6$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left|\varphi_{p_0}(t^{(p_0)})\right| = \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.000014887\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.14: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.38)

5.4.3 Poboljšanje Teoreme 5.22

Na osnovu nejednakosti (5.33), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} - 3 - \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} + p x^6 \frac{1}{\cos x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.39)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.13 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Napomena 5.6 Neka je

$$A = \frac{3\pi^5 - 640}{5\pi^7} = 0.018412\dots$$

Tada važi da je

$$\varphi_p\left(\frac{\pi}{2}-\right) = \begin{cases} +\infty, & p > A, \\ \frac{-3\pi^5 - 240\pi^2 + 320\pi + 2240}{80\pi^2} = -0.052502\dots, & p = A, \\ -\infty, & p < A. \end{cases}$$

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.22.

Teorema 5.28 *Neka je*

$$A = \frac{3\pi^5 - 640}{5\pi^7} = 0.018412\dots \quad i \quad B = \frac{3}{140} = 0.021428\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} < 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - A x^6 \frac{1}{\cos x} < 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - p x^6 \frac{1}{\cos x} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} < 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - p x^6 \frac{1}{\cos x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - p x^6 \frac{1}{\cos x} < 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x}.$$

(iii) *Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - p x^6 \frac{1}{\cos x} < 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - B x^6 \frac{1}{\cos x} < 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je*

$$\varphi_A(x) = 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} - 3 - \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} + \frac{3\pi^5 - 640}{5\pi^7} x^6,$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

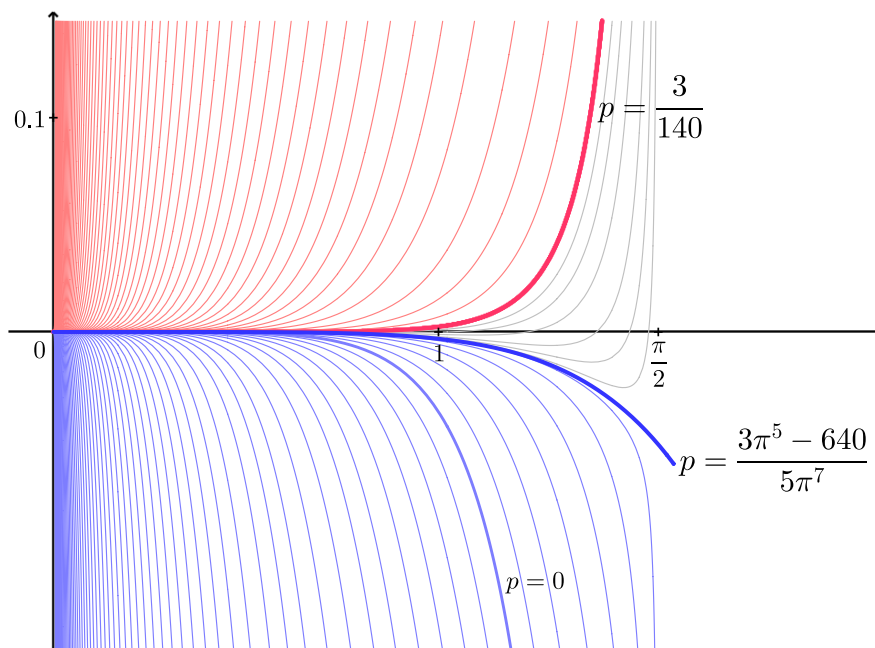
$$2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} \approx 3 + \frac{3}{20} x^4 \frac{1}{\cos x} - \frac{3\pi^5 - 640}{5\pi^7} x^6$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_A\left(\frac{\pi}{2}-\right) \right| = \frac{-3\pi^5 - 240\pi^2 + 320\pi + 2240}{80\pi^2} = -0.052502\dots$$

Napomena 5.7 *Minimaks aproksimant u prethodnoj teoremi određen je na osnovu Napomene 5.6.*

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.15: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.39)

5.4.4 Poboljšanje Teoreme 5.23

Na osnovu nejednakosti (5.34), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 - \frac{8}{45}x^4 \frac{1}{\cos x} + px^6 \frac{1}{\cos x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.40)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.14 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Napomena 5.8 Neka je

$$A = \frac{32\pi^5 - 5760}{45\pi^7} = 0.029670\dots$$

Tada važi da je

$$\varphi_p\left(\frac{\pi}{2}-\right) = \begin{cases} +\infty, & p > A, \\ \frac{-2\pi^5 - 90\pi^2 + 1440}{45\pi^2} = -0.13577\dots, & p = A, \\ -\infty, & p < A. \end{cases}$$

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.23.

Teorema 5.29 *Neka je*

$$A = \frac{32\pi^5 - 5760}{45\pi^7} = 0.029670\dots \quad i \quad B = \frac{4}{105} = 0.038095\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - Ax^6 \frac{1}{\cos x} < 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - px^6 \frac{1}{\cos x} \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - px^6 \frac{1}{\cos x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - px^6 \frac{1}{\cos x} < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x}.$$

(iii) *Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - px^6 \frac{1}{\cos x} < 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - Bx^6 \frac{1}{\cos x} < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) *Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je*

$$\varphi_A(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 - \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} + \frac{32\pi^5 - 5760}{45\pi^7} x^6 \frac{1}{\cos x},$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

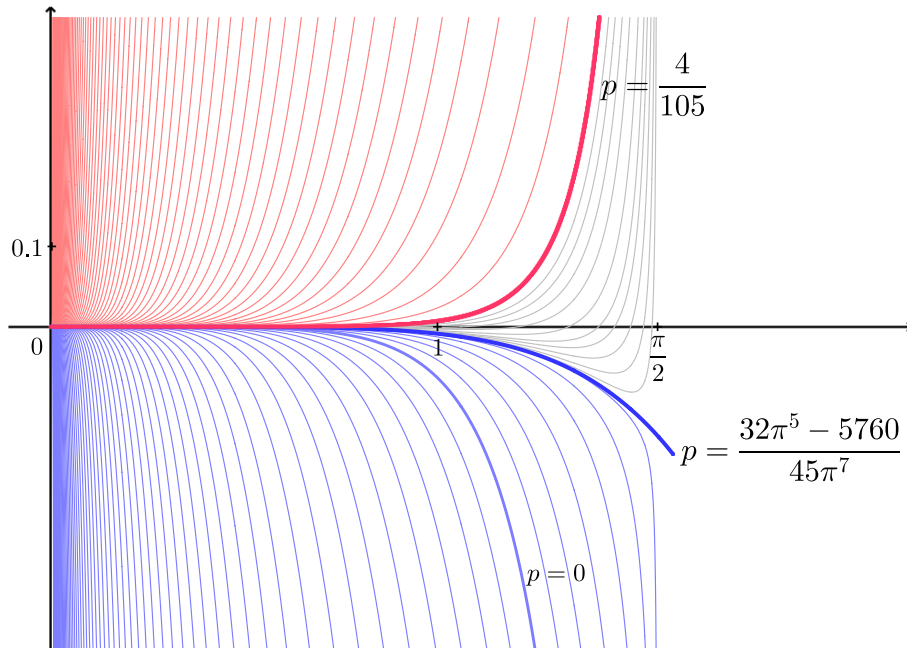
$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} \approx 2 + \frac{8}{45} x^4 \frac{1}{\cos x} - \frac{32\pi^5 - 5760}{45\pi^7} x^6 \frac{1}{\cos x}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_A \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{-2\pi^5 - 90\pi^2 + 1440}{45\pi^2} = -0.13577\dots$$

Napomena 5.9 *Minimaks aproksimant prethodnoj teoremi određen je na osnovu Napomene 5.8.*

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.16: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.40)

5.4.5 Poboljšanje Teoreme 5.24

Na osnovu nejednakosti (5.35), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} - 2 - px^4, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.41)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.15 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.24.

Teorema 5.30 Neka je

$$A = \frac{2}{45} = 0.044444\dots \quad i \quad B = \frac{4\pi^2 - 32}{\pi^4} = 0.076773\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(2 + px^4 < 2 + Ax^4 < \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x}\right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} < 2 + px^4$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) 2 + px^4 < \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x}.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} < 2 + Bx^4 < 2 + px^4 \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}-\right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.072425\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} - 2 - 0.072425\dots x^4,$$

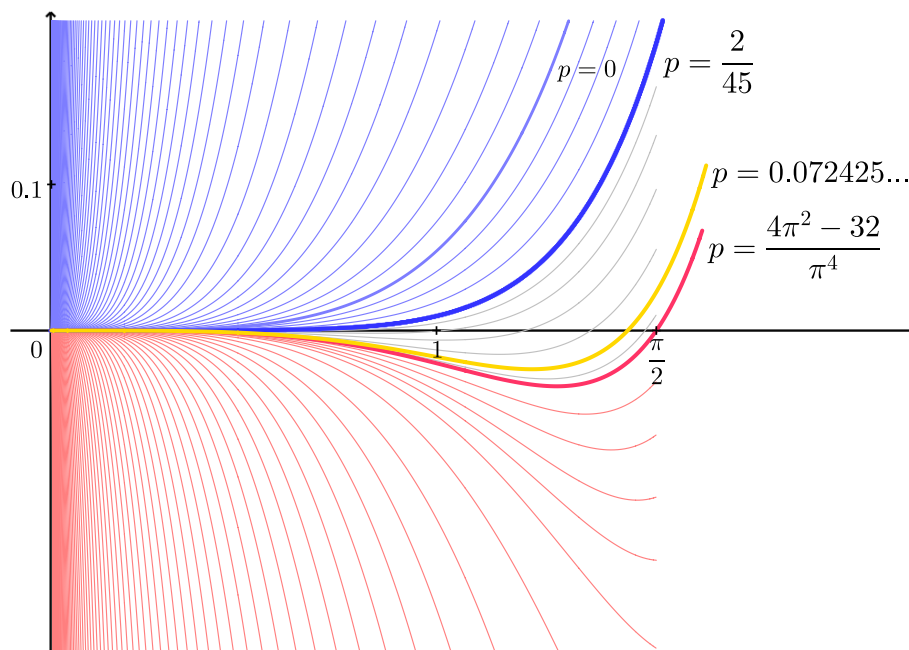
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} \approx 2 + 0.072425\dots x^4$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) \right| = \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}-\right) = 0.026471\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.17: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.41)

5.4.6 Poboljšanje Teoreme 5.25

Na osnovu nejednakosti (5.36), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 3 \frac{x}{\sin x} + \cos x - 4 - \frac{1}{10}x^4 - px^6, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.42)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.16 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.25.

Teorema 5.31 Neka je

$$A = \frac{1}{210} = 0.0047619\dots \quad i \quad B = \frac{480\pi - 2\pi^4 - 1280}{5\pi^6} = 0.0068954\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(4 + \frac{1}{10}x^4 + px^6 < 4 + \frac{1}{10}x^4 + Ax^6 < 3 \frac{x}{\sin x} + \cos x \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) 3 \frac{x}{\sin x} + \cos x < 4 + \frac{1}{10}x^4 + px^6$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) 4 + \frac{1}{10}x^4 + px^6 < 3 \frac{x}{\sin x} + \cos x.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(3 \frac{x}{\sin x} + \cos x < 4 + \frac{1}{10}x^4 + Bx^6 < 4 + \frac{1}{10}x^4 + px^6 \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.0066982\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = 3 \frac{x}{\sin x} + \cos x - 4 - \frac{1}{10}x^4 - 0.0066982\dots x^6,$$

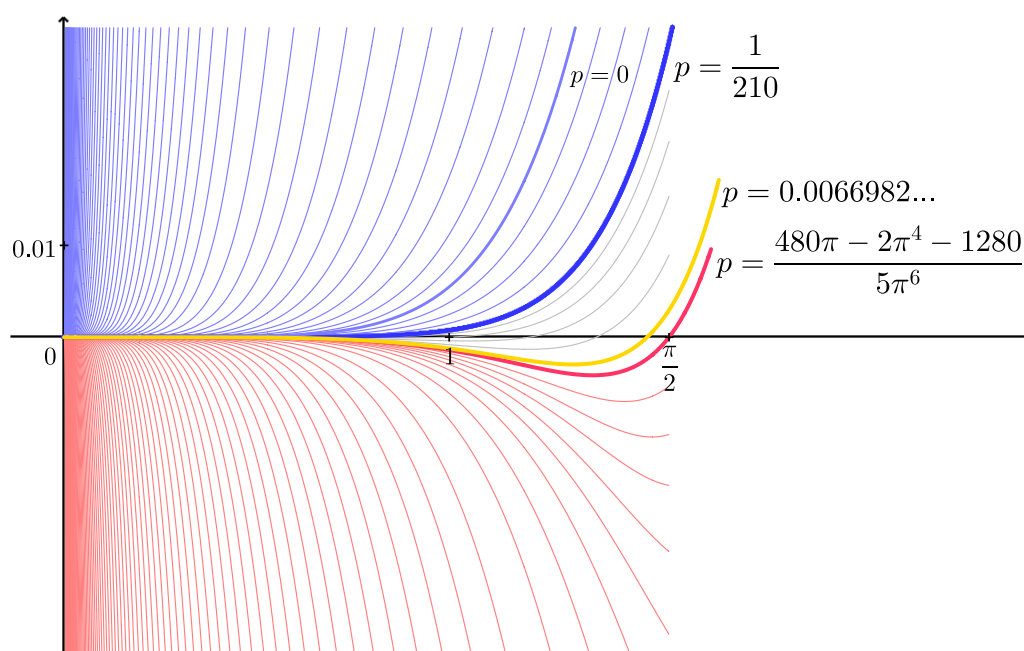
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$3 \frac{x}{\sin x} + \cos x \approx 4 + \frac{1}{10}x^4 + 0.0066982\dots x^6$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.0029637\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.18: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.42)

Napomena 5.10 Teoreme 5.26, 5.27, 5.30 i 5.31 mogu se dokazati i primenom Novog parametarskog metoda.

5.5 Neke eksponencijalno polinomske nejednakosti

Rezultate u ovom potpoglavlju dajemo prema [121], uz izvesna poboljšanja.

U [202] data je i dokazana nejednakost iz sledeće teoreme.

Teorema 5.32 Za $x \in (0, 1)$ važi da je

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} < \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (5.43)$$

i konstanta $\frac{1}{12}$ je najbolja moguća.

Prethodna nejednakost može se svesti na MEP nejednakost i dokazati primenom razvijenog dokazivača.

U [52] data je i dokazana nejednakost iz sledeće teoreme.

Teorema 5.33 Za $x \in [0, 1]$ i $a \in \mathbb{R}$ važi da je

$$\text{sign}(a) e^{ax} \leq \text{sign}(a) (ax(1-x) + x^2(e^a - 1) + 1), \quad (5.44)$$

gde je $\text{sign}(a) = -1$ ako je $a < 0$, $\text{sign}(a) = 0$ ako je $a = 0$ i $\text{sign}(a) = 1$ ako je $a > 0$.

U [52] su date i primene nejednakosti (5.44) u određivanju granica za funkciju verovatnoće.

U narednim sekcijama dajemo neka poboljšanja nejednakosti iz prethodnih teorema primenom koncepta raslojenosti.

5.5.1 Poboljšanje Teoreme 5.32

Na osnovu nejednakosti (5.43), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} - p, & x \in (0, 1], \\ \frac{1}{12} - p, & x = 0, \end{cases} \quad (5.45)$$

koja je definisana za $x \in [0, 1]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.17 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $[0, 1]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Prvi izvod $\varphi_p(x)$ po x je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^3(e^{-x} - 1)^3}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

gde je

$$f(x) = -x^3 e^{-x} - x^3 e^{-2x} + 2 - 6e^{-x} + 6e^{-2x} - 2e^{-3x}.$$

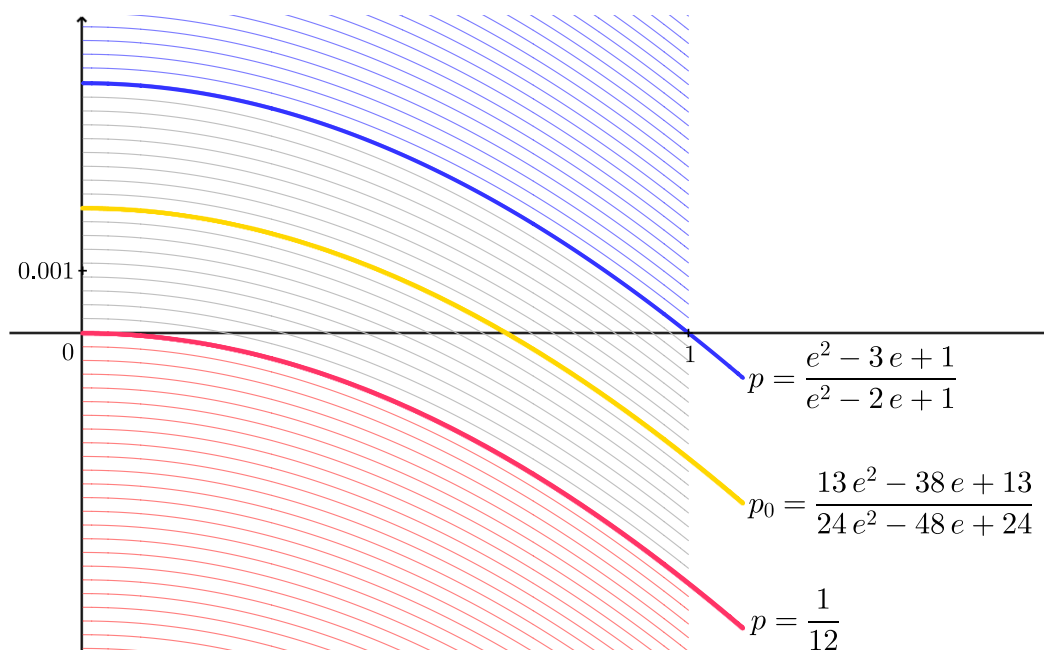
Primitimo da za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ ne postoji funkcija $g_1(x)$ za koju važi da je $g_1(x) = p \iff \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} = 0$ jer se parametar p ne javlja u $\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x}$.

U Sekciji 4.4.2.4 dokazano je, primenom razvijenog dokazivača, da je $f(x) > 0$ na intervalu $(0, 1)$. Dakle,

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} < 0$$

na intervalu $(0, 1)$, odnosno sve funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ su monotono opadajuće na intervalu $(0, 1)$.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, 1]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.19: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.45)

Jednačina

$$\varphi_p(0) = \frac{1}{12} - p = 0$$

ima jedinstveno rešenje po parametru $p \in \mathbb{R}$ određeno sa

$$p = \frac{1}{12}.$$

Kako je $\varphi_{1/12}(0) = 0$ i funkcija $\varphi_{1/12}(x)$ opadajuća, važi da je $\varphi_{1/12}(x) < 0$ na intervalu $(0, 1)$.

Jednačina

$$\varphi_p(1) = \frac{e^2 - 3e + 1}{e^2 - 2e + 1} - p = 0$$

ima jedinstveno rešenje po parametru $p \in \mathbb{R}$ određeno sa

$$p = p_1 = \frac{e^2 - 3e + 1}{e^2 - 2e + 1}.$$

Kako je $\varphi_{p_1}(1) = 0$ i funkcija $\varphi_{p_1}(x)$ opadajuća, važi da je $\varphi_{p_1}(x) > 0$ na intervalu $(0, 1)$.

Minimaks aproksimant familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, 1)$ dobija se rešavanjem jednačine

$$\varphi_p(0) = -\varphi_p(1)$$

po parametru $p \in \mathbb{R}$ s obzirom na to da su sve funkcije iz familije $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ opadajuće na intervalu $(0, 1)$. Prethodna jednačina ima jedinstveno rešenje

$$p = \frac{13e^2 - 38e + 13}{24e^2 - 48e + 24}.$$

Na osnovu prethodne analize i raslojenosti, važi sledeće poboljšanje Teoreme 5.32.

Teorema 5.34 *Neka je*

$$A = \frac{e^2 - 3e + 1}{e^2 - 2e + 1} = 0.079326\dots \quad i \quad B = \frac{1}{12} = 0.083333\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2} - A < \frac{1}{x^2} - p \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2} - p$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{1}{x^2} - p < \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{1}{x^2} - p < \frac{1}{x^2} - B < \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\varphi_p(0) = |\varphi_p(1)|$$

po parametru $p \in (A, B)$, određeno sa

$$p_0 = \frac{13e^2 - 38e + 13}{24e^2 - 48e + 24} = 0.081329\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, 1)$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - \frac{13e^2 - 38e + 13}{24e^2 - 48e + 24},$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \approx \frac{1}{x^2} - \frac{13e^2 - 38e + 13}{24e^2 - 48e + 24}$$

na intervalu $(0, 1)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, 1)} |\varphi_p(x)| = \varphi_{p_0}(0) = |\varphi_{p_0}(1)| = \frac{-11e^2 + 34e - 11}{24e^2 - 48e + 24} = 0.0020034\dots$$

5.5.2 Poboljšanje Teoreme 5.33

Nejednakost (5.44) se razmatra u sledećim slučajevima:

(i) Za $a \in (-\infty, 0)$ u obliku

$$(\forall x \in [0, 1]) (ax(1-x) + x^2(e^a - 1) + 1 \leq e^{ax}). \quad (5.46)$$

(ii) Za $a \in (0, +\infty)$ u obliku

$$(\forall x \in [0, 1]) (e^{ax} \leq ax(1-x) + x^2(e^a - 1) + 1). \quad (5.47)$$

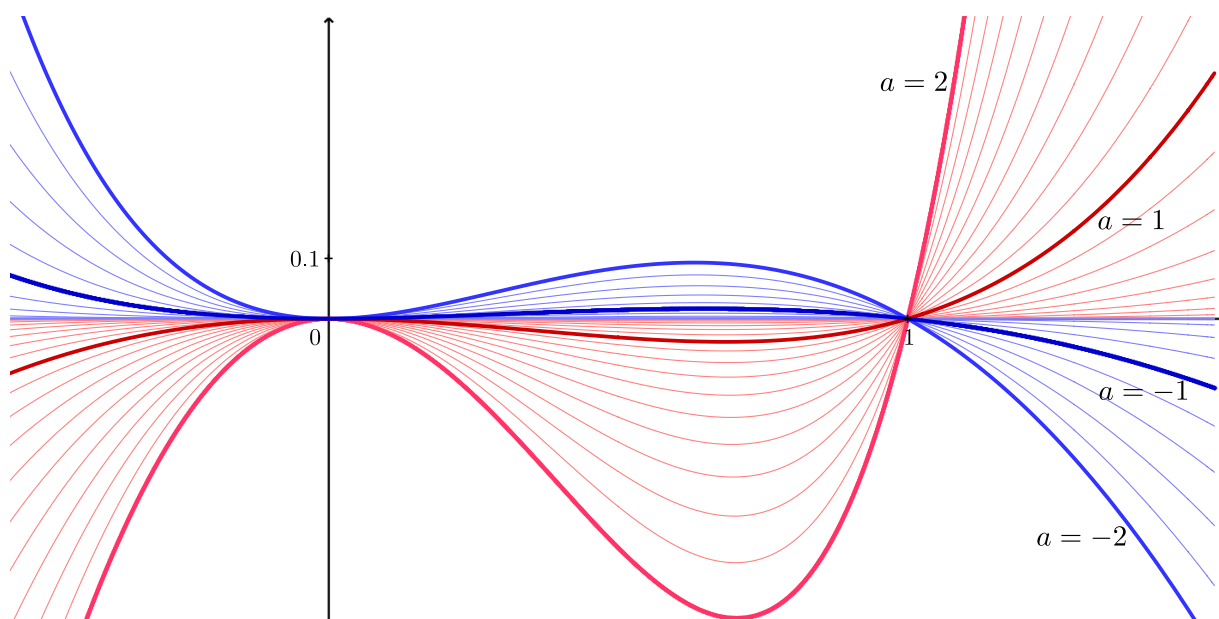
(iii) Za $a = 0$ nejednakost se svodi na $0 \leq 0$, što je tačno.

