UNIVERZITET U BEOGRADU

FIZIČKI FAKULTET

Danilo Rakonjac

Ekstremalne crne rupe u lokalnoj Poenkareovoj teoriji: struktura u blizini horizonta i entropija

doktorska disertacija

Beograd, 2026

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF PHYSICS

Danilo Rakonjac

Extremal black holes in Poincaré gauge theory: near-horizon structure and entropy

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026

Mentor i komisija za pregled i odbranu disertacije

Mentor

Dr Branislav Cvetković, naučni savetnik, Institut za fiziku, Univerzitet u Beogradu

Komisija za pregled i odbranu doktorske disertacije

- Dr Maja Burić, redovni profesor, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu
- Dr Duško Latas, vandredni profesor, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu
- Dr Marko Vojinović, naučni savetnik, Institut za fiziku, Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane: ______________________________

Sažetak

Naslov: Ekstremalne crne rupe u lokalnoj Poenkareovoj teoriji: struktura u blizini horizonta i entropija

Sažetak: U ovoj disertaciji, proučava se entropija ekstremalnih crnih rupa u formalizmu lokalne Poenkareove teorije. Analiza se vrši primenom kanonskog formalizma na geometrijama u blizini horizonta, koristeći dualnost geometrija u blizini horizonta sa konformnom teorijom polja na granici prostorvremena.

U slučaju ekstremalne Kerove crne rupe, izračunata je entropija u slučaju Rimanovog rešenja, i rešenja teleparalelnog ekvivalenta opšte relativnosti. Rezultat je upoređen sa neekstremalnim rezultatom poznatim iz ranije analize. Utvrđeno je poklapanje entropije, motivišući dalju primenu kanonske metode na komplikovanije modele.

U slučaju prostorno razvučenih crnih rupa u trodimenzionalnoj gravitaciji, izračunata je entropija, međutim rezultat je ukazao na blago odstupanje u odnosu na očekivani rezultat koji potiče od analize neekstremalnog slučaja. Ova razlika je komentarisana u kontekstu asimptotskih simetrija razmatranog prostorvremena.

Na kraju, razmatrani su generalni uslovi postojanja geometrije u blizini horizonta ekstremalnih crnih rupa sa torzijom. Izvedeni su uslovi postojanja ove geometrije koje torzija mora da zadovolji da bi model bio dobro definisan. Takođe, predstavljen je nov model crne rupe u kojem su ovi Uslovi zadovoljeni u ekstremalnom slučaju.

Ključne reči: crne rupe, entropija crnih rupa, AdS/CFT, lokalna Poenkareova teorija, geometrija u blizini horizonta

Naučna oblast: Fizika

Uža naučna oblast: Gravitaciona fizika

Abstract

Title: Extremal black holes in Poincaré gauge theory: near-horizon structure and entropy

Abstract: In this thesis, we investigate the entropy of extremal black holes in the formalism of Poincaré gauge theory. Analysis is done using canonical formalism on near-horizon geometries, using the duality between near-horizon geometries and conformal field theories at the boundary of spacetime.

In the case of extremal Kerr black hole, the entropy is calculated in the case of Riemannian solution, and solution in teleparallel equivalent of general relativity. The result is compared with the non-extremal result that is known from previous analysis. A matching of entropy is confirmed between these two cases, motivating further application of the canonical method on more complicated models.

In the case of spacelike-stretched black holes in three dimensional gravity, the entropy is calculated, however, the result is found to have a mild discrepancy compared to the expected result that was obtained in the analysis of the non-extremal case. This discrepancy is commented on in the context of asymptotic symmetries present in the solution.

Finally, the general condition of existence of near-horizon geometry of extremal black holes in presence of torsion were investigated. The conditions of existence of this geometry which torsion has to satisfy, in order for the model to be well defined, were derived. Moreover, a new black hole model in which these conditions are satisfied in the extremal case is presented.

Keywords: black holes, black hole entropy, AdS/CFT, Poincaré gauge theory, near-horizon geometry

Scientific field: Physics

Scientific subfield: Gravitational physics

Sadržaj

Uvod

Otkriće da se termodinamičke osobine mogu dodeliti crnim rupama pokrenulo je u drugoj polovini 20og veka oblast poznatu kao termodinamika crnih rupa. Ova oblast dala je duboke uvide u fundamentalnoj fizici, i istraživanje posledica ove ideje traje i danas. Ispostavlja se da veza dinamike crnih rupa sa termodinamikom daje uvid u vezu teorije gravitacije u kojoj su opisane crne rupe sa kvantnom teorijom. U programu istraživanja kvantne gravitacije, čiji se cilj ujedinjenje teorije gravitacije sa kvantnom teorijom polja, Centralna veličina u proračunima vezanim za termodinamiku crnih rupa je entropija crnih rupa, prvo definisana od strane Bekenštajna [1]. Od trenutka definicije tokom 70ih godina prošlog veka, entropija je računata u različitim modelima kvantne i klasične gravitacije, gde je Bekenštajnov popravljan ili potvrđivan u skladu sa pretpostavkama teorije u kojoj se radi proračun.

Cilj naše teze je postavljanje metoda za proračun entropije u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, koja je minimalno produženje Ajnštajnove opšte teorije relativnosti, u specijalnom slučaju crnih rupa, poznatih kao ekstremalne crne rupe. Metod i sam proračun koji je primenjen na određene modele u formalizmu lokalne Poenkareove teorije u našoj tezi, oslanja se na rezultate klasične teorije gravitacije, kanonskog formalizma sa vezama i konformne teorije. U skladu s tim, u pisanju teze, težili smo da zauzmemo blago pedagoški pristup, pa se teza može podeliti na dva dela. U prvom delu, koji se sastoji od prva tri poglavlja, predstavljamo postavke i metode koje smo koristili u našim rezultatima. Druga tri poglavljaju predstavljaju objavljene radove u kojima su dati rezultati našeg istraživanja.

Detaljnije, teza je organizovana na sledeći način. Prva glava se bavi samom postavkom klasične termodinamike crnih rupa. U tom smislu, ovo poglavlje vrši pregled rezultata od istorijskog značaja na kojima je zasnovana oblast, i služi upoznavanju sa osnovnim rezultatima i pojmovima. Druga glava se bavi generalizacijom proračuna entropije na lokalnu Poenkareovu teoriju. U ovom poglavlju predstavljene su osnove lokalne Poenkareove teorije i metod na osnovu kojeg je računata entropija crnih rupa u ovoj teoriji u neekstremalnom slučaju. Treća glava predstavlja primenu rezultata iz druge glave na ekstremalni slučaj. Ovde su predstavljeni osnovni rezultati konformne teorije polja, koji, zajedno sa generalnim kanonskim metodama datim u drugoj glavi, omogućavaju proračun entropije ekstremalnih crnih rupa. Osobine ekstremalnih crnih rupa od značaja za našu analizu su takođe predstavljene. Četvrta i peta glava se odnose na račun entropije u konkretnim modelima ekstremalnih crnih rupa u formalizmu lokalne Poenkareove teorije, i poređenju ovih rezultata sa rezultatima uspostavljenim u standardnoj teoriji opšte relativnosti. Šesta, poslednja glava, odnosi se na definiciju strukture u blizini horizonta kod ekstremalnih crnih rupa. Ispostavlja se da je ova struktura u lokalnoj Poenkareovoj teoriji netrivijalna, i u ovoj glavi su postavljene osnove pristupa koje omogućavaju uopšteno razmatranje ekstremalnih crnih rupa u lokalnoj Poenkareovoj teoriji.

Konvencije koje koristimo u tezi su sledeće. Metrika prostora Minkovskog je uzeta sa signaturom $\eta = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$. Koordinate na prostorvremenu obeležene su slovima grčkog alfabeta $(\mu,\nu,\rho,\dots)$, lokalne Lorencove komponente obeležene su slovima latinskog alfabeta $(i,j,k,\dots)$, dok su koordinate na hiperpovršima razmatranim u analizi obeležene početnim slovima grčkog ili latinskog alfabeta. Totalno antisimetrični Levi-Čivita simbol je definisan konvencijom $\varepsilon^{0123} = 1$.

1 Uvod u termodinamiku crnih rupa

U ovom poglavlju uvešćemo osnovne pojmove klasične termodinamike crnih rupa. Termodinamika crnih rupa se kao oblast pojavila tokom 70-ih godina prošlog veka ukrštanjem teorije crnih rupa u opštoj relativnosti i klasičnih zakona termodinamike. Kulminacija ovog procesa bilo je formiranje analogije između zakona termodinamike i zakona mehanike crnih rupa od strane Hokinga i njegovih saradnika [2] i Bekenštajnova definicija entropije crnih rupa [1]. Pojava Plankove konstante u Bekenštajnovoj formuli za entropiju crnih rupa ukazivala je da se moguće poreklo ove heurističke formule krije u povezanom razmatranju kvantne teorije i Ajnštajnove teorije gravitacije, što je dovelo do velikog interesovanja i daljeg razvoja ove oblasti, koja traje i danas. Smisao ove glave je u razjašnjavanju klasičnih pojmova u termodinamici crnih rupa, kako bi metode koje se koriste u nastavku teze bile konceptualno jasne, pa stoga, iako ovde predstavljamo rezultate pre svega od istorijskog značaja, smatramo da je njihovo razumevanje potrebno kako bi se dobro razumeli proračuni proračuni koji su rezultati naše teze.

1.1 Motivacija: Penrouzov proces i Hokingova teorema o površini

1.1.1 Penrouzov proces

Značaj Penrouzovog procesa proističe iz činjenice da je to bio jedan od prvih mehanizama koji opisuju mogućnost razmene energije crnih rupa sa njihovom okolinom. Tvrđenja o njihovom nastanku iz kolapsa masivnih objekata, ili mogućim spajanjem dve crne rupe u jednu, bio je prihvaćen u naučnom svetu, međutim, jednom kada nastanu, činilo se da ovi objekti ne mogu ni na koji način da emituju energiju, pa su tako termonidamička pitanja smatrana neprikladnim za njih. Ovo se promenilo predlogom Penrouza [3] o mogućnosti ekstrakcije energije iz rotirajuće crne rupe. Proces nije komplikovan, i opisaćemo glavni mehanizam koji je analiziran u originalnom radu.
Rotirajuća crna rupa je data Kerovom metrikom [4] u Bojer-Lindkvistovim koordinatama kao:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(adt - (r^2+a^2)d\varphi\right)^2 \tag{1.1.1}$$

gde su pomoćne funkcije date preko:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \qquad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

a parametri m i a su, redom, masa i specifični moment impulsa crne rupe.
Lako je videti da ova metrika poseduje dva Kilingova vektora ∂_t i ∂_φ, koji generišu vremenske translacije i rotacije oko ose crne rupe. Ovi Kilingovi vektori se mogu iskoristiti za definiciju energije i momenta impulsa čestice, mereno iz asimptotske beskonačnosti. Naime, neka je data probna čestica sa četvoro-impulsom p_μ. U beskonačnosti, nulta komponenta ovog četvoro-impulsa je tačno masa-energija čestice,

pošto je prostorvreme asimptoski ravno. Ova komponenta se može zapisati kao skalarni proizvod $p \cdot \partial_t$ četvoro-impulsa sa Kilingovim vektorom ∂_t. Poznata osobina Kilingovih vektora je da duž geodezika, njihov proizvod sa tangentom na geodeziku je održan, što znači da je proizvod četvoro-brzine čestice i Kilingovog vektora održan. S obzirom na to da je četvoro-impuls čestice proporcionalan četvoro-brzini, vidimo da je energija definisana preko ovog skalarnog proizvoda održana na putanji čestice u slobodnom padu, odnosno geodezici, i predstavlja energiju merenu od strane posmatrača u beskonačnosti. Isto važi i za moment impulsa kada se na isti način razmatra Kilingov vektor koji generiše rotacije oko ose crne rupe.

U slučaju vektora ∂_t, Kerovo prostorvreme ima naročitu hiperpovrš na kojoj ovaj vektor postaje norme nula(nul-vektor), koja se zove granica stacionarnosti. Oblast između horizonta događaja i granice stacionarnosti je poznata kao ergosfera, i ima osobinu da je svaki objekat u ovoj oblasti primoran da korotira sa crnom rupom. Unutar ergosfere, ∂_t je prostornog tipa, što znači da je moguće da energija čestice p_0 bude negativna, bez obzira na to što je četvoro-impuls čestice vremenskog tipa i usmeren ka budućnosti, kao što i mora biti definisan za realnu česticu. Energija definisana na ovaj način za koju tvrdimo da može biti negativna, je energija merena od strane posmatrača u beskonačnosti. Lokalni posmatrač unutar ergosfere bi i dalje izmerio pozitivnu energiju čestice.

Penrouzov proces se onda može formulisati na sledeći način. Neka je probna čestica A, koja je na svetskoj liniji koja dolazi iz beskonačnosti i prolazi kroz ergosferu. Ova čestica se zatim raspada unutar ergosfere na dve čestice, B i C. Za česticu B, imamo:

$$p_t^B < 0 \tag{1.1.2}$$

Ova čestica postane apsorbovana od strane crne rupe(pređe horizont događaja), dok čestica C pobegne u beskonačnost. Na osnovu održanja energije-impulsa, imamo:

$$p_t^A = p_t^B + p_t^C \tag{1.1.3}$$

odakle dobijamo:

$$p_t^C > p_t^A \tag{1.1.4}$$

Dakle, nalazimo da čestica koja je pobegla do posmatrača u beskonačnosti nosi više energije nego originalna čestica A. U međuvremenu, čestica B, koja nosi negativnu energiju(merenu iz beskonačnosti) je apsorbovana od strane crne rupe. Zaključujemo da je neka energija na ovaj način izvučena iz crne rupe.

Opisaćemo ovaj proces malo detaljnije za fizičke čestice. Radi jednostavnosti, ograničićemo se na geodezike u ekvatorijalnoj ravni($\theta = \frac{\pi}{2}$). S obzirom na narušenje sferne simetrije, opšte geodezike u Kerovom prostorvremenu ne moraju biti ograničene na kretanje u ravni, međutim, aksijalna simetrija obezbeđuje postojanje geodezika potpuno ograničenih na ekvatorijalnu ravan.

Koordinata horizonta događaja i granice stacionarnosti mogu se izvesti iz Kerove metrike rešavanjem jednačina $\Delta = 0$ i $g_{tt} = 0$, redom. Dobijamo za koordinatu horizonta događaja:

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \tag{1.1.5}$$

i za koordinatu granice stacionarnosti:

$$r_s = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \tag{1.1.6}$$

Prema tome, ergosfera je data kao oblast: $r_+ < r < r_s$.
U ekvatorijalnoj ravni, ove jednačine se svode na:

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \qquad r_s = 2m \tag{1.1.7}$$

Definišemo energiju i moment impulsa čestica,redom, kao što je prethodno opisano:

$$p_t = p \cdot \partial_t = E = \text{const.} \qquad p_\varphi = p \cdot \partial_\varphi = -L = \text{const.} \tag{1.1.8}$$

Onda, koristeći uslov da četvoro-impuls čestice ne može biti prostornog tipa i mora biti usmeren ka budućnosti, imamo:

$$p_\mu p^\mu = \mu^2 \qquad p_\mu v^\mu > 0 \tag{1.1.9}$$

gde je μ masa čestice, a v vektorsko polje vremenskog tipa koje je svuda van horizonta usmereno ka budućnosti.
Biramo takozvano kanonsko vektorsko polje [5] Kerovog prostorvremena:

$$v^\mu \partial_\mu = (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi \tag{1.1.10}$$

za koje se može pokazati da važi:

$$v^\mu v_\mu = \Delta\rho^2 > 0 \quad \text{za} \quad r > r_+$$

Prva relacija iz (1.1.9), ograničena na ekvatorijalnu ravan, daje nakon pravolinijskog računa vezu:

$$(r(r^2 + a^2) + 2ma^2)E^2 - 4maEL - (r - 2m)L^2 - \frac{\Delta}{r}(p_r)^2 - r\Delta\mu^2 = 0 \tag{1.1.11}$$

Ograničenje na ekvatorijalnu ravan je impliciralo da važi $p^\theta = p_\theta = 0$.
Rešavanjem po energiji, dobijamo:

$$\begin{aligned} E = &\frac{1}{r(r^2 + a^2) + 2ma^2} \\ &\left[2maL \pm \sqrt{r^2\Delta L^2 + (r(r^2 + a^2) + 2ma^2)\left(\frac{\Delta}{r}(p_r)^2 + r\Delta\mu^2\right)}\right] \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Želimo da čestica jedinične mase, koja se nalazi u mirovanju u beskonačnosti(što implicira $p_r = 0, L = 0$, $r \to \infty$) da ima jediničnu energiju, što dalje nameće izbor pozitivnog predznaka u gornjoj jednačini. Sa ovim izborom, zaključujemo da ako želimo da čestica ima negativnu energiju merenu u beskonačnosti, moramo imati:

$$L < 0 \qquad r - 2m < -\frac{\Delta}{L^2}\left(r\mu^2 + \frac{(p_r)^2}{r}\right) \tag{1.1.13}$$

Možemo dalje ograničiti drugu relaciju pretpostavkom da radijalna komponenta četvoro-impulsa ne doprinosi energiji(nametanjem $\dot{r} = 0$ u tački raspada), pošto dozvoljava manju energiju čestice koja se apsorbuje u crnu rupu. Dobijamo:

$$L < 0 \qquad r - 2m < -\frac{r\Delta}{L^2}\mu^2 \tag{1.1.14}$$

Jednačina koja obezbeđuje da je četvoro-impuls bude usmeren ka budućnosti(druga jednačina u (1.1.9)) daje graničnu relaciju između energije i momenta impulsa čestice:

$$E > \frac{a}{r^2 + a^2} L \tag{1.1.15}$$

Koeficijent ispred momenta impulsa može se interpretirati kao ugaona brzina posmatrača na konstantnoj radijalnoj udaljenosti r. Zapravo, može se izračunati da postoji raspon ugaonih brzina takvog posmatrača, koji postaje sve više ograničen kako se prilazi horizontu, dok se na kraju ne zaustavi na ugaonoj brzini horizonta $\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$. Možemo onda postaviti najvišu granicu ekstrakovane energije na ovu vrednost:

$$E > \frac{a}{r_+^2 + a^2} L = \frac{a}{2mr_+} L \tag{1.1.16}$$

gde smo u poslednjoj jednakosti koristili relaciju $\Delta(r_+) = 0$.
Iz prethodne analize vidimo da samo čestice koje rotiraju u suprotnom smeru od crne rupe mogu imati negativnu energiju, i da stoga crna rupa gubi i masu i moment impulsa absorbovanjem jedne od čestica, dok druga beži u beskonačnost. Dakle, proces izvlači energiju na račun rotacionog dela energije crne rupe. Penrouz je dalje analizirao partikularni slučaj ovog procesa, pretpostavljajući neke realistične vrednosti za crnu rupu, i našao da je efikasnost ovog procesa jako mala. Ipak, sama činjenica da je moguće da crne rupe emituju energiju u okolinu na ovaj način otvara vrata za termodinamička pitanja u kontekstu crnih rupa. Za više detalja o ovom procesu, sa opštijim proračunima i granicama efikasnosti Penrouzovog procesa, konsultovati [6].

1.1.2 Hokingova teorema o površini horizonta

Godine 1971. Hoking je izračunao rezultat koji je pokrenuo razvoj oblasti termodinamike crnih rupa, poznat kao Teorema o površini [7, 8]. Najjednostavnije objašnjen, ovaj rezultat garantuje da pod određenim uslovima, površina horizonta crne rupe ne može da se smanji u fizičkim procesima. U originalnom radu, Hoking je razmatrao proces spajanja dve crne rupe. Od tada, brojni dokazi Teoreme o površini su uspostavljeni.
Prvo ćemo pokazati da prethodno opisani Penrouzovi procesi ne narušavaju Teoremu o površini za Kerove crne rupe, koristeći ovo kao motivaciju, pre nego što pređemo na formalniji dokaz.
Površina horizonta Kerove crne rupe se dobija jednostavno, povlačenjem metrike na površinu horizonta($t =$ const., $r = r_+$):

$$A = \int \sqrt{h} d\theta d\varphi = \int (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi m r_+ \tag{1.1.17}$$

gde je h determinanta indukovane metrike na površini.
Zamenom vrednosti za r_+ iz (1.1.7), i variranjem u odnosu na masu i moment impulsa $J = ma$ Kerove crne rupe, dobijamo:

$$dA = \frac{8\pi}{\sqrt{m^2 - a^2}} (2mr_+ dm - ad(ma)) \tag{1.1.18}$$

Ali onda na osnovu granične nejednakosti (1.1.16) za Penrouzov proces, uzimanjem $dm = E$ i $d(ma) = L$, sledi $dA > 0$.

Rigorozan dokaz Teoreme o površini prevazilazi potrebe naše teze gde ovaj iskaz razmatramo radi motivacije i istorijskog konteksta koji su pozadina istraživanja prezentovanog u daljim poglavljima. Stoga

ćemo se ograničiti na to da ukratko pokažemo ideju iza ove teoreme. Za detaljniji pregled, konsultovati [9, 10, 11].
Iskaz teoreme predstavljamo u obliku koji je dat u [11]:

Teorema 1. *Za predvidivu crnu rupu koja zadovoljava nul energetski uslov, $T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geqslant 0$,, za sve vektore k^{μ} nulte norme, površina budućeg horizonta događaja $\mathscr{H}$, nikad ne opada u vremenu.*

Pojam predvidivosti crne rupe može se opisati na sledeći način. Neka je (M,g) dato prostorvreme koje je asimptotski ravno rešenje Ajnštajnovih jednačina, koje sadrži asimptotski ravnu hiperpovrš prostornog tipa Σ, sa kompaktnom oblasti B unutar Σ. Takođe pretpostavljamo da M sadrži maksimalnu Košijevu evoluciju početnih uslova zadatih na Σ. Neka ovakvo prostorvreme sadrži crnu rupu $\mathscr{B}$ sa budućim horizontom događaja $\mathscr{H} = \partial\mathscr{B}$, i neka je $B = \mathscr{B} \cap \Sigma$ i $H = \mathscr{H} \cap \Sigma$. Domen zavisnosti Σ, $D(\Sigma)$, predstavlja skup svih tačaka koje su povezane sa Σ kauzalnom krivom. Dakle, domen zavisnosti u sebi sadrži sve tačke u budućnosti od Σ koje su vidljive iz beskonačne budućnosti. Međutim, ako je B oblast crne rupe, onda $D(\Sigma)$ generično ne sadrži evoluciju tačaka na horizontu H koji po definiciji horizonta nisu vidljivi iz beskonačne budućnosti. Ako zahtevamo da je $\mathscr{H} \subset D(\Sigma)$, onda je se kaže da je crna rupa predvidiva. Dakle, pojam predvidivosti pretpostavlja postojanje globalno hiperbolične oblasti unutar prostorvremena M koja sadrži i horizont događaja, i spoljašnjost crne rupe. Drugim rečima, ovim pojmom su pretpostavljeni globalni uslovi potrebni da bi se evolucija horizonta mogla razmatrati.

Horizont događaja je hiperpovrš svetlosnog tipa, odakle sledi da je generisan geodezikama svetlosnog tipa. Njegova površina A u određenom trenutku, je površina njegovog preseka H sa posmatranom Košijevom hiperpovrši Σ, i evolucija ove površine karakterisana je ponašanjem njegovih generatora. Analizu ponašanja generatora ovde ćemo predstaviti bez dokaza. Za izvođenje i detaljnije definicije sledećih izraza, konsultovati [12].
Geodezike koje generišu horizont, zadate su tangentnim vektorskim poljem nulte norme k^{μ}, i ako posmatramo kongruenciju generatora k^{μ}, veličina koja opisuje širenje, odnosno skupljanje, snopa geodezika je skalar ekspanzije, definisan kao:

$$\theta = \nabla_{\mu}k^{\mu} \tag{1.1.19}$$

Skalar ekspanzije je vezan sa evolucijom površine preseka snopa geodezika preko:

$$\theta = \frac{1}{A}\frac{dA}{d\lambda} \tag{1.1.20}$$

gde je λ afini parametar geodezika po kojem posmatramo evoluciju. Takođe, može se pokazati da je evolucija skalara ekspanzije zadata Rejčaudurijevom jednačinom:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \tag{1.1.21}$$

gde su $\sigma_{\mu\nu}$ tenzor smicanja, $\omega_{\mu\nu}$ tenzor vrtložnosti, a $R_{\mu\nu}$ Ričijev tenzor.
Na osnovu prethodnih izraza, vidimo ukoliko utvrdimo da je skalar ekspanzije pozitivan za generatore horizonta, to implicira da površina horizonta lokalno raste.

Primetimo osobine pojedinih članovu u Rejčaudurijevoj jednačini. Tenzori smicanja i vrtložnosti po definiciji[12] zadovoljavaju nejednakosti $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \geqslant 0$ i $\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \geqslant 0$. Pored toga, s obzirom na to da je horizont hiperpovrš svetlosnog tipa, njegovi generatori su ortogonalni na hiperpovrš, što implicira $\omega_{\mu\nu} = 0$. Kontrakcija Ričijevog tenzora je vezana sa energetskim uslovom preko Ajnštajnovih jednačina polja:

$$R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}$$

Dakle, nametanje nul energetskog uslova $T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geqslant 0$ implicira da su svi članovi na desnoj strani (1.2.5) negativni, pa skalar ekspanzije ima osobinu da uvek opada duž generatora, tj. imamo:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2 \Rightarrow \frac{1}{\theta(\lambda)} \leq \frac{1}{\theta(0)} + \frac{1}{2}\lambda \tag{1.1.22}$$

Ako je $\theta(0) < 0$, sledi da $\theta(\lambda) \to -\infty$ za konačno λ, tj. pojavljuje se singularitet, pod uslovom da geodezike mogu da se prošire do tačke konvergencije. Ako pretpostavimo da postoji tačka na horizontu za koju je $\theta < 0$, možemo deformisati presek horizonta H tako da deformisani presek H' zahvata malu okolinu van H u spoljašnjosti crne rupe, i važi $\theta < 0$ na H'. Ali onda, na osnovu predvidivosti koju smo pretpostavili, tačke na deformisanom horizontu koje su bile deo spoljašnjosti crne rupe imaju dobro definisanu kompletnu evoluciju u prostorvremenu M, pa dakle dolaze do singulariteta za konačno vreme. S obzirom na to da uzimamo da su ovakvi 'goli' singulariteti zabranjeni, sledi da mora biti $\theta \geq 0$ svuda na horizontu $\mathscr{H}$. Dakle, površina horizonta lokalno raste. Takođe, na osnovu predvidivosti, evolucija svih geodezika na horizontu, tj. celog horizonta, je dobro definisana. Prema tome, površina raste tokom cele Košijeve evolucije crne rupe.