Na osnovu nejednakosti (5.46) i (5.47), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_a(x)\}_{a \in \mathbb{A}}$, gde je

$$\varphi_a(x) = e^{ax} - ax(1-x) - x^2(e^a - 1) - 1, \quad (5.48)$$

koja je definisana za $x \in \mathbb{R}$ i za vrednosti parametra $a \in \mathbb{A} = \mathbb{R}$. Ova familija je kompresovana i u tački 0 i u tački 1.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_a(x)\}_{a \in \mathbb{R}}$ za neke vrednosti parametra a .



Slika 5.20: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.48)

Lema 5.18 Familija funkcija $\{\varphi_a(x)\}_{a \in \mathbb{R}}$ jeste

(i) opadajuće raslojena na $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ po parametru $a \in \mathbb{R}$,

(ii) rastuće raslojena na intervalu $(1, +\infty)$ po parametru $a \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Razmotrimo deo (i) za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ i $a \in \mathbb{R}^-$. Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} = xe^{ax} - x(1-x) - x^2e^a$$

i da je

$$\frac{\partial^2 \varphi_a(x)}{\partial a^2} = x^2(e^{ax} - e^a).$$

Primetimo da je

$$\frac{\partial^2 \varphi_a(x)}{\partial a^2} > 0$$

za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ i $a \in \mathbb{R}^-$. Stoga je familija funkcija $\left\{ \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} \right\}_{a \in \mathbb{R}^-}$ rastuće raslojena na $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ po parametru $a \in \mathbb{R}^-$. Član te familije je $xe^{ax} - x(1-x) - x^2e^a$ i pri tome je $\lim_{a \rightarrow 0^-} (xe^{ax} - x(1-x) - x^2e^a) = 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Odavde, s obzirom na to da je familija $\left\{ \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} \right\}_{a \in \mathbb{R}^-}$ rastuće raslojena na $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ za negativne vrednosti parametra a , zaključujemo da je $\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} < \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} = 0$. Dakle, važi da je

$$\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial a} < 0 \quad (5.49)$$

za $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ i $a \in \mathbb{R}^-$.

Na osnovu (5.49), polazna familija $\{\varphi_a(x)\}_{a \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ po parametru $a \in \mathbb{R}^-$.

Ostali slučajevi se analogno dokazuju. ■

Na osnovu prethodne leme i s obzirom na to da je $\varphi_a(x) = 0$ za $a = 0$, slede nejednakosti (5.46) i (5.47), tj. nejednakost (5.44). Takođe, dobija se i sledeće poboljšanje Teoreme 5.33.

Teorema 5.35 *Neka $a \in \mathbb{R}$.*

(i) *Za $x \in (-\infty, 1]$ važi da je*

$$\text{sign}(a) e^{ax} \leq \text{sign}(a) (ax(1-x) + x^2(e^a - 1) + 1).$$

(ii) *Za $x \in (1, +\infty)$ važi da je*

$$\text{sign}(a) (ax(1-x) + x^2(e^a - 1) + 1) \leq \text{sign}(a) e^{ax}.$$

5.6 Neki tipovi Mitrinović-Adamović nejednakosti

Teorema 5.36 (Mitrinović-Adamović nejednakost [139]) *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je*

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 > \cos x.$$

Proširenja i poboljšanja Mitrinović-Adamović nejednakosti su razmatrana u mnogim radovima [23, 48, 53, 56, 58, 89, 95, 151, 168, 175, 184, 191, 195, 198, 201, 204, 205, 212, 219, 220, 223, 228, 230]. U [230] su data sledeća dva tvrđenja.

Teorema 5.37 *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je*

$$0.06593\dots x^3 \sin x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x < \frac{1}{15} x^3 \sin x \quad (5.50)$$

i konstante $0.06593\dots$ i $\frac{1}{15}$ su najbolje moguće.

Teorema 5.38 *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je*

$$\frac{1}{15} x^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{23/21} < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x < \left(\frac{2}{\pi} \right)^{124/21} x^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{23/21} \quad (5.51)$$

i konstante $\frac{1}{15}$ i $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{124/21}$ su najbolje moguće.

Napomena 5.11 Na osnovu nejednakosti (5.51), može se uvesti dvoparameterska familija funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p,q \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x - px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^q, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p, q \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Tejlorov razvoj $\varphi_{p,q}(x)$ u okolini tačke 0 je

$$\varphi_{p,q}(x) = \left(\frac{1}{15} - p\right)x^4 + \left(\frac{1}{6}pq - \frac{23}{1890}\right)x^6 + \left(\frac{41}{37800} - p\left(\frac{1}{72}q^2 - \frac{1}{180}q\right)\right)x^8 + o(x^8).$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_4^{\varphi_{p,q},0} &= \frac{1}{15} - p = 0 \\ \mathfrak{c}_6^{\varphi_{p,q},0} &= \frac{1}{6}pq - \frac{23}{1890} = 0 \end{aligned}$$

dobijamo konstante $p = \frac{1}{15}$ i $q = \frac{23}{21}$ za koje je $\varphi_{p,q}(x) > 0$ u nekoj desnoj okolini tačke 0. Ove vrednosti konstanti se nalaze u nejednakosti (5.51).

Konstanta $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{124/21}$, koja se takođe javlja u nejednakosti (5.51), može se dobiti na sličan način (primenom Teoreme 2.2) na osnovu Tejlorovog razvoja $\varphi_{p,23/21}(x)$ u okolini tačke $\frac{\pi}{2}$.

Tejlorov razvoj $\varphi_{p,q}(x)$ u okolini tačke $\frac{\pi}{2}$ je

$$\begin{aligned} \varphi_{p,q}(x) &= \left(\frac{8}{\pi^3} - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{2}{\pi}\right)^q p\right) + \left(1 - \frac{48}{\pi^4} + \frac{\pi^3}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^q p \left(\frac{1}{4}q - 1\right)\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{192 - 12\pi^2}{\pi^5} + \pi^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^q p \left(\frac{1}{32}q(\pi^2 - 4q - 4) + q - \frac{3}{2}\right)\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_0^{\varphi_{p,q},\frac{\pi}{2}} &= \frac{8}{\pi^3} - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{2}{\pi}\right)^q p = 0 \\ \mathfrak{c}_1^{\varphi_{p,q},\frac{\pi}{2}} &= 1 - \frac{48}{\pi^4} + \frac{\pi^3}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^q p \left(\frac{1}{4}q - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

dobijamo konstante $p = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi^4}{16}}$ i $q = -\frac{\pi^4}{16} + 7$ za koje je $\varphi_{p,q}(x) > 0$ u nekoj levoj okolini tačke $\frac{\pi}{2}$. Primenom Teoreme 2.2, na osnovu Tejlorovog razvoja $\varphi_{p,-\pi^4/16+7}(x)$ u okolini tačke 0, dobijamo konstantu $p = \frac{1}{15}$. *Nejednakost*

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi^4}{16}} x^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{\pi^4}{16}+7} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x < \frac{1}{15}x^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{\pi^4}{16}+7}$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ dokazana je i uopštena u [136] primenom Parametarskog metoda.

U [89] je dato sledeće proširenje.

Teorema 5.39 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^3 - 16}{\pi^4} x \sin x \right) \sin^2 x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 < 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{120} x \sin x \right) \sin^2 x \quad (5.52)$$

i konstante $\frac{\pi^3 - 16}{\pi^4}$ i $\frac{7}{120}$ su najbolje moguće.

Nejednakosti (5.50) i (5.51) su u [124] poboljšane primenom Parametarskog metoda, a nejednakost (5.52) je u [135] poboljšana primenom Novog parametarskog metoda. U narednim sekcijama navodimo dobijene rezultate iz [124] i [135] bez dokaza.

5.6.1 Poboljšanje Teoreme 5.37

Na osnovu nejednakosti (5.50), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x - px^3 \sin x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.53)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.19 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.37.

Teorema 5.40 Neka je

$$A = 0.065931\dots, \quad B = \frac{64}{\pi^6} = 0.066570\dots \quad i \quad C = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6},$$

gde je vrednost $0.06593\dots$ jedinstveni lokalni minimum funkcije $g(x) = \frac{\sin^3 x - x^3 \cos x}{x^6 \sin x}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(px^3 \sin x < Ax^3 \sin x \leq \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima dva rešenja $x_0^{(p)}$ i $x_1^{(p)}$ ($x_0^{(p)} < x_1^{(p)}$) i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \cup \left(x_1^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) px^3 \sin x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x < px^3 \sin x.$$

(iii) Ako $p \in [B, C)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) px^3 \sin x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x$$

i

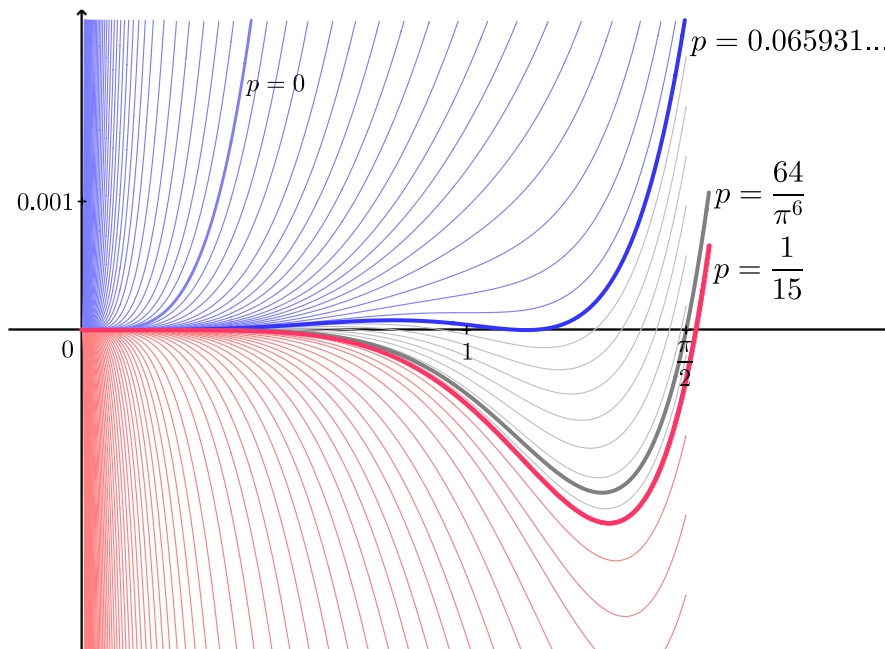
$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x < px^3 \sin x.$$

(iv) Ako $p \in (C, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x < Cx^3 \sin x < px^3 \sin x \right)$$

i konstanta C je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.21: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.53)

5.6.2 Poboljšanje Teoreme 5.38

Na osnovu nejednakosti (5.51), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 - \cos x - px^4 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{23/21}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.54)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.20 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.38.

Teorema 5.41 *Neka je*

$$A = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6} \quad i \quad B = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{124/21} = 0.069495\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} < Ax^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x < px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} \right)$$

i

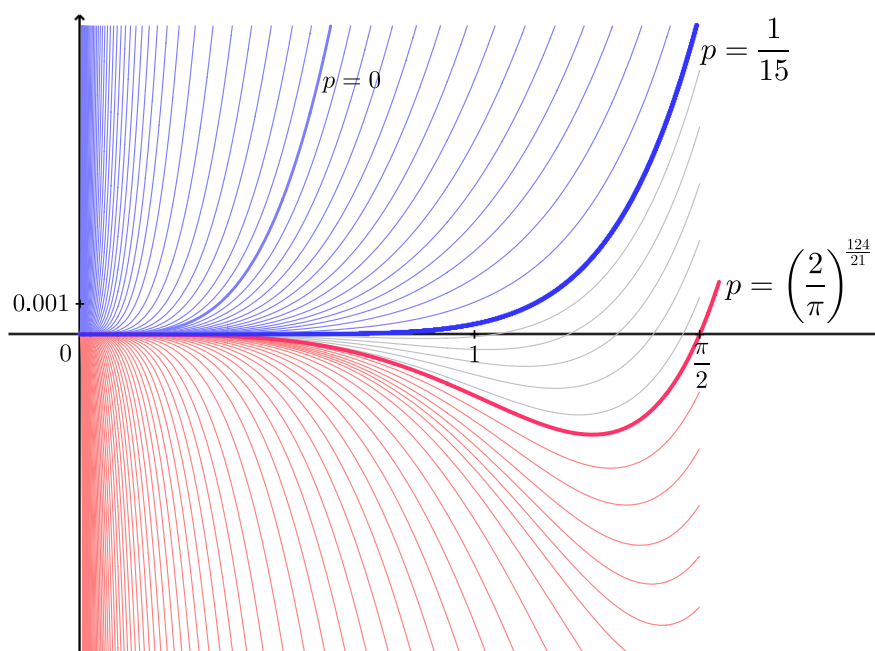
$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - \cos x < Bx^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} < px^4 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{23/21} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.22: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.54)

5.6.3 Poboljšanje Teoreme 5.39

Na osnovu nejednakosti (5.52), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - 1 + \left(\frac{1}{2} + px \sin x\right) \sin^2 x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.55)$$

koja je definisana za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.21 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.39.

Teorema 5.42 Neka je

$$A = \frac{7}{120} = 0.058\bar{3} \quad i \quad B = \frac{\pi^3 - 16}{\pi^4} = 0.15405\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < 1 - \left(\frac{1}{2} + Ax \sin x\right) \sin^2 x < 1 - \left(\frac{1}{2} + px \sin x\right) \sin^2 x\right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right)\right) 1 - \left(\frac{1}{2} + px \sin x\right) \sin^2 x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < 1 - \left(\frac{1}{2} + px \sin x\right) \sin^2 x.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} + px \sin x\right) \sin^2 x < 1 - \left(\frac{1}{2} + Bx \sin x\right) \sin^2 x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni maksimum, na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ u tački $\left(t^{(p)}, \varphi_p\left(t^{(p)}\right)\right)$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\varphi_p\left(t^{(p)}\right) = \left|\varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.13306\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 - 1 + \left(\frac{1}{2} + 0.13306\dots x \sin x\right) \sin^2 x,$$

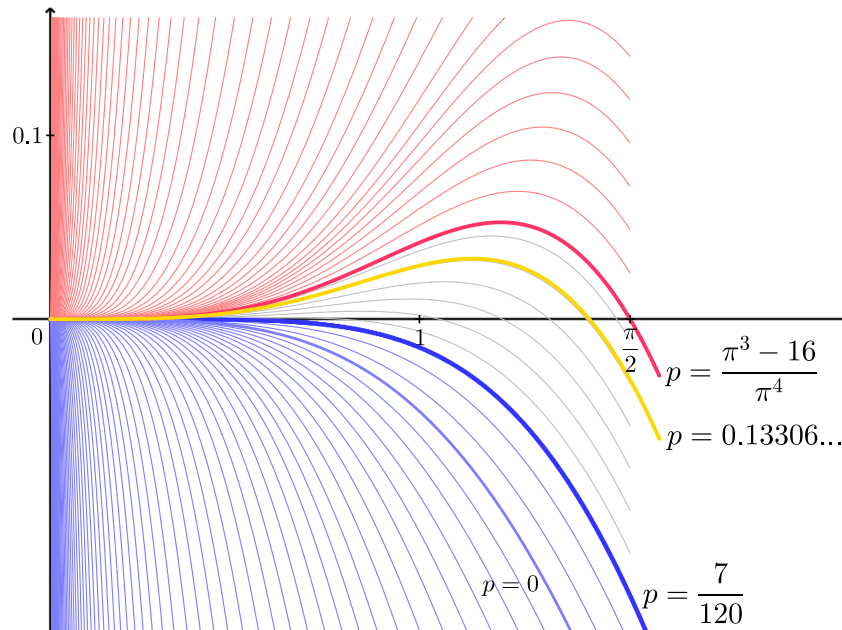
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \approx 1 - \left(\frac{1}{2} + 0.13306\dots x \sin x\right) \sin^2 x$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_p(x)| = \varphi_{p_0}(t^{(p_0)}) = \left| \varphi_{p_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = 0.032963\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.23: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.55)

5.7 D'Aurizio-Sándor nejednakosti

Shafer-Fink nejednakost³ za funkciju $\arctan x$ je data sa

$$\frac{3x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}} < \arctan x < \frac{\pi x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}}$$

za $x \in \mathbb{R}^+$ [63, 180]. Dokazujući jedno poboljšanje prethodne nejednakosti, J. D'Aurizio je dokazao i nejednakost iz sledeće teoreme [63, 174].

Teorema 5.43 Za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je

$$\frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \geq 1 - \frac{4}{\pi^2} x^2.$$

³ Postoji i analogna Shafer-Fink nejednakost za funkciju $\arcsin x$ [71, 77, 108, 138]. Shafer-Fink nejednakosti i tipovi ove nejednakosti imaju primene u inženjerstvu [2, 3, 170].

J. Sándor je zatim u [174] dao sledeće gornje ograničenje funkcije $\frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}}$.

Teorema 5.44 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\frac{3}{8} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}}}{x^2} < \frac{4}{\pi^2}. \quad (5.56)$$

U istom radu J. Sándor je takođe dao i sledeće analogno tvrđenje sa sinusnim funkcijama.

Teorema 5.45 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\frac{4}{\pi^2} (2 - \sqrt{2}) < \frac{2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}}}{x^2} < \frac{1}{4}. \quad (5.57)$$

Nejednakosti iz prethodnih teorema su u [128] poboljšane primenom koncepta raslojenosti. Pri tome, dobijeni minimaks aproksimanti su određeni primenom Nike teoreme.

U sledeće dve sekcije dopunjeni su rezultati iz [128] (za negativne vrednosti parametra). Ti rezultati se dobijaju upotrebom Parametarskog metoda i Novog parametarskog metoda.

U Sekciji 5.7.3, prema [125], dajemo poboljšanje jednog tipa D'Aurizio-Sándor nejednakosti iz [83, 176].

5.7.1 Poboljšanje Teoreme 5.44

Nejednakost (5.56) je ekvivalentna sa

$$1 - \frac{4}{\pi^2}x^2 < \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - \frac{3}{8}x^2$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu prethodne nejednakosti, uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - px^2, \quad (5.58)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.22 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.44.

Teorema 5.46 Neka je

$$A = \frac{3}{8} = 0.375 \quad i \quad B = \frac{4}{\pi^2} = 0.40528\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - Ax^2 < 1 - px^2 \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) 1 - px^2 < \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - px^2.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(1 - px^2 < 1 - Bx^2 < \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ u tački $\left(t^{(p)}, \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right)$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.39916\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - 0.39916\dots x^2,$$

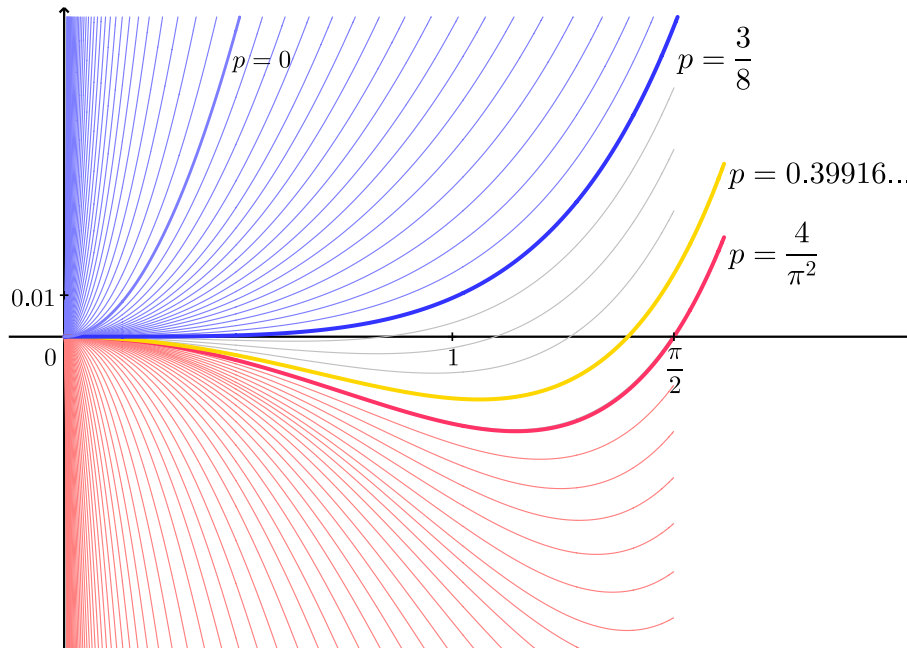
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \approx 1 - 0.39916\dots x^2$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.015109\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.24: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.58)

5.7.2 Poboljšanje Teoreme 5.45

Nejednakost (5.57) je ekvivalentna sa

$$2 - \frac{1}{4}x^2 < \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - \frac{4(2 - \sqrt{2})}{\pi^2}x^2$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu prethodne nejednakosti, uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + px^2, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.59)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.23 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.45.

Teorema 5.47 Neka je

$$A = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{\pi^2} = 0.23741\dots \quad i \quad B = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - Ax^2 < 2 - px^2 \right)$$

i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (A, B)$, jednačina $\varphi_p(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - px^2$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) 2 - px^2 < \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

(iii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(2 - px^2 < 2 - Bx^2 < \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_p(x)$, za $p \in (A, B)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ u tački $\left(t^{(p)}, \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right)$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p \left(t^{(p)} \right) \right| = \varphi_p \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

po parametru $p \in (A, B)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.23955\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ je

$$\varphi_{p_0}(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + 0.23955\dots x^2,$$

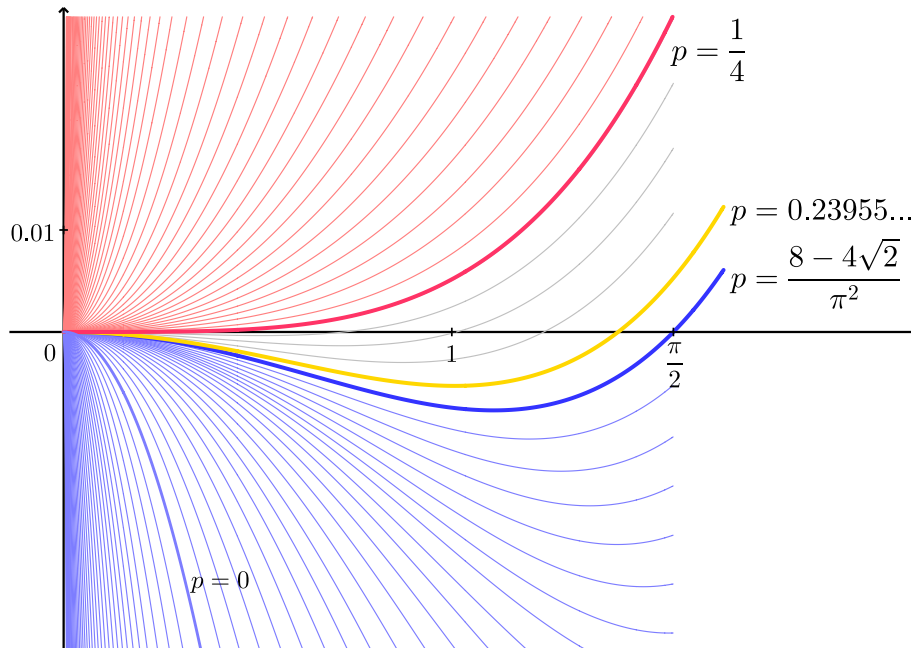
kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \approx 2 - 0.23955\dots x^2$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)} |\varphi_p(x)| = \left| \varphi_{p_0} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = \varphi_{p_0} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.0052842\dots$$

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.25: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.59)

5.7.3 Poboljšanje jednog tipa D'Aurizio-Sándor nejednakosti

J. Sándor je u [176] dao sledeće uopštenje nejednakosti (5.56) uvođenjem parametra koji je prirodan broj.

Teorema 5.48 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i bilo koji pozitivan prirodan broj $n \geq 3$ važi da je

$$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{n}}}{x^2} < \frac{n^2 - 1}{2n^2}. \quad (5.60)$$

U [83] autori su dali dodatno uopštenje D'Aurizio-Sándor nejednakosti, koje navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.49 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $p = 3, 4, 5, \dots$, važi da je

$$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} < \frac{p^2 - 1}{2p^2} \quad (5.61)$$

i

$$\frac{4}{\pi^2} \left(p - \csc \left(\frac{\pi}{2p} \right) \right) < \frac{p - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{p}}}{x^2} < \frac{p^2 - 1}{6p}. \quad (5.62)$$

Dodatno, za $p = 2$ nejednakost (5.62) je tačna, dok nejednakost (5.61) važi sa suprotnim smerom nejednakosti.

Nejednakost (5.60), tj. (5.61), uopštena je u [125] primenom Strategije za određivanje najboljih konstanti u nejednakostima. U narednim podsekcijama navodimo dobijene rezultate iz [125].

5.7.3.1 Uopštenje leve strane nejednakosti (5.61)

Na osnovu leve strane nejednakosti (5.61), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathcal{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} - \frac{4}{\pi^2}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2} - \frac{4}{\pi^2}, & x = 0, \end{cases} \quad (5.63)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathcal{P} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Lema 5.24 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = (1, +\infty)$.

U sledećoj teoremi dajemo uopštenje leve strane nejednakosti (5.61).

Teorema 5.50 Neka je

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - 8}} = 2.29760\dots \quad i \quad B = \frac{\pi}{2 \arccos \frac{\pi}{4}} = 2.35340\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (1, A)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{A}}}{x^2} < \frac{4}{\pi^2} \right)$$

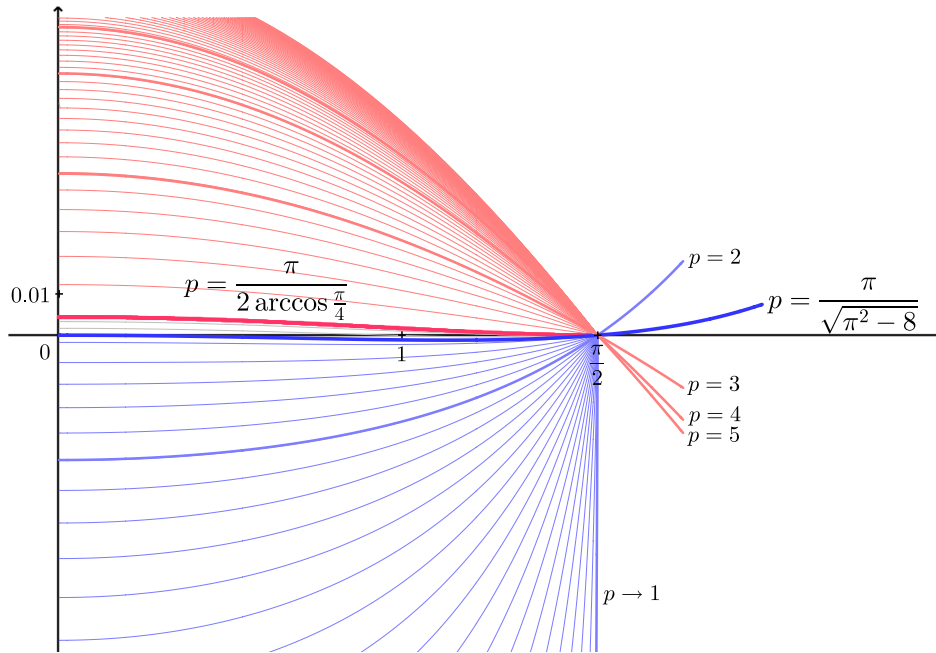
i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{4}{\pi^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{B}}}{x^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in (1, +\infty)}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.26: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.63)

5.7.3.2 Uopštenje desne strane nejednakosti (5.61)

Na osnovu desne strane nejednakosti (5.61), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathcal{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}} - \frac{p^2 - 1}{2p^2}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (5.64)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathcal{P} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Lema 5.25 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = [\frac{\sqrt{15}}{3}, +\infty)$.

Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in (1, +\infty)}$ nije raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{P} = (1, \frac{\sqrt{15}}{3})$ jer važi sledeće tvrđenje.

Lema 5.26 Za familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in (1, +\infty)}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i $p \in (1, \frac{\sqrt{15}}{3})$, važi da je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} > 0$$

u nekoj desnoj okolini tačke 0 i da je

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} < 0$$

u nekoj levoj okolini tačke $\frac{\pi}{2}$.

U sledećoj teoremi dajemo uopštenje desne strane nejednakosti (5.61).

Teorema 5.51 *Neka je*

$$C = \frac{\sqrt{15}}{3} = 1.29099\dots, \quad A = \sqrt{5} = 2.23606\dots \quad i \quad B = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - 8}} = 2.29760\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in [C, A)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(0 < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{A}}}{x^2} - \frac{A^2 - 1}{2A^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} - \frac{p^2 - 1}{2p^2} \right)$$

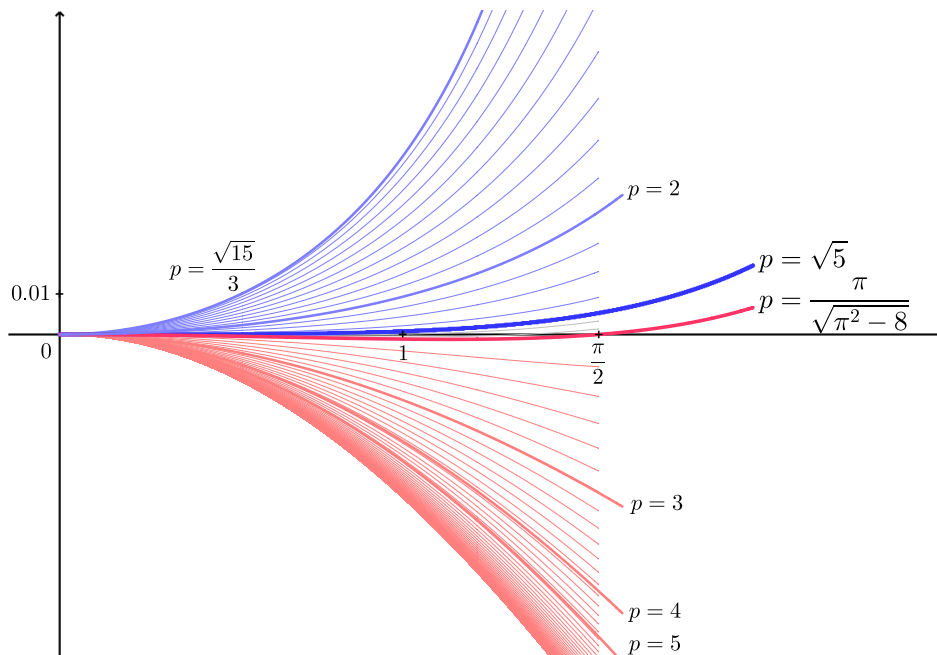
i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (B, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{p}}}{x^2} - \frac{p^2 - 1}{2p^2} < \frac{1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{B}}}{x^2} - \frac{B^2 - 1}{2B^2} < 0 \right)$$

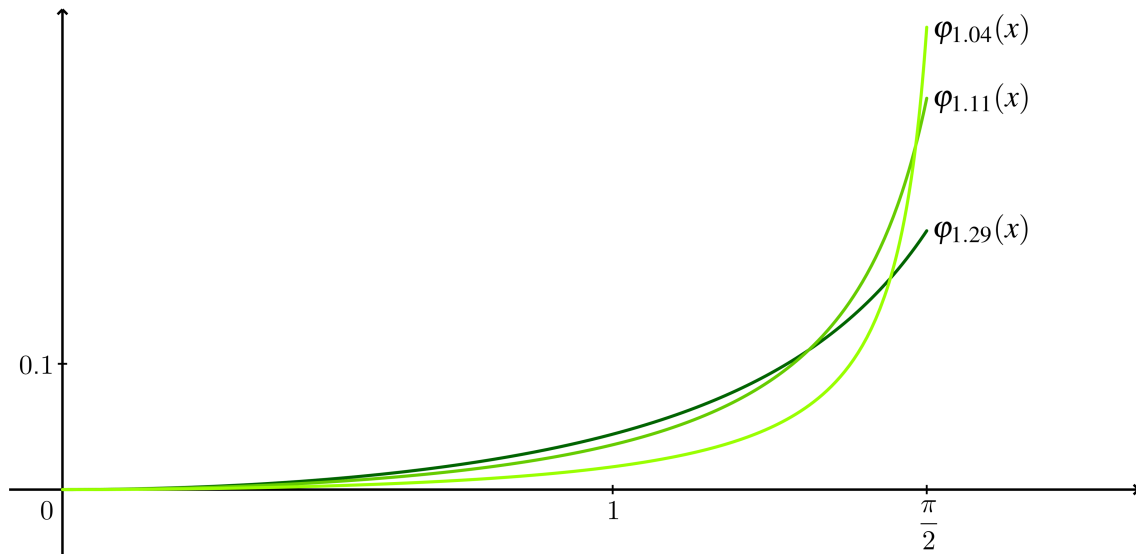
i konstanta B je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in [\sqrt{15}/3, +\infty)}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .

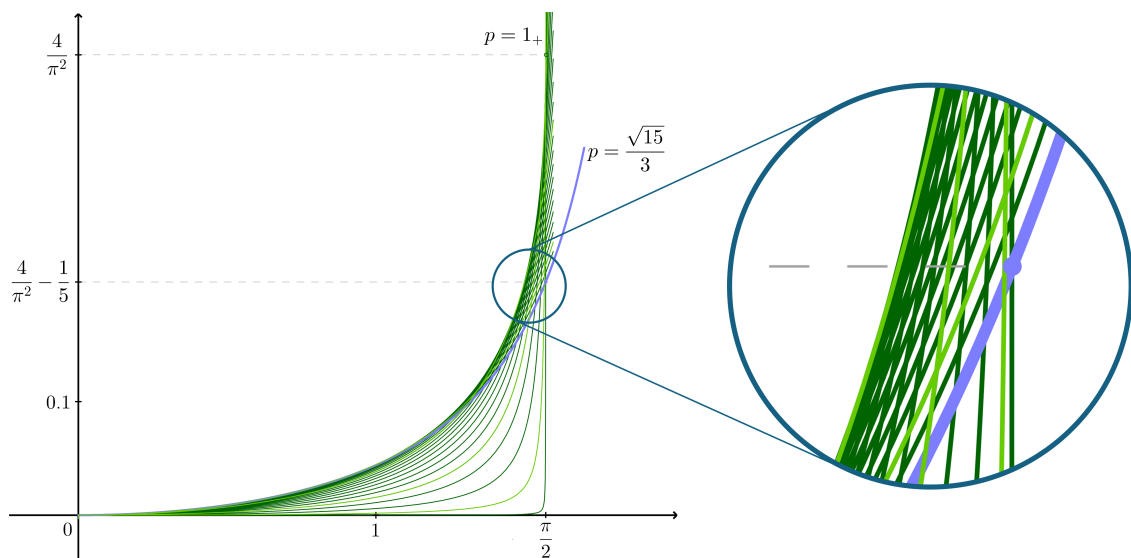


Slika 5.27: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.64)

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in (1, +\infty)}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p za koje ova familija nije raslojena.



(a)



(b)

Slika 5.28: (a) Funkcije $\varphi_{1.04}(x)$, $\varphi_{1.11}(x)$ i $\varphi_{1.29}(x)$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$
 (b) Neraslojen deo familije funkcija koja je definisana sa (5.64)

5.8 Neka ograničenja sinc funkcije preko kosinusnih funkcija

Rezultate u ovom potpoglavlju dajemo prema [126].

Funkcija

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

ima primene u matematici, prirodnim naukama i inženjerstvu. Stoga su određivanje gornjih i donjih ograničenja i aproksimacija ove funkcije predmet mnogih radova u teoriji analitičkih nejednakosti.

Osnovna ograničenja funkcije sinc data su sa Jordan-ovom nejednakošću, koju navodimo u Potpoglavlju 5.9. Wilker-ove nejednakosti uvode dva donja ograničenja funkcije $\text{sinc}^2 x$, dok Mitrinović-Adamović nejednakost uvodi jedno donje ograničenje funkcije $\text{sinc}^3 x$.

U [85] su data sledeća ograničenja funkcije $\text{sinc} x$ preko kosinusne funkcije.

Teorema 5.52 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi da je

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{5}x\right) &\geq \cos \frac{x}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) \right) \\ &\geq \frac{\sin x}{x} \\ &\geq \cos \frac{x}{2} \left(\frac{1}{6} \cos \frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \right) \geq \frac{11}{27} + \frac{16}{27} \cos\left(\frac{3}{4}x\right). \end{aligned}$$

Napomenimo da su u istom radu autori takođe dali i analogno tvrđenje za hiperboličke funkcije.

Na osnovu Teoreme 5.52, u [126] su razmatrane sledeće nejednakosti:

$$\cos \frac{x}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) \right) \geq \text{sinc} x \quad (5.65)$$

$$\text{sinc} x \geq \cos \frac{x}{2} \left(\frac{1}{6} \cos \frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \right) \quad (5.66)$$

$$\text{sinc} x \geq \frac{11}{27} + \frac{16}{27} \cos\left(\frac{3}{4}x\right), \quad (5.67)$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Prethodne nejednakosti su u [126] uopštene i poboljšanje primenom Strategije za određivanje najboljih konstanti u nejednakostima. Dobijene rezultate navodimo u narednim sekcijama.

5.8.1 Poboljšanje nejednakosti (5.65)

Na osnovu nejednakosti (5.65), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \cos \frac{x}{2} \left(p + (1-p) \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) \right) - \text{sinc} x, \quad (5.68)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.27 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uopštenje nejednakosti (5.65) dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.53 Neka je

$$A = \frac{2\pi \cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 4\sqrt{2}}{2\pi \left(\cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 1 \right)} = 0.44440\dots \quad i \quad B = \frac{4}{9} = 0.\bar{4}.$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, A)$, donja ograničenja funkcije sinc su data sa

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\operatorname{sinc} x > \cos \frac{x}{2} \left(A + (1-A) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) > \cos \frac{x}{2} \left(p + (1-p) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) \right)$$

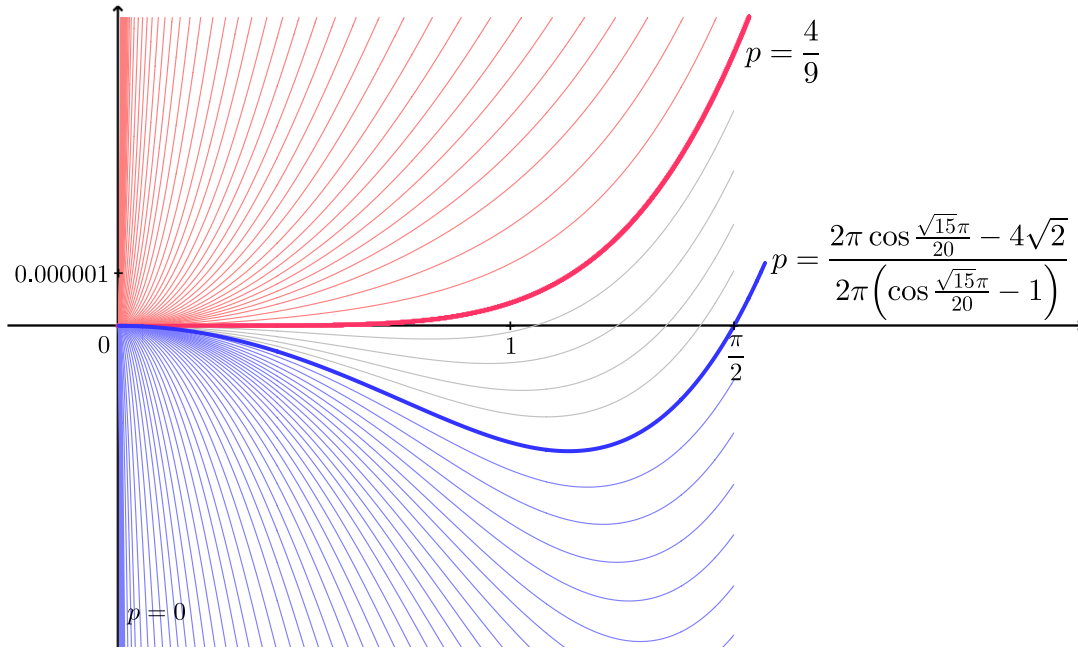
i konstanta A je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (B, +\infty)$, gornja ograničenja funkcije sinc su data sa

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\cos \frac{x}{2} \left(p + (1-p) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) > \cos \frac{x}{2} \left(B + (1-B) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) > \operatorname{sinc} x \right)$$

i konstanta B je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.29: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.68)

5.8.2 Poboljšanje nejednakosti (5.66)

Na osnovu nejednakosti (5.66), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \operatorname{sinc} x - \cos \frac{x}{2} \left(p \cos \frac{x}{2} + (1-p) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right), \quad (5.69)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.28 Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Uopštenje nejednakosti (5.66) dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.54 *Neka je*

$$C = \frac{\pi \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 4}{\pi \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 1 \right)} = 0.16662\dots \quad i \quad D = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6}.$$

Tada važi:

(i) *Ako* $p \in (-\infty, C)$, *gornja ograničenja funkcije sinc su data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\cos \frac{x}{2} \left(p \cos \frac{x}{2} + (1-p) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) > \cos \frac{x}{2} \left(C \cos \frac{x}{2} + (1-C) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) > \operatorname{sinc} x \right)$$

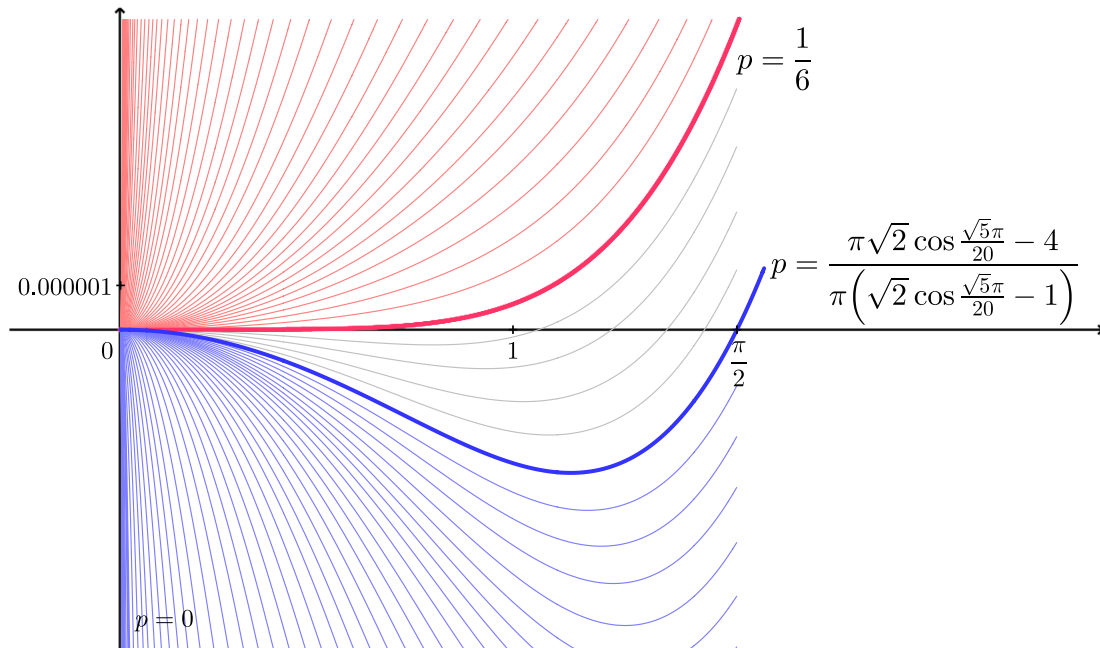
i konstanta C *je najbolja moguća.*

(ii) *Ako* $p \in (D, +\infty)$, *donja ograničenja funkcije sinc su data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\operatorname{sinc} x > \cos \frac{x}{2} \left(D \cos \frac{x}{2} + (1-D) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) > \cos \frac{x}{2} \left(p \cos \frac{x}{2} + (1-p) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) \right)$$

i konstanta D *je najbolja moguća.*

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.30: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.69)

5.8.3 Poboljšanje nejednakosti (5.67)

Na osnovu nejednakosti (5.67), uvedimo familiju funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_p(x) = \operatorname{sinc} x - p - (1-p) \cos \left(\frac{3}{4} x \right), \quad (5.70)$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Lema 5.29 *Familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.*

Uopštenje nejednakosti (5.67) dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.55 *Neka je*

$$E = \frac{11}{27} = 0.40740\dots \quad i \quad D = \frac{\pi \cos \frac{3\pi}{8} - 2}{\pi (\cos \frac{3\pi}{8} - 1)} = 0.41135\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, E)$, donja ograničenja funkcije sinc su data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\operatorname{sinc} x > E + (1 - E) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) > p + (1 - p) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) \right)$$

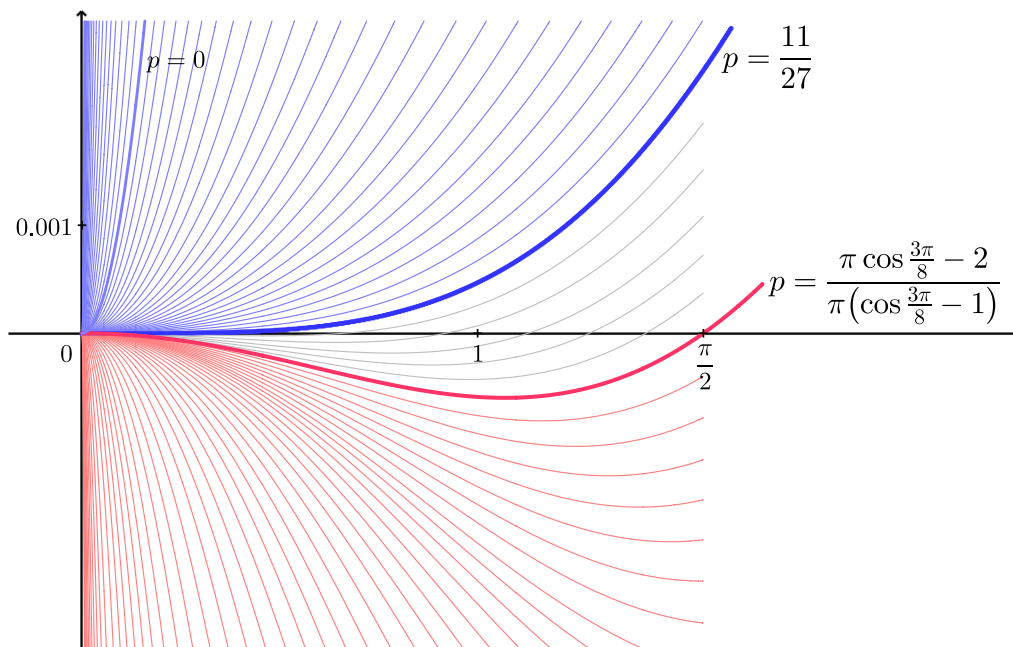
i konstanta E je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (F, +\infty)$, gornja ograničenja funkcije sinc su data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(p + (1 - p) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) > F + (1 - F) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) > \operatorname{sinc} x \right)$$

i konstanta F je najbolja moguća.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.31: Neke funkcije iz raslojene familije definisane sa (5.70)

5.8.4 Poboljšanja Teoreme 5.52

U ovoj sekciji, na osnovu rezultata iz prethodnih sekcija, navodimo neka poboljšanja Teoreme 5.52, tj. Teoreme 1.1 iz [85].