Hokingova teorema o površini važi pod veoma generalnim uslovima, naime, zahtevali smo da je evolucija crne rupe dobro definisana, i da važi energetski uslov koji je ispunjen za poznata klasična polja materije. S obzirom na to, ukoliko ne uključujemo kvantne efekte koji bi potencijalno mogli da naruše neku od pretpostavki, ispostavlja se da se površina crnih rupa nikada ne smanjuje u vremenu pri opštim fizičkim procesima, što podseća na drugi zakon termodinamike, koji kaže da se entropija izolovanih sistema nikada ne smanjuje. Ova analogija, dovešće do definisanja pojma entropije kod crnih rupa, i daljih analogija između ponašanja crnih rupa i zakona termodinamike.

1.2 Bekenštajn-Hokingova entropija crne rupe

Do kraja 60ih godina prošlog veka, ideje o vezi između fizike crnih rupa i termodinamike su se razvijale u grupi pod vođstvom Džona Vilera. Dva njegova studenta dala su primaran doprinos razvoju pojma entropije crnih rupa. Prvi od njih, Grčki fizičar D. Kristodulu, koji je analizirao posledice Penrouzovog procesa, došao je do zaključka da će putem Penrouzovih procesa Kerova crna rupa izgubiti sav svoj moment impulsa sve dok ne prestane da rotira i pređe u Švarcšildovu crnu rupu [13, 14]. On je definisao pojam ireducibilne mase Kerove crne rupe kao:

$$M_{\text{ir}} = \frac{1}{16\pi}\sqrt{A} \tag{1.2.1}$$

gde je A površina crne rupe.
Sređivanjem formule za površinu horizonta Kerove crne rupe (1.2.1) preko jednačine za koordinatu horizonta (1.1.7), dobijamo da je ukupna masa crne rupe data sa:

$$m^2 = M_{\text{ir}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{ir}}^2} \tag{1.2.2}$$

gde je $J = ma$ moment impulsa Kerove crne rupe.

U Penrouzovom procesu(ili bilo kojem drugom klasičnom procesu), po Hokingovoj teoremi, ireducibilna masa mora da raste ili ostane konstantna. Takođe, moment impulsa u Penrouzovom procesu se smanjuje, pa prema tome u graničnom slučaju, masa postaje jednaka ireduicbilnoj masi, što je slučaj Švarcšildove crne rupe. Sa ovim rezultatom, i Hokingovom teoremom koja je razvijena u slično vreme, potreban je bio još jedan skok za dobijanje definicije entropije crne rupe.

Kao deo svoje doktorske teze, Džejkob Bekenštajn je dobio pitanje od svog mentora da razmotri sledeći misaoni eksperiment. "Pretpostavimo šolju vrućeg čaja, mešanog sa hladnom vodom, tako da je njena entropija maksimizovana, koja pada u crnu rupu. Da li bi entropija šolje samo nestala nakon ulaska u crnu rupu? U tom slučaju, jasno je da bi drugi zakon termodinamike bio narušen". Razmatrajući ovaj problem kao deo svoje teze, Bekenštajn je predložio rešenje [1] definišući veličinu koja bi bila entropija crne rupe S_{BH}, i generališući drugi zakon termodinamike, tako da u prisustvu crnih rupa kaže: "Zbir entropije koja postoji van horizonta crne rupe, i entropije crne rupe nikada ne opada." Inspirisan rezultatima Kristodulua i Hokingovom teoreomom o površini, on je predložio sledeću definiciju:

$$S_{\mathrm{BH}} = \eta k \frac{c^3 A}{G\hbar} \tag{1.2.3}$$

gde je A površina crne rupe, c brzina svetlosti, k Bolcmanova konstanta, $\hbar$ Plankova konstanta, G Njutnova gravitaciona konstanta, a η konstantni faktor za koji je pretpostavio da je reda jedinice.

Formula je dobijena dimenzionom analizom, i uspostavljanjem osobine da je entropija ekstenzivna termodinamička veličina, što znači da je entropija sistema koji se sastoji od više podsistema, data sumom entropija podsistema. Konstanta $\frac{c^3}{G\hbar}$ je Plankova dužina, tj. univerzalna konstanta koja ima jedinicu dužine. U većini literature o crnim rupama, konvencionalno se uzima $k = 1$, i ove jedinice ćemo i mi koristiti u našem radu. Nakon postavljanja heurističke formule, bilo je potrebno utvrditi da li je drugi zakon termodinamike dobro generalisan za poznate procese sa crnim rupama, kao i pronaći vrednost konstante η koja nije mogla biti nađena heurističkim putem. Kasnije, sa rezultatom Hokinga o Hokingovom zračenju [15], nađena je vrednost $\eta = \frac{1}{4}$. Ispostavilo se da Bekenštajnova formula važi u velikom broju situacija, i njeno izvođenje iz prvih principa je postalo jedna od glavnih tema istraživanja u termodinamici crnih rupa.

1.3 Četiri zakona mehanike crnih rupa

1.3.1 Nulti zakon

Nulti zakon mehanike crnih rupa odnosi se na veličinu koja se zove *površinska gravitacija* crne rupe. Razmotrićemo sada prostorvreme stacionarne, aksisimetrične crne rupe. Kao što je pomenuto u sekciji 1.2, horizont događaja crne rupe je generisan geodezikama svetlosnog tipa. Geodezijska jednačina za generatore je data u opštem slučaju kao:

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu = \kappa l^\nu \tag{1.3.1}$$

Ovo znači da, u opštem slučaju, generator horizonta ne mora biti parametrizovan afinim parametrom. Veličina κ meri "ne-afinost" generatora. Međutim, mi nećemo izabrati kongruenciju generatora sa proizvoljnom parametrizacijom, već biramo da je l^μ Kilingov vektor prostorvremena. Ovo je uvek moguće prema Hokingovoj teoremi o krutosti [9]. Za ovakav izbor generatora, veličina κ se zove površinska gravitacija.

Hiperpovrš svetlosnog tipa koja ima Kilingov vektor kao normalu se zove *Kilingov horizont*. Iako svaki Kilingov horizont ne mora biti horizont događaja, Hokingova teorema o krutosti kaže da obrnuti iskaz važi. Za stacionarnu aksisimetričnu crnu rupu, uzevši $t^\mu \partial_\mu = \partial_t$ i $\phi^\mu \partial_\mu = \partial_\varphi$ za Kilingove vektore koji generišu vremenske translacije, odnosno rotacije oko ose crne rupe, Kilingov vektor koji je tangentan na generatore horizonta može se napisati u obliku:

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega_H \phi^\mu \tag{1.3.2}$$

gde je Ω_H ugaona brzina horizonta crne rupe, koja je konstantna [16], i poslednja jednakost važi restrikovana na horizont.

Značenje pojma površinske gravitacije može se razumeti sledećim primerom. Uzmimo posmatrača koji kruto korotira sa crnom rupom, čija je četvoro-brzina data sa:

$$u^\mu = \gamma(t^\mu + \Omega_H \phi^\mu) \tag{1.3.3}$$

gde je γ faktor normalizacije koji garantuje $u^\mu u_\mu = 1$.
Četvoro-ubrzanje ovog posmatrača je dato kao $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$. Analiziramo veličinu $\frac{1}{\gamma}\sqrt{a^\mu a_\mu}$, tj. normu ubrzanja, reskaliranu tako da predstavlja promenu brzine po koordinatnom vremenu umesto po sopstvenom vremenu. Raspisaćemo ovu veličinu preko Kilingovog vektora (1.4.2):

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{a^\mu a_\mu} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(\gamma\xi^\mu\xi^\nu\partial_\nu\gamma + \gamma^2\xi^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu\right)^2} = \gamma\sqrt{(\xi^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu)^2} \tag{1.3.4}$$

gde je $(\xi^\mu)^2 \equiv \xi^\mu\xi_\mu$.
Poslednja jednakost sledi iz nezavisnosti metrike od koordinata t i φ koja je implicirana izborom Kilingovih vektora kao koordinatnih vektorskih polja($\xi^\mu\partial_\mu\gamma = 0$ pošto je γ linearna kombinacija komponenti metrike).
Ako sada uzmemo limes ove veličine ka horizontu crne rupe, dobijamo:

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{a^\mu a_\mu} = \gamma\sqrt{\xi^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu\xi_{\mu;\rho}\xi^\rho} =_H \kappa \tag{1.3.5}$$

gde poslednja jednakost na horizontu sledi iz $\xi^\mu x_\mu = \frac{1}{\gamma}$, geodezijske jednačine (1.4.1) koja definiše površinsku gravitaciju na horizontu i jednakosti ξ i generatora l na horizontu.
Vidimo da površinska gravitacija ima smisao granične norme ubrzanja korotirajućeg posmatrača u limesu kad on prilazi horizontu. Formulišemo nulti zakon mehanike crnih rupa:

Teorema 2. *Za stacionarne crne rupe sa materijom koja zadovoljava dominantni energetski uslov, površinska gravitacija je konstantna na horizontu.*

Dokazaćemo ovo tvrđenje prateći, uz manje modifikacije, izvođenje iz originalnog rada [2].
Na horizontu definišemo pomoćno vektorsko polje svetlosnog tipa $N^\mu N_\mu = 0$, normalizovano tako da je $l^\mu N_\mu = 1$. Onda možemo rastaviti metriku na sledeći način:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu N_\nu + N_\mu l_\nu - r_\mu r_\nu - s_\mu s_\nu \tag{1.3.6}$$

gde smo uveli ortonormalne vektore prostornog tipa $r^\mu r_\mu = s^\mu s_\mu = -1$, koji zajedno sa l^μ i N^μ čine ortonormirani bazis tangentnog prostora u proizvoljnoj tački na horizontu. Ovde prikazana konstrukcija je malo drugačija od originalne konstrukcije iz [2], gde je korišćena Njuman-Penrouzova tetrada sa četiri vektora svetlosnog tipa, ali rezultati su ekvivalentni. Potrebno je da dokažemo:

$$\kappa_{;\mu} l^\mu = 0 \tag{1.3.7a}$$

$$\kappa_{;\mu} r^\mu = \kappa_{;\mu} s^\mu = 0 \tag{1.3.7b}$$

Iz definicione relacije (1.4.1), vidimo da je $\kappa = l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu$, pa izvod površinske gravitacije razvijamo po Lajbnicovom pravilu. Za prvu jednačinu (1.4.7a), dobijamo:

$$\kappa_{;\mu}l^\mu = l_{\mu;\nu\rho}N^\mu l^\nu l^\rho + l_{\mu;\nu}N^\mu{}_{;\rho}l^\nu l^\rho + l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu{}_{;\rho}l^\rho \tag{1.3.8}$$

Drugi i treći član možemo da uprostimo na sledeći način:

$$l_{\mu;\nu}N^\mu{}_{;\rho}l^\nu l^\rho + l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu{}_{;\rho}l^\rho = \kappa l_\mu N^\mu{}_{;\rho}l^\rho + \kappa l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu = 0$$

gde je u prvoj jednakosti korišćena geodezijska jednačina (1.4.1), a u drugoj su članovi grupisani po Lajbnicovom pravilu i iskorišćena je relacija ortogonalnosti između l i N.
Da bi smo sredili prvi član u (1.4.8), koristimo identitet koji važi jer je generator l Kilingov vektor:

$$l_{\mu;\nu\rho} = R_{\mu\nu\rho\sigma}l^\sigma \tag{1.3.9}$$

Onda se na osnovu antisimetrije Rimanovog tenzora po poslednja dva indeksa dobija:

$$\kappa_{;\mu}l^\mu = R_{\mu\nu\rho\sigma}N^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma = 0 \tag{1.3.10}$$

Dakle, površinska gravitacija je konstantna duž generatora. Prelazimo na drugu relaciju (1.4.7b). Razvijamo, kao i ranije, po Lajbnicovom pravilu:

$$\kappa_{;\mu}r^\mu = l_{\mu;\nu\rho}N^\mu l^\nu r^\rho + l_{\mu;\nu}N^\mu{}_{;\rho}l^\nu r^\rho + l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu{}_{;\rho}r^\rho \tag{1.3.11}$$

Drugi član možemo uprostiti koristeći geodezijsku jednačinu (1.4.1), kao i u prethodnom slučaju:

$$l_{\mu;\nu}N^\mu{}_{;\rho}l^\nu r^\rho = \kappa l_\mu N^\mu{}_{;\rho}r^\rho \tag{1.3.12}$$

Da bismo pojednostavili treći član, primetimo da važi:

$$l_{\mu;\nu}r^\mu r^\nu = l_{\mu;\nu}s^\mu s^\nu = l_{\mu;\nu}r^\mu s^\nu = 0 \tag{1.3.13}$$

Prve dve relacije su posledica Kilingove jednačine $l_{\mu;\nu} = -l_{\nu;\mu}$. Ako primetimo da je l^μ kao generator takođe i normala na horizont, onda koristeći Frobenijusov uslov $l_{[\mu}l_{\nu;\rho]} = 0$. Kontrakcijom ovog uslova sa $N^\mu r^\nu s^\rho$ i korišćenjem ortonormiranosti bazisa i Kilingove jednačine sledi treća jednakost.
Posledica jednačine (1.4.13) je da tenzor $l^\mu{}_{;\rho}r^\rho$ u ortonormiranom bazisu može imati samo komponente normalne na r^μ i s^μ:

$$l^\nu{}_{;\rho}r^\rho = (l^\sigma{}_{;\rho}r^\rho l_\sigma)N^\nu + (l^\sigma{}_{;\rho}r^\rho N_\sigma)l^\nu \tag{1.3.14}$$

Ako sada zamenimo ovaj izraz u treći član jednačine (1.4.11), dobijamo:

$$l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu{}_{;\rho}r^\rho = l_{\mu;\nu}N^\mu N^\nu l^\sigma{}_{;\rho}r^\rho l_\sigma + l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu l^\sigma{}_{;\rho}r^\rho N_\sigma \tag{1.3.15}$$

Prvi sabirak je jednak nuli iz Kilingove jednačine, a u drugom sabirku zamenom izraza za površinsku gravitaciju $\kappa = l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu$ dobijamo:

$$l_{\mu;\nu}N^\mu l^\nu{}_{;\rho}r^\rho = \kappa l_{\nu;\rho}r^\rho N^\nu = -\kappa l_\mu N^\mu{}_{;\rho}r^\rho \tag{1.3.16}$$

Iz (1.4.12) i (1.4.16), dobijamo:

$$\kappa_{;\mu}r^\mu = l_{\mu;\nu\rho}N^\mu l^\nu r^\rho \tag{1.3.17}$$

Sada koristimo Kilingovu relaciju (1.4.9):

$$\kappa_{;\mu} r^{\mu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} N^{\mu} l^{\nu} r^{\rho} l^{\sigma} \tag{1.3.18}$$

Potom zamenimo $N^{\mu} l^{\sigma}$ iz dekompozicije metrike (1.4.6) i dobijamo:

$$\kappa_{;\mu} r^{\mu} = -R_{\nu\rho} l^{\nu} r^{\rho} + R_{\mu\nu\rho\sigma} s^{\mu} l^{\nu} r^{\rho} s^{\sigma} \tag{1.3.19}$$

Poslednji član je jednak nuli, što se može videti na sledeći način:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} s^{\mu} l^{\nu} r^{\rho} s^{\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} r^{\mu} s^{\nu} s^{\rho} l^{\sigma} = l_{\mu;\nu\rho} r^{\mu} s^{\nu} s^{\rho} \\ &= (l_{\mu;\nu\rho} r^{\mu} s^{\nu})_{;\rho} s^{\rho} - l_{\mu;\nu} r^{\mu}{}_{;\rho} s^{\nu} s^{\rho} - l_{\mu;\nu} r^{\mu} s^{\nu}{}_{;\rho} s^{\rho} \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Iz (1.4.13) sledi, analogno sa (1.4.14):

$$l_{\mu;\nu} s^{\nu} = (l_{\sigma;\nu} l^{\sigma} s^{\nu}) N_{\mu} + (l_{\sigma;\nu} N^{\sigma} s^{\nu}) l_{\mu} \tag{1.3.21}$$

Korišćenjem gornje relacije i (1.4.14), drugi i treći član se skraćuju nakon kraće algebre. Prvi član predstavlja tangencijalni izvod relacije (1.4.13), koji mora biti jednak nuli pošto je $l_{\mu;\nu} r^{\mu} s^{\nu} = 0$. Dobijamo konačno:

$$\kappa_{;\mu} r^{\mu} = -R_{\nu\rho} l^{\nu} r^{\rho} \tag{1.3.22}$$

Sada na osnovu Ajnštajnovih jednačina sledi $\kappa_{;\mu} r^{\mu} = -8\pi T_{\nu\rho} l^{\nu} r^{\rho}$. Ovde namećemo dominantni energetski uslov koji kaže da $T_{\mu\nu} l^{\nu}$ mora biti vektor koji nije prostornog tipa, pa je dakle ortogonalan na r^{μ}. Sledi:

$$\kappa_{;\mu} r^{\mu} = 0 \tag{1.3.23}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokaz poslednje jednakosti, $\kappa_{;\mu} s^{\mu} = 0$, potpuno je analogan prethodnom računu, može se izvesti istim koracima zamenom r^{μ} sa s^{μ} u našem izvođenju. Time je pokazan nulti zakon mehanike crnih rupa. Konstantnost površinske gravitacije ima analogiju sa nultim zakonom termodinamike koji kaže da je temperatura tela u termodinamičkoj ravnoteži sa okolinom konstantna. Značenje ove analogije, tj. dodeljivanje analogne veličine temperature crnoj rupi nije očigledno, s obzirom na to da je crna rupa vakuumsko rešenje, pa bi bilo očekivano da je crna rupa na apsolutnoj nuli. Ipak, uzimajući u obzir ponašanje kvantnih polja u prostorvremenu sa crnom rupom, Hoking [15] je došao do rezultata koji predviđa da crne rupe zrače kao crno telo sa karakterstičnom temperaturom proporcionalnom njihovoj površinskoj gravitaciji. Hokingova temperatura crne rupe data je formulom:

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{1.3.24}$$

1.3.2 Prvi zakon

Prvi zakon mehanike crnih rupa je relacija koja povezuje bliska stacionarna rešenja Ajnštajnovih jednačina koja su crne rupe. Originalno je izveden u radu Bardina, Kartera i Hokinga [2] detaljno koristeći osobine Ajnštajnovih jednačina. Moderniji pristup Volda [17] daje izvođenje prvog zakona korišćenjem Hamiltonovog formalizma na primeru Ajnštajn-Maksvelove teorije. Ovaj tretman ima prednost u tome da ga je lakše generalisati, i uskoro nakon Voldovog rada usledila je generalizacija na proizvoljne teorije koje se mogu tretirati Hamiltonovim formalizmom [18]. Specifično, pokazano je da prvi zakon važi za Lagranžijane invarijantne na difeomorfizme sa proizvoljnim višim izvodima krivine i prisutnim poljima materije [18, 19]. Metod koji je razvijen za računanje entropije crnih rupa u prisustvu torzije, koji je predstavljen u drugom delu teze je generalizacija Voldovog metoda na lokalnu Poenkareovu teoriju i predstavlja polaznu tačku teme ove teze. Stoga je ovo izvođenje korisno i kao motivacija, a i kao uvod u dalju tematiku i biće ukratko predstavljeno u ovoj sekciji. Pošto su proračuni u kanonskom formalizmu obično tehnički veoma komplikovani, zadržaćemo se na jasnoj postavci problema i objašnjenju metoda, dok je detaljan račun, iz kojeg slede rezultati na kraju sekcije, van opsega ovog poglavlja i može se naći u predloženim referencama.

Razmatramo Ajnštajn-Maksvelovu teoriju koja opisuje gravitaciju kuplovanu sa elektromagnetnim poljem, datu preko dejstva:

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}(R + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{1.3.25}$$

gde je R Ričijev skalar krivine prostorvremena, i $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ tenzor jačine elektromagnetnog polja, izvedenog iz elektromagnetnog potencijala A_μ.

Postavka Hamiltovog formalizma podrazumeva izbor vremenske ose po kojoj se posmatra evolucija sistema. U opštoj relativnosti ne postoji preferentna vremenska osa, pa se ova konstrukcija vrši na sledeći način. Biramo globalno definisanu funkciju vremena $t(x)$ i folijaciju prostorvremena Košijevim hiperpovršima prostornog tipa Σ_t, takvim da su površi folijacije definisane uslovom $t = \mathrm{const.}$. Pretpostavka da možemo izvršiti ovakvu folijaciju zove se *globalna hiperboličnost*, i ona je u osnovi Hamiltonovog formalizma u opštoj relativnosti. Posledica globalne hiperboličnosti je da lokalno možemo izvršiti dekompoziciju svih veličina na normalne i tangentne komponente na hiperpovrši. Možemo izabrati proizvoljnu hiperpovrš iz folijacije, za koju ćemo reći da je hiperpovrš početnih uslova i obeležiti je sa Σ. Ovakvu "3 + 1" dekompoziciju prostorvremena, prvi su uspostavili Arnovit, Dezer i Misner [20], pa se po njima zove i ADM dekompozicija.

Na svakoj hiperpovrši Σ_t mogu se uvesti koordinate (y^a), a koordinate na različitim hiperpovršima možemo identifikovati duž integralnih linija vremenskog vektorskog polja ∂_t. Na ovaj način dobijamo koordinatni sistem (t, y^a) u okolini proizvoljne hiperpovrši Σ_t. Koordinatna vektorska polja adaptirana na folijaciju data su preko:

$$t^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\right)_{y^a} \qquad e^\mu{}_a = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right)_t \tag{1.3.26}$$

gde je $t^\mu = \partial_t$ *vektor vremenske evolucije*, koji definiše izbor folijacije, dualan diferencijalu globalne vremenske funkcije dt.
Kovektor dt je po definiciji ortogonalan na Σ_t, pa možemo definisati jediničnu normalu:

$$n_\mu dx^\mu = N dt \qquad n_\mu n^\mu = 1 \qquad n_\mu e^\mu{}_a = 0 \tag{1.3.27}$$

gde je $N = \frac{1}{\sqrt{g^t{}_t}}$ faktor normalizacije.
Vektori $(n^\mu, e^\mu{}_a)$ čine bazis tangentnog prostora adaptiran na dekompoziciju, pa sada možemo preformulisati dejstvo (1.4.25) u ADM formalizmu.
Koordinatni diferencijali dekomponuju se kao:

$$dx^\mu = t^\mu dt + e^\mu{}_a dy^a \tag{1.3.28}$$

Vektor vremenske evolucije ima dekompoziciju:

$$t^\mu = N n^\mu + N^a e^\mu{}_a \tag{1.3.29}$$

gde je su N i N^a poznati kao "lapse" i "shift" i $N = \frac{1}{\sqrt{g^{tt}}}$ odgovara jednačini (1.4.27).
Dalje rastavljamo metriku koristeći (1.4.28) i (1.4.29) i dobijamo:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = N^2dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt) \tag{1.3.30}$$

gde je $h_{ab} = g_{\mu\nu}e^\mu{}_a e^\nu{}_b$ *indukovana metrika* na hiperpovrši Σ_t.
Od sada koristimo ovu metriku i njen inverz h^{ab} za podizanje i spuštanje latinskih indeksa vezanih za veličine intrinsične hiperpovrši Σ_t.
ADM dekompozicija metrike implicira vezu između determinanti pune metrike i indukovane metrike:

$$N^2 = \frac{\det(g_{\mu\nu})}{\det(h_{ab})} \Longrightarrow \sqrt{-g} = N\sqrt{-h} \tag{1.3.31}$$

Da bismo u potpunosti karakterisali hiperpovrši Σ_t uvodimo *ekstrinsičnu krivinu*:

$$K_{ab} = n_{\mu;\nu}e^\mu{}_a e^\nu{}_b = \frac{1}{2}(\pounds_n g_{\mu\nu})e^\mu{}_a e^\nu{}_b \tag{1.3.32}$$

gde $\pounds_n$ označava Lijev izvod u pravcu n.
Ova veličina karakteriše uranjanje hiperpovrši u prostorvremenu i zajedno sa indukovanom metrikom potpuno određuje hiperpovrš. Nama će biti potrebna za rastavljanje Ričijevog skalara krivine. Veza između Ričijevog skalara u prostor vremenu i Ričijevog skalara definisanog u odnosu na indukovanu metriku na hiperpovrši, data je Gaus-Kodaci jednačinama(za izvođenje, pogledati [12]):

$$R = \tilde{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2 + 2(n^\mu{}_{;\nu}n^\nu - n^\mu n^\nu{}_{;\nu})_{;\mu} \tag{1.3.33}$$

gde je $\tilde{R}$, Ričijev skalar definisan u odnosu na koneksiju kompatibilnu sa indukovanom metrikom, i $K \equiv h^{ab}K_{ab}$.
Kovarijantni izvod D_a, definisan Levi-Čivita koneksijom u odnosu na h_{ab}, koji smo implicitno koristili u prethodnom izrazu, definiše se za proizvoljan vektor A_b tangentan na hiperpovrš:

$$A_b = A_\mu e^\mu{}_b \Longrightarrow D_a A_b = \nabla_\mu A_\nu e^\mu{}_a e^\nu{}_b \tag{1.3.34}$$

Definicija se pravolinijski proširuje na tenzore višeg reda koristeći Lajbnicovo pravilo i metričku kompatibilnost. Sada imamo sve elemente potrebne za rastavljanje gravitacionog dela dejstva, prelazimo na elektromagnetni deo.
Elektromagnetni potencijal ima dekompoziciju:

$$A^\mu = Vn^\mu + A^a e^\mu{}_a \tag{1.3.35}$$

Tenzor jačine polja se može lakše dekomponovati rastavljanjem preko električnog i magnetnog vektora polja:

$$E_\mu = -F_{\mu\nu}n^\nu \qquad B_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^\nu F^{\rho\sigma} \tag{1.3.36}$$

Ovi vektori su tangentni, $E_\mu n^\mu = B_\mu n^\mu = 0$, pa ih možemo ekvivalentno napisati projekcijom na hiperpovrš:

$$E_a = E_\mu e^\mu{}_a = F_{\mu\nu}n^\mu e^\nu{}_a \qquad B_a = B_\mu e^\mu{}_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F^{bc} \tag{1.3.37}$$

gde je $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^\mu e^\mu{}_a e^\nu{}_b e^\rho{}_c$ indukovana zapreminska forma na hiperpovrši, a $F_{ab} = D_a A_b - D_b A_a$,

tangentni vektor jačine polja.
Koristeći prethodne definicije, elektromagnetno dejstvo se može prepisati kao:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(E_a E^a - B_a B^a) \tag{1.3.38}$$

Konačno, ukupno dejstvo za Ajnštajn-Maksvelovu teoriju, možemo prepisati u ADM obliku koristeći izraze (1.4.31), (1.4.33) i (1.4.38):

$$S = \int dt \int_\Sigma d^3y \mathscr{L} \tag{1.3.39}$$

gde smo integral rastavili na nove koordinate adaptirane 3 + 1 dekompoziciji, i gustina Lagranžijana je data sa:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi} N\sqrt{-h}(\tilde{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2 + 2E_a E^a - 2B_a B^a) \tag{1.3.40}$$

i članovi koji su totalne divergencije koje ne utiču na jednačine kretanja su izuzete iz dejstva.