Na osnovu Teorema 5.53 i 5.54, važi sledeća teorema.

Teorema 5.56 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi:

(i) Ako $p_1 \in [\frac{4}{9}, +\infty)$ i $p_2 \in [\frac{1}{6}, +\infty)$, važi da je

$$\cos \frac{x}{2} \left(p_1 + (1-p_1) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) > \operatorname{sinc} x > \cos \frac{x}{2} \left(p_2 \cos \frac{x}{2} + (1-p_2) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right).$$

(ii) Ako $p_1 \in \left(-\infty, \frac{2\pi \cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 4\sqrt{2}}{2\pi \left(\cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 1 \right)} \right]$ i $p_2 \in \left(-\infty, \frac{\pi \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 4}{\pi \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 1 \right)} \right]$, važi da je

$$\cos \frac{x}{2} \left(p_2 \cos \frac{x}{2} + (1-p_2) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) > \operatorname{sinc} x > \cos \frac{x}{2} \left(p_1 + (1-p_1) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right).$$

Na osnovu Teorema 5.53, 5.54 i 5.55, važi sledeća teorema.

Teorema 5.57 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i

$$A = \frac{2\pi \cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 4\sqrt{2}}{2\pi \left(\cos \frac{\sqrt{15}\pi}{20} - 1 \right)} = 0.44440\dots, \quad C = \frac{\pi \sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 4}{\pi \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{5}\pi}{20} - 1 \right)} = 0.16662\dots$$

$$i \quad F = \frac{\pi \cos \frac{3\pi}{8} - 2}{\pi \left(\cos \frac{3\pi}{8} - 1 \right)} = 0.41135\dots$$

važi da je

$$\begin{aligned} & F + (1-F) \cos \left(\frac{3}{4} x \right) \\ & \geq \min \left\{ \cos \frac{x}{2} \left(C \cos \frac{x}{2} + (1-C) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right), \cos \frac{x}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) \right\} \\ & \geq \operatorname{sinc} x \\ & \geq \max \left\{ \cos \frac{x}{2} \left(A + (1-A) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right), \cos \frac{x}{2} \left(\frac{1}{6} \cos \frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right) \right\} \\ & \geq \frac{11}{27} + \frac{16}{27} \cos \left(\frac{3}{4} x \right), \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \cos \frac{x}{2} \left(C \cos \frac{x}{2} + (1-C) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right), \cos \frac{x}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right) \right\} \\ & = \begin{cases} \cos \frac{x}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} x \right) \right), & \text{za } x \in (0, x_1); \\ \cos \frac{x}{2} \left(C \cos \frac{x}{2} + (1-C) \cos \left(\frac{\sqrt{5}}{10} x \right) \right), & \text{za } x \in [x_1, \frac{\pi}{2}), \end{cases} \end{aligned}$$

pri čemu je $x_1 = 1.36898\dots$ jedinstveno rešenje jednačine

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) = C \cos\frac{x}{2} + (1-C) \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \cos\frac{x}{2} \left(A + (1-A) \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) \right), \cos\frac{x}{2} \left(\frac{1}{6} \cos\frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \right) \right\} \\ & = \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \left(\frac{1}{6} \cos\frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \right), & \text{za } x \in (0, x_2); \\ \cos\frac{x}{2} \left(A + (1-A) \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right) \right), & \text{za } x \in [x_2, \frac{\pi}{2}), \end{cases} \end{aligned}$$

pri čemu je $x_2 = 1.27247\dots$ jedinstveno rešenje jednačine

$$\frac{1}{6} \cos\frac{x}{2} + \frac{5}{6} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) = A + (1-A) \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{10}x\right)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

5.9 Neki tipovi Jordan-ove nejednakosti

Rezultate u ovom potpoglavlju dajemo prema [133, 135], uz neka poboljšanja.

Teorema 5.58 (Jordan-ova nejednakost [138]) *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je*

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Proširenja i poboljšanja Jordan-ove nejednakosti razmatrali su mnogi autori [4, 12, 28, 39, 66, 91, 93, 99, 102, 150, 155, 164–167, 205, 208, 210, 211, 213–215]. Neka od tih poboljšanja navodimo u nastavku.

Teorema 5.59 [166] *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je*

$$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}(\pi - 2x) \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^2}(\pi - 2x). \quad (5.71)$$

Teorema 5.60 [165] *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je*

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2). \quad (5.72)$$

Teorema 5.61 [66] *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je*

$$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi^4}(\pi^3 - 8x^3) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^4}(\pi^3 - 8x^3). \quad (5.73)$$

Teorema 5.62 [91] *Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je*

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5}(\pi^4 - 16x^4) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^5}(\pi^4 - 16x^4). \quad (5.74)$$

U [102] je dato sledeće tvrđenje kojim se uopštavaju prethodne nejednakosti, koje su date sa (5.71)–(5.74), i uvodi se familija nejednakosti.

Teorema 5.63 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ važi da je

$$\frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^2} (\pi - 2x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} (\pi - 2x) \quad (5.75)$$

i

$$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{n\pi^{n+1}} (\pi^n - (2x)^n) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^{n+1}} (\pi^n - (2x)^n) \quad (\text{za } n \geq 2, n \in \mathbb{N}), \quad (5.76)$$

pri čemu jednakosti važe ako i samo ako je $x = \frac{\pi}{2}$. Pri tome, konstante $\frac{\pi-2}{\pi^2}$ i $\frac{2}{\pi^2}$ iz (5.75) i konstante $\frac{2}{n\pi^{n+1}}$ i $\frac{\pi-2}{\pi^{n+1}}$ iz (5.76) su najbolje moguće.

U narednim sekcijama dajemo neka poboljšanja prethodnih teorema primenom koncepta raslojenosti. Za dokazivanje nejednakosti, takođe ćemo koristiti i Lopitalovo pravilo za monotonost [161].

Lema 5.30 (Teorema B [197], Lopitalovo pravilo za monotonost) *Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na intervalu (a, b) . Pretpostavimo da je $g'(x) > 0$ na intervalu (a, b) ili da je $g'(x) < 0$ na intervalu (a, b) . Takođe, pretpostavimo da je $f(a+) = g(a+) = 0$ ili $f(b-) = g(b-) = 0$. Ukoliko je funkcija $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ rastuća (tj. opadajuća) na intervalu (a, b) , tada je i funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$ takođe rastuća (tj. opadajuća) na intervalu (a, b) .*

5.9.1 Poboljšanje Teoreme 5.63

Na osnovu nejednakosti (5.76), uvedimo dvoparametarsku familiju funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+}$, gde je

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi^q - (2x)^q), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - p\pi^q, & x = 0. \end{cases} \quad (5.77)$$

Lema 5.31 Dvoparametarska familija funkcija $\{\varphi_{p,q}(x)\}_{p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+}$ jeste

- (i) opadajuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$ za fiksirano $q \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) opadajuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$ za fiksirano $p \in \mathbb{R}^+$,
- (iii) rastuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$ za fiksirano $p \in \mathbb{R}^-$.

Dokaz.

(i) Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_{p,q}(x)}{\partial p} = \begin{cases} (2x)^q - \pi^q, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ -\pi^q, & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i $q \in \mathbb{R}^+$ evidentno je $\frac{\partial \varphi_{p,q}(x)}{\partial p} < 0$.

(ii), (iii) Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_{p,q}(x)}{\partial q} = \begin{cases} p((2x)^q \ln(2x) - \pi^q \ln(\pi)), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ -p\pi^q \ln(\pi), & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ i $p, q \in \mathbb{R}^+$ evidentno je $\frac{\partial \varphi_{p,q}(x)}{\partial q} < 0$.

Za $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $q \in \mathbb{R}^+$ i $p \in \mathbb{R}^-$ evidentno je $\frac{\partial \varphi_{p,q}(x)}{\partial q} > 0$. ■

Lema 5.32 Neka je

$$A(q) = \frac{\pi - 2}{\pi^{q+1}} \quad i \quad B(q) = \frac{2}{q\pi^{q+1}}.$$

Tada važi:

(i) Familija funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ je opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Familija funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ je rastuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz.

(i) Za $A(q) = \frac{\pi - 2}{\pi^{q+1}}$ dobija se jednoparameterska familija funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ koja je definisana sa

$$\varphi_{A(q),q}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - 1 + \left(\frac{2x}{\pi}\right)^q \left(1 - \frac{2}{\pi}\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial q} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{2x}{\pi}\right)^q \ln \frac{2x}{\pi} < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za $q \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Za $B(q) = \frac{2}{q\pi^{q+1}}$ dobija se jednoparameterska familija funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ koja je definisana sa

$$\varphi_{B(q),q}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{q\pi} + \frac{2^{q+1}x^q}{q\pi^{q+1}}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{q\pi}, & x = 0. \end{cases}$$

Ispitajmo znak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{B(q),q}(x)}{\partial q} &= \frac{2}{q^2\pi} + \frac{2^{q+1}x^q (q \ln 2 + q \ln x - q \ln \pi - 1)}{q^2\pi^{q+1}} \\ &= \frac{2}{q^2\pi} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^q \left(\ln \left(\frac{2x}{\pi}\right)^q + \left(\frac{\pi}{2x}\right)^q - 1\right) \end{aligned}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za $q \in \mathbb{R}^+$. Neka je $t = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^q$. Formirajmo funkciju

$$g(t) = \ln(t) + \frac{1}{t} - 1 : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Važi da je

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} < 0$$

za $t \in (0, 1)$. Dakle, funkcija $g(t)$ je opadajuća na intervalu $(0, 1)$. S obzirom na to da je $g(t)$ opadajuća funkcija i da je $g(1) = 0$, zaključujemo da je

$$g(t) > 0$$

za $t \in (0, 1)$. Dakle, važi da je

$$\frac{\partial \varphi_{B(q),q}(x)}{\partial q} > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za $q \in \mathbb{R}^+$.

Takođe, za $x = 0$ i $q \in \mathbb{R}^+$ evidentno je $\left(\frac{\partial \varphi_{B(q),q}}{\partial q}\right)(x)\Big|_{x=0} = \frac{2}{q^2\pi} > 0$. ■

Na osnovu analize familije $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, dobija se sledeća teorema.

Teorema 5.64 *Neka je*

$$q_1 = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots \quad i \quad q_2 = 2.$$

Tada važi:

(i) *Ako $q \in (0, q_1)$, tada su donja ograničenja funkcije $\frac{\sin x}{x}$ data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{2}{\pi} + A(q)(\pi^q - (2x)^q) < \frac{2}{\pi} + A(q_1)(\pi^{q_1} - (2x)^{q_1}) < \frac{\sin x}{x}\right)$$

i konstanta q_1 je najbolja moguća.

(ii) *Ako $q \in (q_1, q_2)$, jednačina $\varphi_{A(q),q}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(q)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(q)}\right)\right) \frac{2}{\pi} + A(q)(\pi^q - (2x)^q) < \frac{\sin x}{x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(q)}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + A(q)(\pi^q - (2x)^q).$$

(iii) *Ako $q \in (q_2, +\infty)$, tada su gornja ograničenja funkcije $\frac{\sin x}{x}$ data sa*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + A(q_2)(\pi^{q_2} - (2x)^{q_2}) < \frac{2}{\pi} + A(q)(\pi^q - (2x)^q)\right)$$

i konstanta q_2 je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jedan lokalni maksimum i tačno jedan lokalni minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tačkama $\left(t_1^{(q)}, \varphi_{A(q),q}\left(t_1^{(q)}\right)\right)$ i $\left(t_2^{(q)}, \varphi_{A(q),q}\left(t_2^{(q)}\right)\right)$, respektivno. Pri tome je $t_1^{(q)} < t_2^{(q)}$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje jednačine*

$$\left|\varphi_{A(q),q}\left(t_1^{(q)}\right)\right| = \left|\varphi_{A(q),q}\left(t_2^{(q)}\right)\right|$$

po parametru $q \in (q_1, q_2)$, numerički određeno sa

$$q_0 = 1.84823\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{A(q_0),q_0}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.043803... \left(\pi^{1.84823...} - (2x)^{1.84823...} \right),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.043803... \left(\pi^{1.84823...} - (2x)^{1.84823...} \right)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{q \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_{A(q),q}(x)| = \left| \varphi_{A(q_0),q_0}(t_1^{(q_0)}) \right| = \left| \varphi_{A(q_0),q_0}(t_2^{(q_0)}) \right| = 0.0026604....$$

Dokaz.

(i), (ii), (iii) Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi (1), (2) i (3) Teoreme 2.12 (Parametarski metod).

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$, na osnovu Leme 5.32, opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$.

Uslov (2) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $q \in \mathbb{R}^+$ važi sledeća ekvivalencija

$$\varphi_{A(q),q}(x) = 0 \iff q = g(x) = \frac{\ln \frac{x(\pi-2)}{\pi(x-\sin x)}}{\ln \frac{\pi}{2x}}. \quad (5.78)$$

U nastavku, primenom Lopitalovog pravila za monotonost, dokazujemo da je funkcija $g(x)$ monotono opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Primetimo da je

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

za

$$f_1(x) = \ln \frac{x(\pi-2)}{\pi(x-\sin x)} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \ln \frac{\pi}{2x}$$

i pri tome je $f_1(\frac{\pi}{2}-) = 0$ i $f_2(\frac{\pi}{2}-) = 0$. Dalje, formiramo funkciju

$$h(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{-x \cos x + \sin x}{x - \sin x}$$

i dokazujemo da je ona opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$h'(x) = \frac{x \cos x + \cos x \sin x + x^2 \sin x - \sin x - x}{(x - \sin x)^2}.$$

Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$x \cos x + \cos x \sin x + x^2 \sin x - \sin x - x < 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Samim tim je

$$h'(x) < 0$$

na posmatranom intervalu, tj. $h(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ je opadajuća funkcija na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu Lopitalovog pravila za monotonost (Leme 5.30), zaključujemo da je i funkcija $g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana ispunjenost uslova (2).

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots$$

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.12, odakle slede tvrđenja (i), (ii) i (iii).

(iv), (v) Ispitajmo monotonost funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q \in (q_1, q_2)$, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Četvrti izvod $\varphi_{A(q),q}(x)$ po x je

$$\frac{\partial^4 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^4} = \frac{x^{q+1} f_4(q) + h_4(x)}{x^5},$$

gde je

$$f_4(q) = \pi^{-q-1} 2^q q(q-1)(q-2)(q-3)(\pi-2)$$

i

$$h_4(x) = 4x(x^2 - 6) \cos x + (x^4 - 12x^2 + 24) \sin x.$$

Evidentno je

$$f_4(q) > 0$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Važi da je

$$h_4'(x) = x^4 \cos x > 0$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dakle, funkcija $h_4(x)$ je rastuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Kako je $h_4(0+) = 0$, važi da je

$$h_4(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Stoga je

$$\frac{\partial^4 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^4} > 0 \tag{5.79}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za $q \in (q_1, q_2)$. Dakle, svaka funkcija $\frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3}$, za $q \in (q_1, q_2)$, rastuća je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Treći izvod $\varphi_{A(q),q}(x)$ po x je

$$\frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3} = \frac{x^{q+1} f_3(q) + h_3(x)}{x^4},$$

gde je

$$f_3(q) = \pi^{-q-1} 2^q q(q-1)(q-2)(\pi-2) \quad \text{i} \quad h_3(x) = (-x^3 + 6x) \cos x + (3x^2 - 6) \sin x.$$

Evidentno je

$$f_3(q) < 0$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_3(q)}{x^{3-q}} = -\infty \quad (\text{za } q \in (q_1, q_2)) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_3(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_3'(x)}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \sin x}{4x^3} = 0.$$

Stoga je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3} = -\infty \tag{5.80}$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Važi da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3} = \frac{(8\pi - 16)q^3 + (48 - 24\pi)q^2 + (16\pi - 32)q + 12\pi^2 - 96}{\pi^4} := k_3(q).$$

S obzirom na to da je $k'_3(q) = \frac{8}{\pi^4}(3q^2 - 6q + 2)(\pi - 2) > 0$ za $q \in (q_1, q_2)$, važi da je $k_3(q)$ rastuća funkcija za $q \in (q_1, q_2)$. Kako je $k_3(q)$ rastuća funkcija i $k_3(q_1) = \frac{12\pi^3 - 48\pi^2 - 16\pi + 160}{\pi^3(\pi - 2)^2} = 0.19968... > 0$, može se zaključiti da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3} > 0 \quad (5.81)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Na osnovu (5.79)–(5.81), svaka funkcija $\frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2}$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Drugi izvod $\varphi_{A(q),q}(x)$ po x je

$$\frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2} = \frac{x^{q+1} f_2(q) + h_2(x)}{x^3},$$

gde je

$$f_2(q) = \pi^{-q-1} 2^q q(q-1)(\pi-2) \quad \text{i} \quad h_2(x) = -2x \cos x - (x^2 - 2) \sin x.$$

Evidentno je

$$f_2(q) > 0$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_2(q)}{x^{2-q}} = +\infty \quad (\text{za } q \in (q_1, q_2)) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_2(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h'_2(x)}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Stoga je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2} = +\infty \quad (5.82)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Važi da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2} = \frac{(4\pi - 8)q^2 + (-4\pi + 8)q - 2\pi^2 + 16}{\pi^3} := k_2(q).$$

S obzirom na to da je $k'_2(q) = \frac{4}{\pi^3}(2q - 1)(\pi - 2) > 0$ za $q \in (q_1, q_2)$, važi da je $k_2(q)$ rastuća funkcija za $q \in (q_1, q_2)$. Kako je $k_2(q)$ rastuća funkcija i $k_2(q_1) = \frac{-2\pi^2 + 4\pi + 8}{\pi^2(\pi - 2)} = 0.073414... > 0$, može se zaključiti da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2} > 0 \quad (5.83)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Dokazali smo da svaka funkcija $\frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2}$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Stoga, na osnovu (5.82) i (5.83), za funkcije $\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x}$, za

$q \in (q_1, q_2)$, postoje dve mogućnosti: ili su rastuće ili imaju tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ respektivno. Dokazaćemo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} > 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial \varphi_{A(q),q}}{\partial x} \right) (x) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} < 0 \quad (*)$$

za $q \in (q_1, q_2)$, odakle sledi da funkcije $\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x}$, za $q \in (q_1, q_2)$, imaju tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ respektivno. Prvi izvod $\varphi_{A(q),q}(x)$ po x je

$$\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = \frac{x^{q+1} f_1(q) + h_1(x)}{x^2},$$

gde je

$$f_1(q) = \pi^{-q-1} 2^q q (\pi - 2) \quad \text{i} \quad h_1(x) = x \cos x - \sin x.$$

Važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(q)}{x^{1-q}} = 0 \quad (\text{za } q \in (q_1, q_2)) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h_1(x)}{x^2} = 0.$$

Stoga je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = 0 \quad (5.84)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Lako je pokazati da je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = \frac{2(q(\pi - 2) - 2)}{\pi^2} > 0 \quad (5.85)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Ispitajmo znak funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q \in (q_1, q_2)$, u tački $x = \frac{\pi}{4}$. Važi da je

$$\left(\frac{\partial \varphi_{A(q),q}}{\partial x} \right) (x) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{2^{-q} q (4\pi - 8) + 2\sqrt{2}(\pi - 4)}{\pi^2} := k_1(q).$$

S obzirom na to da je $k_1'(q) = \frac{-4 \cdot 2^{-q} (\pi - 2) (q \ln 2 - 1)}{\pi^2} < 0$ za $q \in (q_1, q_2)$, važi da je $k_1(q)$

opadajuća funkcija. Kako je $k_1(q)$ opadajuća funkcija i $k_1(q_1) = \frac{2^{\frac{3\pi-8}{\pi-2}} \pi - 2^{\frac{4\pi-10}{\pi-2}} + (2\pi^2 - 12\pi + 16)\sqrt{2}}{(\pi-2)\pi^2} = -0.0053418... < 0$, može se zaključiti da je

$$\left(\frac{\partial \varphi_{A(q),q}}{\partial x} \right) (x) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} < 0 \quad (5.86)$$

za $q \in (q_1, q_2)$. Stoga svaka funkcija $\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x}$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ respektivno. Napomenimo da (*) označava konjukciju (5.84) i (5.85) i (5.86). Dodatno, na osnovu monotonosti funkcija $\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x}$ za $q \in (q_1, q_2)$ i (*), možemo zaključiti i da svaka funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jedan maksimum i tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, respektivno.

Analizom monotonosti funkcija $\frac{\partial^4 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^3 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^2 \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x}$, i $\varphi_{A(q),q}(x)$ za $q = q_1$ i za $q = q_2$, na sličan način, može se zaključiti da funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q = q_1$, ima tačno jedan maksimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, dok funkcija $\varphi_{A(q),q}(x)$, za $q = q_2$, ima tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Primitimo da infimum greške $d(q) = \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_{A(q),q}(x)|$, za $q \in (q_1, q_2)$, postoji i dostiže se kada je

$$\left| \varphi_{A(q),q}(t_1^{(q)}) \right| = \left| \varphi_{A(q),q}(t_2^{(q)}) \right|.$$

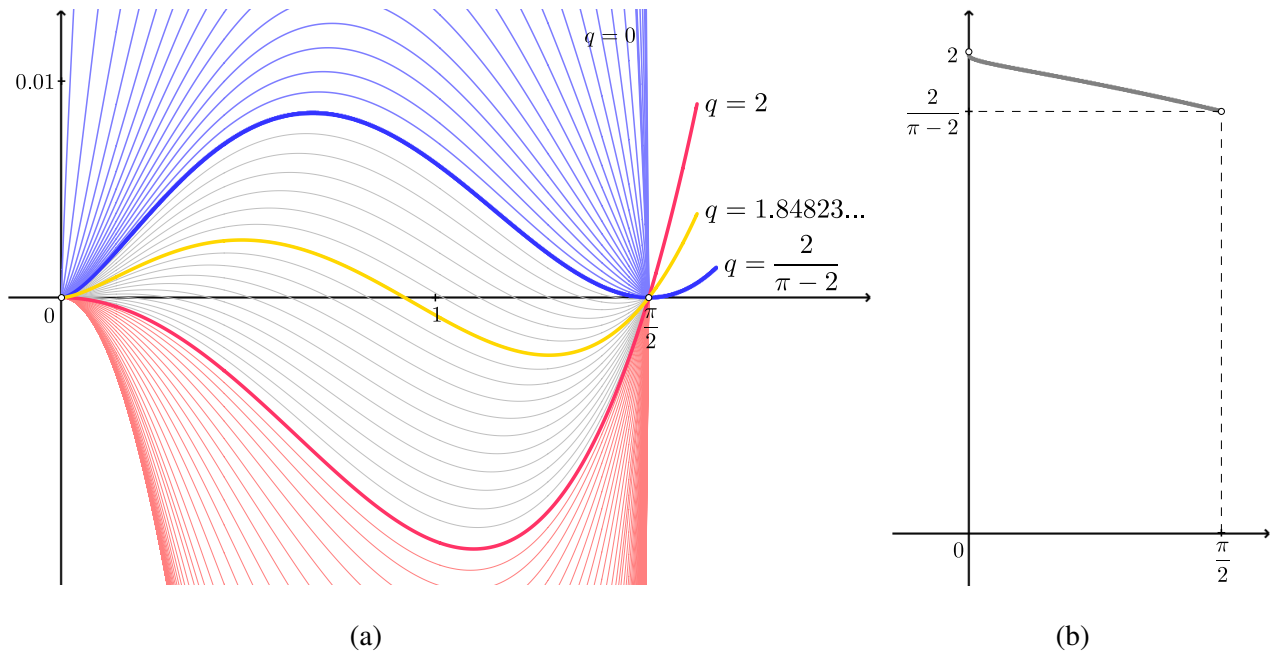
Rešavanjem prethodne jednačine po parametru $q \in (q_1, q_2)$ dobija se minimaks aproksimant familije $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}}$. ■

Razmatranje $\varphi_{A(q),q}(x)$ u slučaju $q \leq 0$. Za $q < 0$ važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi_{A(q),q}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 + \left(\frac{2x}{\pi} \right)^q \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right) = +\infty.$$

Analogno dokazu Leme 5.32, može se pokazati i da je familija funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}}$ opadajuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}$. Na osnovu te činjenice i dela (i) prethodne teoreme, za $q \leq 0$ važi da je $\varphi_{A(q),q}(x) > 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}}$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra q , uz odgovarajuću funkciju $g(x)$.



Slika 5.32: (a) Neke funkcije iz raslojene familije $\{\varphi_{A(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$
 (b) funkcija g definisana sa (5.78) ■

Na osnovu analize familije $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$, dobija se sledeća teorema.

Teorema 5.65 *Neka je*

$$q_1 = \frac{\pi^2}{4} - 1 = 1.46740\dots \quad i \quad q_2 = \frac{2}{\pi - 2} = 1.75193\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $q \in (0, q_1)$, tada su gornja ograničenja funkcije $\frac{\sin x}{x}$ data sa

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + B(q_1) (\pi^{q_1} - (2x)^{q_1}) < \frac{2}{\pi} + B(q) (\pi^q - (2x)^q) \right)$$

i konstanta q_1 je najbolja moguća.

(ii) Ako $q \in (q_1, q_2)$, jednačina $\varphi_{B(q),q}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(q)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(q)}\right) \right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + B(q) (\pi^q - (2x)^q)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(q)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{2}{\pi} + B(q) (\pi^q - (2x)^q) < \frac{\sin x}{x}.$$

(iii) Ako $q \in (q_2, +\infty)$, tada su donja ograničenja funkcije $\frac{\sin x}{x}$ data sa

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} + B(q) (\pi^q - (2x)^q) < \frac{2}{\pi} + B(q_2) (\pi^{q_2} - (2x)^{q_2}) < \frac{\sin x}{x} \right)$$

i konstanta q_2 je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_{B(q),q}(x)$, za $q \in (q_1, q_2)$, ima tačno jednu lokalnu ekstremnu vrednost, koja je maksimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(q)}, \varphi_{B(q),q}(t^{(q)}))$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$|\varphi_{B(q),q}(0+)| = \varphi_{B(q),q}(t^{(q)})$$

po parametru $q \in (q_1, q_2)$, numerički određeno sa

$$q_0 = 1.72287\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{B(q_0),q_0}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.051415\dots \left(\pi^{1.72287\dots} - (2x)^{1.72287\dots} \right),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.051415\dots \left(\pi^{1.72287\dots} - (2x)^{1.72287\dots} \right)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{q \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_{B(q),q}(x)| = |\varphi_{B(q_0),q_0}(0+)| = \varphi_{B(q_0),q_0}(t^{(q_0)}) = 0.0061296\dots$$

Dokaz. Pokazaćemo da su ispunjeni uslovi (1)–(5) Teoreme 2.19 (Novi parametarski metod).

Uslov (1) je ispunjen jer je familija funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ kompresovana u tački $\frac{\pi}{2}$ i, na osnovu Leme 5.32, rastuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R}^+$.

Uslov (2) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $q \in \mathbb{R}^+$ važi sledeća ekvivalencija

$$\frac{\partial \varphi_{B(q),q}(x)}{\partial x} = \frac{x \cos x - \sin x + \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{q+1}}{x^2} = 0 \iff q = g_1(x) = \frac{\ln \frac{2x}{\pi(-x \cos x + \sin x)}}{\ln \frac{\pi}{2x}}. \quad (5.87)$$

U nastavku, primenom Lpitalovog pravila za monotonost, dokazujemo da je funkcija $g(x)$ monotono opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Primetimo da je

$$g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

za

$$f_1(x) = \ln \frac{2x}{\pi(-x \cos x + \sin x)} \quad \text{i} \quad f_2(x) = \ln \frac{\pi}{2x}$$

i pri tome je $f_1(\frac{\pi}{2}-) = 0$ i $f_2(\frac{\pi}{2}-) = 0$. Dalje, formiramo funkciju

$$h(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{x \cos x + x^2 \sin x - \sin x}{-x \cos x + \sin x}$$

i dokazujemo da je ona opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Važi da je

$$h'(x) = \frac{-x(x \cos x \sin x - 2 \sin^2 x + x^2)}{(-x \cos x + \sin x)^2}.$$

Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$x \cos x \sin x - 2 \sin^2 x + x^2 > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Samim tim je

$$h'(x) < 0$$

na posmatranom intervalu, tj. $h(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ je opadajuća funkcija na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu Lpitalovog pravila za monotonost (Leme 5.30), zaključujemo da je i funkcija $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ opadajuća na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana ispunjenost uslova (2).

Uslov (3) je ispunjen jer postoje granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g_1(x) = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} g_1(x) = \frac{\pi^2}{4} - 1 = 1.46740\dots$$

Uslov (4) je ispunjen jer postoji jedinstveno rešenje jednačine

$$\varphi_{B(q),q}(0) = \frac{(\pi - 2)q - 2}{\pi q} = 0$$

po parametru $q \in (\frac{\pi^2}{4} - 1, 2)$, određeno sa

$$q = \frac{2}{\pi - 2}.$$

Uslov (5) je ispunjen jer postoji leva okolina tačke $\frac{\pi}{2}$ u kojoj je $\varphi_{B(q),q}(x) > 0$ za $q \in \left(\frac{\pi^2}{4} - 1, 2\right)$, što se dobija na osnovu Tejlorovog razvoja

$$\varphi_{B(q),q}(x) = \frac{4q - \pi^2 + 4}{\pi^3} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

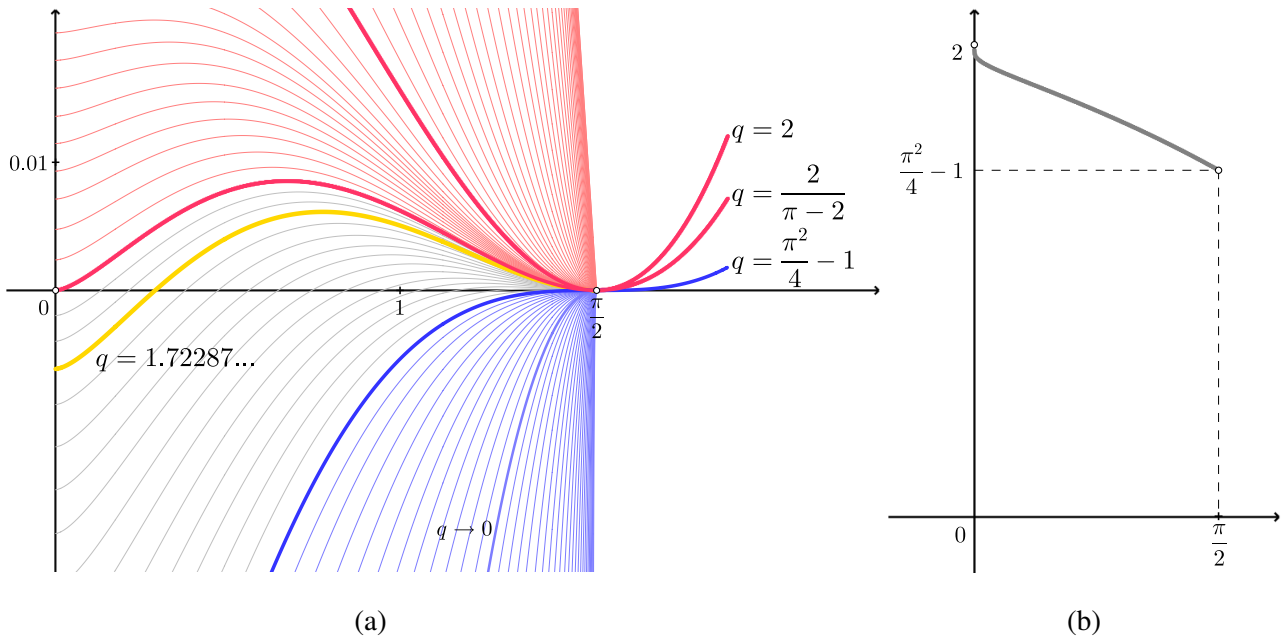
Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.19, odakle sledi navedeno tvrđenje. ■

Razmatranje $\varphi_{B(q),q}(x)$ u slučaju $q < 0$. Za $q < 0$ važi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_{B(q),q}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{q\pi} + \frac{2^{q+1}x^q}{q\pi^{q+1}} \right) = -\infty.$$

Analogno dokazu Leme 5.32, može se pokazati i da je familija funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ rastuće raslojena na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na osnovu te činjenice i dela (i) prethodne teoreme, za $q < 0$ važi da je $\varphi_{B(q),q}(x) < 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Na sledećoj slici je prikazana familija funkcija $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i za neke vrednosti parametra q , uz odgovarajuću funkciju $g_1(x)$.



Slika 5.33: (a) Neke funkcije iz raslojene familije $\{\varphi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$
(b) funkcija g_1 definisana sa (5.87) ■

Napomena 5.12

(i) Važi da je

$$\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \frac{(\pi - 2)2^q x^q}{\pi^{q+1} x} q.$$

Jednačina

$$\frac{\partial \varphi_{A(q),q}(x)}{\partial x} = 0$$

ne može se simbolički rešiti po q bez upotrebe neke od specijalnih funkcija (na primer, Lambertove funkcije). Zbog toga u dokazu Teoreme 5.64 nismo koristili Novi parametarski metod nego Parametarski metod.

(ii) U Teoremi 5.65 je prema [133, 135] primenjen Novi parametarski metod na familiju funkcija $\{\Phi_{B(q),q}(x)\}_{q \in \mathbb{R}^+}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Na ovu familiju nismo primenjivali Parametarski metod jer se jednačina

$$\Phi_{B(q),q}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{q\pi} + \frac{2^{q+1}x^q}{q\pi^{q+1}} = 0$$

ne može simbolički rešiti po q bez upotrebe neke od specijalnih funkcija (na primer, Lambertove funkcije).

Na osnovu prethodne analize, dajemo sledeće poboljšanje Teoreme 5.63.

Teorema 5.66 Za $x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}]$ važi:

(i) Ako $q_1 \in (-\infty, \frac{2}{\pi-2}] = (-\infty, 1.75193\dots]$ i $q_2 \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{\pi^2}{4} - 1] = (-\infty, 0) \cup (0, 1.46740\dots]$, važi da je

$$\frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi^{q_1+1}} (\pi^{q_1} - (2x)^{q_1}) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} - \frac{2}{q_2 \pi^{q_2+1}} (\pi^{q_2} - (2x)^{q_2}),$$

pri čemu jednakosti važe za $x = \frac{\pi}{2}$.

(ii) Ako $q_1 \in [\frac{2}{\pi-2}, +\infty) = [1.75193\dots, +\infty)$ i $q_2 \in [2, +\infty)$, važi da je

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{q_1 \pi^{q_1+1}} (\pi^{q_1} - (2x)^{q_1}) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi^{q_2+1}} (\pi^{q_2} - (2x)^{q_2}),$$

pri čemu jednakosti važe za $x = \frac{\pi}{2}$.

Napomena 5.13 Posmatrajmo dvoparametarsku familiju funkcija $\{\Phi_{p,q}(x)\}_{p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+}$, gde je

$$\Phi_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi^q - (2x)^q), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - p\pi^q, & x = 0. \end{cases}$$

Tejlorov razvoj $\{\Phi_{p,q}(x)\}_{p,q \in \mathbb{R}}$ u okolini tačke $\frac{\pi}{2}$ je

$$\begin{aligned} \Phi_{p,q}(x) &= \left(-\frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}\pi^q p q\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{8 - \pi^2}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2}\pi^q p q(q-1)\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{2(\pi^2 - 8)}{\pi^4} + \frac{4}{3\pi^3}\pi^q p q(q^2 - 3q + 2)\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Prema Teoremi 2.4, rešavanjem sistema

$$\mathfrak{c}_1^{\Phi_{p,q}, \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}\pi^q p q = 0$$

$$\mathfrak{c}_2^{\Phi_{p,q}, \frac{\pi}{2}} = \frac{8 - \pi^2}{\pi^3} + \frac{2}{\pi^2}\pi^q p q(q-1) = 0$$

dobijamo konstante $p = \frac{8}{\pi(\pi^2-4)}\pi^{-\frac{\pi^2}{4}+1}$ i $q = \frac{\pi^2}{4} - 1$ za koje je $\Phi_{p,q}(x) < 0$ u nekoj levoj okolini tačke $\frac{\pi}{2}$.

Na osnovu Teoreme 5.66, za $p = \frac{8}{\pi(\pi^2-4)}\pi^{-\frac{\pi^2}{4}+1}$ i $q = \frac{\pi^2}{4} - 1$, važi da je $\varphi_{p,q}(x) < 0$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. važi nejednakost

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi(\pi^2-4)} \left(1 - \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{\frac{\pi^2}{4}-1} \right)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

5.9.2 Poboljšanje teorema 5.59–5.62

Sa ciljem poboljšanja nejednakosti (5.71), analizirajmo familiju funkcija $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,1}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi - 2x), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - \pi p, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Familija $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je, na osnovu Leme 5.31, opadajuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

Primenom rezultata iz prethodne sekcije i Ogledalske Nike teoreme (Teoreme 2.6), dajemo sledeće poboljšanje Teoreme 5.59.

Teorema 5.67 *Neka je*

$$p_1 = \frac{\pi-2}{\pi^2} = 0.11566\dots \quad i \quad p_2 = \frac{2}{\pi^2} = 0.20264\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, p_1)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} + p(\pi - 2x) < \frac{2}{\pi} + p_1(\pi - 2x) < \frac{\sin x}{x} \right)$$

i konstanta p_1 je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (p_1, p_2)$, jednačina $\varphi_{p,1}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p(\pi - 2x)$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{2}{\pi} + p(\pi - 2x) < \frac{\sin x}{x}.$$

(iii) *Ako $p \in (p_2, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p_2(\pi - 2x) < \frac{2}{\pi} + p(\pi - 2x) \right)$$

i konstanta p_2 je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_{p,1}(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni maksimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_{p,1}(t^{(p)}))$.*

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$|\varphi_{p,1}(0+)| = \varphi_{p,1}(t^{(p)})$$

po parametru $p \in (p_1, p_2)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.13323\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0,1}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.13323\dots(\pi - 2x),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.13323\dots(\pi - 2x)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_{p,1}(x)| = |\varphi_{p_0,1}(0+)| = \varphi_{p_0,1}(t^{(p_0)}) = 0.055187\dots$$

Dokaz. U ovom dokazu ćemo koristiti teoreme 5.64, 5.65, 2.6 i 2.9.

(i) Sledi na osnovu Teoreme 5.64 i raslojenosti jer je $A(q) = \frac{\pi - 2}{\pi^{q+1}} = p_1$ za $q = 1$.

(iii) Sledi na osnovu Teoreme 5.65 i raslojenosti jer je $B(q) = \frac{2}{q\pi^{q+1}} = p_2$ za $q = 1$.

(ii), (iv) Uvedimo familiju funkcija $\{\psi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ definisanu sa $\psi_p(x) = -\varphi_{p,1}(x)$. Pokazaćemo da su za funkcije $\psi_p(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, ispunjeni svi uslovi za primenu Ogljedalske Nike teoreme (Teoreme 2.6).

Uslov (a) je ispunjen na osnovu razmatranja koje sledi.

Važi da je

$$\frac{\partial^2 \psi_p(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x)}{x^3},$$

gde je $f(x)$ MTP funkcija data sa

$$f(x) = 2x \cos x + x^2 \sin x - 2 \sin x.$$

Primenom razvijenog dokazivača, može se dokazati da je

$$f(x) > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Samim tim je

$$\frac{\partial^2 \psi_p(x)}{\partial x^2} > 0$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime je dokazana ispunjenost uslova (a).

Uslov (b) je ispunjen jer postoji desna okolina tačke 0 u kojoj važi da je

$$\psi_p(x) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \psi_p(x)}{\partial x} < 0$$

za $p \in (p_1, p_2)$, što se dobija na osnovu Tejlrovog razvoja

$$\psi_p(x) = \left(-1 + \frac{2}{\pi} + p\pi\right) - 2px + o(x).$$

Uslov (c) je ispunjen jer postoji leva okolina tačke $\frac{\pi}{2}$ u kojoj važi da je

$$\psi_p(x) < 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \psi_p(x)}{\partial x} > 0$$

za $p \in (p_1, p_2)$, što se dobija na osnovu Tejlorovog razvoja

$$\psi_p(x) = \left(\frac{4}{\pi^2} - 2p \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + o \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Ogledalske Nike teoreme (Teoreme 2.6), odakle zaključujemo da funkcije $\psi_p(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, imaju tačno jedan minimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Stoga, funkcije $\varphi_{p,1}(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, imaju tačno jedan maksimum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, čime smo dokazali tvrđenje (iv). Takođe, s obzirom na to da za $p \in (p_1, p_2)$ važi da je $\varphi_{p,1}(x) < 0$ u nekoj desnoj okolini tačke 0 i da je $\varphi_{p,1}(x) > 0$ u nekoj levoj okolini tačke $\frac{\pi}{2}$, dokazali smo i tvrđenje (ii).

(v) Pokazaćemo da su za familiju $\{\psi_p(x)\}_{p \in [p_1, p_2]}$ ispunjeni svi uslovi za primenu Teoreme 2.9 (Ogledalska verzija Teoreme o postojanju i određivanju minimaks aproksimanta – Teorema 2.8).

Uslov (a) je ispunjen jer je $\psi_{p_2}(x) > 0$ i $\psi_{p_1}(x) < 0$ za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $\psi_{p_1}(0) = 0$.

Uslov (b) je ispunjen jer su funkcije $\psi_p(x)$ neprekidne po $p \in (p_1, p_2)$ za svako $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Uslov (c) je ispunjen jer za svako $p \in (p_1, p_2)$ postoji leva okolina tačke $\frac{\pi}{2}$ u kojoj važi da je $\psi_p(x) < 0$ (videti dokaz delova (ii) i (iv)).

Uslov (d) je ispunjen jer za svako $p \in (p_1, p_2)$ funkcija $\psi_p(x)$ ima tačno jedan ekstremum na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, koji je minimum (videti dokaz delova (ii) i (iv)).

Dakle, ispunjeni su svi uslovi za primenu Teoreme 2.9, odakle se dobija minimaks aproksimant familije $\{\psi_p(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$. Kako je $\psi_p(x) = -\varphi_{p,1}(x)$, za istu vrednost parametra p se dobija i minimaks aproksimant familije $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$. ■

Sa ciljem poboljšanja nejednakosti (5.72), analizirajmo familiju funkcija $\{\varphi_{p,2}(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,2}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi^2 - 4x^2), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - \pi^2 p, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Familija $\{\varphi_{p,2}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je, na osnovu Leme 5.31, opadajuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.60.