Kada je izvršena ADM dekompozicija dejstva, definišemo kanonske impulse. Fundamentalna polja $(g_{\mu\nu}, A_\mu)$ sada su zamenjena skupom polja (N, N^a, h_{ab}, V, A_a). Izračunajmo generalisane brzine koje odgovaraju ovim poljima.
Vremenski izvod indukovane metrike h_{ab} računamo preko:

$$\dot{h}_{ab} \equiv \pounds_t h_{ab} = \pounds_t(g_{\mu\nu}) e^\mu{}_a e^\nu{}_b = (t_{\mu;\nu} + t_{\nu;\mu}) e^\mu{}_a e^\nu{}_b \tag{1.3.41}$$

Koristeći dekompoziciju t^μ (1.4.29), dobijamo:

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + D_a N_b + D_b N_a \tag{1.3.42}$$

gde je $N_a = N_\mu e^\mu{}_a$.
Vremenski izvod tangentne projekcije potencijala A_a računamo preko:

$$\dot{A}_a = \pounds_t(A_\mu) e^\mu{}_a = e^\mu{}_a [t^\nu \nabla_\nu A_\mu + A_\nu \nabla_\mu t^\nu] = e^\mu{}_a [-t^\nu F_{\mu\nu} + \nabla_\mu (t^\nu A_\nu)] \tag{1.3.43}$$

Korišćenjem ADM dekompozicije za t^μ (1.4.29) i A^μ (1.4.35), nalazimo:

$$\dot{A}_a = NE_a - F_{ab}N^b + D_a(NV) + D_a(N^b A_b) \tag{1.3.44}$$

Vremenski izvodi ostalih veličina (N, N^a, V) se ne pojavljuju u gustini Lagranžijana, pa su njihovi impulsi po definiciji jednaki nuli. To je i očekivano, jer N i N^a definišu izbor folijacije, odnosno izbor vremenske ose, a u opštoj relativnosti definicija vremenske ose nije jednoznačna, dok V daje kalibracionu slobodu u izboru elektromagnenog potencijala. Prema tome, (N, N^a, V) su nedinamičke promenljive, koje se u Lagranžijanu pojavljuju kao Lagranževi množioci. Fazni prostor je dakle definisan poljima h_{ab} i A_a i njihovim konjugovanim impulsima koji su definisani kao:

$$\frac{1}{16\pi}\pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{16\pi}\sqrt{-h}(K^{ab} - Kh^{ab}) \tag{1.3.45a}$$

$$\Pi^a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_a} = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{-h}E^a \tag{1.3.45b}$$

Faktor $\frac{1}{16\pi}$ je dodat u definiciju kanonskog impulsa radi konvencije. Kasnije će promenljiva $\pi = h_{ab}\pi^{ab}$ biti obeležena istim simbolom kao broj π, pa u skladu sa poznatim referencama [17, 21], uvodimo ovakvu definiciju da ne bi došlo do zabune u notaciji. Konvencije se možemo rešiti smenom $\pi^{ab} \to 16\pi\pi^{ab}$ u

bilo kojem delu daljeg računa.
Gustina Hamiltonijana se preko kanonskih impulsa dobija standardnom formulom:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{16\pi}\pi^{ab}\dot{h}_{ab} + \Pi^a \dot{A}_a - \mathscr{L} \tag{1.3.46}$$

Nakon pravolinijske algebre koristeći relacije između vremenskih izvoda polja i njihovih konjugovanih impulsa, nakon parcijalne integracije i odbacivanja članova sa totalnom divergencijom, dobijamo Hamiltonijan u sledećoj formi:

$$H = \int_\Sigma \mathscr{H} = \int_\Sigma d^3y\sqrt{-h}(t^\mu \mathscr{C}_\mu + t^\mu A_\mu \mathscr{C}) \tag{1.3.47}$$

gde su:

$$\mathscr{C} = \frac{1}{4\pi} D_a E^a \tag{1.3.48a}$$

$$\mathscr{C}_0 = \frac{1}{16\pi}\left[\tilde{R} - \frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2}\right) - 2E_aE^a + F_{ab}F^{ab}\right] \tag{1.3.48b}$$

$$\mathscr{C}_a = -\frac{1}{8\pi}\left[D_b[(-h)^{-1/2}\pi_a{}^b] - 2F_{ab}E^b\right] \tag{1.3.48c}$$

Vidimo da veličine $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ i $\mathscr{C}_a$ ne zavise od nedinamičkih promenljivih N, N^a i V, što znači da variranjem Hamiltonijana u odnosu na ove veličine dobijamo jednačine:

$$\mathscr{C} = 0 \qquad \mathscr{C}_0 = 0 \qquad \mathscr{C}_a = 0 \tag{1.3.49}$$

Ove tri jednačine su veze Ajnštajn-Maksvelove teorije, koje početni uslovi moraju da zadovolje da bi teorija bila konzistentna.

Možemo odmah primetiti da Hamiltonijan ima formu "čiste veze", što znači da je njegova vrednost nula na podmnogostrukosti definisanoj vezama. Ovo implicira da ako variramo početne vrednosti polja tako da varirane promenljive u faznom prostoru $(h_{ab} + \delta h_{ab}, \pi^{ab} + \delta\pi^{ab}, A_a + \delta A_a, \Pi^a + \delta\Pi^a)$ zadovoljavaju jednačine veza do prvog reda u teoriji perturbacije, imamo $H + \delta H = 0$, što dalje implicira $\delta H = 0$. Ova situacija će se ponoviti i u slučaju lokalne Poenkareove teorije, i zaista, može se pokazati da svaka teorija invarijantna na difeomorfizme ima Hamiltonijan ovog tipa [22]. Ako variramo Hamiltonijan, uzevši podatke o početnim uslovima tako da zadovoljavaju veze, i uzevši proizvoljne perturbacije koje su na kompaktnom nosaču na Σ, dobićemo jednačine polja naše teorije. Opšti oblik varijacije Hamiltonijana, može se zapisati u obliku:

$$\delta H = \int_\Sigma [\mathscr{P}^{ab}\delta h_{ab} + \mathscr{Q}_{ab}\delta\pi^{ab} + \mathscr{R}^a \delta A_a + \mathscr{S}_a \delta\Pi^a] \tag{1.3.50}$$

Članovi $\mathscr{P}^{ab}$, $\mathscr{Q}_{ab}$, $\mathscr{R}_{ab}$ i $\mathscr{S}_{ab}$ daju Hamiltonove jednačine:

$$\mathscr{P}^{ab} = -\frac{1}{16\pi}\dot{\pi}^{ab} \qquad (16\pi)\mathscr{Q}_{ab} = \dot{h}_{ab} \qquad \mathscr{R}^a = -\dot{\Pi}^a \qquad \mathscr{S}_a = \dot{A}_a \tag{1.3.51}$$

Tačan oblik ovih članova u slučaju naše teorije je dosta glomazan, i nećemo ga ovde navoditi. On se može naći u [21] za opštiji slučaj Ajnštajn-Jang-Milsove teorije, i u [23] za ovde korišćeni slučaj Ajnštajn-Maksvelove teorije. Obratićemo sada pažnju na jednu bitnu osobinu ovog Hamiltonijana, koja će nas dovesti do prvog zakona mehanike crnih rupa.

Za dobijanje jednačine (1.4.50), koriščene su perturbacije na kompaktnom nosaču, što znači da je uzeto da su perturbacije jednake nuli van određene kompaktne oblasti u Σ. Ovo ima za posledicu da smo sve površinske članove nastale u koracima sa parcijalnom integracijom mogli da anuliramo, pa varijacija Hamiltonijana ima oblik zapreminskog integrala. Ukoliko posmatramo varijacije koje nisu na kompaktnom nosaču, pojaviće se nenulti granični članovi u varijaciji Hamiltonijana. Posledica pojavljivanja graničnih članova znači da Hamiltonijan više neće imati dobro definisane varijacione izvode, tako da ovakav Hamiltonijan neće moći da da jednačine kretanja. Ovu pojavu su prvi primetili Redže i Tajtelbom [24], koji su predložili da 'pravi' Hamiltonijan, kao generator vremenske evolucije, mora imati dobro definisane varijacione izvode, pa se zbog konzistentnosti u Hamiltonijan moraju dodati granični članovi koji daju krajnju varijaciju Hamiltonijana u formi zapreminskog integrala (1.4.50) sa članovima uz varijacije faznih promenljivih koji daju Hamiltonove jednačine (1.4.51). Logično je da će ovakva redefinicija Hamiltonijana zavisiti od izbora perturbacija koje koristimo kada variramo Hamiltonijan. Perturbacije zadajemo graničnim uslovima, i mogućnost popravke Hamiltonijana dodavanjem graničnih članova obezbeđuje konzistentnost formalizma.

U našem slučaju, biramo perturbacije koje su asimptotski ravne. Ovo znači da pretpostavljamo da postoji "asimptotska oblast" $U \subset \Sigma$ koja je difeomorfna $\mathbb{R}^3 \backslash B$, gde je B kompaktni podskup Σ, i važe sledeći granični uslovi za fazne promenljive [21]:

$$h_{ab} = \eta_{ab} + \frac{\bar{h}_{ab}(\theta,\varphi)}{r} + \mathscr{O}_2 \tag{1.3.52a}$$

$$\pi^{ab} = \frac{\bar{\pi}^{ab}(\theta,\varphi)}{r^2} + \mathscr{O}_3 \tag{1.3.52b}$$

$$A_a = \frac{\bar{A}_a(\theta,\varphi)}{r} + \mathscr{O}_2 \tag{1.3.52c}$$

$$\Pi^a = \frac{\bar{\Pi}^a(\theta,\varphi)}{r^2} + \mathscr{O}_3 \tag{1.3.52d}$$

Ovde je η_{ab} ravna metrika indukovana na Σ sa $\mathbb{R}^3$, a $\mathscr{O}_n$ obeležava asimptotsko ponašanje $O(r^{-n})$. U asimptotskoj oblasti uvedene su sferne koordinate (r,θ,φ), i posmatramo asimptotski razvoj kada $r \to \infty$.

Zajedno sa asimptotskim graničnim uslovima (1.4.52) za fazne promenljive, potrebno je zadati asimptotsko ponašanje Lagranževih množitelja N, N^a i V. Za normalnu komponentu elektromagnenog potencijala V, obično se uzima $V \to V_\infty$, gde $V_\infty \sim \mathscr{O}_0$, što je uslovljeno pretpostavljenom stacionarnošću polja A_a. Izbor ponašanja N i N^a nameće izbor folijacije koju posmatramo. Posmatraćemo dva ovakva izbora.

U prvom slučaju, razmatramo asimptotsku vremensku translaciju, zadatu ponašanjem $N \to 1, N^a \to 0$ kada $r \to \infty$.
Pri ovakvim uslovima, varijacija Hamiltonijana je:

$$\begin{aligned} \delta H = &\int_\Sigma [\mathscr{P}^{ab}\delta h_{ab} + \mathscr{Q}_{ab}\delta\pi^{ab} + \mathscr{R}^a\delta A_a + \mathscr{S}_a\delta\Pi^a] \\ &- \frac{1}{16\pi}\delta\oint_\infty dS^a(\partial^b h_{ab} - \partial^a h_b{}^b) - \frac{1}{4\pi}\delta\oint_\infty dS^a V E_a \end{aligned} \tag{1.3.53}$$

Kao što je i očekivano, pojavile su se varijacije površinskih članova, koje sugerišu da popravljeni Hamiltonijan ima oblik koji poništava ove varijacije:

$$\tilde{H} = H + \frac{1}{16\pi}\oint_\infty dS^a(\partial^b h_{ab} - \partial^a h_b{}^b) + \frac{1}{4\pi}\oint_\infty dS^a V E_a \tag{1.3.54}$$

Popravljeni Hamiltonijan $\tilde{H}$, daće tačne jednačine kretanja, a njegova vrednost na podmnogostrukosti veza biće upravo jednaka vrednosti površinskih članova, pošto je prvi član u gornjem izrazu na vezama jednak nuli. S obzirom na to da smo izabrali da posmatramo asimptotsku vremensku translaciju, prirodno je da ovu vrednost definišemo kao *kanonsku energiju* E zadatog sistema. Dobijamo dakle:

$$E = \frac{1}{16\pi}\oint_{\infty} dS^a(\partial^b h_{ab} - \partial^a h_b{}^b) + \frac{1}{4\pi}\oint_{\infty} dS^a V E_a = m + V_\infty Q \tag{1.3.55}$$

gde je V_∞ asimptotska vrednost V koja je zadata graničnim uslovom, a Q i m su naelektrisanje i ADM masa sistema. Kada nemamo granicu već samo doprinos iz beskonačnosti, naelektrisanje će biti jednako nuli zbog veze $\mathscr{C} = 0$(kao posledica Stoksove teoreme). U opštijem slučaju koji ćemo uskoro razmotriti, gde je prisutna unutrašnja granica, ovaj član je nenulti, pa ga zadržavamo radi kompletnosti.
Možemo prepisati varijaciju Hamiltonijana sa definisanom ADM masom i naelektrisanjem:

$$\delta H = \int_\Sigma [\mathscr{P}^{ab}\delta h_{ab} + \mathscr{Q}_{ab}\delta\pi^{ab} + \mathscr{R}^a\delta A_a + \mathscr{S}_a\delta\Pi^a] - \delta m - V_\infty\delta Q \tag{1.3.56}$$

Slično kao u prethodnom slučaju, možemo razmatrati ponašanje N i N^a vezano za asimptotsku aksijalnu rotaciju, dato uslovima $N \to 0$ i $N^a\partial_a \to \partial_\varphi$ kada $r \to \infty$ i nalazimo:

$$\delta H = \int_\Sigma [\mathscr{P}^{ab}\delta h_{ab} + \mathscr{Q}_{ab}\delta\pi^{ab} + \mathscr{R}^a\delta A_a + \mathscr{S}_a\delta\Pi^a] + \delta J \tag{1.3.57}$$

gde je:

$$\delta J = -\frac{1}{16\pi}\oint_{\infty} dS_a(2\phi_b\pi^{ab} + 4\phi_b A^b E^a) \tag{1.3.58}$$

varijacija *kanonskog momenta impulsa* sistema, a ϕ_a Kilingov vektor, generator aksijalne rotacije.

Konačno, razmotrićemo slučaj gde je Σ mnogostrukost sa unutrašnjom granicom S_H, pri čemu će se pojaviti granični članovi koji potiču i iz asimptotske beskonačnosti, i sa unutrašnje granice. Konkretno, želeli bismo da razmotrimo slučaj gde prostorvreme sadrži crnu rupu. Onda bi unutrašnja granica S_H bila presek horizonta sa crnom rupom. Za ovaj proračun, pogodno je uvesti pojam bifurkacionog Kilingovog horizonta. Bifurkacioni Kilingov horizont je skup dve hiperpovrši svetlosnog tipa koje su obe Kilingovi horizonti za isti Kilingov vektor ξ, i čiji je presek dvodimenzionalna površ prostornog tipa S, koju zovemo *bifurkaciona površ*. Osobina bifurkacione površi je da Kilingov vektor mora biti jednak nuli na njoj. Rezultat Raca i Volda [25], koji omogućava korišćenje ovog pojma u našoj analizi, je da ako prostorvreme maksimalno proširene crne rupe ima površinsku gravitaciju $\kappa \neq 0$, onda horizont događaja mora biti grana bifurkacionog Kilingovog horizonta.

Naša postavka, dakle, uzima da Košijeva površ početnih uslova Σ odgovara rešenju jednačina polja Ajnštajn-Maksvelove teorije sa stacionarnom aksisimetričnom crnom rupom, i biraćemo Σ iz folijacije Σ_t tako da unutrašnja granica Σ koja odgovara preseku horizonta događaja crne rupe bude tačno bifurkaciona površ bifurkacionog Kilingovog horizonta, čija je grana horizont događaja. Ako Kilingove vektore koji odgovaraju vremenskim translacijama i aksijalnim rotacijama obeležimo sa t^μ i ϕ^μ, redom, onda je Kilingov vektor koji generiše horizont dat kao(1.4.2):

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega\phi^\mu \tag{1.3.59}$$

gde je Ω ugaona brzina horizonta.
Kalibrišemo potencijal A_μ tako da se simetrije elektromagnetnog polja i gravitacionog polja poklapaju, tj. $\pounds_t A_\mu = \pounds_\phi A_\mu = 0$, i zahtevamo, naravno da je A_μ regularno na Σ. Dalje, biramo Kilingov vektor ξ koji je vremenskog tipa u spoljašnjosti crne rupe, za vektor vremenske evolucije prostorvremena, i neka

je H pridruženi ADM Hamiltonijan koji odgovara ovoj konstrukciji. Biramo varijacije da budu asimptotski ravne, kao i ranije, nesingularne na Σ(uključujući granicu S_H), i namećemo da zadovoljavaju veze Ajnštajn-Maksvelove teorije do prvog reda teorije perturbacije. Onda je opšti oblik varijacije Hamiltonijana dat u formi:

$$0 = \delta H = \delta H_V + \delta\Gamma_\infty - \delta\Gamma_{S_H} \tag{1.3.60}$$

gde smo sa δH_V obeležili deo varijacije koji je u zapreminskoj formi posle parcijalne integracije, a $\delta\Gamma_\infty$ i $\delta\Gamma_H$ su doprinosi graničnih članova iz beskonačnosti i sa horizonta, odnosno bifurkacione površi S_H. Zapreminski deo varijacije daje Hamiltonove jednačine, i sadrži koeficijente koji su vremenski izvodi faznih promenljivih. S obzirom na to da smo izabrali folijaciju tako da polje vremenske evolucije bude Kilingov vektor, onda za proizvoljnu faznu promenljivu P imamo:

$$\dot{P} = £_\xi P \qquad P \in (h_{ab}.\pi^{ab}, A_a, \Pi^a) \tag{1.3.61}$$

Pošto je ξ Kilingov vektor, važi $£_\xi g_{\mu\nu} = £_\xi A_\mu = 0$, pa zapreminski doprinosi nestaju. Izraz se pojednostavljuje u oblik:

$$\delta\Gamma_\infty = \delta\Gamma_{S_H} \tag{1.3.62}$$

Granični članovi imaju sličan oblik kao i ranije, i računanjem precizno njihove forme na osnovu prethodnih pretpostavki, kao što je urađeno u referencama [21, 23], dobija se:

$$\delta m + V_H \delta Q - \Omega\delta J = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A \tag{1.3.63}$$

gde je $A = \int_{S_H} dS$ površina horizonta, a κ površinska gravitacija horizonta.
Gornja jednačina predstavlja prvi zakon mehanike crnih rupa. Zajedno sa Bekenštajn-Hokingovom formulom za entropiju (1.3.3), ona je analogna prvom zakonu termodinamike, gde $\frac{\kappa}{2\pi}$ ima ulogu temperature. Ovo tačno odgovara Hokingovoj temperaturi dobijeno za Kerr-Njumanovu crnu rupu koja je rešenje Ajnštajn-Maksveloih jednačina za rotirajuću naelektrisanu crnu rupu. Član δm ima ulogu energije sistema, a $-\Omega\delta J$ odgovara članu vezanom za rad vršen na sistemu usled rotacije. Član $V_\infty \delta Q$, uočavamo kao rad elektromagnetne sile, tj. potencijalnu energiju elektromagnenog polja.
Videćemo da na isti način možemo doći do prvog zakona mehanike crnih rupa i u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, što omogućava proračun entropije za crne rupe sa površinskom gravitacijom $\kappa \neq 0$.

1.3.3 Treći zakon

Treći zakon mehanike crnih rupa ima status hipoteze, i skorije vreme se ispostavlja da je narušen u nekim slučajevima. U svom osnovnom obliku, on kaže:

Teorema 3 (Treći zakon mehanike crnih rupa)**.** *Nemoguće je smanjiti površinsku gravitaciju crne rupe κ do nule bilo kojim konačnim nizom procesa.*

Vidmo da je ovaj stav u analogiji sa trećim zakonom termodinamike koji kaže da ne možemo smanjiti temperaturu do apsolutne nule konačnim nizom procesa. Najprostija provera trećeg zakona može se videti na primeru Švarcšildove crne rupe.
Napišimo metriku Švarcšildove crne rupe u Edington-Finkelštajnovim koordinatama, regularnim na horizontu, tako da možemo izračunati površinsku gravitaciju:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2 \tag{1.3.64}$$

Generator horizonta u ovim koordinatama je vektorsko polje $l^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{v}$. Smenom ovog polja u definicionu relaciju:

$$l^{\mu}\nabla_{\mu}l^{\nu} = \kappa l^{\nu} \tag{1.3.65}$$

i smenom koordinate horizonta $r = 2m$, dobijamo $\kappa = \frac{1}{4m}$.
Odavde sledi da povećavanjem mase Švarcšildove crne rupe smanjujemo njenu površinsku gravitaciju, što je i logično, međutim potrebna je beskonačna masa da bismo dostigli slučaj kada je $\kappa = 0$. Ovo istovremeno znači da Švarcšildova crna rupa ne može imati nultu površinsku gravitaciju, što čini ovaj slučaj trivijalnim. Stvari su malo komplikovanije kada imamo crnu rupu sa momentom impulsa i naelektrisanjem. Za Ker-Njumanovu rotirajuću i naelektrisanu crnu rupu važi relacija između parametara mase, specifičnog momenta impulsa i naelektrisanja pri kojoj crna rupa nema goli singularitet(tj. singularitet vidljiv iz asimptotske beskonačnosti):

$$m^2 \geqslant a^2 + q^2 \tag{1.3.66}$$

gde jednakost važi u slučaju $\kappa = 0$.
Crna rupa kod koje je $\kappa = 0$ naziva se *ekstremalna crna rupa*. Neke osobine ovih crnih rupa biće predstavljene u daljim poglavljima. Nejednakost (1.4.66) ukazuje na to da ukoliko crnoj rupi nekim procesom dodajemo materiju sa velikim momentom impulsa u smeru rotacije crne rupe i velikim naelektrisanjem, izgleda kao da je principijelno moguće dostići stanje ekstremalne crne rupe. Ipak, ovakav proces podrazumeva računanje realnog procesa absorbovanja materije od strane crne rupe(čime su nametnuti realni uslovi na parametre momenta impulsa i naelektrisanja materije), što nije trivijalan zadatak. Autoru su poznata dva pristupa preko kojih je do sada ispitivana tačnost trećeg zakona mehanike crnih rupa.

Prvi pristup primenio je Vold [26] u kojem je uzeto da je Ker-Njumanova rotirajuća naelektrisana crna rupa ekstremalna na početku procesa, i proveravano je da li ubacivanjem probnih čestica testirano je da li je moguće narušenje nejednakosti (1.4.66), čime bi ekstremalna crna rupa potencijalno postala goli singularitet. Rezultati rada su bili negativni, tj. pokazano je, računanjem putanja probnih čestica u okolini Ker-Njumanove crne rupe da su mogući parametri realnih čestica takvi da nejednakost (1.4.66) ne može biti narušena. Ispostavlja se da ukoliko čestica poseduje dovoljno veliki moment impulsa odnosno naelektrisanje da naruši datu nejednakost, u interakciji sa elektromagnetnim odbijanjem i cetrifugalnim efektom Ker-Njumanove crne rupe, ovakva čestica će biti odbijena i neće upasti u crnu rupu. Ovaj rad je u skorije vreme [27] proširen na slučaj kada su uračunati efekti drugog reda u interakciji sa crnom rupom koji podrazumevaju efekte konačne veličine tela koje upada u crnu rupu, kao i efekte samointerakcije u gravitacionom polju. Rezultat je ponovo bio negativan, te se ispostavlja da u realnim situacijama ekstremalna crna rupa neće preći goli singularitet apsorbovanjem proizvoljne materije(barem u dometima računa koji su do sada testirani).

Voldov rad ipak dozvoljava da crna rupa bude u ekstremalnom stanju, što bi po trećem zakonu trebalo da bude granično stanje beskonačne serije procesa. On se dakle odnosi na efekte koji su granično izvan opsega važenja trećeg zakona, i pozitivan rezultat kod njegovih radova bi ukazivao da veliki problem u slučaju da je moguće dostići ekstremalnost kod crnih rupa. Testiranje samog trećeg zakona u obliku koji smo mi predstavili dugo nije bilo popularna tema, međutim, skorašnji rad Kelea i Ungera [28] daje kontraprimer, gde crna rupa koja je rešenje Ajnštajn-Maksvelove teorije kuplovana sa bezmasenim naelektrisanim skalarnim poljem, može kolapsirati u ekstremalno stanje za konačno vreme. Rezultat Kelea i Ungera dao je ponovno interesovanje u narušenje trećeg zakona, s obzirom na to da je eksplicitni primer narušenja pokazan. Ipak, s obzirom na partikularni oblik materije u njihovom radu, koji zahteva veliki odnos parametara naelektrisanja i mase kolapsirajuće materije, postavlja se pitanje o važenju sličnog kontraprimera pri realnijim uslovima. Rad Reala [29, 30] pokazuje da pri malo većim ograničenjima na naelektrisanje i masu kolapsirajuće materije, treći zakon ostaje zadovoljen. Ipak, ova tema je trenutno predmet tekućeg istraživanja, i ne postoji apsolutni koncenzus o važenju trećeg zakona, te on za sada

ostaje u domenu hipoteze.
Za kraj ovog poglavlja rezimiramo analogiju između zakona mehanike crnih rupa i zakona termodinamike u sledećoj tabeli.

	Zakoni mehanike crnih rupa	**Zakoni termodinamike**
Nulti zakon	Površinska gravitacija κ horizonta crne rupe je konstantna.	Temperatura T sistema u termodinamičkoj ravnoteži je konstantna.
Prvi zakon	Za stacionarne asimptotski ravne crne rupe, važi: $$\frac{\kappa}{8\pi}\delta A = \delta E - \Omega\delta J + V\delta Q$$	Za izolovani termodinamički sistem, važi: $$T\Delta S = \Delta U - \Delta W$$
Drugi zakon	U proizvoljnom realnom fizičkom procesu, površina ne opada: $$dA \geqslant 0$$	U proizvoljnom spontanom procesu, entropija izolovanog sistema se ne smanjuje: $$\Delta S \geqslant 0$$
Treći zakon	Nemoguće je smanjiti površinsku gravitaciju crne rupe na nulu konačnim nizom procesa.	Nemoguće je smanjiti temperaturu sistema na apsolutnu nulu konačnim nizom procesa.

Table 1.1: Analogija između mehanike crnih rupa i termodinamike

2 Računanje entropije crnih rupa u lokalnoj Poenkareovoj teoriji

Nakon što smo uveli pojam entropije i zakone mehanike crnih rupa, generalisaćemo ovaj pristup na lokalnu Poenkareovu teoriju gravitacije. Stoga u ovom poglavlju pravimo kratak pregled lokalne Poenkareove teorije i generališemo metode korišćene u sekciji 1.3 kojima je izveden prvi zakon termodinamike na opšti Dirakov kanonski formalizam sa vezama u kontekstu lokalne Poenkareove teorije. Rezultat Blagojevića i Cvetkovića [31] omogućava proračun entropije analizom kanonskih generatora lokalne simetrije, gde je entropija definisana kao održani naboj na horizontu u skladu sa idejom Volda [19]. Istovremeno, ovakav pristup proračunu entropija implicira mogućnost provere važenja prvog zakona mehanike crnih rupa u kontekstu lokalne Poenkareove teorije. Predstavljanje ove metode biće glavni rezultat ovog poglavlja, s obzirom na to da će ista metoda biti dalje generalisana na kontekst ekstremalnih crnih rupa u narednom poglavlju.