Teorema 5.68 *Neka je*

$$p_1 = \frac{1}{\pi^3} = 0.032251... \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{\pi - 2}{\pi^3} = 0.036818....$$

Tada važi:

(i) *Ako* $p \in (-\infty, p_1)$, *važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} + p(\pi^2 - 4x^2) < \frac{2}{\pi} + p_1(\pi^2 - 4x^2) < \frac{\sin x}{x} \right)$$

i konstanta p_1 *je najbolja moguća.*

(ii) Ako $p \in (p_1, p_2)$, jednačina $\varphi_{p,2}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)} \right) \right) \frac{2}{\pi} + p(\pi^2 - 4x^2) < \frac{\sin x}{x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p(\pi^2 - 4x^2).$$

(iii) Ako $p \in (p_2, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p_2(\pi^2 - 4x^2) < \frac{2}{\pi} + p(\pi^2 - 4x^2) \right)$$

i konstanta p_2 je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_{p,2}(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ u tački $\left(t^{(p)}, \varphi_{p,2}\left(t^{(p)}\right) \right)$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\varphi_{p,2}(0+) = \left| \varphi_{p,2}\left(t^{(p)}\right) \right|$$

po parametru $p \in (p_1, p_2)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.036014\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{p,2}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ je

$$\varphi_{p_0,2}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.036014\dots(\pi^2 - 4x^2),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.036014\dots(\pi^2 - 4x^2)$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)} |\varphi_{p,2}(x)| = \varphi_{p_0,2}(0+) = \left| \varphi_{p_0,2}\left(t^{(p_0)}\right) \right| = 0.0079283\dots$$

Dokaz. Na osnovu geometrije razmatrane familije, dokaz je analogan dokazu Teoreme 5.67. ■

Sa ciljem poboljšanja nejednakosti (5.73), analizirajmo familiju funkcija $\{\varphi_{p,3}(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,3}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi^3 - 8x^3), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - \pi^3 p, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Familija $\{\varphi_{p,3}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je, na osnovu Leme 5.31, opadajuće raslojena na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.61.

Teorema 5.69 *Neka je*

$$p_1 = \frac{2}{3\pi^4} = 0.0068439\dots \quad i \quad p_2 = \frac{\pi-2}{\pi^4} = 0.011719\dots$$

Tada važi:

(i) Ako $p \in (-\infty, p_1)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} + p(\pi^3 - 8x^3) < \frac{2}{\pi} + p_1(\pi^3 - 8x^3) < \frac{\sin x}{x} \right)$$

i konstanta p_1 je najbolja moguća.

(ii) Ako $p \in (p_1, p_2)$, jednačina $\varphi_{p,3}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \frac{2}{\pi} + p(\pi^3 - 8x^3) < \frac{\sin x}{x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p(\pi^3 - 8x^3).$$

(iii) Ako $p \in (p_2, +\infty)$, važi da je

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p_2(\pi^3 - 8x^3) < \frac{2}{\pi} + p(\pi^3 - 8x^3) \right)$$

i konstanta p_2 je najbolja moguća.

(iv) Svaka funkcija $\varphi_{p,3}(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ u tački $\left(t^{(p)}, \varphi_{p,3}\left(t^{(p)}\right)\right)$.

(v) Postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$\varphi_{p,3}(0+) = \left| \varphi_{p,3}\left(t^{(p)}\right) \right|$$

po parametru $p \in (p_1, p_2)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.010441\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{p,3}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je

$$\varphi_{p_0,3}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.010441\dots(\pi^3 - 8x^3),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.010441\dots(\pi^3 - 8x^3)$$

na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} |\varphi_{p,3}(x)| = \varphi_{p_0,3}(0+) = \left| \varphi_{p_0,3}\left(t^{(p_0)}\right) \right| = 0.039635\dots$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 5.68. ■

Sa ciljem poboljšanja nejednakosti (5.74), analizirajmo familiju funkcija $\{\varphi_{p,4}(x)\}_{p \in \mathbb{P}}$, gde je

$$\varphi_{p,4}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - p(\pi^4 - 16x^4), & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 - \frac{2}{\pi} - \pi^4 p, & x = 0, \end{cases}$$

koja je definisana za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednosti parametra $p \in \mathbb{P} = \mathbb{R}$. Familija $\{\varphi_{p,4}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ je, na osnovu Leme 5.31, opadajuće raslojena na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ po parametru $p \in \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi dajemo poboljšanje Teoreme 5.62.

Teorema 5.70 *Neka je*

$$p_1 = \frac{1}{2\pi^5} = 0.0016338\dots \quad i \quad p_2 = \frac{\pi - 2}{\pi^5} = 0.0037304\dots$$

Tada važi:

(i) *Ako $p \in (-\infty, p_1)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} + p(\pi^4 - 16x^4) < \frac{2}{\pi} + p_1(\pi^4 - 16x^4) < \frac{\sin x}{x} \right)$$

i konstanta p_1 je najbolja moguća.

(ii) *Ako $p \in (p_1, p_2)$, jednačina $\varphi_{p,4}(x) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x_0^{(p)}$ i važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \right) \frac{2}{\pi} + p(\pi^4 - 16x^4) < \frac{\sin x}{x}$$

i

$$\left(\forall x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p(\pi^4 - 16x^4).$$

(iii) *Ako $p \in (p_2, +\infty)$, važi da je*

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + p_2(\pi^4 - 16x^4) < \frac{2}{\pi} + p(\pi^4 - 16x^4) \right)$$

i konstanta p_2 je najbolja moguća.

(iv) *Svaka funkcija $\varphi_{p,4}(x)$, za $p \in (p_1, p_2)$, ima tačno jednu ekstremnu vrednost, koja je lokalni minimum, na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ u tački $(t^{(p)}, \varphi_{p,4}(t^{(p)}))$.*

(v) *Postoji tačno jedno rešenje jednačine*

$$\varphi_{p,4}(0+) = \left| \varphi_{p,4}(t^{(p)}) \right|$$

po parametru $p \in (p_1, p_2)$, numerički određeno sa

$$p_0 = 0.0031146\dots$$

Minimaks aproksimant familije funkcija $\{\varphi_{p,4}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\varphi_{p_0,4}(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - 0.0031146\dots (\pi^4 - 16x^4),$$

kojim određujemo odgovarajuću minimaks aproksimaciju

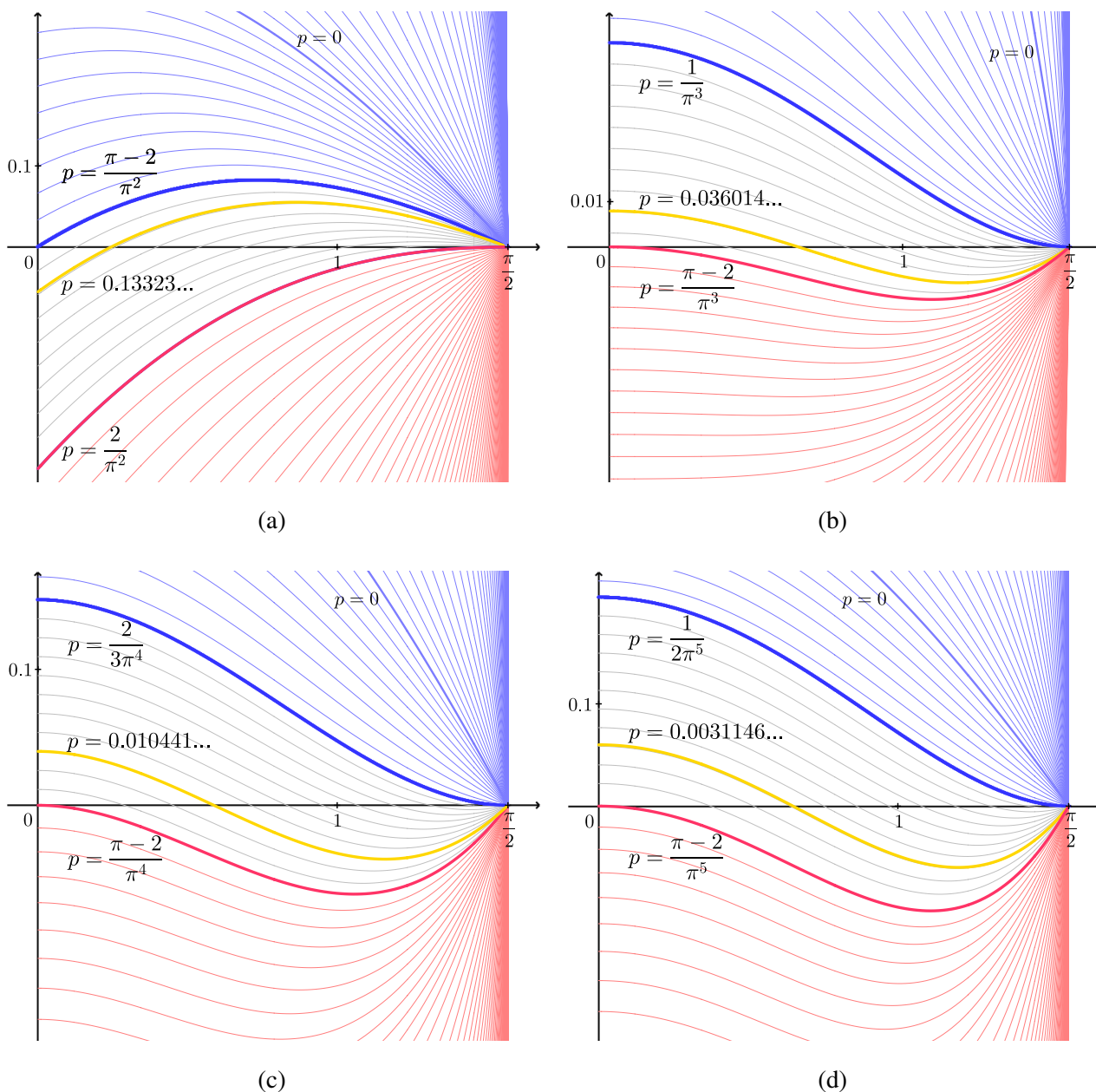
$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.0031146... (\pi^4 - 16x^4)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ sa greškom

$$d_0 = \inf_{p \in \mathbb{R}} \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} |\varphi_{p,4}(x)| = \varphi_{p_0,4}(0+) = \left| \varphi_{p_0,4} \left(t^{(p_0)} \right) \right| = 0.059981\dots$$

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 5.68. ■

Na sledećoj slici su prikazane familije funkcija $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, $\{\varphi_{p,2}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, $\{\varphi_{p,3}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ i $\{\varphi_{p,4}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za neke vrednosti parametra p .



Slika 5.34: Neke funkcije iz raslojenih familija (a) $\{\varphi_{p,1}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, (b) $\{\varphi_{p,2}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, (c) $\{\varphi_{p,3}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$, (d) $\{\varphi_{p,4}(x)\}_{p \in \mathbb{R}}$

Primitimo da ukoliko je $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ u Teoremi 5.66, dobija se Teorema 5.63.

5.9.3 Neka ograničenja i aproksimacije funkcije sinc

U ovoj sekciji, na osnovu Teorema 5.64, 5.65 i 5.67–5.70, dajemo neke aproksimacije funkcije sinc i analiziramo maksimalne greške navedenih aproksimacija.

Gornja i donja ograničenja funkcije sinc se mogu koristiti za dobijanje aproksimacija ove funkcije.

Primitimo da je gornje ograničenje funkcije sinc iz Teoreme 5.60 (najbolje gornje ograničenje iz Teoreme 5.68) isto kao i najbolje gornje ograničenje iz Teoreme 5.64.

Tabela 5.1: Gornja ograničenja funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$

Gornje ograničenje funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$	Najveće odstupanje od funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$
$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}(\pi - 2x)$	$\frac{\pi - 4}{\pi} = 0.27323\dots$
$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2)$	0.011612...
$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^4}(\pi^3 - 8x^3)$	0.065358...
$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^5}(\pi^4 - 16x^4)$	0.10245...
$\frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)\pi^{\frac{\pi^2}{4}}} \left(\pi^{\frac{\pi^2}{4} - 1} - (2x)^{\frac{\pi^2}{4} - 1}\right)$	$\frac{-\pi^2 + 2\pi + 4}{\pi^2 - 4} = 0.070461\dots$

Najbolje donje ograničenje funkcije sinc iz Teoreme 5.64 je isto kao i najbolje donje ograničenje iz Teoreme 5.65.

Tabela 5.2: Donja ograničenja funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$

Donje ograničenje funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$	Najveće odstupanje od funkcije sinc x na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$
$\frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^2}(\pi - 2x) < \frac{\sin x}{x}$	0.082395...
$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) < \frac{\sin x}{x}$	$\frac{\pi - 3}{\pi} = 0.045070\dots$
$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi^4}(\pi^3 - 8x^3) < \frac{\sin x}{x}$	$\frac{3\pi - 8}{3\pi} = 0.15117\dots$
$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5}(\pi^4 - 16x^4) < \frac{\sin x}{x}$	$\frac{2\pi - 5}{2\pi} = 0.20422\dots$
$\frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^{\frac{2}{\pi-2}+1}} \left(\pi^{\frac{2}{\pi-2}} - (2x)^{\frac{2}{\pi-2}}\right) < \frac{\sin x}{x}$	0.0085153...

Optimalnije aproksimacije funkcije $\operatorname{sinc} x$ dobijene su određivanjem minimaks aproksimanata odgovarajućih familija funkcija.

Tabela 5.3: Minimaks aproksimacije funkcije $\operatorname{sinc} x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$

Minimaks aproksimacija funkcije $\operatorname{sinc} x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$	Najveće odstupanje od funkcije $\operatorname{sinc} x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.13323... (\pi - 2x)$	0.055187...
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.036014... (\pi^2 - 4x^2)$	0.0079283...
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.010441... (\pi^3 - 8x^3)$	0.039635...
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.0031146... (\pi^4 - 16x^4)$	0.059981...
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.043803... (\pi^{1.84823...} - (2x)^{1.84823...})$	0.0026604...
$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{2}{\pi} + 0.051415... (\pi^{1.72287...} - (2x)^{1.72287...})$	0.0061296...

Zaključak i pravci budućeg istraživanja

Istraživanje u ovoj disertaciji ima nekoliko teorijskih matematičkih doprinosa, kao i neke doprinose računarske prirode.

Poseban značaj ove disertacije ogleda se u doprinosima razvoju teorije raslojenih familija funkcija. Uopšten je pojam raslojenosti i monotone raslojenosti familije funkcija nad nekim realnim skupom. Takođe, definisan je pojam najboljih konstanti u nejednakostima, razmatrane su neke osobine najboljih konstanti u nejednakostima i date su teoreme koje omogućavaju određivanje najboljih konstanti u nejednakostima. Data je teorema koja omogućava određivanje vrednosti parametara za koje su funkcije iz višeparametarske familije stalnog znaka na posmatranom intervalu. Na osnovu Nike teoreme, dokazana je Ogljedalska Nike teorema. Date su lema i teorema o jedinstvenosti minimaks aproksimanta za datu raslojenu familiju funkcija, kao i poboljšanja teoreme o postojanju i određivanju minimaks aproksimanta. Na osnovu osobina raslojenih familija funkcija, razvijen je Parametarski metod za dokazivanje nekih analitičkih nejednakosti. Po analogiji sa parametarskim metodom, razvijen je Novi parametarski metod za dokazivanje nekih nejednakosti i određivanje minimaks aproksimanta. Oba razvijena metoda omogućavaju određivanje najboljih konstanti u razmatranoj nejednakosti.

Na osnovu teorijskih doprinosa u vezi sa raslojenim familijama funkcija, razvijene su odgovarajuće strategije za primenu raslojenih familija funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti. Primenom Strategije za određivanje najboljih konstanti, dobijaju se najbolje konstante za odgovarajuće nejednakosti i mogu se izdvojiti sve funkcije iz familije koje su stalnog znaka na posmatranom intervalu. Strategija zasnovana na Nike teoremi omogućava određivanje vrednosti parametra za koju se dobija minimaks aproksimant familije. Primenom Strategije zasnovane na Parametarskom metodu i Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu, određuje se znak funkcija za sve vrednosti parametra za koje je familija raslojena. Pri tome, primenom Strategije zasnovane na Novom parametarskom metodu, dobija se i minimaks aproksimant familije. Navedene strategije se mogu primeniti na velikom broju nejednakosti, kao što je pokazano u Poglavlju 5.

Značajan doprinos disertacije predstavljaju i poboljšanja i uopštenja metoda za dokazivanje MTP nejednakosti iz Potpoglavlja 1.3. Intervali na kojima važe navišne i nanižne Tejlrove polinomske aproksimacije sinusne i kosinusne funkcije su prošireni sa konačnih na beskonačne i dokazane su neke teoreme o poretku ovih Tejlrovih polinoma. Metod je proširen tako da se nejednakosti mogu dokazati ne samo na intervalu $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}^+$, već i na proizvoljnom konačnom intervalu. Zbog toga su predložena tri načina dokazivanja: Dokazivanje translacijom, Dokazivanje simetrijom i Dokazivanje deljenjem intervala. Takođe, metod je proširen tako da se može primeniti i na neke novouvedene klase nejednakosti: MEP nejednakosti, kao i neka uopštenja MTP i MEP nejednakosti. Na osnovu ovog metoda, razvijen je i novi metod za dokazivanje MHTP nejednakosti i nekih uvedenih uopštenja MHTP nejednakosti. Takođe, dati su i metodi za izolovanje nula i ekstremuma funkcija iz razmatranih klasa.

Na osnovu metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti, razvijen je i implementiran sistem za automatsko dokazivanje nejednakosti sa funkcijama iz klase \mathcal{M} , koja uključuje MTP funkcije, MEP funkcije, kao i neka uopštenja i konačne zbirove ovih funkcija.

Jedan od problema prilikom razvoja dokazivača bio je formulisanje algoritma za aproksimaciju realnih funkcija koje se javljaju u polaznoj nejednakosti odgovarajućim Tejlrorovim polinomima tako da se, ako postoji, odredi polinomska aproksimacija koja je dovoljna za dokaz zadate nejednakosti. Sa ciljem rešavanja ovog problema, analiziran je poredak Tejlrorovih razvoja razmatarnih realnih funkcija i dato je nekoliko strategija: Strategija za redukovanje broja indeksa grupisanjem sabiraka polazne funkcije, Strategija simultanog uvećavanja vrednosti indeksa, Strategija za smanjenje stepena polinomske aproksimacije i Strategija postepenog uvećavanja vrednosti indeksa.

Sistem je implementiran na osnovu Algoritama 1–5. U Algoritmu 1 traži se potencijalni kontraprimer. U Algoritmu 2 vrši se transformacija posmatrane funkcije u zapis preko višestrukih uglova, kao i primena metoda Dokazivanje translacijom, Dokazivanje simetrijom i Dokazivanje deljenjem intervala, uz pozivanje Algoritma 3. U Algoritmu 3 se, primenom Strategije za redukovanje broja indeksa i Strategije postepenog uvećavanja vrednosti indeksa, određuju nanižne polinomske aproksimacije zadate funkcije na zadatom intervalu, pri čemu se pozitivnost dobijenih aproksimacija ispituje primenom Algoritma 4. U Algoritmu 4 se određuje nanižna polinomska aproksimacija sa racionalnim koeficijentima za zadati polinom ako taj polinom ima iracionalne koeficijente i poziva se Algoritam 5. U Algoritmu 5 se, primenom Šturmove teoreme, proverava pozitivnost zadatog polinoma na zadatom intervalu.

Razvijeni sistem može u prihvatljivom vremenu da dokaže nejednakosti iz klase \mathcal{M} koje bi čovek zbog obima posla sporo i/ili veoma teško dokazivao. Pri tome, dokazi koje sistem generiše prikazuju se na ekranu u stilu koji je razumljiv i blizak ljudskom načinu pisanja dokaza, što olakšava i razumevanje i verifikaciju dokaza.

Sistem je uspešno dokazao veći broj nejednakosti iz radova koji su objavljeni u časopisima sa JCR liste, a testiran je i na nejednakostima koje nisu tačne, za koje je nalazio kontraprimer. Ako sistem ne uspe ni da generiše dokaz ni da pronađe kontraprimer, korisnik se o tome obaveštava i pruža mu se mogućnost da promeni postavke sistema i započne ceo ciklus traženja dokaza/kontraprimera iz početka.

Pored dokazivanja nejednakosti, implementirani sistem se može koristiti i za izolovanje intervala koji sadrže nule ili ekstremume funkcija iz klase \mathcal{M} .

Primenom koncepta raslojenosti i razvijenog dokazivača, poboljšane su nejednakosti iz [52, 63, 66, 83, 85, 89, 91, 102, 129, 141, 165, 166, 174, 176, 202, 218, 222, 224, 230] i dobijene su nove nejednakosti i aproksimacije. Na sličan način se mogu poboljšati i mnoge druge nejednakosti u teoriji analitičkih nejednakosti. Razvijeni dokazivač može se koristiti za rešavanje otvorenih problema koji su rešeni u [24] primenom sistema SimTheP, kao i za dokazivanje brojnih analitičkih nejednakosti [10, 13–20, 22, 23, 25–27, 29–31, 33–35, 37, 38, 40, 41, 44–47, 49–51, 53–56, 58, 64, 69, 78, 80, 81, 85, 89–91, 100–103, 106, 110, 112, 114, 115, 119–129, 133–138, 140–142, 146–148, 155, 167, 169, 174, 175, 177, 179, 181, 196, 198, 202, 208–210, 213, 214, 218, 221–224, 226, 227, 229, 230].

Analiza raslojenih familija funkcija se pokazala kao dobra tehnika za dokazivanje, uopštavanje i formiranje novih analitičkih nejednakosti i određivanje optimalnih (minimaks) aproksimacija. Automatizacija procesa dokazivanja nejednakosti sa funkcijama iz klase \mathcal{M} jedan je doprinos teoriji analitičkih nejednakosti, a takođe i doprinos primeni teorije raslojenih familija funkcija u matematici i inženjerstvu.

Pravci budućeg istraživanja. Jedan od pravaca budućeg istraživanja biće dalji razvoj teorije i primene raslojenih familija funkcija. Posebno se očekuje dalje razmatranje višeparametarskih familija funkcija i dokazivanje novih nejednakosti i aproksimacija.

Drugi pravac budućeg rada biće proširenje metoda i sistema za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti tako da se omogući i dokazivanje novih klasa nejednakosti koje, pored

sinusne, kosinusne i eksponencijalne, sadrže još neke realne funkcije. Nanižne i navišne polinomske aproksimacije takvih funkcija određivaćemo primenom Tejlorovih razvoja, duplih Tejlorovih razvoja [21, 117, 118, 130] i razvoja koji su dostupni u raznim matematičkim enciklopedijama [1, 75].