2.1 Pregled lokalne Poenkareove teorije

Lokalna Poenkareova teorija počinje kao razmatranje teorije polja zadate principom minimalnog dejstva, gde je dejstvo zadato integralom $S=\int d^4x\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$, čiji Lagranžijan zavisi od polja materije i njihovih prvih izvoda, i koje je invarijantno na globalne Poenkareove transformacije. Korišćenjem kalibracionog principa Janga i Milsa, u dejstvo se uvode gradijentna polja tako da ono postane invarijantno na lokalne Poenkareove transformacije. Kompletno izvođenje procedure lokalizovanja Poenkareove simetrije može se naći u literaturi [32, 33], a mi ćemo se ovde zadržati na predstavljanju glavnih rezultata.
Poenkareova transformacija je na prostorvremenu zadata kao transformacija koordinata:

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \qquad \xi^\mu = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.1.1}$$

gde su $\omega^{\mu\nu}$ i ε^μ parametri Lorencove grupe i grupe translacija, redom. Lokalne Poenkareove transformacije deluju na polje materije ϕ po zakonu:

$$\delta_0\phi = \left(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}+\varepsilon^\mu P_\mu\right)\phi = \left(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}+\xi^\mu P_\mu\right)\phi \tag{2.1.2}$$

gde su $M_{\mu\nu}=x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu+\Sigma_{\mu\nu}$ generator Lorencovih transformacija, $P_\mu=-\partial_\mu$ generator translacija, i $\Sigma_{\mu\nu}$ spinski deo generatora Lorencovih transfomacija, redom.

Pri lokalizaciji simetrije, parametri $\omega^{\mu\nu}$ i ε^μ, odnosno $\omega^{\mu\nu}$ i ξ^μ, postaju funkcije koordinata prostorvremena. Možemo primetiti da spinski generator $\Sigma_{\mu\nu}$ deluje na polje materije u tački(ne zavisi od koordinata), pa se opšta transformacija razdvaja na spinski član koji je lokalizovan u tački prostorvremena, i član $\xi^\mu P_\mu$ koji posle lokalizacije simetrije predstavlja proizvoljni difeomorfizam generisan poljem ξ.

Naravno, implicitno je podrazumevano da polja materije ϕ nose spinske indekse koji definišu zakon transformacije u odnosu na Lorencove transformacije, i da su u odnosu na opšte koordinatne transformacije skalari(ukoliko polja materije nose koordinatne indekse, njihova transformacija generisana poljem ξ data je Lijevim izvodom $\delta_0\phi = -\pounds_\xi \phi$). U skladu sa tim, spinske indekse obeležavamo slovima latinskog alfabeta, dok koordinatne indekse obeležavamo grčkim alfabetom, pa se lokalna Poenkareova transformacija piše kao:

$$\delta_0\phi = \left(\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} + \xi^\mu P_\mu\right)\phi \tag{2.1.3}$$

Zahtevanje da dejstvo teorije bude invarijatno na lokalne transformacije vrši se konstrukcijom odgovarajuće gustine Lagranžijana po pravilu:

> Gustina Lagranžijana teorije invarijantne na lokalne Poenkareove transformacije je oblika $\mathscr{L}' = \Lambda\mathscr{L}(\phi, \nabla_k\phi)$, gde je ∇_k pogodno definisan kovarijantni izvod i Λ faktor koji obezbeđuje invarijantnost zapreminskog elementa u dejstvu.

Procedurom lokalizacije simetrije [32, 33], može se izvesti da kovarijantni izvod ∇_k ima oblik:

$$\nabla_k\phi = h_k{}^\mu \nabla_\mu\phi \tag{2.1.4}$$

gde je ∇_μ takozvani "ω"-kovarijantni izvod, zadan formulom:

$$\nabla_\mu\phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi \qquad A_\mu = \frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} \tag{2.1.5}$$

Polja $h_k{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ su gradijentna polja vezana za lokalne translacije(odnosno difeomorfizme) i lokalne Lorencove transformacije, redom. Pri lokalnim Poenkareovim transformacijama, njihov zakon transformacije je zadan pravilima:

$$\delta_0 h_k{}^\mu = \omega_k{}^s h_s{}^\mu + \xi^\mu{}_{,\nu} h_k{}^\nu - \xi^\nu\partial_\nu h_k{}^\mu \tag{2.1.6a}$$

$$\delta_0 A^{ij}{}_\mu = \omega^i{}_s A^{sj}{}_\mu + \omega^j{}_s A^{is}{}_\mu - \omega^{ij}{}_{,\mu} - \xi^\nu{}_{,\mu} A^{ij}{}_\nu - \xi^\nu A^{ij}{}_{\mu,\nu} \tag{2.1.6b}$$

Uvođenjem veličine $b^i{}_\mu$, inverzne polju $h_k{}^\mu$:

$$b^i{}_\mu h_j{}^\mu = \delta^i_j \qquad b^i{}_\nu h_i{}^\mu = \delta^\mu_\nu \tag{2.1.7}$$

može se izračunati da faktor Λ u gustini Lagranžijana ima oblik:

$$\Lambda = b \equiv \det(b^i{}_\mu) \tag{2.1.8}$$

Zakon transformacije polja $b^i{}_\mu$ pri lokalnim Poenkareovim transformacijama je:

$$\delta_0 b^i{}_\mu = \omega^i{}_s b^s{}_\mu - \xi^\lambda{}_{,\mu} b^i{}_\lambda - \xi^\lambda b^i{}_{\mu,\lambda} \tag{2.1.9}$$

Uvođenjem gradijentnih polja $h_k{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ u teoriju, konstrukcija dejstva za polja materije invarijantnog na lokalne Poenkareove transformacije je završena. Ostaje da se konstruiše dejstvo za slobodno polje. Za to je potrebno uvesti tenzore jačine polja koji odgovaraju poljima $h_k{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$, što se definiše na standardni način komutiranjem kovarijantnih izvoda:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = \frac{1}{2}F^{ij}{}_{\mu\nu}\Sigma_{ij}\phi \tag{2.1.10a}$$

$$[\nabla_k, \nabla_l]\phi = \frac{1}{2}F^{ij}{}_{kl}\Sigma_{ij}\phi - F^i_{kl}\nabla_i\phi \tag{2.1.10b}$$

gde su:

$$F^{ij}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ij}{}_\nu - \partial_\nu A^{ij}{}_\mu + A^i{}_{k\mu}A^{kj}{}_\nu - A^i{}_{k\nu}A^{kj}{}_\mu \tag{2.1.11a}$$

$$F^{ij}{}_{kl} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu F^{ij}{}_{\mu\nu} \tag{2.1.11b}$$

$$F^i_{kl} \equiv h_k{}^\mu h_l{}^\nu F^i_{\mu\nu} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu(\nabla_\mu b^i{}_\nu - \nabla_\nu b^i{}_\mu) \tag{2.1.11c}$$

tenzori jačine polja. $F^{ij}{}_{kl}$ je tenzor jačine polja vezanog za Lorencove transformacije, dok je F^i_{kl} tenzor jačine polja vezanog za translacije.
Opšta gustina Lagranžijana u lokalnoj Poenkareovoj teoriji je oblika:

$$\tilde{\mathscr{L}} = b\mathscr{L}_F(F^{ij}{}_{kl}, F^i_{kl}) + b\mathscr{L}_M(\phi, \nabla_k\phi) \tag{2.1.12}$$

gde je $\mathscr{L}_F(F^{ij}{}_{kl}, F^i_{kl})$ slobodna gustina Lagranžijana koja zavisi od invarijantne kombinacije tenzora jačina polja.

Nakon lokalizacije Poenkareove simetrije, dobijena je gradijentna teorija polja sa dva gradijentna polja kao nosiocima interakcije. Ova teorija je, kao i druge gradijentne teorije, zadata u ravnom prostoru, i *a priori* nije jasno da ona opisuje gravitacionu interakciju. Međutim, ispostavlja se da postoji jaka analogija između lokalne Poenkareove teorije i takozvane Riman-Kartanove geometrije, tj. geometrije zakrivljenog prostorvremena sa nenultom torzijom. Ova analogija daje geometrijsku interpretaciju uvedenim gradijentnim poljima, što omogućava tumačenje teorije kao generalizacije Ajnštajnove teorije gravitacije. Opisaćemo sada ukratko ovu analogiju.

Razmotrimo prostorvreme kao diferencijabilnu mnogostrukost M sa definisanom pseudo-Rimanovom metrikom g i afinom koneksijom ∇. Komponente kovarijantnih izvoda vektora i 1-formi na ovoj mnogostrukosti transformišu se po pravilima:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu}v^\rho \qquad \nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\mu}v_\rho \tag{2.1.13}$$

gde su $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ koeficijenti koneksije. Ova definicija se uopštava na tenzore višeg reda na uobičajeni način po Lajbnicovom pravilu.

Riman-Kartanov prostor U_4 definisan je postulatom o metričkoj kompatibilnosti koji kaže da se metrika ne menja pri paralelnom transportu:

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 \tag{2.1.14}$$

Afina koneksija definisana na U_4 ne mora u opštem slučaju biti simetrična kao što je to slučaj kod Levi-Čivita koneksije. Njen antisimetrični deo definiše *tenzor torzije*:

$$T^\mu{}_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} \tag{2.1.15}$$

Rešavanjem uslova metričke kompatibilnosti (2.1.14) po koneksiji, dobija se da opšta afina koneksija ima dekompoziciju:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} + K^{\mu}{}_{\nu\rho} \tag{2.1.16}$$

gde su $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(g_{\nu\lambda,\rho} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda})$ Kristofelovi simboli druge vrste koji predstavljaju komponente Levi-Čivita koneksije, a $K^{\mu}{}_{\nu\rho} \equiv -\frac{1}{2}(T^{\mu}{}_{\nu\rho} - T_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu} + T_{\nu\rho}{}^{\mu})$ komponente tenzora *kontorzije*. Dekompozicija (2.1.16) pokazuje da, mada je Riman-Kartanova geometrija definisana metrikom i afinom koneksijom kao nezavisnim veličinama, možemo ekvivalentno uzeti da je geometrija definisana zadavanjem metrike i torzije. Ovaj opis je očigledno proširen u odnosu na opštu relativnost, gde je cela geometrija zadata metrikom, i koja se može dobiti kao slučaj kada je torzija jednaka nuli.
Za proizvoljnu afinu koneksiju, definišemo Rimanov tenzor krivine na standardan način:

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \tag{2.1.17}$$

Tetradni formalizam. U svakoj tački Riman-Kartanovog prostora možemo konstruisati ortonormalni lokalni Lorencov sistem $e_i = e_i{}^{\mu}\partial_{\mu}$, koji nazivamo *tetradom*, i koji čini bazis tangentnog prostora u datoj tački. Komponente u odnosu na ovaj bazis obeležavamo indeksima latinskog alfabeta, u skladu sa tim da se bazis transformiše kovarijantno pri lokalnim Lorencovim transformacijama. Po definiciji, važi:

$$g_{\mu\nu} e_i{}^{\mu} e_j{}^{\nu} = \eta_{ij} \qquad \eta_{ij} \vartheta^i{}_{\mu} \vartheta^j{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{2.1.18}$$

gde je $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ metrika prostora Minkovskog, a $\vartheta^i{}_{\mu}$ inverzna tetrada definisana relacijama:

$$\vartheta^i{}_{\nu} e_i{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad \vartheta^i{}_{\mu} e_j{}^{\mu} = \delta^i_j \tag{2.1.19}$$

Često se u literaturi inverzne tetrade takođe nazivaju tetradama, i mi prihvatamo ovu nepreciznost u terminologiji, s obzirom na to da su obe veličine jednoznačno povezane i njihov smisao je uvek jasan iz zakona transformacije.

Komponente tetrada imaju smisao matrica transformacija između koordinatnog i tetradnog bazisa. Proizvoljan vektor, odnosno 1-forma imaju tetradne komponente:

$$u^i \equiv \vartheta^i{}_{\mu} u^{\mu} \qquad u_i \equiv e_i{}^{\mu} u_{\mu} \tag{2.1.20}$$

Za proizvoljan tenzor višeg reda, odgovarajući indeksi se transformišu u tetradne indekse na isti način. Tetradni indeksi se podižu i spuštaju metrikom Minkovskog η_{ij}(i njenim inverzom η^{ij}), dok se koordinatni indeksi podižu i spuštaju metrikom $g_{\mu\nu}$(i njenim inverzom $g^{\mu\nu}$).

Korisno je primetiti da se tetradne komponente proizvoljnog tenzora transformišu kao skalari pri opštim koordinatnim transformacijama, što direktno sledi iz relacija (2.1.20), gde vidimo da je transfomacija koordinatnih komponenti kompenzovana transformacijom tetrada. U tom smislu možemo posmatrati red proizvoljnog tenzora u odnosu na lokalne Lorencove transformacije i opšte koordinatne transformacije odvojeno, posmatrajući odgovarajuće indekse, pa je, na primer, tetrada $\vartheta^i{}_{\mu}$ vektor u odnosu na lokalne transformacije, a 1-forma u odnosu na opšte koordinatne transformacije. Afina koneksija, međutim, nije tenzor, pa njene komponente u tetradnom bazisu ne možemo dobiti pravilom (2.1.20). Da bismo dobili oblik tetradnih komponenti koneksije, posmatramo kovarijantni izvod vektorskog polja $\nabla_{\mu}v^{\nu}$, čije se komponente transformišu kao tenzor:

$$\nabla_{\mu}v^{\nu} = \partial_{\mu}v^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}v^{\rho} = \vartheta^i{}_{\mu} e_j{}^{\nu} D_i v^j \tag{2.1.21}$$

gde smo sa D_i obeležili kovarijantni izvod u tetradnom bazisu.
Množenjem (2.1.21) sa leve strane inverzima tetrada i korišćenjem (2.1.20), dobijamo:

$$D_i v^j = e_i{}^\mu \partial_\mu v^j + \omega^j{}_{ki} v^k \tag{2.1.22}$$

gde su

$$\omega^j{}_{ki} = e_i{}^\mu e_k{}^\nu [-\partial_\mu \vartheta^j{}_\nu + \vartheta^j{}_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu}] = -e_i{}^\mu e_k{}^\nu \nabla_\mu \vartheta^j{}_\nu \tag{2.1.23}$$

koeficijenti koneksije u tetradnom bazisu, i druga jednakost uzima u obzir činjenicu da se tetrada ϑ^i transformiše kao 1-forma pri opštim koordinatnim transformacijama. Veličinu $\omega^i{}_{jk}$ zovemo *spinska koneksija*. Delovanjem kovarijantnim izvodom ∇_μ na drugu jednačinu u (2.1.18) i korišćenjem uslova metričke kompatibilnosti (2.1.14), i gornje relacije (2.1.23), dobijamo ekvivalent metričke kompatibilnosti u tetradnom bazisu:

$$\omega_{ijk} + \omega_{jik} = 0 \tag{2.1.24}$$

odnosno, spinska koneksija je antisimetrična po prva dva indeksa.
Ukoliko primetimo da se koneksija transformiše kao 1-forma po poslednjem indeksu, odnosno indeksu po kome se vrši izvod, možemo pisati:

$$D_i = e_i{}^\mu D_\mu \qquad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \tag{2.1.25}$$

Ovde Σ_{ij} predstavljaju generatore spina u odgovarajućoj reprezentaciji Lorencove grupe, pa smo efektivno uopštili izvod D_μ tako da deluje na proizvoljne spinore. U slučaju vektorske reprezentacije, na primer, $(\Sigma_{ij})^k{}_l = \delta^k_i \eta_{jl} - \delta^k_j \eta_{il}$, pa zamenom u (2.1.25) rekostruišemo jednačinu (2.1.22) za izvod vektorskog polja. Vidimo da su izvodi ∇_μ i D_i, iako veza (2.1.22) predstavlja invarijantnost operacije paralelnog prenosa na izbor bazisa, netrivijalno vezani relacijom (2.1.23), koja definiše spinsku koneksiju i obično se naziva tetradni postulat. Poređenje relacije (2.1.25) sa relacijama (2.1.4) i (2.1.5) daje očiglednu analogiju između tetrade $e_i{}^\mu$ i gradijentnog polja $h_i{}^\mu$, i spinske koneksije $\omega^{ij}{}_\mu$ i gradijentnog polja $A^{ij}{}_\mu$.

Rimanova krivina $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ i torzija $T^\mu{}_{\nu\rho}$ su tenzori, i transformisanjem ovih veličina u tetradni bazis po pravilu (2.1.20), i korišćenjem tetradnog postulata (2.1.23), nakon kraćeg računa, dobijamo:

$$T^i{}_{\mu\nu} \equiv \vartheta^i{}_\rho T^\rho{}_{\mu\nu} = D_\mu \vartheta^i{}_\nu - D_\nu \vartheta^i{}_\mu \tag{2.1.26a}$$

$$R^{ij}{}_{\mu\nu} \equiv \vartheta^i{}_\rho \vartheta^j{}_\sigma R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^{ij}{}_\nu - \partial_\nu \omega^{ij}{}_\mu + \omega^i{}_{k\mu}\omega^{kj}{}_\nu - \omega^i{}_{k\nu}\omega^{kj}{}_\mu \tag{2.1.26b}$$

Poređenje gornje relacije sa (2.1.11) daje direktnu analogiju između torzije i translacione jačine polja $F^i{}_{\mu\nu}$ i Rimanove krivine i jačine polja vezanih za Lorencove rotacije $F^{ij}{}_{\mu\nu}$. Konačno, izračunaćemo varijaciju tetrade i spinske koneksije pri lokalnim Poenkareovim transformacijama.

Tetrada $\vartheta^i{}_\mu$ se po Lorencovom indeksu transformiše kao vektor, a po koordinatnom indeksu kao 1-forma, pa je njen zakon lokalne transformacije Poenkareove grupe dat sa:

$$\vartheta'^i = \exp\left[\frac{1}{2}\theta^{kl}\Sigma_{kl} - \pounds_\xi \mathbb{I}\right]^i{}_j \vartheta^j \tag{2.1.27}$$

gde smo sa θ^{kl} obeležili parametre Lorencove transformacije, ξ je infinitezimalni generator difeomorfizama, $\pounds$ je Lijev izvod, a $\mathbb{I}$ jedinična matrica.

U infinitezimalnom obliku, varijacija forme tetrade, koristeći $(\Sigma_{ij})^k{}_l = \delta^k_i \eta_{jl} - \delta^k_j \eta_{il}$, data je sa:

$$\delta_0 \vartheta^i{}_\mu = \theta^i{}_j \vartheta^j{}_\mu - \xi^\nu \partial_\nu \vartheta^i{}_\mu - \vartheta^i{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu \tag{2.1.28}$$

Da bismo dobili zakon transformacije spinske koneksije, posmatrajmo veličinu $D_\mu v^i$, gde je v^i proizvoljno vektorsko polje u tetradnom bazisu. Varijacija forme ove veličine je ista kao kod tetrade:

$$\delta_0(D_\mu v^i) = \theta^i{}_j (D_\mu v^j) - \xi^\nu \partial_\nu (D_\mu v^i) - (D_\nu v^i) \partial_\mu \xi^\nu \tag{2.1.29}$$

Sa druge strane primenom Lajbnicovog pravila na levu stranu gornje jednačine, imamo:

$$\delta_0(D_\mu v^i) = D_\mu \delta_0 v^i + (\delta_0 \omega^i{}_{j\mu}) v^j \tag{2.1.30}$$

Takođe, primetivši da se v^i transformiše kao vektor po tetradnom indeksu i kao skalar pri opštim koordinatnim transformacijama, dobijamo:

$$\delta_0 v^i = \theta^i{}_j v^j - \xi^\mu \partial_\mu v^i \tag{2.1.31}$$

Zamenom (2.1.29) i (2.1.31) u (2.1.30), i primenom (2.1.22), dobijamo varijaciju forme koneksije:

$$\delta_0 \omega^{ij}{}_\mu = \theta^i{}_k \omega^{kj}{}_\mu + \theta^j{}_k \omega^{ik}{}_\mu - \xi^\nu \partial_\nu \omega^{ij}{}_\mu - \omega^{ij}{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu - \partial_\mu \theta^{ij} \tag{2.1.32}$$

Iz dobijenih relacija (2.1.28) i (2.1.32), vidimo da se transformacije polja $\vartheta^i{}_\mu$ i $\omega^{ij}{}_\mu$ poklapaju sa transformacijama (2.1.9) i (2.1.6b), gradijentnih polja $b^i{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$, redom. Time je analogija lokalne Poenkareove teorije sa Riman-Kartanovom geometrijom potpuna.

U skladu sa datom geometrijskom interpretacijom, proizvoljni model u lokalnoj Poenkareovoj teoriji zadan je gustinom Lagranžijana:

$$\mathscr{L} = \varepsilon \mathscr{L}_G(R^{ij}{}_{kl}, T^i_{kl}) + \varepsilon \mathscr{L}_M(\phi, D_k \phi) \tag{2.1.33}$$

gde je $\varepsilon \equiv \det(\vartheta^i{}_\mu)$ faktor koji daje dobro definisan zapreminski element, koji je po definiciji (2.1.18) jednak $\sqrt{-g}$.

Kao i u opštoj relativnosti, račun u tetradnom formalizmu se može jednostavnije zapisati korišćenjem diferencijalnih formi, i ovaj zapis će uglavnom biti korišćen u daljem radu, pa ćemo prepisati glavne rezultate u ovom formalizmu radi reference. U ovom formalizmu, koordinatni indeksi neće biti pisani, osim gde je specifično naznačeno.

Osnovna polja u Riman-Kartanovoj geometriji su 1-forme tetrade ϑ^i i spinske koneksije ω^{ij}. Torzija T^i i krivina R^{ij} su 2-forme, dobijaju se Kartanovim strukturnim jednačinama:

$$T^i = d\vartheta^i + \omega^i{}_j \wedge \vartheta^j \equiv D\vartheta^i \tag{2.1.34a}$$

$$R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^i{}_k \wedge \omega^{kj} \tag{2.1.34b}$$

gde su d spoljašnji izvod formi, a $\wedge$ kosi proizvod, a D Kartanov spoljašnji kovarijantni izvod.

Spoljašnji kovarijantni izvod slika p-formu $\alpha^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l}$ u $p+1$-formu:

$$\begin{aligned} D\alpha^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l} = d\alpha^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l} &+ \omega^{i_1}{}_m \wedge \alpha^{m i_2 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l} + \omega^{i_2}{}_m \wedge \alpha^{i_1 m i_3 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l} + \dots \\ &- \omega^m{}_{j_1} \wedge \alpha^{i_1 \dots i_k}{}_{m j_2 \dots j_l} - \omega^m{}_{j_2} \wedge \alpha^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 m j_3 \dots j_l} + \dots \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Lagranžijan slobodne teorije, koji će nas zanimati jer ćemo se baviti vakumskim rešenjima, je 4-forma čiji integral daje dejstvo:

$$S = \int L_G(R^{ij}{}_{kl}, T^i_{kl}) \qquad (2.1.36)$$

Time završavamo pregled opštih postavki lokalne Poenkareove teorije, i prelazimo na kanonsku analizu, iz koje ćemo dobiti metod za proračun entropije crnih rupa.

2.2 Entropija crne rupe kao održani naboj na horizontu

2.2.1 Hamiltonova analiza u lokalnoj Poenkareovoj teoriji

Kod teorija sa lokalnom(kalibracionom) simetrijom, kanonska struktura teorije odlikuje se postojanjem veza. Razmotrićemo prvo opšte rezultate u ovom formalizmu, a potom dati konstrukciju Hamiltonijana u lokalnoj Poenkareovoj teoriji. Za detaljniji opis Hamiltonovog formalizma sa vezama, korisno je pogledati reference [34, 32, 35].

Posmatrajmo klasičnu teoriju sa Lagranžijanom $L(q^i, \dot{q}^i)$ koji je funkcija generalisanih položaja i brzina. Da bismo definisali fazni prostor, definišemo kanonske impulse konjugovane položajima:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \qquad (2.2.1)$$

Koristeći gornji sistem, možemo izraziti sve brzine preko impulsa, i dobiti nove lokalne koordinate (q^i, p_i) koje definišu tačke u faznom prostoru. Ako je sistem (2.2.1) singularan, međutim, što se dešava kod teorija sa lokalnom simetrijom, onda impulsi ne moraju biti potpuno nezavisne funkcije funkcije brzina, već se u teoriji pojavljuju *veze*, tj. funkcije koje daju dodatne uslove na koordinate i impulse:

$$\phi_m(q, p) = 0 \qquad (m = 1, \ldots, P) \qquad (2.2.2)$$

gde je P broj veza.

Veze koje dobijamo iz sistema (2.2.2) zovemo *primarne veze*, i one daju restrikciju na podprostor Γ_1 faznog prostora Γ u kojem se posmatra evolucija sistema. Primarne veze ne zavise od jednačina kretanja.

U slučaju postojanja veza, korisno je definisati pojam slabe i jake jednakosti. Za funkciju faznih promenljivih $F(q, p)$, čija je restrikcija na podprostor Γ_1 jednaka nuli, kažemo da je slabo jednaka nuli i pišemo $F \approx 0$. Ako su i njeni prvi izvodi takođe jednaki nuli na Γ_1, kažemo da je F jako jednaka nuli, i obeležavamo ovo standardnom jednakošću $F = 0$. Koristan rezultat [35] kaže da je svaka funkcija koja je slabo jednaka nuli, jednaka linearnoj kombinaciji veza, odnosno:

$$F(q, p) \approx 0 \Rightarrow F = \lambda^m \phi_m \qquad (2.2.3)$$

gde su λ^m određeni množioci.