U planu je da se, putem interneta, omogući javna dostupnost razvijenog sistema. Očekuje se i formalno dokazivanje saglasnosti razvijenog sistema, kao i dokazivanje potpunosti metoda za dokazivanje nejednakosti svođenjem na polinomske nejednakosti za funkcije iz klase \mathcal{M} na konačnim intervalima.

Literatura

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964.
- [2] G. T. F. DE ABREU, *Jensen-cotes upper and lower bounds on the gaussian Q -function and related functions*, IEEE Transactions on Communications **57**:11 (2009), 3328–3338.
- [3] G. T. F. DE ABREU, *Arbitrarily Tight Upper and Lower Bounds on the Gaussian Q -Function and Related Functions*, 2009 IEEE International Conference on Communications, Dresden, Germany, 14–18 June 2009, pp. 6.
- [4] D. AHARONOV, U. ELIAS, *More Jordan type inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications **17**:4 (2014), 1563–1577.
- [5] B. AKBARPOUR, L. C. PAULSON, *Towards Automatic Proofs of Inequalities Involving Elementary Functions*, In: B. COOK, R. SEBASTIANI (eds.), Pragmatics of Decision Procedures in Automated Reasoning, PDPAR 2006, 27–37.
- [6] B. AKBARPOUR, L. C. PAULSON, *Extending a Resolution Prover for Inequalities on Elementary Functions*, In: N. DERSHOWITZ, A. VORONKOV (eds.), Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR 2007, Lecture Notes in Computer Science, vol. 4790, Springer, 47–61.
- [7] B. AKBARPOUR, L. C. PAULSON, *MetiTarski: An Automatic Prover for the Elementary Functions*, In: S. AUTEXIER, J. CAMPBELL, J. RUBIO, V. SORGE, M. SUZUKI, F. WIEDIJK (eds.), Intelligent Computer Mathematics, CICM 2008, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5144, Springer, 217–231.
- [8] B. AKBARPOUR, L. C. PAULSON, *Applications of MetiTarski in the Verification of Control and Hybrid Systems*, In: R. MAJUMDAR, P. TABUADA (eds.), Hybrid Systems: Computation and Control, HSCC 2009, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5469, Springer, 1–15.
- [9] B. AKBARPOUR, L. C. PAULSON, *MetiTarski: An Automatic Theorem Prover for Real-Valued Special Functions*, Journal of Automated Reasoning **44**:3 (2010), 175–205.
- [10] H. ALZER, M. K. KWONG, *A refinement of Vietoris' inequality for cosine polynomials*, Analysis and Applications **14**:5 (2016), 615–629.
- [11] H. ALZER, M. K. KWONG, *Sharp upper and lower bounds for a sine polynomial*, Applied Mathematics and Computation **275** (2016), 81–85.
- [12] H. ALZER, M. K. KWONG, *On Jordan's inequality*, Periodica Mathematica Hungarica **77**:2 (2018), 191–200.

- [13] H. ALZER, M. K. KWONG, *On two trigonometric inequalities of Askey and Steinig*, New York Journal of Mathematics **26** (2020), 28–36.
- [14] H. ALZER, M. K. KWONG, *Inequalities for trigonometric sums*, The Journal of Analysis **32**:3 (2024), 1801–1817.
- [15] Y. J. BAGUL, B. BANJAC, C. CHESNEAU, M. KOSTIĆ, B. MALEŠEVIĆ, *New Refinements of Cusa-Huygens Inequality*, Results in Mathematics **76**:2 (2021), 107, pp. 16.
- [16] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, *Refined forms of Oppenheim and Cusa-Huygens type inequalities*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica **24**:2 (2020), 183–194.
- [17] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, *Generalized bounds for sine and cosine functions*, Asian-European Journal of Mathematics **15**:1 (2022), 2250012, pp. 16.
- [18] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, *Sharp Extensions of a Cusa-Huygens Type Inequality*, Armenian Journal of Mathematics **16**:14 (2024), 1–12.
- [19] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, M. KOSTIĆ, *The Cusa-Huygens inequality revisited*, Novi Sad Journal of Mathematics **50**:2 (2020), 149–159.
- [20] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, M. KOSTIĆ, *On the Cusa-Huygens inequality*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas **115**:1 (2021), 29, pp. 12.
- [21] Y. J. BAGUL, C. CHESNEAU, M. KOSTIĆ, T. LUTOVAC, B. MALEŠEVIĆ, M. RAŠAJSKI, *Convexity and double-sided Taylor's approximations*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **52**:3 (2023), 560–571.
- [22] Y. J. BAGUL, R. M. DHAIGUDE, M. KOSTIĆ, C. CHESNEAU, *Polynomial-Exponential Bounds for Some Trigonometric and Hyperbolic Functions*, Axioms **10**:4 (2021), 308, pp. 10.
- [23] Y. J. BAGUL, W.-S. DU, *On New Generalized Mitrinović-Adamović-Type Inequalities*, Mathematics **13**:7 (2025), 1174, pp. 18.
- [24] B. BANJAC, *Sistem za automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet, 2019, <https://nardus.mpn.gov.rs>
- [25] B. BANJAC, T. LUTOVAC, B. MALEŠEVIĆ, *Kuzina minimaks aproksimacija*, The Second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Serbia, 16–17 June 2017, pp. 6.
- [26] B. BANJAC, M. MAKRAGIĆ, B. MALEŠEVIĆ, *Some Notes on a Method for Proving Inequalities by Computer*, Results in Mathematics **69**:1-2 (2016), 161–176.
- [27] B. BANJAC, B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, M. SAVATOVIĆ, *The best possible constants approach for Wilker-Cusa-Huygens inequalities via stratification*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **18**:1 (2024), 244–288.
- [28] C. BARBU, L.-I. PIȘCORAN, *Jordan type inequalities using monotony of functions*, Journal of Mathematical Inequalities **8**:1 (2014), 83–89.
- [29] G. BERCU, *The natural approach of trigonometric inequalities - Padé approximant*, Journal of Mathematical Inequalities **11**:1 (2017), 181–191.

- [30] G. BERCU, *Fourier series method related to Wilker-Cusa-Huygens inequalities*, *Mathematical Inequalities & Applications* **22**:4 (2019), 1091–1098.
- [31] G. BERCU, *Refinements of Wilker-Huygens-Type Inequalities via Trigonometric Series*, *Symmetry* **13**:8 (2021), 1323, pp. 13.
- [32] G. BERCU, *Refinements of Huygens-Wilker-Lazarović inequalities via the hyperbolic cosine polynomials*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **16**:1 (2022), 91–110.
- [33] G. BERCU, V. DRINCEANU, C. MORTICI, M. MIĆOVIĆ, *Advances in Mitrinović–Adamović-type inequalities*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **20**:1 (2026), 239–252.
- [34] B. A. BHAYO, R. KLÉN, J. SÁNDOR, *New Trigonometric And Hyperbolic Inequalities*, *Miskolc Mathematical Notes* **18**:1 (2017), 125–137.
- [35] B. A. BHAYO, J. SÁNDOR, *On classical inequalities of trigonometric and hyperbolic functions*, arXiv (2014), preprint, arXiv:1405.0934, pp. 59.
- [36] J. P. BRIDGE, L. C. PAULSON, *Case Splitting in an Automatic Theorem Prover for Real-Valued Special Functions*, *Journal of Automated Reasoning* **50**:1 (2013), 99–117.
- [37] P. BULLEN, *Dictionary of Inequalities*, 2nd ed., Taylor & Francis Group, 2015.
- [38] B. CHAOUCHI, V. E. FEDOROV, M. KOSTIĆ, *Monotonicity of certain classes of functions related with Cusa-Huygens inequality*, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal* **6**:3 (2021), 331–337.
- [39] C.-P. CHEN, L. DEBNATH, *Sharpness and generalization of Jordan’s inequality and its application*, *Applied Mathematics Letters* **25**:3 (2012), 594–599.
- [40] C.-P. CHEN, N. ELEZOVIĆ, *Sharp Redheffer-type and Becker-Stark-type inequalities with an application*, *Mathematical Inequalities & Applications* **21**:4 (2018), 1059–1078.
- [41] S. CHEN, X. GE, *A solution to an open problem for Wilker-type inequalities*, *Journal of Mathematical Inequalities* **15**:1 (2021), 59–65.
- [42] S. CHEN, X. GE, *Square-free factorization of mixed trigonometric-polynomials*, *Journal of Classical Analysis* **22**:1 (2023), 45–53.
- [43] R. CHEN, H. LI, B. XIA, T. ZHAO, T. ZHENG, *Isolating all the real roots of a mixed trigonometric-polynomial*, *Journal of Symbolic Computation* **121** (2024), 102250.
- [44] S. CHEN, Z. LIU, *Automated proving of trigonometric function inequalities using Taylor expansion*, *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences* **36**:8 (2016), 1339–1348. (in Chinese)
- [45] S. CHEN, Z. LIU, *Automated proof of mixed trigonometric-polynomial inequalities*, *Journal of Symbolic Computation* **101** (2020), 318–329.
- [46] C.-P. CHEN, B. MALEŠEVIĆ, *Inequalities related to certain inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **114**:2 (2020), 105, pp. 11.
- [47] C.-P. CHEN, B. MALEŠEVIĆ, *A method to prove inequalities and its applications*, *Journal of Mathematical Inequalities* **16**:3 (2022), 923–945.

- [48] C.-P. CHEN, B. MALEŠEVIĆ, *Sharp inequalities related to the Adamović-Mitrinović, Cusa, Wilker and Huygens results*, *Filomat* **37**:19 (2023), 6319–6334.
- [49] C.-P. CHEN, C. MORTICI, *The relationship between Huygens' and Wilker's inequalities and further remarks*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **17**:1 (2023), 92–100.
- [50] C.-P. CHEN, R. B. PARIS, *On the Wilker and Huygens-type inequalities*, *Journal of Mathematical Inequalities* **14**:3 (2020), 685–705.
- [51] C.-P. CHEN, F. QI, *Inequalities of some trigonometric functions*, *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika* **15** (2004), 72–79.
- [52] C. CHESNEAU, Y. J. BAGUL, R. M. DHAIGUDE, *On Simple Polynomial Bounds for the Exponential Function*, *Asia Pacific Journal of Mathematics* **9** (2022), 6, pp. 7.
- [53] A. R. CHOUIKHA, *New sharp inequalities related to classical trigonometric inequalities*, *Journal of Inequalities and Special Functions* **11**:4 (2020), 27–35.
- [54] A. R. CHOUIKHA, *Other approaches related to Huygens trigonometric inequalities*, *Letters in Nonlinear Analysis and its Applications* **1**:4 (2023), 191–202.
- [55] A. R. CHOUIKHA, *Sharp inequalities related to Wilker results*, *Open Journal of Mathematical Sciences* **7** (2023), 19–34.
- [56] A. R. CHOUIKHA, *On natural approaches related to classical trigonometric inequalities*, *Open Journal of Mathematical Sciences* **7** (2023), 299–320.
- [57] A. R. CHOUIKHA, *On the 1-Parameter Trigonometric and Hyperbolic Inequalities Chains*, In: M. I. ANDRIYCHUK (ed.), *Exploring the Benefits of Numerical Simulation and Modelling*, IntechOpen, 2025.
- [58] A. R. CHOUIKHA, C. CHESNEAU, *Contributions to trigonometric 1-parameter inequalities*, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* **73**:2 (2025), 143–168.
- [59] A. R. CHOUIKHA, C. CHESNEAU, Y. J. BAGUL, *Some refinements of well-known inequalities involving trigonometric functions*, *Journal of the Ramanujan Mathematical Society* **36**:3 (2021), 193–202.
- [60] S. COWARD, L. C. PAULSON, T. DRANE, E. MORINI, *Formal Verification of Transcendental Fixed- and Floating-point Algorithms using an Automatic Theorem Prover*, *Formal Aspects of Computing* **34**:2 (2022), 9, pp. 22.
- [61] N. CUTLAND, *Computability: An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, 1980.
- [62] T. DANTZIG, *On the Approximate Division of a Circumference*, *The American Mathematical Monthly* **35**:4 (1928), 185–187.
- [63] J. D' AURIZIO, *Refinements of the Shafer-Fink inequality of arbitrary uniform precision*, *Mathematical Inequalities & Applications* **17**:4 (2014), 1487–1498.
- [64] L. DEBNATH, C. MORTICI, L. ZHU, *Refinements of Jordan-Stečkin and Becker-Stark Inequalities*, *Results in Mathematics* **67**:1 (2015), 207–215.
- [65] DEEPSEEK-AI, *DeepSeek*, large language model, 2024, <https://www.deepseek.com> (pristupano septembra 2025. godine)

- [66] K. DENG, *The noted Jordan's inequality and its extensions*, Journal of Xiangtan Mining Institute **10**:4 (1995), 60–63. (in Chinese)
- [67] W. DENMAN, B. AKBARPOUR, S. TAHAR, M. H. ZAKI, L. C. PAULSON, *Formal verification of analog designs using MetiTarski*, 2009 Formal Methods in Computer-Aided Design, Austin, TX, USA, 15–18 November 2009, 93–100.
- [68] DESMOS STUDIO, *Desmos API v1.11*, <https://www.desmos.com/api/v1.11> (pristupano septembra 2025. godine)
- [69] R. M. DHAIGUDE, C. CHESNEAU, Y. J. BAGUL, *About Trigonometric-polynomial Bounds of Sinc Function*, Mathematical Sciences and Applications E-Notes **8**:1 (2020), 100–104.
- [70] B. DONG, B. YU, Y. YU, *A symmetric homotopy and hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems*, Mathematics of Computation, **83**:288 (2014), 1847–1868.
- [71] A. M. FINK, *Two inequalities*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika **6** (1995), 48–49.
- [72] A. M. FINK, *An Essay on the History of Inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **249**:1 (2000), 118–134.
- [73] J. S. FRAME, *Some Trigonometric, Hyperbolic and Elliptic Approximations*, The American Mathematical Monthly **61**:9 (1954), 623–626.
- [74] GOOGLE, *Angular*, web application framework, 2016, <https://angular.dev> (pristupano septembra 2025. godine)
- [75] I. S. GRADSHTEYN, I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed., Academic Press, 2007.
- [76] M. GRINBERG, *Flask Web Development: Developing Web Applications with Python*, O'Reilly Media, Inc., 2014.
- [77] B.-N. GUO, Q.-M. LUO, F. QI, *Sharpening and generalizations of Shafer-Fink's double inequality for the arc sine function*, Filomat **27**:2 (2013), 261–265.
- [78] B.-N. GUO, B.-M. QIAO, F. QI, W. LI, *On new proofs of Wilker's inequalities involving trigonometric functions*, Mathematical Inequalities & Applications **6**:1 (2003), 19–22.
- [79] S.-O. HAN, J. ADKISSON, M. STUFFLEBEAM, *MathQuill*, open source formula editor for the Web, <http://mathquill.com> (pristupano septembra 2025. godine)
- [80] Y. HU, C. MORTICI, *A Lower Bound on the Sinc Function and Its Application*, The Scientific World Journal **2014** (2014), Article ID 571218, pp. 4.
- [81] Y. HUA, *Sharp Wilker and Huygens type inequalities for trigonometric and hyperbolic functions*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **45**:3 (2016), 731–741.
- [82] L.-G. HUANG, L. YIN, *Cusa-Huygens type inequality and a correction for generalized trigonometric functions*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics **48** (2022), 641–649.
- [83] L.-C. HUNG, P.-Y. LI, *On generalization of D'Aurizio-Sándor inequalities involving a parameter*, Journal of Mathematical Inequalities **12**:3 (2018), 853–860.

- [84] J. HURD, *Metis first order prover*, 2007, <http://gilith.com/software/metis> (pristupano septembra 2025. godine)
- [85] D. Q. HUY, P. T. HIEU, D. T. T. VAN, *New sharp bounds for sinc and hyperbolic sinc functions via cos and cosh functions*, *Afrika Matematika* **35**:2 (2024), 38, pp. 13.
- [86] C. HUYGENS, *De Circuli Magnitudine Inventa*, apud Johannem et Danielelem Elzevier, 1654.
- [87] P. JANIČIĆ, M. NIKOLIĆ, *Veštačka inteligencija*, 5. izdanje, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2025.
- [88] J. JEKL, *Wilker's, Cusa-Huygens', and Fink-Mortici's type inequalities for parabolic trigonometric functions*, *Journal of Mathematical Inequalities* **19**:1 (2025), 65–80.
- [89] W.-D. JIANG, *New sharp inequalities of Mitrinović-Adamović type*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **17**:1 (2023), 76–91.
- [90] W.-D. JIANG, Q.-M. LUO, F. QI, *Refinements and Sharpening of some Huygens and Wilker Type Inequalities*, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory* **2**:4 (2014), 134–139.
- [91] W. D. JIANG, H. YUN, *Sharpening of Jordan's inequality and its applications*, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* **7**:3 (2006), 102, pp. 4.
- [92] L. JIAO, B. DONG, B. YU, *Efficiently counting affine roots of mixed trigonometric polynomial systems*, *Journal of Systems Science and Complexity* **30**:4 (2017), 967–982.
- [93] N. KASUGA, M. NAKASUJI, Y. NISHIZAWA, T. SEKINE, *Sharped Jordan's type inequalities with exponential approximations*, *Journal of Mathematical Inequalities* **17**:4 (2023), 1539–1550.
- [94] KHAN ACADEMY, *KaTeX*, math typesetting library for the web, <https://katex.org> (pristupano septembra 2025. godine)
- [95] R. KLÉN, M. VUORINEN, X. ZHANG, *Inequalities for the generalized trigonometric and hyperbolic functions*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **409**:1 (2014), 521–529.
- [96] S. G. KRANTZ, H. R. PARKS, *A Primer of Real Analytic Functions*, 2th ed., Birkhäuser, 2002.
- [97] M. K. KWONG, *An improved Vietoris sine inequality*, *Journal of Approximation Theory* **189** (2015), 29–42.
- [98] *latex2sympy2*, LaTeX to SymPy form converter, <https://pypi.org/project/latex2sympy2> (pristupano septembra 2025. godine)
- [99] J.-L. LI, *An identity related to Jordan's inequality*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **2006**:1 (2006), Article ID 76782, pp. 6.
- [100] W.-H. LI, B.-N. GUO, *Several inequalities for bounding sums of two (hyperbolic) sine cardinal functions*, *Filomat* **38**:11 (2024), 3937–3943.
- [101] W.-H. LI, B.-N. GUO, *Several sharp inequalities involving (hyperbolic) tangent, tanc, cosine, and their reciprocals*, *Mathematica Slovaca* **74**:6 (2024), 1433–1444.
- [102] J.-L. LI, Y.-L. LI, *On the Strengthened Jordan's Inequality*, *Journal of Inequalities and Applications* **2007**:1 (2008), Article ID 74328, pp. 8.

- [103] W.-H. LI, F. QI, *Several new Huygens type inequalities*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **20**:1 (2026), 61–80.
- [104] B. LIU, N. QI, X. ZENG, L. DEHBI, Z. YANG, *Automated Proof of Polynomial Inequalities via Reinforcement Learning*, 2025 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Nashville, TN, USA, 2025, 5052–5060.
- [105] N. LORD, 106.19 *Some observations on inequalities related to Huygens' inequality*, *The Mathematical Gazette* **106**:566 (2022), 316–318.
- [106] T. LUTOVAC, B. MALEŠEVIĆ, C. MORTICI, *The natural algorithmic approach of mixed trigonometric-polynomial problems*, *Journal of Inequalities and Applications* **2017**:1 (2017), 116, pp. 16.
- [107] M. MAKRAGIĆ, *A method for proving some inequalities on mixed hyperbolic–trigonometric polynomial functions*, *Journal of Mathematical Inequalities* **11**:3 (2017), 817–829.
- [108] B. MALEŠEVIĆ, *Application of λ -method on Shafer-Fink's inequality*, *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika* **8** (1997), 103–105.
- [109] B. MALEŠEVIĆ, *An application of λ -method on inequalities of Shafer–Fink's type*, *Mathematical Inequalities & Applications* **10**:3 (2007), 529–534.
- [110] B. MALEŠEVIĆ, B. BANJAC, *Automated Proving Mixed Trigonometric Polynomial Inequalities*, 2019 27th Telecommunications Forum (TELFOR), Belgrade, Serbia, 26–27 November 2019, pp. 2.
- [111] B. MALEŠEVIĆ, B. BANJAC, *One method for proving polynomial inequalities with real coefficients*, 2020 28th Telecommunications Forum (TELFOR), Belgrade, Serbia, 24–25 November 2020, pp. 3.
- [112] B. MALEŠEVIĆ, B. BANJAC, I. JOVOVIĆ, *A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions*, *Journal of Mathematical Inequalities* **11**:1 (2017), 151–162.
- [113] B. MALEŠEVIĆ, B. BANJAC, V. ŠEŠUM-ČAVIĆ, N. KOROLIJA, *One algorithm for testing annulling of mixed trigonometric polynomial functions on boundary points*, 2022 30th Telecommunications Forum (TELFOR), Belgrade, Serbia, 15–16 November 2022, pp. 3.
- [114] B. MALEŠEVIĆ, D. JOVANOVIĆ, *Frame's Types of Inequalities and Stratification*, *CUBO, A Mathematical Journal* **26**:1, (2024), 1–19.
- [115] B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, B. BANJAC, *A proof of an open problem of Yusuke Nishizawa for a power-exponential function*, *Journal of Mathematical Inequalities* **12**:2 (2018), 473–485.
- [116] B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, B. BANJAC, *One Method for Proving Some Classes of Exponential Analytical Inequalities*, *Filomat* **32**:20 (2018), 6921–6925.
- [117] B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, M. RAŠAJSKI, B. BANJAC, *Double-sided Taylor's Approximations and Their Applications in Theory of Trigonometric Inequalities*, In: A. RAIGORODSKII, M. RASSIAS (eds.), *Trigonometric Sums and Their Applications*, Springer, 2020, pp. 159–167.
- [118] B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, M. RAŠAJSKI, B. BANJAC, *Error-functions in double-sided Taylor's approximations*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **14**:3 (2020), 599–613.

- [119] B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, M. RAŠAJSKI, C. MORTICI, *Extensions of the natural approach to refinements and generalizations of some trigonometric inequalities*, Advances in Difference Equations **2018**:1 (2018), 90, pp. 15.
- [120] B. MALEŠEVIĆ, M. MAKRAGIĆ, *A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions*, Journal of Mathematical Inequalities **10**:3 (2016), 849–876.
- [121] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, *Exponential Polynomials and Stratification in the Theory of Analytic Inequalities*, Journal of Science and Arts **23**:3 (2023), 659–670.
- [122] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, D. JOVANOVIĆ, *New Cusa-Huygens inequalities and approximations*, Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics **6**:3 (2024), Article ID: MTJPAM-D-24-00221, 375–386.
- [123] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, T. LUTOVAC, *New Inequalities and Approximations of Cusa–Huygens Type*, Axioms **14**:12 (2025), 920, pp. 20.
- [124] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, *A Parametric Method for Proving Some Analytic Inequalities*, Axioms **13**:8 (2024), 520, pp. 23.
- [125] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, T. LUTOVAC, *A new approach to selecting constants for some analytic inequalities*, Journal of Mathematical Inequalities **19**:1 (2025), 223–245.
- [126] B. MALEŠEVIĆ, M. MIĆOVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, T. LUTOVAC, V. ŠEŠUM-ČAVIĆ, *The best constants in some new sharp bounds for sinc function*, Afrika Matematika **36**:2 (2025), 81, pp. 16.
- [127] B. MALEŠEVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, *A minimax approximant in the theory of analytic inequalities*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **15**:2 (2021), 486–509.
- [128] B. MALEŠEVIĆ, B. MIHAILOVIĆ, M. NENEZIĆ JOVIĆ, M. MIĆOVIĆ, L. MILINKOVIĆ, *Some generalisations and minimax approximants of D’Aurizio trigonometric inequalities*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica **16**, 2 (2024), 263–277.
- [129] B. MALEŠEVIĆ, M. NENEZIĆ, L. ZHU, B. BANJAC, M. PETROVIĆ, *Some new estimates of precision of Cusa-Huygens and Huygens approximations*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **15**:1 (2021), 243–259.
- [130] B. MALEŠEVIĆ, M. RAŠAJSKI, T. LUTOVAC, *Double-Sided Taylor’s Approximations and Their Applications in Theory of Analytic Inequalities*, In: D. ANDRICA, T. RASSIAS (eds.), *Differential and Integral Inequalities*, Springer Optimization and Its Applications, vol. 151, Springer, 2019, pp. 569–582.
- [131] A. MEURER, et al., *SymPy: symbolic computing in Python*, PeerJ Computer Science **3** (2017), e103, pp. 27.
- [132] M. MIĆOVIĆ, I. JOVOVIĆ, *Edukativni aplet za računanje korena polinoma stepena manjeg od pet*, 2022 30th Telecommunications Forum (TELFOR), Belgrade, Serbia, 15–16 November 2022, pp. 4.
- [133] M. MIĆOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ, *Jordan-Type Inequalities and Stratification*, Axioms **13**:4 (2024), 262, pp. 25.
- [134] M. MIĆOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ, M. KARAPETROVIĆ, T. LUTOVAC, *New Polynomial-Exponential Bounds for Some Trigonometric Functions*, ResearchGate (2026), preprint.

- [135] M. MIĆOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ, T. LUTOVAC, B. MIHAILOVIĆ, *A novel parametric method for proving some analytic inequalities and determining minimax approximations*, Journal of Mathematical Inequalities **19**:4 (2025), 1327–1347.
- [136] M. MIĆOVIĆ, B. MALEŠEVIĆ, L. ZHU, *An Approach to Selecting Constants for Some Multi-Parameter Analytic Inequalities*, ResearchGate (2026), preprint.
- [137] G. V. MILOVANOVIĆ, M. TH. RASSIAS (eds.), *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions*, Springer, 2014.
- [138] D. S. MITRINOVIĆ, *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, 1970.
- [139] D. S. MITRINOVIĆ, D. D. ADAMOVIĆ, *Sur une inégalité élémentaire où interviennent des fonctions trigonométriques*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika (1965), 149, 23–34.
- [140] S. R. MONDAL, K. S. NISAR, T. ABDELJAWAD, *On the Study of Trigonometric Polynomials Using Strum Sequence*, Journal of Mathematics **2020** (2020), Article ID 7068176, pp. 8.
- [141] C. MORTICI, *The natural approach of Wilker-Cusa-Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications **14**:3 (2011), 535–541.
- [142] C. MORTICI, *A subtly analysis of Wilker inequality*, Applied Mathematics and Computation **231** (2014), 516–520.
- [143] K. NANTOMAH, *Cusa-Huygens, Wilker and Huygens Type Inequalities for Generalized Hyperbolic Functions*, Earthline Journal of Mathematical Sciences **5**:2 (2021), 277–289.
- [144] R. NARAYANAN, B. AKBARPOUR, M. H. ZAKI, S. TAHAR, L. C. PAULSON, *Formal verification of analog circuits in the presence of noise and process variation*, 2010 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE 2010), Dresden, Germany, 8–12 March 2010, 1309–1312.
- [145] R. B. NELSEN, *Elementary Proofs of the Trigonometric Inequalities of Huygens, Cusa, and Wilker*, Mathematics Magazine **93**:4 (2020), 276–283.
- [146] M. NENEZIĆ JOVIĆ, *Raslojene familije funkcija u teoriji analitičkih nejednakosti sa primenom*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet, 2023, <https://nardus.mppn.gov.rs>
- [147] M. NENEZIĆ, B. MALEŠEVIĆ, C. MORTICI, *New approximations of some expressions involving trigonometric functions*, Applied Mathematics and Computation **283** (2016), 299–315.
- [148] E. NEUMAN, J. SÁNDOR, *On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker, and Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications **13**:4 (2010), 715–723.
- [149] T. NIPKOW, L. C. PAULSON, M. WENZEL, *Isabelle/HOL: A Proof Assistant for Higher-Order Logic*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2283, Springer, 2002.
- [150] D.-W. NIU, Z.-H. HUO, J. CAO, F. QI, *A general refinement of Jordan's inequality and a refinement of L. Yang's inequality*, Integral Transforms and Special Functions **19**:3 (2008), 157–164.

- [151] M. NOWICKA, A. WITKOWSKI, *New approach to the Huygens, Wilker, Cusa and Mitrinović–Adamović type inequalities*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics **72**:2 (2024), 119–125.
- [152] OPENAI, *ChatGPT*, large language model, 2022, <https://chatgpt.com> (pristupano septembra 2025. godine)
- [153] M. OTTO, J. THORNTON, *Bootstrap*, frontend toolkit, 2011, <https://getbootstrap.com> (pristupano septembra 2025. godine)
- [154] S. OWRE, S. RAJAN, J. M. RUSHBY, N. SHANKAR, M. SRIVAS, *PVS: Combining specification, proof checking, and model checking*, In: R. ALUR, T. A. HENZINGER (eds.), Computer Aided Verification, CAV 1996, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1102, Springer, 411–414.
- [155] A. Y. ÖZBAN, *A new refined form of Jordan’s inequality and its applications*, Applied Mathematics Letters **19**:2 (2006), 155–160.
- [156] G. O. PASSMORE, L. C. PAULSON, L. DE MOURA, *Real Algebraic Strategies for MetiTarski Proofs*, In: J. JEURING, et al. (eds.), Intelligent Computer Mathematics, CICM 2012, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7362, Springer, 358–370.
- [157] L. C. PAULSON, *MetiTarski: Past and Future*, In: L. BERINGER, A. FELTY (eds.), Interactive Theorem Proving, ITP 2012, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7406, Springer, 1–10.
- [158] L. C. PAULSON, *MetiTarski’s Menagerie of Cooperating Systems*, In: P. FONTAINE, C. RINGEISSEN, R. A. SCHMIDT (eds.), Frontiers of Combining Systems, FroCoS 2013, Lecture Notes in Computer Science, vol. 8152, Springer, 1–6.
- [159] L. C. PAULSON, *Automated theorem proving for special functions: the next phase*, Proceedings of the 2014 Symposium on Symbolic-Numeric Computation (SNC), Shanghai, China, 28–31 July 2014, 3–8.
- [160] L. C. PAULSON, *The MetiTarski Theorem Prover*, Computer Laboratory, University of Cambridge, <https://www.cl.cam.ac.uk/~lp15/papers/Arith> (pristupano septembra 2025. godine)
- [161] I. PINELIS, *L’Hospital type rules for monotonicity, with applications*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics **3**:1 (2002), 5, pp. 5.
- [162] I. PINELIS, *Huygens’ final unproved inequality*, Mathoverflow, 23 July 2024, <https://mathoverflow.net/questions/475597>
- [163] B. POONEN, *Undecidable problems: a sampler*, In: J. KENNEDY (ed.), *Interpreting Gödel: Critical essays*, Cambridge University Press, 2014, pp. 211–241.
- [164] E. C. POPA, *A note on Jordan’s inequality*, General Mathematics **28**:2 (2020), 97–102.
- [165] F. QI, *Extensions and Sharpenings of Jordan’s and Kober’s Inequality*, Journal of Mathematics for Technology **12**:4 (1996), 98–102. (in Chinese)
- [166] F. QI, B.-N. GUO, *On generalizations of Jordan’s inequality*, Coal Higher Education, supplement (1993), 32–33. (in Chinese)

- [167] F. QI, D.-W. NIU, B.-N. GUO, *Refinements, Generalizations, and Applications of Jordan's Inequality and Related Problems*, Journal of Inequalities and Applications **2009**:1 (2009), Article ID 271923, pp. 52.
- [168] G. QIAN, X.-D. CHEN, *Improved bounds of Mitrinović-Adamović-type inequalities by using two-parameter functions*, Journal of Inequalities and Applications **2023**:1 (2023), 25, pp. 21.
- [169] Q.-X. QIAO, C.-P. CHEN, *Approximations to inverse tangent function*, Journal of Inequalities and Applications **2018**:1 (2018), 141, pp. 14.
- [170] G. RAHMATOLLAHI, G. ABREU, *Closed-Form Hop-Count Distributions in Random Networks with Arbitrary Routing*, IEEE Transactions on Communications **60**:2 (2012), 429–444.
- [171] M. RAŠAJSKI, T. LUTOVAC, B. MALEŠEVIĆ, *Sharpening and generalizations of Shafer-Fink and Wilker type inequalities: a new approach*, Journal of Nonlinear Sciences and Applications **11**:7 (2018), 885–893.
- [172] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [173] J. SÁNDOR, *Sharp Cusa–Huygens and related inequalities*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **19**:1 (2013), 50–54.
- [174] J. SÁNDOR, *On D'Aurizio's trigonometric inequality*, Journal of Mathematical Inequalities **10**:3 (2016), 885–888.
- [175] J. SÁNDOR, *Refinements of the Mitrinović–Adamović inequality, with application*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **23**:1 (2017), 4–6.
- [176] J. SÁNDOR, *Extensions of D'Aurizio's trigonometric inequality*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics **23**:2 (2017), 81–83.
- [177] J. SÁNDOR, *Variations on the Cusa-Huygens inequality*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics **28**:2 (2018), 177–186.
- [178] J. SÁNDOR, M. BENCZE, *On Huygen's Trigonometric Inequality*, Research Group in Mathematical Inequalities and Applications, Research Report Collection **8**:3 (2005), 14, pp. 4.
- [179] J. SÁNDOR, R. OLÁH-GÁL, *On Cusa-Huygens type trigonometric and hyperbolic inequalities*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica **4**:2 (2012), 145–153.
- [180] R. E. SHAFER, *Elementary Problems – E 1867*, The American Mathematical Monthly **73**:3 (1966), 309–309.
- [181] R. SHINDE, C. CHESNEAU, N. DARKUNDE, S. GHODECHOR, A. LAGAD, *Revisit of an Improved Wilker Type Inequality*, Pan-American Journal of Mathematics **2** (2023), 13, pp. 17.
- [182] J. C. F. STURM, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, Bulletin des Sciences de Ferussac **11** (1829), 419–425.
- [183] J. S. SUMNER, A. A. JAGERS, M. VOWE, J. ANGLÉSIO, *Inequalities Involving Trigonometric Functions*, The American Mathematical Monthly **98**:3 (1991), 264–267.
- [184] J.-L. SUN, C.-P. CHEN, *Sharp Wilker, Huygens, Adamović-Mitrinović, Cusa and Shafer-Fink type inequalities involving the sine integral*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **18**:2 (2024), 510–528.

- [185] J.-L. SUN, C.-P. CHEN, *Sharp Shafer-Fink, Lazarević and Cusa type inequalities for the Gudermannian and inverse Gudermannian functions*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **19**:1 (2025), 130–149.
- [186] Z. SUN, L. ZHU, *On New Wilker-Type Inequalities*, *ISRN Mathematical Analysis* **2011** (2011), Article ID 681702, pp. 7.
- [187] Z. J. SUN, L. ZHU, *Simple proofs of the Cusa-Huygens-type and Becker-Stark-type inequalities*, *Journal of Mathematical Inequalities* **7**:4 (2013), 563–567.
- [188] J. M. THOMAS, *Sturm's Theorem for Multiple Roots*, *National Mathematics Magazine* **15**:8 (1941), 391–394.
- [189] K. T. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen in Systematischer Darstellung*, BG Teubner, 1911, pp. 188–190.
- [190] J. C. VÁRILLY, M. B. VILLARINO, *Huygens and π* , SSRN (2024), preprint.
- [191] M.-K. WANG, M.-Y. HONG, Y.-F. XU, Z.-H. SHEN, Y.-M. CHU, *Inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic functions with one parameter*, *Journal of Mathematical Inequalities* **14**:1 (2020), 1–21.
- [192] C. WEI, M. SUN, W. WANG, *Proving Olympiad Algebraic Inequalities without Human Demonstrations*, *Advances in Neural Information Processing Systems 37*, Neural Information Processing Systems Foundation, Inc. (NeurIPS), 10–15 December 2024, Vancouver, Canada, pp. 82811–82822.
- [193] J. B. WILKER, *Elementary Problems – E3306*, *The American Mathematical Monthly* **96**:3 (1989), 55–55.
- [194] J. W. WRENCH, JR. with Editorial Note, *Queries-Replies No. 41*, *Mathematics of Computation* **3** (1949), 561–563.
- [195] S. WU, Á. BARICZ, *Generalizations of Mitrinović, Adamović and Lazarević's inequalities and their applications*, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **75**:3-4 (2009), 447–458.
- [196] Y. WU, G. BERCU, *New refinements of Becker-Stark and Cusa-Huygens inequalities via trigonometric polynomials method*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **115**:2 (2021), 87, pp. 12.
- [197] S. WU, L. DEBNATH, *A generalization of L'Hôpital-type rules for monotonicity and its application*, *Applied Mathematics Letters* **22**:2 (2009), 284–290.
- [198] S.-H. WU, S.-G. LI, M. BENCZE, *Sharpened versions of Mitrinović-Adamović, Lazarević and Wilker's inequalities for trigonometric and hyperbolic functions*, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* **9**:5 (2016), 2688–2696.
- [199] S.-H. WU, H. M. SRIVASTAVA, *A weighted and exponential generalization of Wilker's inequality and its applications*, *Integral Transforms and Special Functions* **18**:8 (2007), 529–535.
- [200] S.-H. WU, H. M. SRIVASTAVA, *A further refinement of Wilker's inequality*, *Integral Transforms and Special Functions* **19**:10 (2008), 757–765.
- [201] S.-H. WU, H.-P. YUE, Y.-P. DENG, Y.-M. CHU, *Several improvements of Mitrinović-Adamović and Lazarević's inequalities with applications to the sharpening of Wilker-type inequalities*, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* **9**:4 (2016), 1755–1765.

- [202] Y.-D. WU, Z.-H. ZHANG, *The Best Constant for an Inequality*, Victoria University Research Repository Collection **7** (2004)
- [203] xAI, *Grok*, large language model, 2024, <https://grok.com> (pristupano septembra 2025. godine)
- [204] Z.-H. YANG, *Refinements of a two-sided inequality for trigonometric functions*, Journal of Mathematical Inequalities **7**:4 (2013), 601–615.
- [205] Z.-H. YANG, Y.-M. CHU, *A Note on Jordan, Adamović-Mitrinović, and Cusa Inequalities*, Abstract and Applied Analysis **2014**:1 (2014), Article ID 364076, pp. 12.
- [206] Z.-H. YANG, Y.-M. CHU, Y.-Q. SONG, Y.-M. LI, *A Sharp Double Inequality for Trigonometric Functions and Its Applications*, Abstract and Applied Analysis **2014**:1 (2014), Article ID 592085, pp. 9.
- [207] B. YU, B. DONG, *A Hybrid Polynomial System Solving Method for Mixed Trigonometric Polynomial Systems*, SIAM Journal on Numerical Analysis **46**:3 (2008), 1503–1518.
- [208] B. ZHANG, C.-P. CHEN, *Sharpness and generalization of Jordan, Becker-Stark and Papenfuss inequalities with an application*, Journal of Mathematical Inequalities **13**:4 (2019), 1209–1234.
- [209] B. ZHANG, C.-P. CHEN, *Sharp Wilker and Huygens type inequalities for trigonometric and inverse trigonometric functions*, Journal of Mathematical Inequalities **14**:3 (2020), 673–684.
- [210] L. ZHANG, X. MA, *New Refinements and Improvements of Jordan's Inequality*, Mathematics **6**:12 (2018), 284, pp. 8.
- [211] L. ZHANG, X. MA, *New Polynomial Bounds for Jordan's and Kober's Inequalities Based on the Interpolation and Approximation Method*, Mathematics **7**:8 (2019), 746, pp. 9.
- [212] T. ZHAO, *On a unified generalization of Cusa-Huygens and Mitrinović-Adamović inequalities*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **19**:2 (2025), 370–393.
- [213] L. ZHU, *Sharpening Jordan's inequality and the Yang Le inequality*, Applied Mathematics Letters **19**:3 (2006), 240–243.
- [214] L. ZHU, *Sharpening Jordan's inequality and the Yang Le inequality, II*, Applied Mathematics Letters **19**:9 (2006), 990–994.
- [215] L. ZHU, *A general refinement of Jordan-type inequality*, Computers & Mathematics with Applications **55**:11 (2008), 2498–2505.
- [216] L. ZHU, *Some New Wilker-Type Inequalities for Circular and Hyperbolic Functions*, Abstract and Applied Analysis **2009**:1 (2009), Article ID 485842, pp. 9.
- [217] L. ZHU, *A source of inequalities for circular functions*, Computers & Mathematics with Applications **58**:10 (2009), 1998–2004.
- [218] L. ZHU, *On Frame's inequalities*, Journal of Inequalities and Applications **2018**:1 (2018), 94, pp. 14.
- [219] L. ZHU, *Sharp inequalities of Mitrinović-Adamović type*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas **113**:2 (2019), 957–968.

- [220] L. ZHU, *An unity of Mitrinović–Adamović and Cusa–Huygens inequalities and the analogue for hyperbolic functions*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **113**:4 (2019), 3399–3412.
- [221] L. ZHU, *New Cusa-Huygens type inequalities*, *AIMS Mathematics* **5**:5 (2020), 5320–5331.
- [222] L. ZHU, *New inequalities of Wilker’s type for circular functions*, *AIMS Mathematics* **5**:5 (2020), 4874–4888.
- [223] L. ZHU, *New Mitrinović–Adamović type inequalities*. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **114**:3 (2020), 119, pp. 14.
- [224] L. ZHU, *New Inequalities of Cusa–Huygens Type*, *Mathematics* **9**:17 (2021), 2101, pp. 13.
- [225] L. ZHU, *Wilker inequalities of exponential type for circular functions*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **115**:1 (2021), 35, pp. 12.
- [226] L. ZHU, B. MALEŠEVIĆ, *New Wilker-type and Huygens-type inequalities*, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* **50**:1 (2021), 46–62.
- [227] L. ZHU, B. MALEŠEVIĆ, *New inequalities of Huygens-type involving tangent and sine functions*, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* **52**:1 (2023), 36–61.
- [228] L. ZHU, M. NENEZIĆ, *New approximation inequalities for circular functions*, *Journal of Inequalities and Applications* **2018**:1 (2018), 313, pp. 12.
- [229] L. ZHU, Z. SUN, *Refinements of Huygens- and Wilker- type inequalities*, *AIMS Mathematics* **5**:4 (2020), 2967–2978.
- [230] L. ZHU, R. ZHANG, *New inequalities of Mitrinović–Adamović type*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* **116**:1 (2022), 34, pp. 15.

Biografija

Miloš Mićović rođen je 11. februara 1998. godine u Beogradu. Završio je osnovnu školu „Kosta Abrašević” u Beogradu, kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije, i prirodno-matematički smer Trinaeste beogradske gimnazije, kao nosilac Vukove diplome. Tokom školovanja osvajao je nagrade na brojnim takmičenjima, uključujući i republičko takmičenje iz matematike.

Elektrotehnički fakultet u Beogradu upisao je 2016. godine. Diplomirao je 2020. godine na odseku „Računarska tehnika i informatika” sa prosečnom ocenom 9.11 i diplomskim radom „Aplikacija za nadgledanje Monero blokčejna” pod mentorstvom prof. dr Pavla Vuletića.

Master studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, na modulu „Softversko inženjerstvo”, upisao je 2020. godine, a završio 2021. godine sa prosečnom ocenom 10.00 i master radom „Realizacija internet aplikacije za simulaciju rada berze” pod mentorstvom prof. dr Marije Punt.

Tokom studija bio je angažovan kao student demonstrator na Katedri za računarsku tehniku i informatiku i Katedri za primenjenu matematiku.

Doktorske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, na modulu „Primenjena matematika”, upisao je 2021. godine pod mentorstvom prof. dr Ivane Jovović, a od 2023. godine studira pod mentorstvom prof. dr Branka Maleševića. Školsku 2021/22. godinu proveo je u statusu mirovanja. Položio je sve ispite na doktorskim studijama sa ocenom 10.

Tokom dela srednje škole i studija, bio je korisnik stipendije Republike Srbije za izuzetno nadarene učenike i studente.

Radio je u Institutu „Mihajlo Pupin” na poziciji saradnika od marta do maja 2021. godine. Od decembra 2021. godine do aprila 2023. godine radio je u kompaniji „FIS” u Beogradu na poziciji softverskog inženjera. U aprilu 2023. godine zaposlio se na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu kao istraživač-pripravnik. U zvanje istraživač-saradnik izabran je u oktobru 2025. godine.

Objavio je dvanaest radova u časopisima, od kojih je jedanaest u časopisima sa JCR liste (četiri M21a kategorije, pet M21 kategorije, dva M22 kategorije), i deset konferencijskih radova. Takođe, ima pet radova koji su na recenziji u časopisima sa JCR liste.

Recenzirao je radove za časopis „Applicable Analysis and Discrete Mathematics”.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Милош Мићовић

Број индекса 2021/5020

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Раслојене фамилије функција и стратегије за
аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости”

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 18.05.2026.

Милош Мићовић

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милош Мићовић

Број индекса 2021/5020

Студијски програм Електротехника и рачунарство

Наслов рада „Раслојене фамилије функција и стратегије за аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“

Ментор проф. др Бранко Малешевић, проф. др Татјана Лутовац

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 18.05.2026.

Милош Мићовић

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Раслојене фамилије функција и стратегије за
аутоматско доказивање неких аналитичких неједнакости“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 18.05.2026.

Милош Мићковић

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.