Nakon definicije kanonskih impulsa, kanonski Hamiltonijan je standardno dat relacijom:

$$H_c = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i) \qquad (2.2.4)$$

Jednačine kretanja dobijamo varijacijom dejstva $S = \int dt L(q^i, \dot{q}^i)$. U kanonskom formalizmu, potrebno je da, pored varijacije kanonskog Hamiltonijana, obezbedimo da dobijene jednačine budu ograničene vezama. Uvodimo stoga *totalni* Hamiltonijan:

$$H_T = H_c + u^m \phi_m \tag{2.2.5}$$

gde su u^m Lagranževi množioci.
Varijacija H_T po množiocima u^m daje veze ϕ_m, a varijacija po kanonskim promenljivama (q^i, p_i) daje Hamiltonove jednačine.
Uvođenjem Poasonove zagrade proizvoljnih funkcija kanonskih promenljivih
$A(q,p)$ i $B(q,p)$:

$$\{A,B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \tag{2.2.6}$$

Hamiltonove jednačine možemo napisati u obliku:

$$\dot{q}^i = \{q, H_T\} \tag{2.2.7a}$$

$$\dot{p}_i = \{p, H_T\} \tag{2.2.7b}$$

Za proizvoljnu dinamičku promenljivu $F(q,p)$, evolucija u vremenu je opisana jednačinom:

$$\dot{F}(q,p) = \{F, H_T\} \tag{2.2.8}$$

Da bi teorija bila konzistentna, veze u teoriji moraju biti održane u vremenu. Uslovi konzistentnosti se dakle mogu napisati u obliku:

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_T\} = \{\phi_m, H_c\} + u^n\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0 \tag{2.2.9}$$

Proverom uslova konzistentnosti možemo dobiti jednačine koje su nezavisne od množilaca u^m, oblika $\chi(q,p) \approx 0$. Ove jednačine daju nove veze u teoriji, koje zovemo *sekundarne* veze. Takođe, možemo dobiti sistem jednačina koji ograničava množioce u^m. Ako posmatramo sistem jednačina (2.2.9) kao nehomogeni sistem linearnih jednačina po u^m, onda će rešenje ovog sistema biti oblika:

$$u^m = U^m + v^a V^m_{\ a} \tag{2.2.10}$$

gde su U^m partikularna rešenja nehomogenog sistema, $V^m_{\ a}$ nezavisna rešenja odgovarajućeg homogenog sistema $u^n\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$, a v^a proizvoljne funkcije vremena. Vidimo, dakle, da se kao posledica postojanja veza u Hamiltonijanu pojavljuju proizvoljne funkcije vremena, pa evolucija sistema nije jednoznačno određena. Ovo je posledica toga što koordinate (q,p), očigledno nisu sve dinamičke promenljive, već su neke od njih povezane vezama, i postoji podskup promenljivih koji može da se tretira kao fizičke promenljive, koje jednoznačno opisuje dinamiku sistema. Nakon što smo utvrdili sekundarne veze, proveravamo uslov konzistentnosti za njih, i ovaj postupak ponavljamo do trenutka kada nema novih veza, već je sistem jednačina konzistentnosti zadovoljen. Sve novodobijene veze u ovom postupku zvaćemo sekundarnim. Sekundarne veze se od primarnih razlikuju po tome što njihovo postojanje zavisi od jednačina kretanja, pa se ne pojavljuju u totalnom Hamiltonijanu. Međutim, s obzirom da konzistentnost teorije zavisi od postojanja ovih veza, one se uglavnom tretiraju na isti način u teoriji kao i primarne veze, slabe i jake jednakosti definišemo u odnosu na kompletni sistem veza dobijen proverom uslova konzistentnosti. Proizvoljne veze u teoriji obeležavamo od sada kao:

$$\varphi_s \equiv (\phi_m, \chi_n) \approx 0 \qquad (s = 1, \dots P + S) \tag{2.2.11}$$

gde je S broj sekundarnih veza.
Totalni Hamiltonijan posle analize uslova konzistentnosti ima oblik:

$$H_T = H' + v^a \phi_a \qquad H' = H_c + U^m \phi_m \qquad \phi_a = V_a^m \phi_m \tag{2.2.12}$$

gde su v^a proizvoljne funkcije vremena vezane za primarne veze ϕ_a koje su dobijene iz uslova konzistentnosti kao linearna kombinacija početnih primarnih veza.

Gravitacioni Hamiltonijan u lokalnoj Poenkareovoj teoriji. Konstrukciju Hamiltonijana vršimo korišćenjem ADM dekompozicije prostorvremena [20], na sličan način kao što je to urađeno u sekciji 1.4.2. Ipak, ADM dekompozicija u lokalnoj Poenkareovoj teoriji daje komplikovanije izraze nego u opštoj relativnosti, pa ćemo stoga, radi kraćeg zapisa, u konstrukciji Hamiltonijana uvesti promenljive ekvivalentne ADM promenljivama, pišući teoriju u koordinatnom bazisu. Dekompozcija tetradnih komponenti daje ekvivalentne rezultate. Za detaljniji opis konstrukcije Hamiltonijana, zainteresovani čitalac može konsultovati reference [32, 36].

Posmatramo folijaciju prostorvremena hiperpovršima $\Sigma(t = \text{const.})$, gde je folijacija određena vektorom vremenske evolucije ∂_t. Nakon izbora inicijalne Košijeve površi $\Sigma_0(t = 0)$, koordinate su adaptirane na folijaciju konstrukcijom datom u (1.4.26):

$$t^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\right)_{y^\alpha} \qquad \tilde{e}^\mu{}_\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right)_t \tag{2.2.13}$$

Razlika u notaciji između u odnosu na prethodnu glavu je u tome što smo intrinsične koordinate na hiperpovrši Σ_0 ovde obeležili prvim slovima grčkog alfabeta, pošto latinskim slovima obeležavamo tetradne komponente, a tangentne vektore na Σ_0 sa $\tilde{e}^\mu{}_\alpha$, da ih ne bismo mešali sa tetradom. Ova konvencija će biti korišćena u nastavku ove sekcije.
Formiramo bazis tangentnog prostora adaptiranog na folijaciju, od jediničnog vektora normale na Σ_0, koji obeležavamo sa $n = n^\mu \partial_\mu$, i tangentnih vektora $\tilde{e}^\mu{}_\alpha$, na osnovu kojeg vršimo ADM dekompoziju tenzorskih veličina. Vektor vremenske evolucije ima ADM dekompoziciju datu u (1.4.29):

$$t^\mu = N n^\mu + N^\alpha \tilde{e}^\mu{}_\alpha \tag{2.2.14}$$

gde su N i N^α leps funkcija i šift vektor, dok je dekompozicija koordinatnog diferencijala iz (1.4.28):

$$dx^\mu = t^\mu dt + \tilde{e}^\mu{}_\alpha dy^\alpha \tag{2.2.15}$$

Koristeći (2.2.14) i (2.2.15), vršimo dekompoziciju 1-formi tetrade i spinske koneksije:

$$\vartheta^i{}_\mu dx^\mu = (N n^i + N^\alpha \vartheta^i{}_\alpha) dt + \vartheta^i{}_\alpha dy^\alpha \tag{2.2.16a}$$
$$\omega^{ij}{}_\mu dx^\mu = (N \omega^{ij}{}_\perp + N^\alpha \omega^{ij}{}_\alpha) dt + \omega^{ij}{}_\alpha dy^\alpha \tag{2.2.16b}$$

gde smo definisali, za proizvoljne komponente veličine A_μ:

$$A_\perp \equiv A_\mu n^\mu \qquad A_\alpha \equiv A_\mu \tilde{e}^\mu{}_\alpha \tag{2.2.17}$$

ADM dekompozicija pretvara skup polja $(\vartheta^i{}_\mu, \omega^{ij}{}_\mu)$ u ekvivalentni skup ADM polja $(N, N^\alpha, \vartheta^i{}_\alpha, \omega^{ij}{}_\perp, \omega^{ij}{}_\alpha)$. Veličine N i N^α definišu izabranu folijaciju prostorvremena, pa bismo očekivali da su veličine $(N, N^\alpha, \omega^{ij}{}_\perp)$ nedinamičke pošto teorija ne zavisi od izbora folijacije. Štaviše, posmatrajući relacije (2.2.16), možemo

uvideti da su veličine $\vartheta^i{}_0$ i $\omega^{ij}{}_0$ ekvivalentne veličinama $(N, N^\alpha, \omega^{ij}{}_\perp)$, pa možemo ekvivalentno definisati naš konfiguracioni prostor kao $(\vartheta^i{}_0, \omega^{ij}{}_0, \vartheta^i{}_\alpha, \omega^{ij}{}_\alpha)$, zajedno sa odgovarajućim brzinama, gde su veličine ϑ^i_0 i $\omega^{ij}{}_0$ nefizičke, kao što ćemo pokazati u daljoj analizi.
Za proizvoljnu 2-formu $A = \frac{1}{2}A_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ imamo dekompoziciju po (2.1.15):

$$A = A_{0\alpha}dt \wedge dy^\alpha + \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta \tag{2.2.18}$$

Rastavljamo 2-forme krivine i torzije u datu dekompoziciju:

$$T^i = T^i_{0\alpha}dt \wedge dy^\alpha + \frac{1}{2}T^i{}_{\alpha\beta}dy^\alpha \wedge dy^\beta \tag{2.2.19a}$$

$$R^{ij} = R^{ij}{}_{0\alpha}dt \wedge dy^\alpha + \frac{1}{2}R^{ij}{}_{\alpha\beta}dy^\alpha \wedge dy^\beta \tag{2.2.19b}$$

gde su:

$$T^i_{0\alpha} = \dot{\vartheta}^i{}_\alpha - \partial_\alpha \vartheta^i_0 + \omega^i{}_{j0}\vartheta^j{}_\alpha - \omega^i{}_{j\alpha}\vartheta^j{}_0 \tag{2.2.20a}$$

$$T^i_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \vartheta^i{}_\beta - \partial_\beta \vartheta^i{}_\alpha + \omega^i{}_{j\alpha}\vartheta^j{}_\beta - \omega^i{}_{j\beta}\vartheta^j{}_\alpha \tag{2.2.20b}$$

$$R^{ij}{}_{0\alpha} = \dot{\omega}^{ij}{}_\alpha - \partial_\alpha \omega^{ij}{}_0 + \omega^i{}_{k0}\omega^{kj}{}_\alpha - \omega^i{}_{k\alpha}\omega^{kj}{}_0 \tag{2.2.20c}$$

$$R^{ij}{}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \omega^{ij}{}_\beta - \partial_\beta \omega^{ij}{}_\alpha + \omega^i{}_{k\alpha}\omega^{kj}{}_\beta - \omega^i{}_{k\beta}\omega^{kj}{}_\alpha \tag{2.2.20d}$$

Gravitacioni Lagranžijan u lokalnoj Poenkareovoj teoriji zadat jednačinom (2.1.33), prelazi u formu:

$$\mathscr{L} = \varepsilon\mathscr{L}_G(R^{ij}{}_{\mu\nu}, T^i_{\mu\nu}) = \varepsilon\mathscr{L}_G(R^{ij}{}_{0\alpha}, R^{ij}{}_{\alpha\beta}, T^i_{0\alpha}, T^i_{\alpha\beta}) \tag{2.2.21}$$

Na osnovu dekompozicije krivine i torzije (2.2.20) vidimo da Lagranžijan ne zavisi od brzina $\dot{\vartheta}^i_0$ i $\dot{\omega}^{ij}{}_0$, pa impulsi vezani za ove veličine daju sigurne primarne veze:

$$\pi_i{}^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\vartheta}^i_0} \approx 0 \qquad \pi_{ij}{}^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\omega}^{ij}{}_0} \approx 0 \tag{2.2.22}$$

Ove veze ne zavise od oblika Lagranžijana, pa ih zato zovemo sigurnim vezama. Partikularni Lagranžijan može imati i dodatne primarne veze, ali radi jednostavnosti u predstavljanju procedure, mi ćemo se ograničiti ovde na slučaj kada nema dodatnih primarnih veza. Polja ϑ^i_0 i $\omega^{ij}{}_0$ su dakle nefizička, jer njihovih brzina nema u Lagranžijanu, njihove brzine su upravo Lagranževi množioci koji stoje uz primarne veze u totalnom Hamiltonijanu.
Impulsi vezani za dinamičke promenljive $\vartheta^i{}_\alpha$ i $\omega^{ij}{}_\alpha$ date su izrazima:

$$\pi_i{}^\alpha = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\vartheta}^i{}_\alpha} \qquad \pi_{ij}{}^\alpha = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\omega}^{ij}{}_\alpha} \tag{2.2.23}$$

Kanonski Hamiltonijan je dat standardnom formulom:

$$H_c = \int d^3y\mathscr{H}_c \qquad \mathscr{H}_c = \pi_i{}^\alpha\dot{\vartheta}^i{}_\alpha + \pi_{ij}{}^\alpha\dot{\omega}^{ij}{}_\alpha - \mathscr{L} \tag{2.2.24}$$

Ako primetimo da važi:

$$\pi_i{}^\alpha = \varepsilon \frac{\partial \mathscr{L}_G}{\partial T^i{}_{0\alpha}} \qquad \pi_{ij}{}^\alpha = \varepsilon \frac{\partial \mathscr{L}_G}{\partial R^{ij}{}_{0\alpha}} \qquad \mathscr{L} = \varepsilon \mathscr{L}_G \tag{2.2.25}$$

možemo napisati kanonski Hamiltonijan, koristeći izraze (2.2.20) da bismo izrazili brzine, u formi:

$$\mathscr{H}_c = \vartheta^i{}_0 \mathscr{H}_i - \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_0 \mathscr{H}_{ij} + \partial_\alpha D^\alpha \tag{2.2.26}$$

gde su:

$$\mathscr{H}_i = \bar{\varepsilon}_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}_G}{\partial T^j{}_{0\alpha}} T^j{}_{0\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathscr{L}_G}{\partial R^{jk}{}_{0\alpha}} R^{jk}{}_{0\alpha} - \mathscr{L}_G \right) + \pi_j{}^\alpha \omega^j{}_{i\alpha} - \partial_\alpha \pi_i{}^\alpha \tag{2.2.27a}$$

$$\mathscr{H}_{ij} = 2\pi_{k[i}{}^\alpha \omega^k{}_{j]\alpha} + 2\pi_{[i}{}^\alpha \vartheta_{j]\alpha} + \partial_\alpha \pi_{ij}{}^\alpha \tag{2.2.27b}$$

$$D^\alpha = \pi_i{}^\alpha \vartheta^i{}_0 + \frac{1}{2}\pi_{ij}{}^\alpha \omega^{ij}{}_0 \tag{2.2.27c}$$

i $\bar{\varepsilon}_i \equiv = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijkl}\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}\vartheta^j{}_\alpha \vartheta^k{}_\beta \vartheta^l{}_\gamma$ je deo zapreminskog elementa ε koji ne zavisi od $\vartheta^i{}_0$, odnosno $\varepsilon \equiv \vartheta^i{}_0 \bar{\varepsilon}_i$. Komponente krivine i torzije koje se javljaju u Lagranžijanu je potrebno zameniti koristeći definiciju impulsa (2.2.25), međutim ova veza zavisi od konkretne forme Lagranžijana pa je ovde ostavljamo u formalnom zapisu. Jasno je da ove komponente, kao i Lagranžijan $\mathscr{L}_G$, na osnovu (2.2.20) ne zavise od nefizičkih promenljivih.
Totalni Hamiltonijan je dakle jednak:

$$\mathscr{H}_T = \mathscr{H}_c + \dot{\vartheta}^i{}_0 \pi_i{}^0 + \frac{1}{2}\dot{\omega}^{ij}{}_0 \pi_{ij}{}^0 \tag{2.2.28}$$

Vidimo da je kanonski Hamiltonijan linearan po nefizičkim promenljivama $\vartheta^i{}_0$ i $\omega^{ij}{}_0$, pa uslovi konzistentnosti za primarne veze (2.2.22) daju trivijalno sekundarne veze:

$$\mathscr{H}_i \approx 0 \qquad \mathscr{H}_{ij} \approx 0 \tag{2.2.29}$$

Sekundarne veze su potpuno analogne vezama (1.4.49) nađenim u Hamiltonovoj analizi Ajnštajn-Maksvelove teorije. Ispostavlja se da uslovi konzistentnosti za sekundarne veze ne daju nikakve dodatne veze. Konstrukcija Hamiltonijana dala nam je sve veze u teoriji, što nam omogućava analizu održanih naboja ispitivanjem kanonskog generatora lokalne simetrije. Definicija kanonskog generatora lokalne simetrije biće tema sledeće sekcije.

2.2.2 Kanonski generator lokalne simetrije

Da bismo bolje analizirali smisao različitih veza, posmatrajmo njihovu Poasonovu algebru. Poasonova algebra veza razvrstava veze na veze *prve klase* i veze *druge klase*. Veze prve klase φ_{PC} definisane su kao veze koje komutiraju sa svim ostalim vezama, odnosno:

$$\{\varphi_{PC}, \varphi_s\} \approx 0 \tag{2.2.30}$$

Generalno možemo definisati veličine prve klase kao veličine koje komutiraju sa svim vezama. Veze druge klase su sve ostale veze, koje imaju netrivijalnu Poasonovu algebru sa ostalim vezama. Ako obeležimo veze druge klase sa θ_r, onda je matrica $\Delta_{rs} \equiv \{\theta_r, \theta_s\}$ nesingularna, i možemo redefinisati Poasonovu zagradu uvodeći takozvanu *Dirakovu* zagradu kao:

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\theta_r\}\Delta_{rs}^{-1}\{\theta_s,B\} \tag{2.2.31}$$

gde su A i B proizvoljne funkcije na faznom prostoru.
Dirakova zagrada ima iste osobine kao i Poasonova zagrada, i važi da je Dirakova zagrada proizvoljne promenljive sa vezom druge klase jednaka nuli $\{A,\theta_r\}^* = 0$. To znači da veze druge klase možemo zameniti jakim jednakostima na ovaj način, odnosno, dobijamo da se broj faznih promenljivih smanjuje, tako što su određene promenljive eliminisane iz faznog prostora vezama druge klase posle redefinisanja Poasonove zagrade.
Veze prve klase ne mogu biti eliminisane na ovaj način, pošto komutiraju sa svim ostalim vezama. Njihovo značenje možemo videti na primeru evolucije proizvoljne dinamičke promenljive $F(q(t),p(t))$:

$$F(\delta t) = F(0) + \delta t\{F,H_T\} = F(0) + \delta t[\{F,H'\} + v^a\{F,\phi_a\}] \tag{2.2.32}$$

gde smo iskoristili formu totalnog Hamiltonijana (2.1.12). Veličine ϕ_a su primarne veze prve klase što trivijalno sledi iz njihove definicije na osnovu uslova konzistentnosti. S obzirom da su ove veličine u Hamiltonijanu date u kombinaciji sa proizvoljnim funkcijama vremena v^a, možemo posmatrati gornju jednačinu za dva različita izbora v^a, i dobijamo:

$$\Delta F(\delta t) = \delta t(v_2^a(t) - v_1^a(t))\{F,\phi_a\} \tag{2.2.33}$$

Razlika u evoluciji dinamičke veličine F je nefizička, jer je određena proizvoljnim funkcijama v^a. Zaključujemo da su primarne veze prve klase generatori nefizičkih(kalibracionih ili gradijentnih) transformacija koje ne menjaju stanje sistema. Postavlja se pitanje da li su i sekundarne veze prve klase takođe generatori gradijentnih transformacija.

Odgovor na ovo pitanje daje konstrukcija poznata kao Kastelanijev algoritam [37], kojom se mogu konstruisati svi kanonski generatori lokalne simetrije u proizvoljnoj teoriji sa vezama. Opisaćemo ukratko ovu proceduru.

Posmatrajmo trajektoriju u faznom prostoru zadatu Hamiltonovim jednačinama i vezama φ_s:

$$\dot{q}^i = \{q^i,H_T\} = \{q^i,H'\} + v^a\{q^i,\phi_a\} \tag{2.2.34a}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i,H_T\} = \{p_i,H'\} + v^a\{p_i,\phi_a\} \tag{2.2.34b}$$
$$\varphi_s(q,p) = 0 \tag{2.2.34c}$$

Posmatrajmo sada drugu trajektoriju koja počinje iz iste tačke i zadovoljava jednačine kretanja sa drugim izborom proizvoljnih funkcija $v^a(t) + \delta_0 v^a(t)$, variranim u odnosu na prethodnu trajektoriju. Onda je jasno da ukoliko posmatramo ove trajektorije u istom vremenskom trenutku, razlika između trajektorija $(q^i(t),p_i(t))$ i $(q^i(t)+\delta_0 q^i(t), p_i(t)+\delta_0 p_i(t))$ je nefizička.

Neka je ovakva varijacija između putanja infinitezimalna i opisana generatorom G kanonskih transformacija koji deluje na funkcije na faznom prostoru $F(q,p)$ preko Poasonove zagrade:

$$\delta_0(G)F = \{F,G\} \tag{2.2.35}$$

Pretpostavljamo da je, u skladu sa lokalnosti transformacije u vremenu, i neprekidnosti u odnosu na parametre transformacije, ovakav infinitezimalni generator G lokalni linearni funkcional infinitezimalnih parametara $\varepsilon(t)$. Onda je opšti oblik takvog funkcionala dat u obliku [38]:

$$G[\varepsilon(t)] = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^{(i)} G_i \tag{2.2.36}$$

Dakle, u opštem slučaju, G zavisi od konačno mnogo izvoda parametra $\varepsilon(t)$.
Želimo da variramo jednačine (2.2.34). U tome treba da budemo pažljivi pri varijaciji totalnog Hamiltonijana koji u sebi sadrži proizvoljne funkcije $v^a(t)$, pa nije obična funkcija na faznom prostoru. Koristeći Lajbnicovo pravilo za varijaciju, imamo:

$$\delta_0 H_T = \{H_T, G\} + (\delta_0 v^a)\phi_a \tag{2.2.37}$$

Variranjem poslednje jednačine (2.2.34c), dobijamo:

$$\{\varphi_s, G\} = 0 \tag{2.2.38}$$

Imajući u vidu da ova varijacija treba da važi u svim vremenskim trenucima t, za sve dinamičke trajektorije $(q^i(t), p_i(t))$, dakle na celoj površi određenoj vezama u faznom prostoru, ova jednakost se može generalisati u opštu slabu jednakost:

$$\{\varphi_s, G\} \approx 0 \tag{2.2.39}$$

Zaključujemo da je G prve klase. Dalje variramo prvu jednačinu:

$$\delta_0 \dot{q}^i = \{\{q^i, G\}, H_T\} + \{q^i, \{H_T, G\}\} + \{q^i, (\delta_0 v^a)\phi_a\} \tag{2.2.40}$$

Imajući u vidu da G eksplicitno zavisi od vremena tj. da važi:

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{2.2.41}$$

možemo iskoristiti lokalnost transformacije $\delta_0(\dot{q}^i) = \frac{d}{dt}(\delta_0 q)$. Raspisivanjem izvoda varijacije dobijamo:

$$\frac{d}{dt}(\delta_0 q^i) = \{\{q^i, G\}, H_T\} + \left\{q^i, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} \tag{2.2.42}$$

Izjednačavanjem (2.2.40) i (2.2.42) konačno dobijamo:

$$\left\{q^i, \left[\{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} - \delta_0 v^a \phi_a\right]\right\} = 0 \tag{2.2.43}$$

Slično, iz druge jednačine (2.2.34b), dobijamo:

$$\left\{p_i, \left[\{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} - \delta_0 v^a \phi_a\right]\right\} = 0 \tag{2.2.44}$$

Istim argumentom kao i kod jednačine (2.2.38) možemo pretvoriti prethodne dve jednakosti u slabe jednakosti, međutim, onda je implicirana jaka jednakost:

$$\{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} - \delta_0 v^a \phi_a = 0 \tag{2.2.45}$$

Razlog je u tome što ove dve jednačine daju da su izvodi po faznim promenljivama gornjeg izraza slabo jednaki nuli, pa on mora biti konstanta, ili viši stepen veze, što je u skladu sa definicijom jake jednakosti. Veličine ϕ_a su primarne veze prve klase pa ukoliko ova jednakost važi za proizvoljne varijacije $\delta_0 v^a(t)$, imamo:

$$\{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} = \varphi_{PFC} \tag{2.2.46}$$

gde je φ_{PFC} primarna veza prve klase.
Koristeći razvoj generatora po infinitezimalnom parametru (2.2.36) i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata uz izvode parametra, dobijamo niz jednačina:

$$\begin{aligned} G_{k-1} &= \varphi_{PFC} \\ G_{k-2} + \{G_{k-1}, H_T\} &= \varphi_{PFC} \\ \ldots \quad & \quad \ldots \\ \{G_0, H_T\} &= \varphi_{PFC} \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Ovaj lanac izraza daje Kastelanijev algoritam za dobijanje kanonskog generatora lokalne simetrije. Naime, počinjemo sa primarnom vezom prve klase G_{k-1}. Nakon toga uzimamo Poasonovu zagradu sa Hamiltonijanom koja mora biti slabo jednaka nuli, pa je dakle kombinacija veza. U ovoj kombinaciji pojaviće se generalno sekundarne veze. Štaviše, na osnovu konstrukcije Hamiltonijana možemo utvrditi da je iz uslova konzistentnosti Hamiltonijan takođe prve klase, a nije teško pokazati da je Poasonova zagrada dve veličine prve klase takođe prve klase. Prema tome, nakon računa Poasonove zagrade $\{G_{k-1}, H_T\}$ dobijamo izraz sa sekundarnim vezama prve klase. Ovaj izraz poništavamo članom G_{k-2} tako da ukupan izraz bude primarna veza prve klase. G_{k-2}, dakle, mora biti sekundarna veza prve klase. Postupak se ponavlja dok ne dodjemo do identiteta ili pojavljivanja neke veze u obliku χ^n, $(n \geqslant 2)$. Kastelani [37] je pokazao da dodavanjem pogodnih veza prve klase u svakom koraku možemo učiniti ovaj niz transformacija minimalnim i da svaki neminimalni niz koraka u algoritmu može da se razbije na dva manja niza. Minimalni nizovi daju korektnu formu kanonskog generatora. Na osnovu našeg razmatranja, možemo primetiti da je dovoljno da u svakom koraku uključujemo što je manje moguće primarnih veza pri prelazu sa člana G_i na G_{i-1}. U tom slučaju, Kastelanijev algoritam imitira lanac uslova konzistentnosti koji počinje od jedne primarne veze prve klase, pa možemo zaključiti da je ukupan broj koraka k zapravo dužina ovog lanca konzistentnosti, odnosno određen je brojem sukcesivnih sekundarnih veza. To nam olakšava pretpostavku o formi generatora koju bismo usvojili na početku algoritma.

Kanonski generator lokalne simetrije u lokalnoj Poenkareovoj teoriji.
U prethodnoj sekciji konstruisan je opšti oblik Hamiltonijana u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, i utvrdeno je da u ovoj teoriji imamo dve generacije veza. Prema tome, kanonski generator može u sebi imati najviše prve izvode po parametrima. S obzirom na to da su, u slučaju kada nemamo dodatnih primarnih veza u teoriji, obe sigurne primarne veze prve klase, zaključujemo da je, polazeći od ovih veza($G^1_k = -\pi_k{}^0$, $G^1_{ij} = -\pi_{ij}{}^0$), kanonski generator dat kao:

$$G[\xi^i, \theta^{ij}] = -\int d^3y \left[\dot{\xi}^k \pi_k{}^0 + \xi^k(\mathscr{H}_k + \phi_k) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^{ij}\pi_{ij}{}^0 + \frac{1}{2}\theta^{ij}(-\mathscr{H}_{ij} + \phi_{ij})\right] \tag{2.2.48}$$

gde su ϕ_i i ϕ_{ij} primarne veze prve klase koje se određuju iz uslova Kastelanijevog algoritma:

$$\begin{aligned} \{\mathscr{H}_k + \phi_k, H_T\} &= \varphi_{PFC} \\ \{-\mathscr{H}_{ij} + \phi_{ij}, H_T\} &= \varphi_{PFC} \end{aligned}$$

Jasno je da precizno određivanje veličina ϕ_i i ϕ_{ij} zahteva eksplicitno napisanu Poasonovu algebru svih veza u teoriji. Mada je principijelno ovo pravolinijski postupak, on može biti jako tehnički zahtevan, i mi ćemo se ovde zadržati na opštem obliku kanonskog generatora, s obzirom na to da nam njegova eksplicitna forma neće biti potrebna za dalje izlaganje. Algebra veza može se naći u referencama [39, 40], dok je konačan oblik kanonskog generatora dat u knjizi Blagojevića [32] i radu [41]. Može se proveriti da ovako dobijen kanonski generator daje tačne lokalne transformacije polja $(\vartheta^i{}_\mu, \omega^{ij}{}_\mu)$ delovanjem preko Poasonove zagrade.

2.2.3 Održani naboji i prvi zakon mehanike crnih rupa

Kanonski generator (2.2.48) koji smo dobili u prethodnoj sekciji generiše sve gradijentne transformacije na faznom prostoru. Zaista, ukoliko izvršimo pogodnu reparametrizaciju generatora:

$$\xi^\mu = e_k{}^\mu \xi^k \qquad \theta^{ij} = \tilde{\theta}^{ij} + \xi^\nu \omega^{ij}{}_\nu \tag{2.2.49}$$

uklanjanjem tilde u zapisu $\tilde{\theta}^{ij}$, dobijamo oblik generatora[32]:

$$G = \int d^3y - \dot{\xi}^\mu \left(\vartheta^k{}_\mu \pi_k{}^0 + \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu \pi_{ij}{}^0\right) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^{ij}{}_0 \pi_{ij}{}^0 - \xi^\mu \mathscr{P}_\mu - \frac{1}{2}\theta^{ij} S_{ij} \tag{2.2.50}$$

tako da parametri ξ^μ i θ^{ij} korespondiraju difeomorfizmima i lokalnim Lorencovim transformacijama. Na primer, $\mathscr{P}_0$ generiše vremenske translacije, i odgovara Hamiltonijanu(do na totalnu divergenciju). Generator G zapravo u sebi sadrži sve 'prave' Hamiltonijane definisane u prvoj glavi u (1.4.54) i (1.4.57), koje smo koristili da bismo definisali održane veličine. Videli smo tada da je bilo potrebno popraviti Hamiltonijan dodavanjem površinskih članove da bismo dobili korektne jednačine kretanja. Razmatraćemo ovaj problem sada uopšteno za generator G.

Pošto generator deluje na fazne promenljive preko Poasonove zagrade, on mora imati dobro definisane varijacione izvode. U tom kontekstu, posmatrajmo varijaciju generatora. U opštem slučaju, ona je oblika:

$$\delta G = \int d^3y (\mathscr{P}_i{}^\alpha \delta \vartheta^i{}_\alpha + \mathscr{Q}^i{}_\alpha \delta \pi_i{}^\alpha + \mathscr{R}_{ij}{}^\alpha \delta \omega^{ij}{}_\alpha + \mathscr{S}^{ij}{}_\alpha \delta \pi_{ij}{}^\alpha) + \mathscr{B} \tag{2.2.51}$$

gde su $\mathscr{P}_i{}^\alpha$, $\mathscr{Q}^i{}_\alpha$, $\mathscr{R}_{ij}{}^\alpha$ i $\mathscr{S}^{ij}{}_\alpha$ funkcije faznih promenljivih, a $\mathscr{B}$ opšti površinski član dobijen parcijalnom integracijom pri variranju generatora kako bi varijacije izvoda promenljivih bile eliminisane.
Da bi generator imao dobro definisane varijacione izvode, tj. da bi bio regularan, površinski član mora biti jednak nuli. Tada su koeficijenti $\mathscr{P}_i{}^\alpha$, $\mathscr{Q}^i{}_\alpha$, $\mathscr{R}_{ij}{}^\alpha$ i $\mathscr{S}^{ij}{}_\alpha$ upravo varijacioni izvodi generatora. Uzmimo da je generator dobro definisan. Za zadato ponašanje parametara ξ^μ i θ^{ij} i dinamičkih polja na granici hiperpovrši, u tom slučaju, povšinski član je nula, i dati parametri definišu prirodu transformacije koja je generisana. Iz Kastelanijevih uslova (2.2.41), direktno vidimo da je:

$$\frac{dG}{dt} \approx 0 \tag{2.2.52}$$

što znači da sama vrednost generatora daje upravo održane veličine koje odgovaraju difeomorfizmu koji generator generiše.
Definisanost generatora zavisi od prirode varijacije koju koristimo. Da budemo precizniji, kada posmatramo varijacioni problem u faznom prostoru, moramo definisati dozvoljene konfiguracije dinamičkih polja. Generator koji dobro deluje na određene konfiguracije, može da bude nedefinisan za druge konfiguracije, tj. u opštem obliku, uvek će postojati površinski član, i ponašanje polja na granici određuje da li

je ovaj površinski član nula ili ne.
Ako uzmemo najprostiji primer, gde su dinamička polja identički jednaka nuli na granici, onda je površinski član takođe jednak nuli, i generator je dobro definisan. Međutim, generator je jednak linearnoj kombinaciji veza, pa je na površi definisanoj vezama na kojoj posmatramo dinamiku, generator jednak nuli, što znači da su i održani naboji vezani za ovakav generator jednaki nuli. Ovo možda izgleda neobično, međutim, naivna primena Neterine teoreme [42, 43] na lokalne simetrije zapravo uvek daje ovakvu situaciju gde su održani naboji jednaki nuli. Stvar je u tome što je uslov na granici koji smo ovako nametnuli previše restriktivan, i transformacija polja unutar faznog prostora restrikovanog na ovaj način je trivijalna.

Polja koja odgovaraju realnim rešenjima u teoriji obično nisu jednaka nuli na velikim udaljenostima, tj. asimptotskoj granici, već imaju određeno asimptotsko ponašanje. Dakle, potrebno je definisati dozvoljene konfiguracije polja, i ovo se obično definiše *asimptotskim graničnim uslovima*. U lokalnoj Poenkareovoj teoriji ovi uslovi su oblika:

$$\begin{aligned}\vartheta^i{}_\mu &= \bar{\vartheta}^i{}_\mu + \delta\vartheta^i{}_\mu \\ \omega^{ij}{}_\mu &= \bar{\omega}^{ij} + \delta\omega^{ij}{}_\mu \\ \pi_i{}^\mu &= \bar{\pi}_i{}^\mu + \delta\pi_i{}^\mu \\ \pi_{ij}{}^\mu &= \bar{\pi}_{ij}{}^\mu + \delta\pi_{ij}{}^\mu\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

gde su veličine kao što je $\bar{\vartheta}^i{}_\mu$ obično rešenje jednačina polja u modelu koji posmatramo i zovemo ih *pozadinskom geometrijom*, dok $\delta\vartheta^i{}_\mu$ definišu asimptotsko ponašanje, i ove varijacije su asimptotski granični uslovi koji određuju dozvoljene konfiguracije u faznom prostoru.
Kada, dakle, variramo kanonski generator, to činimo na podskupu faznog prostora koji je određen asimptotskim graničnim uslovima, tj. dozvoljavamo polja koja se nalaze unutar ovog podskupa polja. U generičnom slučaju sa netrivijalnim graničnim uslovima, generator će sadržati površinski član, pa neće biti dobro definisan funkcional na faznom prostoru. Time dolazimo ponovo do ideje Redžea i Tajtelboma [24], da je za dobru definiciju generatora potrebno izvršiti popravku dodavanjem određenog površinskog člana u generator:

$$\tilde{G} = G + \Gamma \tag{2.2.54}$$

tako da varijacija površinskog člana $\delta\Gamma$ poništi površinske članove u varijaciji generatora. Vrednost popravljenog generatori na površi određenoj vezama je upravo vrednost površinskog člana:

$$\tilde{G} \approx \Gamma \tag{2.2.55}$$

Hamiltonijan je jedan od kanonskih generatora, pa je jasno da evoluciju u dozvoljenoj konfiguraciji polja posmatramo u odnosu na popravljeni Hamiltonijan $\tilde{H}_T$. Onda važi identitet:

$$\frac{d\tilde{G}}{dt} = \{\tilde{G}, \tilde{H}_T\} + \frac{\partial\tilde{G}}{\partial t} = \varphi_{PFC} \approx 0 \tag{2.2.56}$$

Dakle, vrednosti površinskih članova daju održane naboje u odnosu na transformacije generisane izabranim generatorima.

Možemo se osvrnuti na činjenicu da pri definiciji kanonskog generatora Kastelanijevim algoritmom nismo uvodili pojam dozvoljenih konfiguracija polja, tj. asimptotskih graničnih uslova, a da smo ipak tvrdili da ovi generatori daju tačne gradijentne transformacije. Implicitna činjenica je da pri proveri generatora, kao i pri dobijanju sekundarnih veza u proveri uslova konzistentnosti, koristimo jednačine polja. Jednačine polja se dobijaju zanemarivanjem površinskih članova koji se pojavljuju pri parcijalnoj integraciji. Čini se, dakle, da smo uveli jednačine polja bez razmatranja graničnih uslova, tj. razmatranjem varijacija sa kompaktnim nosačem koje su trivijalne na granici, i time smo implicitno ograničili moguću konfiguraciju polja na faznom prostoru, a ovo ograničenje svakako ne uključuje polja koja su od značaja u teoriji, jer sva rešenja od značaja imaju netrivijalnu asimptotsku strukturu. Naš postupak, ipak, nije netačan, jer je varijacija popravljenog generatora, kao i popravljenog Hamiltonijana, ista kao i u trivijalnom slučaju. Popravke na generator upravo daju da varijacija generatora bude jednaka samo zapreminskom članu u (2.2.51), koji u slučaju Hamiltonijana daje jednačine polja. Jednačine polja, kao što je i logično, ne zavise od graničnih uslova, iako bi uzimanje u obzir graničnih uslova dalo Hamiltonijan kojem ne bi bila potrebna popravka za datu konfiguraciju polja. Slično važi i za gradijentne transformacije koje su simetrija teorije i moraju uvek da važe ukoliko smo dobili dobar generator. Ovo razmatranje nam samo daje pogled na generalna izvođenja sa početka sekcije, gde smo upravo imajući u vidu opštost važenja jednačina polja i gradijentnih transformacija izabrali konfiguracije koje smatramo trivijalnim, i pojednostivili time postupak izvođenja koje mora da važi za sve konfiguracije.

Možemo se zapitati i o opštem slučaju, gde zapravo ne dajemo nikakve uslove na polja u faznom prostoru. Time bismo u generator, odnosno Hamiltonijan, uključili od početka najopštije moguće površinske članove. Tada nam ne bi trebale popravke, ali moguće je, u principu, da među najopštijim konfiguracijama polja postoje i polja za koja površinski članovi, na primer, divergiraju. Ovakve geometrije nemaju dobro definisan kanonski generator, a ni održane naboje, pa ih na osnovu toga smatramo nefizičkim.

Ovde je korisno uvideti praktičan način traženja održanih veličina kao što su energija i moment impulsa. Energija je na primer, kao što je utvrđeno u prvoj glavi, data iz površinskog člana generatora gde smo uzeli parametar transformacije koji teži globalnim translacijama u asimptotskoj oblasti. Za stacionarne geometrije, taj parametar je Kilingov vektor prostor vremena. Stoga je pogodno pri definisanju graničnih uslova za konkretnu geometriju uvesti granične uslove koji su na neki način trivijalni, i to radimo na sledeći način. Posmatramo rešenje jednačina polja za koje želimo da odredimo energiju, i definišemo varijacije polja tako što samo variramo parametre rešenja, čuvajući formu rešenja, i birajući da je parametar u generatoru odgovarajući Kilingov vektor. Ako je energija dobro definisana, ovakve varijacije će nam dati korektan površinski član. Treba imati u vidu da asimptotski uslovi nisu invarijantni na koordinatne transformacije, i da je potrebno pri varijaciji ili dovesti sistem u iste koordinate u kojem su asimptotski uslovi zadati, ili napisati adekvatne asimptotske uslove za koordinatni bazis koji koristimo u konkretnom problemu.

Takođe je potrebno reći da ponašanje parametara (ξ^μ, θ^{ij}) nije proizvoljno, tj. ne definiše svaki izbor parametara održanu veličinu. Da bi postojala simetrija, parametri transformacije moraju da održavaju asimptotsku strukturu, tj. konfiguraciju polja koju smo zadali graničnim uslovima. U odnosu na definisane granične uslove, u opštoj relativnosti, može se definisati takozvani asimptotski Kilingov vektor, koji čuva asimptotsku strukturu u smislu:

$$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = \mathscr{O}(g_{\mu\nu}) \tag{2.2.57}$$

U slučaju lokalne Poenkareove teorije, asimptotski Kilingovi vektori su generalisani na skup parametara (ξ^μ, θ^{ij}) koji održavaju asimptotsku strukturu, tj:

$$\delta_0(\xi^\mu, \theta^{ij})\vartheta^i{}_\mu = \mathscr{O}(\vartheta^i{}_\mu) \qquad \delta_0(\xi^\mu, \theta^{ij})\omega^{ij}{}_\mu = \mathscr{O}(\omega^{ij}{}_\mu) \tag{2.2.58}$$

Upravo ovi parametri, kompatibilni sa asimptotskim graničnim uslovima su parametri koji se pojavljuju u generatoru, i preko kojih dobijamo odgovarajuće površinske članove.

Konačno, dolazimo do prvog zakona mehanike crnih rupa. Na prostorvremenu sa crnom rupom, kao i u glavi 1, definišemo na Košijevoj hiperpovrši dve granice: unutrašnju granicu H, koja je presek horizonta događaja i Košijeve hiperpovrši, i spoljašnju asimptotsku granicu u beskonačnosti. Varijacija generatora će onda uopšteno imati dva odgovarajuća površinska člana:

$$\delta G = R + \delta\Gamma_\infty - \delta\Gamma_H \tag{2.2.59}$$

gde smo sa R obeležili regularni deo generatora.
Posmatrajmo stacionarnu aksisimetričnu crnu rupu, čiji je horizont generisan Kilingovim vektorom:

$$\xi^\mu \partial_\mu = \partial_t + \Omega_H \partial_\varphi \tag{2.2.60}$$

gde su ∂_t i ∂_φ Kilingovi vektori vezani za vremenske translacije i aksijalnu rotaciju, i Ω_H definiše ugaonu brzinu horizonta.
Ukoliko posmatramo varijacije rešenja u druga stacionarna aksisimetrična rešenja, varirajući parametre kako smo opisali u prethodnoj analizi, potrebno je samo imati u vidu da varijacije parametara moraju da čuvaju površinsku gravitaciju konstantnom, u skladu sa nultim zakonom mehanike crnih rupa. Onda je regularnost generatora $G[\xi^\mu]$ upravo isti stav kao i prvi zakon mehanike crnih rupa, napisan u obliku:

$$\delta\Gamma_\infty = \delta\Gamma_H \tag{2.2.61}$$

Ova ideja, objavljena u radu Blagojevića i Cvetkovića [31], generalizuje Voldovu ideju [19] koja definiše entropiju kao održani naboj na horizontu crne rupe:

$$\delta\Gamma_H = T\delta S = \frac{\kappa}{2\pi}\delta S \tag{2.2.62}$$

Vidimo da je prvi zakon mehanike crnih rupa ekvivalentan stav kao da odgovarajući kanonski generator mora biti regularan bez popravke, što u principu ne mora biti garantovano. Zakon mora biti izveden imajući u vidu konkretan model, iz kojeg bi se izveo konkretan oblik varijacije generatora. Variranje generatora na horizontu daje metod proračuna entropije crne rupe sada i u generalnom slučaju lokalne Poenkareove teorije, što je primenjeno u najvećem broju poznatih modela [44, 45, 46, 47], i u ovim slučajevima prvi zakon mehanike crnih rupa je eksplicitno proveren.

Ipak, ova metoda radi samo u slučaju crnih rupa nenulte površinske gravitacije. Čak i u slučaju da se zakon produži na ekstremalna rešenja nulte površinske gravitacije, prvi zakon bi dao identitet $0 = 0$, pošto je temperatura ekstremalne crne rupe jednaka nuli, odakle ne bi bilo moguće dobiti entropiju integracijom površinskog člana na horizontu. Stoga su za analizu ekstremalnih crnih rupa potrebne drugačije metode, međutim, ispostavlja se, kao što ćemo pokazati, da je kanonski pristup analize koristeći generatore lokalne simetrije, sa određenim modifikacijama primenljiv i u ovom slučaju. Metodi za račun entropije ekstremalnih crnih rupa, čijom primenom dobijamo veći broj rezultata ove teze, biće opisan u sledećoj glavi.

3 Ekstremalne crne rupe: efektivni konformni opis entropije

Nakon uvođenja kanonskog metoda analize lokalnih simetrija u prethodnoj glavi, izložićemo primenu ovog metoda na ekstremalne crne rupe. Naš metod se može ukratko predstaviti idejom predstavljenom u preglednom radu Karlipa [48]. Naime, ekstremalne crne rupe imaju posebnu osobinu da je kod njih definisana geometrija u blizini horizonta, koja je granično rešenje Ajnštajnovih jednačina dobijeno primenom takozvanog limesa blizu horizonta ovih geometrija. Rezultati kanonske analize geometrije u blizini horizonta sa pogodnim izborom graničnih uslova je pojavljivanje konformne simetrije u asimptotskoj grupi simetrije [49], što omogućava definiciju entropije korišćenjem rezultata konformne teorije polja. Prisustvo asimptotske konformne simetrije dovodi do razmatranja dualnosti između prostorvremena koje je rešenje Ajnštajnovih jednačina i konformne teorije polja definisane na granici prostorvremena. Ovaj pristup je poznat kao *holografska hipoteza*, i prvobitno je nastao u teoriji struna u radu Maldacene [50], da bi kasnije bio proširen na kontekst geometrija u blizini horizonta ekstremalnih crnih rupa [49]. Iako je holografska dualnost gravitacije sa konformnom teorijom polja predmet aktivnog istraživanja i danas, pre naše teze postojao je mali broj rezultata o ovoj vezi u lokalnoj Poenkareovoj teoriji [51]. Geometrije u blizini horizonta u lokalnoj Poenkareovoj teoriji su slabo ispitivane u dosadašnjoj literaturi, i naši rezultati se odnose pre svega na proveru metoda proračuna entropije u ovom kontekstu, kao i generalizaciju definicije geometrije u blizini horizonta na geometrije sa prisustvom torzije.

Stoga je ovo poglavlje organizovano na sledeći način. U prvoj sekciji predstavljamo pojam geometrije u blizini horizonta u Ajnštajnovoj teoriji, i opisujemo njene najznačajnije osobine. U drugoj sekciji dati su rezultati vezani za asimptotsku grupu simetrije i način dobijanja entropije korišćenjem rezultata konformne teorije polja. Sama konformna teorija polja prevazilazi okvire naše teze, pa će ukratko biti predstavljeni samo glavni rezultati koje smo koristili u radovima koji su izloženi u daljim poglavljima. Za opširan pregled konformne teorije polja, pogledati literaturu [52, 53, 54].

3.1 Geometrije u blizini horizonta u opštoj relativnosti

3.1.1 Ekstremalnost i geometrija u blizini horizonta

Predstavićemo ovde konstrukciju geometrije ekstremalne crne rupe u blizini horizonta u opštoj relativnosti [55, 56]. Konstrukcija se odnosi na proizvoljni Kilingov horizont, a na osnovu teoreme o rigidnosti [57], horizonti crnih rupa su Kilingovi horizonti, pa su tako horizonti ekstremalnih crnih rupa degenerisani Kilingovi horizonti, odnosno hiperpovrši na kojima Kilingov vektor postaje vektor nulte norme sa površinskom gravitacijom jednakoj nuli. Ispostaviće se da je ekstremalnost potreban i dovoljan uslov za postojanje geometrije u blizini horizonta.

Posmatrajmo hiperpovrš svetlosnog tipa $\mathscr{H}$ u prostorvremenu (M,g), takvu da je vektorsko polje normalno na $\mathscr{H}$ Kilingov vektor k prostorvremena. S obzirom da je k nulte norme, ono je istovremeno i tangentno na hiperpovrš, i njegove integralne krive su geodezike koje generišu $\mathscr{H}$. U opštem slučaju, geodezike nisu parametrizovano afinim parametrom, već zadovoljavaju geodezijsku jednačinu u opštem obliku $k^\nu\nabla_\nu k^\mu = \kappa k^\mu$, gde je κ površinska gravitacija. Definišemo sada koordinate u okolini $\mathscr{H}$, adaptirane na Kilingov vektor k.

Ako je u parametar duž generatora, možemo lokalno uspostaviti koordinate tako da je $k = \partial_u$. Pošto integralne krive k generišu $\mathscr{H}$, posmatrajmo folijaciju $\mathscr{H}$, presecima H prostornog tipa, takvu da je u konstantno na H i svaki generator seče H tačno jednom. Biramo proizvoljne koordinate (x^α) na ovim presecima na gladak način, tako da su x^α konstantne duž generatora $\mathscr{H}$. Time je kompletirana konstrukcija koordinata (u,x^α) na $\mathscr{H}$. Da bismo produžili koordinate u okolinu $\mathscr{H}$ u M, posmatramo u svakoj tački na $\mathscr{H}$ vektor nulte norme ℓ, takav da važi $k\cdot\ell = 1$ i $\ell\cdot\partial_\alpha = 0$. Dalje posmatramo kongruenciju geodezika u M, svetlosnog tipa, takvih da svaka geodezika seče $\mathscr{H}$ tačno jednom, i vektori ℓ su tangentni na geodezike u tačkama preseka na $\mathscr{H}$. Neka su ove geodezike parametrizovane afinim parametrom r. Produžavamo koordinate u okolinu $\mathscr{H}$, tako da su (u,x^α) konstantne duž posmatranih geodezika, i $r = 0$ na $\mathscr{H}$. Time smo dobili koordinate (u,r,x^α) u okolini $\mathscr{H}$ u M. Ova konstrukcija se može izvršiti za proizvoljnu hiperpovrš svetlosnog tipa, i ove koordinate se obično zovu *Gausove nul koordinate*[58].

Dalje, produžavamo definicije k i ℓ u okolinu $\mathscr{H}$ u M, tako da je $k = \partial_u$ i $\ell = \partial_r$. Po konstrukciji važi:

$$\ell^\mu\nabla_\mu\ell = 0 \qquad [k,\ell] = 0 \tag{3.1.1}$$

Odavde, lako se pokazuje da važi $\ell^\nu\nabla_\nu(k\cdot\ell) = 0$ i $\ell^\nu\nabla_\nu(\ell\cdot\partial_\alpha) = 0$. Pokazaćemo prvi izraz radi ilustracije.

$$\ell^\mu\nabla_\mu(k\cdot\ell) = k_\mu\ell^\nu\nabla_\nu\ell^\mu + \ell_\mu\ell^\nu\nabla_\nu k^\mu = \ell_\mu k^\nu\nabla_\nu\ell^\mu = \frac{1}{2}k^\nu\nabla_\nu(\ell\cdot\ell) = 0 \tag{3.1.2}$$

gde smo u prvoj jednakosti koristili metričku kompatibilnost i Lajbnicovo pravilo, a u drugoj komutiranje vektora k i ℓ (3.1.1). S obzirom na $\ell^\nu\nabla_\nu(k\cdot\ell) = 0$ i $\ell^\nu\nabla_\nu(\ell\cdot\partial_\alpha) = 0$, sledi da važi $k\cdot\ell = 1$ i $\ell\cdot\partial_\alpha = 0$ u celoj okolini $\mathscr{H}$.

Na osnovu prethodne definicije Gausovih nul koordinata, čitajući odgovarajuće skalarne proizvode, možemo napisati opšti oblik metrike u okolini $\mathscr{H}$ u ovim koordinatama:

$$ds^2 = rf(r,x^\alpha)du^2 + 2dudr + 2rh_\alpha(r,x^\beta)dudx^\alpha + \gamma_{\alpha\beta}(r,x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta \tag{3.1.3}$$

gde pretpostavljamo da su f, h_α i $\gamma_{\alpha\beta}$ analitičke funkcije koordinata.

Transformacija u blizini horizonta je transformacija skaliranja oblika:

$$u \to \frac{u}{\varepsilon}, \qquad r \to \varepsilon r \tag{3.1.4}$$

Uzimajući limes $\varepsilon \to 0$, dobijamo geometriju u blizini horizonta(ukoliko limes postoji). Da bi metrika imala gladak limes, primetimo da mora da važi:

$$\partial_r g_{uu}|_{r=0} = 0 \tag{3.1.5}$$

Ovaj uslov se može prepisati u kovarijantni uslov:

$$\partial_r g_{uu} = \ell^\mu\nabla_\mu(k\cdot k) = 2\ell^\mu(\nabla_\mu k^\nu)k_\nu = 2k^\mu(\nabla_\mu\ell^\nu)k_\nu = 2k^\mu(\nabla_\mu(k\cdot\ell) - (\nabla_\mu k^\nu)\ell_\nu) \tag{3.1.6}$$

gde smo koristili (3.1.1) i Lajbnicovo pravilo, kao kod izraza (3.1.2).

Dalje računamo dati izraz u $r = 0$ i koristimo geodezijsku jednačinu za Kilingov vektor k, i dobijamo:

$$\partial_r g_{uu}|_{r=0} = -2\kappa \tag{3.1.7}$$

Dakle, uslov postojanja limesa metrike u blizini horizonta je uslov degeneracije Kilingovog horizonta $\kappa = 0$. U slučaju kada je Kilingov horizont horizont događaja crne rupe, to je uslov da površinska gravitacija bude nula, tj. uslov ekstremalnosti.

3.1.2 Simetrije u blizini horizonta ekstremalnih crnih rupa u opštoj relativnosti

Postojanje limesa u blizini horizonta kod ekstremalnih crnih rupa čini ove objekte posebno interesantnim, jer se ispostavlja da geometrija u blizini horizonta ima povećanu simetriju u odnosu na simetriju crne rupe iz koje je dobijena limesom transformacije (3.1.4). Problem određivanja svih geometrija u blizini horizonta koje su rešenja Ajnštajnovih, ili Ajnštajn-Makvelovih jednačina, i dalje je otvoren problem. Međutim, radovima Kundurija, Lucijetija i Reala [59, 60, 61, 62], ovaj problem je rešen u svim slučajevima sa simetrijama crnih rupa koje su prisutne kod do sada poznatih rešenja u tri, četiri i pet dimenzija. Između ostalog, pokazan je važan rezultat da geometrije u blizini horizonta generično poseduju simetriju AdS_2 prostora, tj. da su fibracije nad AdS_2. Ovaj rezultat je u opštem slučaju komplikovano dokazati, i mi ćemo se ovde ograničiti da predstavimo primer 4d stacionarne aksisimetrične geometrije koja je rešenje Ajnštajnovih jednačina u vakuumu [55, 60], kod koje je presek horizonta H topološki sfera S^2 i koja nije statička(statičke crne rupe u 4d ne mogu biti ekstremalne ukoliko nemamo prisutnu materiju).

Ukoliko pretpostavimo ekstremalnost i izvršimo limes u blizini horizonta (3.1.4) na metrici (3.1.3), dobijamo:

$$ds^2 = r^2 F(x) du^2 + 2dudr + 2rh_\alpha(x) dudx^\alpha + \gamma_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \tag{3.1.8}$$

Ukoliko sada pretpostavimo aksisimetričnost, želimo da adaptiramo koordinate na H tako da Kilingov vektor aksijalne rotacije bude ∂_ϕ. Koristićemo konstrukciju predstavljenu detaljno u [55]. Neka je ε_γ zapreminska forma na preseku H. Definišemo koordinatu θ kao funkciju na H takvu da važi:

$$d\theta = -\partial_\phi \lrcorner\, \varepsilon_\gamma \tag{3.1.9}$$

gde je $\lrcorner$ unutrašnji proizvod vektora i formi.
Jasno je da je ovako definisana forma $d\theta$ zatvorena i invarijantna pod dejstvom Kilingovog vektora ∂_ϕ, pa je koordinata θ dobro definisana kao funkcija na H svuda osim u tačkama koje su fiksne tačke za dejstvo ∂_ϕ, odnosno polovima sfere homeomorfne H. U adaptiranim koordinatama (θ, ϕ), iz (3.1.9) sledi $\det(\gamma_{\alpha\beta}) = 1$, i $\gamma_{\theta\phi} = 0$, pa je metrika indukovana na H oblika:

$$\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{d\theta^2}{B(\theta)} + B(\theta) d\phi^2 \tag{3.1.10}$$

za neku funkciju $B(\theta)$, koja je jednaka nuli na polovima.
Dalje posmatramo 1-formu $h_\alpha dx^\alpha$. Po Hodžovoj dekompoziciji na sferi imamo:

$$h_\alpha dx^\alpha = \alpha + d\beta \tag{3.1.11}$$

gde je α 1-forma takva da je $d^*\alpha = 0$, gde je $*$ Hodžov dual diferencijalnih formi, a β funkcija na H. Pošto je h invarijantna 1-forma, tj. $\pounds_{\partial_\phi} h = 0$, sledi da su i forme α i $d\beta$ invarijantne.

Raspisivanjem uslova $d^*\alpha = 0$ na komponente, dobijamo:

$$B(\theta)\alpha_\theta(\theta) = \text{const.} \tag{3.1.12}$$

Ali na polovima $B(\theta) = 0$ pa sledi $B(\theta)\alpha_\theta(\theta) = 0$, odakle je $\alpha_\theta = 0$, jer ova jednakost važi za svako θ. Raspisivanjem jednakosti $\pounds_{\partial_\phi} d\beta = 0$ preko Kartanove formule $\pounds_\xi = (\xi \lrcorner) \circ d + d \circ (\xi \lrcorner)$, dobijamo:

$$d(\partial_\phi \lrcorner\, d\beta) = 0 \tag{3.1.13}$$

Rešenje ove jednačine je $\beta(\theta,\phi) = c\phi + f(\theta)$, za proizvoljnu konstantu c i funkciju $f(\theta)$. Međutim, koordinata ϕ je periodična, pa mora biti $c = 0$, odnosno $\beta = \beta(\theta)$. Iz prethodnog razmatranja dobijamo da je 1-forma h oblika:

$$h_\alpha dx^\alpha = \beta'(\theta)d\theta + \alpha(\theta)d\phi \tag{3.1.14}$$

za proizvoljne funkcije $\alpha(\theta)$ i $\beta(\theta)$, i $'$ označava izvod po θ.
Uvedimo pozitivnu funkciju $\Gamma(\theta) = e^{-\beta(\theta)}$ i izvršimo koordinatnu transformaciju $r \to \Gamma(\theta)r$. Onda metrika (3.1.8) postaje oblika:

$$ds^2 = r^2\Gamma^2(\theta)F(\theta)du^2 + 2\Gamma(\theta)dudr + 2\Omega(\theta)rdud\phi + \frac{d\theta^2}{B(\theta)} + B(\theta)d\phi^2 \tag{3.1.15}$$

gde smo definisali $\Omega(\theta) \equiv \alpha(\theta)\Gamma(\theta)$.
Sada vakuumske Ajnštajnove jednačine $R_{\mu\nu} = 0$ daju:

$$R_{\theta\phi} = 0 \Leftrightarrow \partial_\theta\left(\frac{\Omega}{B}\right) = 0 \tag{3.1.16a}$$

$$R_{u\theta} = 0 \Leftrightarrow \partial_\theta\left(\frac{F\Gamma^2 - \frac{\Omega^2}{B}}{\Gamma}\right) = 0 \tag{3.1.16b}$$

Ako definišemo konstante $k \equiv \frac{\Omega}{B}$ i $F_0 \equiv \frac{F\Gamma^2 - \frac{\Omega^2}{B}}{\Gamma}$, metrika se može napisati u obliku:

$$ds^2 = \Gamma(\theta)[F_0 r^2 du^2 + 2dudr] + \frac{d\theta^2}{B} + B(d\phi + krdu)^2 \tag{3.1.17}$$

Linijski element uz $\Gamma(\theta)$ je maksimalno simetričan prostor, tj. 2d prostor Minkovskog za $F_0 = 0$, AdS_2 za $F_0 < 0$, i dS_2 za $F_0 > 0$. Iz (ur)-komponente Ajnštajnovih jednačina imamo:

$$R_{ur} = F_0 - \frac{1}{2}\Delta\Gamma + \frac{Bk^2}{2\Gamma} = 0 \tag{3.1.18}$$

gde je $\Delta = \partial_\alpha(\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta(\cdot))$ Laplasijan na H.
Integral drugog člana $\Delta\Gamma$ po H, jednak je nuli. Prema tome, ako integralimo ceo izraz po H, imamo da je $F_0 \leqslant 0$. Takođe, $F_0 = 0$ implicira $k = 0$, čime dobijamo statičko prostorvreme, u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Prema tome, $F_0 < 0$ i imamo AdS_2 faktor u metrici (3.1.15), tj.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Gamma(\theta)ds^2_{AdS_2} + \frac{d\theta^2}{B(\theta)} + B(\theta)(d\phi + krdu)^2 \\ ds^2_{AdS_2} &= F_0 r^2 du^2 + 2dudr \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Ajnštajnove jednačine se u primeru koji ovde predstavljamo mogu u potpunosti rešiti, i može se pokazati da je rešenje difeomorfno geometriji u blizini horizonta ekstremalne Kerove crne rupe [60]. U našem slučaju, prethodno razmatranje je dovoljno za zaključak o AdS_2 strukturi na koju smo hteli da ukažemo. Kilingovi vektori AdS_2 metrike se mogu naći rešavanjem Kilingove jednačine $\pounds_\xi g_{AdS_2} = 0$ i dobijamo:

$$\xi_1 = \partial_u \qquad \xi_2 = u\partial_u - r\partial_r \qquad \xi_3 = \frac{u^2}{2}\partial_u - ur\partial_r \tag{3.1.20}$$

Dejstvo ovih Kilingovih vektora zatvara $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ Lijevu algebru:

$$[\xi_1,\xi_2] = \xi_1 \qquad [\xi_1,\xi_3] = \xi_2 \qquad [\xi_2,\xi_3] = \xi_3 \tag{3.1.21}$$

Lako se može eksplicitno proveriti da su Kilingovi vektori (3.1.20) simetrija cele metrike (3.1.15). To je upravo povećanje simetrije koje je karakteristično za geometrije u blizini horizonta. Značaj ovog povećanja simetrije je utoliko veći ukoliko uočimo da je algebra Kilingovih vektora (3.1.21) izomorfna algebri globalnih 1d konformnih transformacija, što ukazuje na to da se u kanonskoj analizi asimptotskih simetrija za geometrije u blizini horizonta može očekivati pojavljivanje konformnih transformacija. Veza sa konformnim transformacijama omogućava tretiranje entropije koristeći rezultate konformne teorije polja. Da bismo bolje razumeli ovu vezu, korisno je razmatrati veći prostor, naime AdS_3, u kojem se kao simetrija pojavljuje 2d konformna grupa. Stoga ćemo u sledećoj sekciji napraviti kratku digresiju na analizu ovog primera, pre nego što predstavimo metod računanja entropije ekstremalnih crnih rupa koji će biti korišćen u narednim poglavljima.

Na kraju, potrebno je reći da je povećanje simetrija uočena kod geometrija u blizini horizonta dinamička posledica Ajnštajnovih jednačina, kao što smo mogli videti u prethodnom izvođenju. Ono nije garantovano samim limesom u blizini horizonta, te u principu nije očekivano prisustvo povećane simetrije u teorijama opštijim od Ajnštajnove opšte relativnosti. O ovome će biti reči u poslednjoj glavi, gde se bavimo ovim geometrijama u opštoj lokalnoj Poenkareovoj teoriji.

3.2 Efektivna konformna entropija ekstremalnih crnih rupa

3.2.1 Simetrija AdS_3 prostora i 2d konformna grupa

Anti-de Siterov prostor u n dimenzija AdS_n obično se definiše kao hiperpovrš uronjena u ravan prostor dimenzije $n+1$, $\mathbb{R}^{2,n-1}$, definisana jednačinom:

$$T_1^2 + T_2^2 - \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 = \ell^2 \tag{3.2.1}$$

gde su (T_1, T_2, X_i) Dekartove koordinate u $\mathbb{R}^{2,n-1}$, a ℓ konstanta koju zovemo radijus AdS_n prostora. Metrika prostora $\mathbb{R}^{2,n-1}$ je anologna metrici prostora Minkovskog sa dve vremenske ose:

$$ds^2 = dT_1^2 + dT_2^2 - \sum_{i=1}^{n-1} dX_i^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \tag{3.2.2}$$

Prema tome, Anti-de Siterov prostor je hiperpovrš konstantne udaljenosti u ovoj metrici, odnosno *pseudosfera*. U skladu s tim, simetriju AdS_n čine transformacije pseudo-ortogonalne grupe $O(2,n-1)$.

Prelazimo sada na trodimenzioni prostor AdS_3, koji je definisan kao pseudosfera u $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$T_1^2 + T_2^2 - X_1^2 - X_2^2 = \ell^2 \tag{3.2.3}$$

Kilingovi vektori koji generišu simetriju prostora $\mathbb{R}^{2,n-1}$ su generatori translacija $\xi = \partial_\mu$ i generatori generalisanih rotacija:

$$\xi^{(1)} = T_1\partial_{T_2} - T_2\partial_{T_1} \qquad \xi^{(2)} = T_1\partial_{X_1} + X_1\partial_{T_1} \tag{3.2.4a}$$
$$\xi^{(3)} = T_1\partial_{X_2} + X_2\partial_{T_1} \qquad \xi^{(4)} = T_2\partial_{X_1} + X_1\partial_{T_2} \tag{3.2.4b}$$
$$\xi^{(5)} = T_2\partial_{X_2} + X_2\partial_{T_2} \qquad \xi^{(6)} = X_1\partial_{X_2} - X_2\partial_{X_1} \tag{3.2.4c}$$

Kilingovi vektori generalisanih rotacija (3.2.4) čine komponentu $O(2,2)$ povezanu sa jediničnom transformacijom. Ova podgrupa se obično zove $SO^+(2,2)$ i njeno dejstvo je simetrija AdS_3, do na diskretne transformacije. Kilingovi vektori zatvaraju $\mathfrak{so}(2,2)$ algebru, za koju je poznato da se dekomponuje na direktni zbir $\mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Ovu dekompoziciju možemo eksplicitno realizovati primetivši iz (3.2.4) da važi $[\xi^{(1)},\xi^{(6)}] = [\xi^{(2)},\xi^{(5)}] = [\xi^{(3)},\xi^{(4)}] = 0$ i redefinišući generatore na sledeći način:

$$\begin{aligned}
L_0 &= -\frac{1}{2}(\xi^{(2)} - \xi^{(5)}) & \bar{L}_0 &= \frac{1}{2}(\xi^{(2)} + \xi^{(5)}) \\
L_1 &= \frac{1}{2}(\xi^{(1)} + \xi^{(6)} + \xi^{(3)} + \xi^{(4)}) & \bar{L}_1 &= -\frac{1}{2}(\xi^{(1)} - \xi^{(6)} + \xi^{(3)} - \xi^{(4)}) \\
L_{-1} &= \frac{1}{2}(\xi^{(1)} + \xi^{(6)} - \xi^{(3)} - \xi^{(4)}) & \bar{L}_{-1} &= -\frac{1}{2}(\xi^{(1)} - \xi^{(6)} - \xi^{(3)} + \xi^{(4)})
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Lako se može proveriti da generatori iz gornje jednačine zatvaraju algebru:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \qquad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} \qquad [\bar{L}_m, L_n] = 0 \tag{3.2.6}$$

Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ je podalgebra 2d konformne algebre.

Pre nego što pređemo pregled 2d konformne simetrije, povezaćemo simetriju ovde predstavljenog AdS_3 prostorvremena sa AdS_2 simetrijom koju smo uočili u prethodnoj sekciju kod geometrija u blizini horizonta ekstremalnih crnih rupa. S obzirom na to da AdS_2 prostor poseduje $SL(2,\mathbb{R})$ simetriju, možemo primetiti na osnovu prethodnog razmatranja da je grupa simetrije AdS_2 prostora podgrupa simetrijske grupe AdS_3. Štaviše, kao i kod geometrija u blizini horizonta, AdS_3 prostor se može posmatrati kao fibracija nad AdS_2 prostorom. Ovo je lako uočiti iz metrike AdS_3 prostora, koju definišemo kao indukovanu metriku na hiperpovrši (3.2.3). Definišući koordinate (τ, ρ, θ) na AdS_3, indukujemo metriku AdS_3 koristeći transformaciju:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \ell \cosh\rho \cos\tau & X_1 &= \ell \sinh\rho \cos\theta \\
T_2 &= \ell \cosh\rho \sin\tau & X_2 &= \ell \sinh\rho \sin\theta
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Zamenom u (3.2.2), dobijamo linijski element AdS_3 u globalnim AdS koordinatama:

$$ds^2 = \ell^2[\cosh^2\rho\, d\tau^2 - d\rho^2 - \sinh^2\rho\, d\theta^2] \tag{3.2.8}$$

Ova metrika se dalje može transformisati primenom koordinatne transformacije $r = \ell \sinh\rho$, $\tau = \frac{t}{\ell}$, nakon čega metrika prelazi u sledeći oblik:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} - r^2 d\theta^2 \equiv ds^2_{AdS_2} - r^2 d\theta^2 \tag{3.2.9}$$

Vidimo da AdS_3 možemo posmatrati kao $U(1)$-raslojenje nad AdS_2, gde u svakoj tački prostora AdS_2 imamo vlakno koje je krug poluprečnika r. Ovo je analogno Hopfovoj fibraciji tri sfere $S^3 \sim S^2 \times S^1$ [63]. Da bismo predstavili dalje rezultate vezane za AdS_3 prostor koji su u analogiji sa analizom geometrija u blizini horizonta, izvršićemo kratak pregled 2d konformne algebre.

3.2.2 Dvodimenziona konformna algebra

Ograničićemo se u ovoj podsekciji samo na izvođenje dvodimenzione podalgebre, koja će kasnije biti uočena u analizi asimptotski AdS_3 prostora. Detaljnije razmatranje konformne simetrije može se naći u [32, 52, 54]. Osobenost koju želimo da uočimo je da je, za razliku od konformne algebre u proizvoljnim dimenzijama, dvodimenziona konformna algebra beskonačnodimenziona [54].
Iz poznate činjenice da je proizvoljno 2d prostorvreme konformno ravno:

$$g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu} \tag{3.2.10}$$

gde je $\Omega(x)$ proizvoljna funkcija koordinata, $\eta_{\mu\nu}$ metrika prostora Minkovskog, dobijamo da generatori infinitezimalne 2d konformne transformacije na prostoru Minkovskog zadovoljavaju jednačinu:

$$\delta_0 \eta_{\mu\nu} = -\pounds_\xi g_{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu = (1 - \Omega^2) g_{\mu\nu} \tag{3.2.11}$$

Ovu jednačinu zovemo *konformnom Kilingovom jednačinom*, a ξ su konformni Kilingovi vektori.
Ona važi u proizvoljnoj dimenziji prostora $d \geqslant 2$, međutim u slučaju $d = 2$, kontrakcijom sa $\eta^{\mu\nu}$ dobijamo vezu:

$$\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu = (\partial_\rho \xi^\rho) g_{\mu\nu} \tag{3.2.12}$$

Delovanjem sa ∂^μ na gornju jednačinu, dobijamo:

$$\partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu = 0 \tag{3.2.13}$$

Ova jednačina implicira:

$$\partial_0 \xi^0 = \partial_1 \xi^1 \qquad \partial_0 \xi^1 = \partial_1 \xi^0 \tag{3.2.14}$$

Prelaskom u koordinate svetlosnog konusa $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}}$, gornja jednačina prelazi u:

$$\partial_+ \xi^- = 0 \qquad \partial_- \xi^+ = 0 \tag{3.2.15}$$

čija su rešenja:

$$\xi^+ = \xi^+(x^+) \qquad \xi^- = \xi^-(x^-) \tag{3.2.16}$$

odnosno konformni Kilingov vektor ima za komponente proizvoljne funkcije koordinata svetlosnog konusa. Ukoliko pređemo u Euklidski prostor $x^0 = x$, $x^1 = iy$, imamo:

$$\xi^+ = \xi(z) \qquad \xi^- = \bar{\xi}(\bar{z}) \tag{3.2.17}$$

gde je $z = \frac{x^0+x^1}{\sqrt{2}} = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}$.
Vidimo da generatori 2d konformne transformacije postaju analitičke, odnosno antianalitičke funkcije na kompleksnoj ravni. Iz regularnosti u $z=0$, ovi generatori se mogu napisati u obliku razvoja:

$$\begin{aligned} \xi(z) &= a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + \dots \\ \bar{\xi}(\bar{z}) &= \bar{a}_{-1} + \bar{a}_0 \bar{z} + \bar{a}_1 \bar{z}^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Vidimo da ukoliko posmatramo delovanje na proizvoljnu skalarnu funkciju $F(z)$, 2d konformna transformacija ima beskonačno mnogo generatora:

$$L_n = -a_n z^{n+1}\partial_n \qquad \bar{L}_n = -\bar{a}_n \bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \tag{3.2.19}$$

Ovi generatori zadovoljavaju algebru koja se zove *Vitova algebra*:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \qquad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} \qquad [\bar{L}_m, L_n] = 0 \tag{3.2.20}$$

Preciznije, lokalna 2d konformna algebra je direktni zbir dve Vitove algebre.
Globalne transformacije koje smo našli analizom simetrija AdS_3 prostora odgovaraju generatorima $\{L_0, L_{\pm1}, \bar{L}_0, \bar{L}_{\pm1}\}$, koji su regularni u $z=0$ i u $z\to\infty$, dok ostali generatori daju lokalne transformacije. Pri prelasku na kvantnu teoriju gde ovi generatori deluju na stanja u konformnoj teoriji polja, algebra generatora dobija centralno produženje, tj. postaje oblika:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \tag{3.2.21}$$

Ova algebra se zove *Virazoro algebra*.
Ispostaviće se da analiza asimptotskih simetrija AdS_3 prostora, kao i geometrija u blizini horizonta, daje pojavu Virazoro algebre u kanonskoj realizaciji generatora asimptotske simetrije, što omogućava definiciju entropije posmatranog prostora kao konformne entropije odgovarajuće konformne teorije polja na granici.

3.2.3 Asimptotska konformna simetrija AdS_3

U jednom od prvih radova koji su ukazivali na dualnost između Anti-de Siterovih prostora i konformnih teorija polja definisanih na njihovoj granici, Braun i Eno [64] analizirali su asimptotsku simetriju prostorvremena koji zadovoljaju asimptotske AdS_3 granične uslove. Predstavićemo ovde njihov rezultat.
Posmatramo metriku (3.2.9):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{\ell^2}} - r^2 d\theta^2 \equiv ds^2_{AdS_2} - r^2 d\theta^2 \tag{3.2.22}$$

i uvedimo Braun-Enoove granične uslove [64] kojima definišemo asimptotsku AdS_3 geometriju graničnim uslovima u $r\to\infty$:

$$g_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \bar{g}_{tt} + \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_{-3} & \mathcal{O}_0 \\ \mathcal{O}_0 & \bar{g}_{yy} + \mathcal{O}_{-4} & \mathcal{O}_{-3} \\ \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_{-3} & \bar{g}_{\theta\theta} + \mathcal{O}_0 \end{pmatrix} \tag{3.2.23}$$

gde je pozadinska metrika:

$$g_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\ell^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \tag{3.2.24}$$

Analiza asimptotskih Kilingovih vektora [64], daje rešenje za opšti asimptotski Kilingov vektor u obliku:

$$\begin{aligned} \xi^t &= \ell T(t,\theta) + \frac{\ell^3}{r^2}\bar{T}(t,\theta) + \mathscr{O}_{-4} \\ \xi^r &= rR(t,\theta) + \mathscr{O}_{-1} \\ \xi^\theta &= \Theta(t,\theta) + \frac{\ell^2}{r^2}\bar{\Theta}(t,\theta) + \mathscr{O}_{-4} \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

gde su proizvoljne funkcije vezane jednačinama:

$$\begin{aligned} \ell\partial_t T(t,\theta) &= \partial_\theta\Theta(t,\theta) = -R(t,\theta) \\ \ell\partial_t\Theta(t,\theta) &= \partial_\theta T(t,\theta) \\ \bar{T}(t,\theta) &= -\frac{\ell}{2}\partial_t R(t,\theta) \\ \bar{\Theta}(t,\theta) &= \frac{1}{2}\partial_\theta R(t,\theta) \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Može se proveriti da $T(t,\theta)$ i $\Theta(t,\theta)$ zadovoljavaju konformnu Kilingovu jednačinu u dve dimenzije na prostoru Minkovskog (3.2.12), tj. da veze (3.2.26) upravo predstavljaju konformne Kilingove jednačine. Prema tome T i Θ korespondiraju sa generatorima sa konformnim Kilingovim vektorima 2d konformnih transformacija, i gornja algebra je izomorfna sa 2d konformnom algebrom. Usled periodičnosti koordinate θ, ove funkcije se mogu razviti u Furijeov red. Furijeove komponente upravo zadovoljavaju Vitovu algebru lokalnih 2d konformnih transformacija [64]. U analizi odgovarajućih kanonskih generatora lokalne simetrije koji su generisani ovim asimptotskim Kilingovim vektorima, algebra generatora ima centralno produženje i postaje Virazoro algebra, što daje mogućnost razmatranja konformne entropije za asimptotski AdS_3 prostore. Ovu pojavu ćemo dalje opisati u sledećoj sekciji.

3.2.4 Efektivna konformna entropija crne rupe

Na faznom prostoru određenom asimptotskim graničnim uslovima, asimptotski Kilingovi vektori su parametri transformacija kanonskih generatora lokalne simetrije. Ako posmatramo algebru ovih generatora, ona je u opštem obliku data kao:

$$\{H[\xi_1], H[\xi_2]\} = H[[\xi_1,\xi_2]] + C[\xi_1,\xi_2] \tag{3.2.27}$$

gde je $C[\xi_1,\xi_2]$ centralni član u algebri.
Centralni članovi ne zavise od kanonskih promenljivih, pa ne mogu biti eliminisani redefinicijom generatora u opštem slučaju, ukoliko su netrivijalni. Naravno, ovde podrazumevamo da su generatori dobro definisani, tj. da smo u slučaju netrivijalnih graničnih uslova izvršili popravku generatora dodavanjem odgovarajućih površinskih članova. Za konkretan slučaj asimptotskih AdS_3 prostora, ako se razmatra

algebra Furijeovih moda kanonskih generatora asimptotske simetrija dobijaju se dve Virazoro algebre:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c_+}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \\
[L_m, \bar{L}_n] &= 0 \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c_-}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

sa centralnim nabojima:

$$c_\pm = \frac{3\ell}{2G} \tag{3.2.29}$$

gde je G Njutnova gravitaciona konstanta interakcije.
Ako posmatramo konformnu teoriju polja sa simetrijama datim Virazoro algebrom, onda je održani naboj koji odgovara generatoru L_0 predstavlja održanu veličinu koja u konformnoj grupi odgovara transformaciji skaliranja i obično se naziva konformna težina. Ako pretpostavimo da je spektar ovog operatora na prostoru stanja nenegativan, sa svojstvenim vrednostima Δ, onda je asimptotska gustina stanja za fiksno Δ data velikim rezultatom u konformnoj teoriji polja [65, 66] poznatim kao *Kardijeva formula*:

$$\rho(\Delta) \sim \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{c}{6}(\Delta - \frac{c}{24})}\right) \tag{3.2.30}$$

Iz gustine stanja se dobija Kardijeva formula za entropiju 2d konformne teorije polja u mikrokanonskom ansamblu:

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}(\Delta - \frac{c}{24})} \tag{3.2.31}$$

Na osnovu prethodnih razmatranja, možemo algoritamski predstaviti naš metod, u smislu u kojem je definisan u radu Karlipa [48]:

- U prvom koraku, postavljamo odgovarajuće granične uslove na granicu prostorvremena koje razmatramo, tako da su granični uslovi kompatibilni sa rešenjem za crnu rupu i daju konačne održane naboje u kanonskoj analizi.
- U skladu sa graničnim uslovima, određujemo asimptotske Kilingove vektore. Odbacivanjem trivijalnih difeomorfizama koji ne doprinose održanim nabojima definišemo asimptotsku grupu simetrije.
- U asimptotskoj grupi simetrije uočavamo podgrupu koja je generisana Vitovom algebrom difeomorfizama na krugu. AdS_2 struktura uočena kod geometrija u blizini horizonta nam omogućava da očekujemo pojavljivanje jedne Vitove algebre, dok kod rešenja sa specifično povećanom simetrijom možemo očekivati pojavljivanje dve Virazoro algebre, tj. 2d konformnu algebru.
- Uspostavljanjem kanonske realizacije algebre asimptotske simetrije preko kanonskih generatora lokalne simetrije, dobijamo centralnu ekstenziju u obliku Virazoro algebre, i računamo entropiju Kardijevom formulom.

Poklapanje gravitacione entropije sa konformnom entropije se zasniva prvobitno na poređenju dobijene entropije ekstremalne crne rupe sa neekstremalnim slučajem. U slučaju neslaganja, rezultat ukazuje na dublje razmatranje dualnosti između gravitacionih rešenja sa crnom rupom i odgovarajuće konformne teorije na granici.

Nakon što su naši metodi u dovoljnoj meri definisani, prelazimo u narednim poglavljima na rezultate teze date u radovima objavljenim tokom rada na njoj.

4 Entropija ekstremalne Kerove crne rupe u lokalnoj Poenkareovoj teoriji

U ovom poglavlju predstavićemo prvi rezultat teze, tj. proračun entropije ekstremalne Kerove crne rupe koristeći kanonski pristup geometriji u blizini horizonta, koji smo formulisali u prethodnoj glavi. Ekstremalna Kerova crna rupa je model kod kojeg bismo očekivali pravolinijski zadatak kad je u pitanju računanje entropije, iz više razloga. Pre svega, iako vršimo proračun u formalizmu lokalne Poenkareove teorije [32, 67, 68], gde i krivina i torzija utiču na gravitacionu dinamiku, Kerovo rešenje u kvadratnoj Poenkareovoj teoriji koje ćemo razmatrati nema suštinske razlike sa rešenjem iz opšte relativnosti. Drugim rečima, teorija koju posmatramo je kvadratna Poenkareova teorija, a samo rešenje je rešenje iz opšte relativnosti, koje razmatramo u dva granična slučaja kvadratne Poenkareove teorije: Rimanovo rešenje i rešenje u teleparalelnom ekvivalentu opšte relativnosti. Pri tome se oslanjamo na poznate rezultate iz opšte relativnosti o korespodenciji Kerovog rešenja sa konformnom teorijom polja na granici [49, 69], kao pozitivnim rezultatom u testiranju kanonskog pristupa na strukturu u blizini horizonta u 3d gravitaciji [51].

Nakon uspostavljanja konzistentnih graničnih uslova za geometriju u blizini horizonta ekstremalnih Kerovih crnih rupa, dobijamo da asimptotska grupa simetrije ima konformnu podgrupu, realizovanu u obliku Virazoro algebre. Pokazaćemo da se formulacija kanonskog generatora lokalne simetrije, definisana u formalizmu prvog reda u [31], može upotrebiti za proračun algebre popravljenih generatora u blizini horizonta, kao i za odgovarajući centralni naboj. Ovi rezultati koriste se dalje za dobijanje konformne entropije Kardijevom formulom. Rezultujuća entropija predstavlja gladak limes rezultata za gravitacionu entropiju u neekstremalnom slučaju. Time je uspešno testiran Nesterov kovarijantni Hamiltonov pristup [70] i dodat doprinos razumevanju jednakosti između gravitacione i konformne entropije. Rezultati predstavljeni u ovom poglavlju su zasnovani na radu [71].

4.1 Geometrija ekstremalne Kerove crne rupe u tetradnom formalizmu

U ovoj sekciji pravimo kratak pregled tetradnog oblika geometrije ekstremalne Kerove crne rupe. Uvodimo graničnu geometriju u blizini horizonta na kojoj ćemo vršiti ispitivanje strukture blizu horizonta ekstremalnih Kerovih crnih rupa u Riman-Kartanovoj geometriji.

4.1.1 Metrika, održani naboji i prvi zakon

Pre nego što definišemo granično rešenje u blizini horizonta, predstavićemo glavne osobine ekstremalnih Kerovih crnih rupa. "Dijagonalna forma" metrike ekstremalne crne rupe $(m = a)$ u Bojer-Lindkvistovim koordinatama [72] je:

$$ds^2 = N^2\left(dt + m\sin^2\theta d\phi\right)^2 - \frac{dr^2}{N^2} - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[mdt + (r^2+m^2)d\phi\right]^2 \tag{4.1.1}$$

gde su:

$$N = \frac{r-m}{\rho} \qquad \rho^2 = r^2 + m^2\cos^2\theta \tag{4.1.2}$$

Jednačina $N = 0$ daje koordinatu degenerisanog horizonta ekstremalne crne rupe, koju ćemo obeležiti sa r_+:

$$r_+ = m \tag{4.1.3}$$

Dva horizonta koji postoje kod Kerovog rešenja se poklapaju u ekstremalnom slučaju. Vrednost ugaone brzine Ω_+ na horizontu ima jednostavan oblik:

$$\Omega_+ = \frac{1}{2r_+} = \frac{1}{2m} \tag{4.1.4}$$

dok su povrinska gravitacija i temperatura jednake nuli:

$$\kappa = \frac{r_+ - m}{2mr_+} \qquad T = \frac{\kappa}{2\pi} = 0 \tag{4.1.5}$$

Održani naboji energije i momenta impulsa Kerove crne rupe u lokalnoj Poenkareovoj teoriji imaju oblik:

$$E = m \qquad J = m^2 \tag{4.1.6}$$

Proveravamo da je prvi zakon mehanike crnih rupa identički zadovoljen nezavisno od vrednosti entropije:

$$0 = T\delta S = \delta E - \Omega_+\delta J = \delta m - \frac{1}{2m}\delta(m^2) \tag{4.1.7}$$

4.1.2 Geometrija ekstremalne Kerove crne rupe u blizini horizonta

Transformaciju (3.1.4) u blizini horizonta za slučaj ekstremalne Kerove crne rupe definišemo kao [49, 48]:

$$\tilde{t} = \frac{\varepsilon t}{2r_+} \qquad y = \frac{\varepsilon r_+}{r - r_+} \qquad \varphi = \phi + \Omega_+ t \tag{4.1.8}$$

gde uzimamo limes $\varepsilon \to 0$ posle transformacije. Metrika prelazi u oblik:

$$ds^2 = r_+^2(1+\cos^2\theta)\left[\frac{d\tilde{t}^2}{y^2} - \frac{dy^2}{y^2} - d\theta^2 - \left(\frac{2\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\right)^2\left(d\varphi - \frac{d\tilde{t}}{y}\right)^2\right] \tag{4.1.9}$$

Primetimo da je usled limesa gornja transformacija singularna i rezultujuća granična geometrija nije ekvivalentna početnoj geometriji. Ovo se lako može uočiti po tome što gornja metrika opisuje geometriju koja nije asimptotski ravna. Osobine granične geometrije ekstremalne Kerove crne rupe u blizini horizonta(NHEK) su detaljno ispitivane u [49, 73]. **Tetrade.** Forma metrike implicira sledeći "dijagonalni" izbor tetrada ϑ^i:

$$
\begin{aligned}
&\vartheta^0 = \frac{\rho_+}{y} d\tilde{t} \quad \vartheta^1 = -\frac{\rho_+}{y} dy \\
&\vartheta^2 = \rho_+ d\theta \quad \vartheta^3 = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\left(d\varphi - \frac{d\tilde{t}}{y}\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.10}
$$

gde je $\rho_+ = r_+\sqrt{1+\cos^2\theta}$.

Za dalji proračun napisaćemo forme Rimanove koneksije i krivine.

Rimanova koneksija. Iz prve Kartanove jednačine $d\vartheta^i + \tilde{\omega}^i{}_j \wedge \vartheta^j = 0$ dobijamo da su nenulte komponente Rimanove koneksije $\tilde{\omega}^{ij}$:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\omega}^{01} = -\frac{\vartheta^0}{\rho_+} - \frac{r_+^2 \sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^3 \quad \tilde{\omega}^{02} = \frac{r_+^2 \sin 2\theta}{2\rho_+^3}\vartheta^0 \quad \tilde{\omega}^{12} = \frac{r_+^2 \sin 2\theta}{\rho_+^3}\vartheta^1 \\
&\tilde{\omega}^{03} = -\frac{r_+^2 \sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^1 \qquad\qquad \tilde{\omega}^{13} = -\frac{r_+^2 \sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^0 \quad \tilde{\omega}^{23} = \frac{2r_+^2 \cot\theta}{\rho_+^3}\vartheta^3
\end{aligned}
\tag{4.1.11}
$$

Rimanova krivina. Nenulte komponente Rimanove krivine su:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}^{01} = -2C\vartheta^0 \wedge \vartheta^1 - 2D\vartheta^2 \wedge \vartheta^3 \quad \tilde{R}^{02} = C\vartheta^0 \wedge \vartheta^2 - D\vartheta^1 \wedge \vartheta^3 \\
&\tilde{R}^{03} = C\vartheta^0 \wedge \vartheta^3 + D\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \qquad\quad \tilde{R}^{12} = C\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 - D\vartheta^0 \wedge \vartheta^3 \\
&\tilde{R}^{13} = C\vartheta^1 \wedge \vartheta^3 + D\vartheta^0 \wedge \vartheta^2 \qquad\quad \tilde{R}^{23} = -2C\vartheta^2 \wedge \vartheta^3 + 2D\vartheta^0 \wedge \vartheta^1
\end{aligned}
\tag{4.1.12}
$$

gde su

$$
C = \frac{r_+^4}{\rho_+^6}(1-3\cos^2\theta) \qquad D = \frac{r_+^4 \cos\theta}{\rho_+^6}(3-\cos^2\theta)
\tag{4.1.13}
$$

4.2 Asimptotski uslovi i asimptotska simetrija

U ovoj sekciji ćemo uvesti asimptotske granične uslove za metriku ekstremalne Kerove crne rupe u blizini horizonta. S obzirom na to da NHEK geometrija nije asimptotski ravna, pronalaženje konzistentnih graničnih uslova nije a priori očigledno. Ovaj rezultat je uspostavljen u opštoj relativnosti [49], ali potrebno je paziti, jer asimptotski uslovi na metriku ne fiksiraju precizno asimptotske granične uslove za tetrade. Zato će konzistentan izbor za tetradu, kao i pojavljivanje konformne simetrije u blizini horizonta biti uspostavljeni u ovoj sekciji.

Metrička asimptotika. U skladu sa [49], uvodimo sledeći skup konzistentnih asimptotskih graničnih uslova za metriku u blizini asimptotske granice $y=0$:

$$
g_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix}
\mathcal{O}_{-2} & \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_1 & \bar{g}_{t\varphi} + \mathcal{O}_0 \\
\mathcal{O}_0 & \bar{g}_{yy} + \mathcal{O}_{-1} & \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_{-1} \\
\mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_0 & \bar{g}_{\theta\theta} + \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_1 \\
\bar{g}_{t\varphi} + \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_{-1} & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_0
\end{pmatrix}
\tag{4.2.1}
$$

gde su pozadinski metrički koeficijenti:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{tt} &= \frac{r_+^2(1+\cos^2\theta)}{y^2} - \frac{4\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\frac{r_+^2}{y^2} \\
\bar{g}_{t\varphi} &= \frac{4\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}\frac{r_+^2}{y} \\
\bar{g}_{yy} &= -\frac{r_+^2(1+\cos^2\theta)}{y^2} \\
\bar{g}_{\theta\theta} &= -r_+^2(1+\cos^2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

i koristimo asimptotsku oznaku $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}(y^n)$.

Tetradna polja. Asimptotska forma tetrada konzistentna sa graničnim uslovima za metriku (4.2.1) data je u obliku:

$$
\vartheta^i{}_\mu \sim \begin{pmatrix}
\mathcal{O}_{-1} & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_1 \\
\mathcal{O}_1 & \bar{\vartheta}^1{}_y + \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_0 \\
\mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_0 & \bar{\vartheta}^2{}_\theta + \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_1 \\
\bar{\vartheta}^3{}_t f(\varphi) + \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_2 & \frac{\bar{\vartheta}^3{}_\varphi}{f(\varphi)}\mathcal{O}_1
\end{pmatrix}
\tag{4.2.3}
$$

gde su pozadinska polja data u obliku:

$$
\bar{\vartheta}^i{}_\mu \sim \begin{pmatrix}
\frac{\rho_+}{y} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\rho_+}{y} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_+ & 0 \\
-\frac{2r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}y} & 0 & 0 & \frac{2r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}
\end{pmatrix}
\tag{4.2.4}
$$

i gde je $f(\varphi) = 1 + h(\varphi)$ proizvoljna funkcija koordinate φ, takva da je $h(\varphi) \ll 1$. **Asimptotska simetrija.** Zakon transformacije $\vartheta^i{}_\mu$ pri lokalnim transformacijama Poenkareove grupe dat je kao:

$$
\delta_0\vartheta^i{}_\mu = \theta^i{}_k\vartheta^k{}_\mu - (\partial_\mu\xi^\rho)\vartheta^i{}_\rho - \xi^\rho\partial_\rho\vartheta^i{}_\mu
\tag{4.2.5}
$$

gde su ξ^μ i θ^{ij} parametri lokalnih translacija, odnosno difeomorfizama, i lokalnih Lorencovih rotacija, redom.

Asimptotska forma metrike očuvana je pod dejstvom asimptotskog Kilingovog vektora ξ^μ datog u sledećem opštem obliku:

$$
\xi^{\tilde{t}} = T + \mathcal{O}_3 \qquad \xi^y = y\partial_\varphi\varepsilon(\varphi) + \mathcal{O}_2 \qquad \xi^\theta = \mathcal{O}_1 \qquad \xi^\varphi = \varepsilon(\varphi) + \mathcal{O}_2
\tag{4.2.6}
$$

Transformacija generisana konstantnim generatorom T predstavlja konstantnu vremensku translaciju, i možemo je zanemariti, fokusirajući se na konformnu podgrupu, s obzirom na to da generator ove transformacije komutira sa generatorom konformne simetrije. Subdominantni članovi odgovaraju trivijalnim difeomorfizmima, i mogu biti zanemareni, pa je konačni oblik asimptotskog Kilingovog vektora:

$$
\xi = (y\partial_\varphi\varepsilon(\varphi))\partial_y + \varepsilon(\varphi)\partial_\varphi
\tag{4.2.7}
$$

Svi parametri lokalnih Lorencovih rotacija, dobijeni iz varijacije tetrada asimptotski teže nuli:

$$\begin{aligned} &\theta^{01} = \mathcal{O}_2 \quad \theta^{02} = \mathcal{O}_2 \quad \theta^{03} = \mathcal{O}_1 \\ &\theta^{12} = \mathcal{O}_1 \quad \theta^{13} = \mathcal{O}_2 \quad \theta^{23} = \mathcal{O}_2 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Rimanova koneksija se može izraziti preko tetradnih polja pa je njena asimptotska forma invarijantna pod transformacijama generisanim vektorima (4.2.6).

Transformacije sa $\varepsilon = 0$ predstavljaju *rezidualne gradijentne transformacije* koje daju trivijalan doprinos održanom naboju. Stoga, asimptotska grupa simetrije se definiše kao faktor grupa u odnosu na rezidualne transformacije. Iz opšte algebre lokalnih Poenkareovih transformacija imamo pravilo kompozicije asimptotskih transformacija:

$$[\delta_0(\varepsilon_1), \delta_0(\varepsilon_2)] = \delta_0(\varepsilon_3) \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2' - \varepsilon_2\varepsilon_1' \tag{4.2.9}$$

gde je $\varepsilon' := \partial_\varphi \varepsilon$.
Raspisivanjem preko Furijeovih moda:

$$\ell_n := \delta_0(\varepsilon = e^{in\varphi}) \tag{4.2.10}$$

algebra asimptotske simetrije dobija oblik Vitove algebre:

$$[\ell_n, \ell_m] = i(m-n)\ell_{m+n} \tag{4.2.11}$$

U nastavku ćemo razmatrati kanonsku realizaciju ove asimptotske simetrije u dva važna slučaja - Rimanovom PG rešenju i teleparalelnom rešenju.

4.3 Rimanova ekstremalna Kerova crna rupa u PG teoriji

Razmotrimo Rimanovo rešenje za ekstremalnu Kerovu crnu rupu u PG teoriji, tj. rešenje bez prisustva torzije. Kao što je poznato, Kerova crna rupa je rešenje u opštoj relativnosti sa nultom kosmološkom konstantom Λ, a lako se dokazuje da isto važi i za njenu geometriju u blizini horizonta u ekstremalnom slučaju [55]. Iz opšte teoreme koja kaže da su rešenja iz opšte relativnosti takođe i rešenja u PG teoriji, možemo zaključiti da isto važi i za granično rešenje ekstremalne Kerove crne rupe blizu horizonta. Postoji direktan dokaz baziran na efektivnom Lagranžijanu [74]:

$$L_G = -{}^*(a_0 R + 2\Lambda) + \frac{1}{2} b_1 R^{ij}\, {}^*R_{ij} \tag{4.3.1}$$

koji definiše odgovarajuće kovarijantne impulse:

$$H_i = 0 \qquad H_{ij} = -2a_0\, {}^*(\vartheta_i \wedge \vartheta_j) + b_1\, {}^*R_{ij} \tag{4.3.2}$$

odnosno u eksplicitnom obliku:

$$
\begin{aligned}
H_{01} &= -2a_0\vartheta^2\wedge\vartheta^3 + 2b_1(-2C\vartheta^2\wedge\vartheta^3 + 2D\vartheta^0\wedge\vartheta^1) \\
H_{02} &= 2a_0\vartheta^1\wedge\vartheta^3 + 2b_1(-C\vartheta^1\wedge\vartheta^3 - D\vartheta^0\wedge\vartheta^2) \\
H_{03} &= -2a_0\vartheta^1\wedge\vartheta^2 + 2b_1(C\vartheta^1\wedge\vartheta^2 - D\vartheta^0\wedge\vartheta^3) \\
H_{12} &= -2a_0\vartheta^0\wedge\vartheta^3 + 2b_1(C\vartheta^0\wedge\vartheta^3 + D\vartheta^1\wedge\vartheta^2) \\
H_{13} &= 2a_0\vartheta^0\wedge\vartheta^2 + 2b_1(-C\vartheta^0\wedge\vartheta^2 + D\vartheta^1\wedge\vartheta^3) \\
H_{23} &= -2a_0\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + 2b_1(-2C\vartheta^0\wedge\vartheta^1 - 2D\vartheta^2\wedge\vartheta^3)
\end{aligned} \tag{4.3.3}
$$

U sledećim podsekcijama, održani naboj na horizontu i centralni naboj biće izračunati primenom opšteg izraza za varijaciju kanonskog generatora na horizontu [31]:

$$\delta\Gamma_H = \oint_{S_H} \delta B(\xi) \tag{4.3.4a}$$

$$\delta B(\xi) := (\xi\rfloor\vartheta^i)\delta H_i + \delta\vartheta^i\wedge(\xi\rfloor H_i) + \frac{1}{2}(\xi\rfloor\omega^{ij})\delta H_{ij} + \frac{1}{2}\delta\omega^{ij}\wedge(\xi\rfloor H_{ij}) \tag{4.3.4b}$$

gde je ξ egzaktan ili asimptotski Kilingov vektor.

4.3.1 Održani naboj

Računamo sada održani naboj na horizontu. On se dobija primenom varijacije (4.3.4b) sa egzaktnim Kilingovim vektorom $\xi = \partial_\varphi$. Pošto je $H_i = 0$, varijacija se pojednostavljuje u:

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma_H &= \oint_{S_H} \delta B \\
\delta B &= \frac{1}{2}\omega_{ij\varphi}\delta H^{ij} + \frac{1}{2}\delta\omega^{ij}\wedge H_{ij\varphi}
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

Nenulti doprinos potiče od člana:

$$\tilde{\omega}^{01}{}_{\varphi}\delta H_{01} = \frac{4a_0\sin^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\delta(2r_+^2\sin\theta)d\theta d\varphi \tag{4.3.6}$$

Integraljenjem, dobijamo održani naboj:

$$J = \oint_{S_H} \tilde{\omega}^{01}{}_{\varphi}\delta H_{01} = 16\pi a_0 r_+^2 \equiv r_+^2 \tag{4.3.7}$$

gde smo koristili:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}d\theta = 1 \tag{4.3.8}$$

i standardnu normalizaciju $16\pi a_0 = 1$.

4.3.2 Centralni naboj i entropija crne rupe

Centralni naboj ćemo izračunati iz algebre popravljenih kanonskih generatora, koja ima sledeći oblik:

$$\{\tilde{G}(\varepsilon_1), \tilde{G}(\varepsilon_2)\} = \tilde{G}(\varepsilon_3) + C \tag{4.3.9}$$

gde je ε_3 definisano pravilom kompozicije (4.2.9), i C je centralni član u algebri.

Koristeći glavni rezultat rada Brauna i Enoa [75], kanonska algebra se može simplifikovati i dobijamo sledeću slabu jednakost:

$$\{\tilde{G}(\varepsilon_1), \tilde{G}(\varepsilon_2)\} \approx \delta_0(\varepsilon_1)\Gamma(\varepsilon_2) \approx \Gamma(\varepsilon_3) + C \tag{4.3.10}$$

Centralni član je konstantni funkcional, pa se prema tome može računati variranjem na pozadinske konfiguracije. Koristimo opštu formulu (4.3.4b) pri varijaciji generisanoj asimptotskim Kilingovim vektorom (4.2.7).

Koristimo sledeće nenulte unutrašnje proizvode asimptotskog Kilingovog vektora sa tetradom i koneksijom:

$$\xi\rfloor\bar{\vartheta}^1 = -r_+\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\varepsilon' \qquad \xi\rfloor\bar{\vartheta}^3 = \frac{2r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\varepsilon \tag{4.3.11a}$$

$$\xi\rfloor\bar{\omega}^{01} = -\frac{2r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\varepsilon \qquad \xi\rfloor\bar{\omega}^{03} = \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\varepsilon'$$

$$\xi\rfloor\bar{\omega}^{12} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\varepsilon' \qquad \xi\rfloor\bar{\omega}^{23} = \frac{4\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\varepsilon \tag{4.3.11b}$$

Nenulti članovi u varijaciji pozadinskih tetradnih polja(na granici definisanoj sa $\tilde{t} = \text{const.}$, $y \to 0$) su:

$$\delta_0\bar{\vartheta}^1 = r_+\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\varepsilon'' d\varphi \tag{4.3.12a}$$

$$\delta_0\bar{\vartheta}^3 = -\frac{2r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\varepsilon' d\varphi \tag{4.3.12b}$$

Sledi da su varijacije kovarijantnih impulsa date u obliku:

$$\delta_0\bar{H}_{01} = 4(a_0+2b_1C)r_+^2\sin\theta\,\varepsilon' d\theta d\varphi \tag{4.3.13a}$$

$$\delta_0\bar{H}_{03} = 2(a_0-2b_1C)r_+^2(1+\cos^2\theta)\varepsilon'' d\theta d\varphi \tag{4.3.13b}$$

$$\delta_0\bar{H}_{12} = -2b_1Dr_+^2(1+\cos^2\theta)\varepsilon'' d\theta d\varphi \tag{4.3.13c}$$

$$\delta_0\bar{H}_{23} = 8b_1Dr_+^2\sin\theta\,\varepsilon' d\theta d\varphi \tag{4.3.13d}$$

Nakon integracije, dobijamo:

$$\oint_{S_H}(\xi_2\rfloor\bar{\omega}^{01})\delta_0(\xi_1)\bar{H}_{01} = -\left(8a_0r_+^2 + \frac{1}{2}b_1(8+3\pi)\right)\int_0^{2\pi}\varepsilon_2\varepsilon_1' d\varphi \tag{4.3.14a}$$

$$\oint_{S_H}(\xi_2\rfloor\bar{\omega}^{03})\delta_0(\xi_1)\bar{H}_{03} = (4a_0r_+^2 - b_1)\int_0^{2\pi}\varepsilon_2'\varepsilon_1 d''\varphi \tag{4.3.14b}$$

$$\oint_{S_H}(\xi_2\rfloor\bar{\omega}^{12})\delta_0(\xi_1)\bar{H}_{12} = b_1\int_0^{2\pi}\varepsilon_2'\varepsilon_1'' d\varphi \tag{4.3.14c}$$

$$\oint_{S_H}(\xi_2\rfloor\bar{\omega}^{23})\delta_0(\xi_1)\bar{H}_{23} = \frac{1}{2}b_1(8+3\pi)\int_0^{2\pi}\varepsilon_2\varepsilon_1' d\varphi \tag{4.3.14d}$$

gde smo u sređivanju izraza koristili sledeće određene integrale:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta}=1, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta(1-3\cos^2\theta)}{(1+\cos^2\theta)^5}=\frac{1}{32}(8+3\pi),\\
&\int_0^\pi \frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{(1+\cos^2\theta)^3}=\frac{1}{2}, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos^2\theta(3-\cos^2\theta)}{(1+\cos^2\theta)^3}=\frac{1}{2},\\
&\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos^2\theta(3-\cos^2\theta)}{(1+\cos^2\theta)^5}=\frac{1}{64}(8+3\pi).
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Posle sumiranja svih doprinosa, dobijamo vrednost prvog člana:

$$\frac{1}{2}\oint_{S_H}(\xi_2\rfloor\bar{\omega}^{ij})\delta_0(\xi_1)\bar{H}_{ij}=-8a_0r_+^2\int_0^{2\pi}\varepsilon_2\varepsilon_1'd\varphi+4a_0r_+^2\int_0^{2\pi}\varepsilon_2'\varepsilon_1''d\varphi \tag{4.3.16}$$

Prelazimo na sledeži član.
Nenulte varijacije pozadinske koneksije su:

$$\delta_0\bar{\omega}^{01}=\frac{2\sin^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\varepsilon'd\varphi \tag{4.3.17a}$$

$$\delta_0\bar{\omega}^{03}=-\frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\varepsilon''d\varphi \tag{4.3.17b}$$

$$\delta_0\bar{\omega}^{12}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\varepsilon''d\varphi \tag{4.3.17c}$$

$$\delta_0\bar{\omega}^{23}=-\frac{4\cos\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\varepsilon'd\varphi \tag{4.3.17d}$$

$$\tag{4.3.17e}$$

Unutrašnji proizvodi sa kovarijantnim impulsima su:

$$\xi\rfloor\bar{H}_{01}=4(a_0+2b_1C)r_+^2\sin\theta\varepsilon d\theta \tag{4.3.18a}$$

$$\xi\rfloor\bar{H}_{01}=2(a_0-b_1C)r_+^2(1+\cos^2\theta)\varepsilon'd\theta \tag{4.3.18b}$$

$$\xi\rfloor\bar{H}_{01}=-2b_1r_+^2(1+\cos^2\theta)\varepsilon'd\theta \tag{4.3.18c}$$

$$\xi\rfloor\bar{H}_{01}=8b_1Dr_+^2\sin\theta\varepsilon d\theta \tag{4.3.18d}$$

Pošto su svi integrali po θ identični, drugi član ima sledeći oblik:

$$\frac{1}{2}\oint_{S_H}\delta_0(\xi_1)\bar{\omega}^{ij}\wedge(\xi_2\rfloor\bar{H}_{ij})=8a_0^2r_+^2\int_0^{2\pi}\varepsilon_1\varepsilon_2'd\varphi-4a_0r_+^2\int_0^{2\pi}\varepsilon_1'\varepsilon_2''d\varphi \tag{4.3.19}$$

Konačno sabiranjem ova dva doprinosa, dobijamo varijaciju površinskog člana. Identifikujemo član oblika $\varepsilon_1'\varepsilon_2''-\varepsilon_2'\varepsilon_1''$ kao centralni član, dok je ostatak doprinos površinskom članu $\Gamma(\varepsilon_3)$. Prema tome, imamo:

$$C=-4a_0r_+^2\int_0^{2\pi}(\varepsilon_1'\varepsilon_2''-\varepsilon_2'\varepsilon_1'')d\varphi \tag{4.3.20}$$

Razvijena preko Furijeovih moda, algebra popravljenih generatora asimptotske simetrije uzima oblik

Virazoro algebre:

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{m+n} - \frac{c}{12} in^3 \delta_{n+m,0} \tag{4.3.21}$$

gde je u standardnoj normalizaciji iz teorije struna:

$$c = 12 \cdot 16\pi a_0 r_+^2 = 12 r_+^2 \equiv 12J \tag{4.3.22}$$

Centralni naboj ne zavisi od parametra b_1 u Lagranžijanu, i potpuno se slaže sa centralnim nabojem pronađenim u [49].

Sada entropiju dobijamo Kardijevom formulom:

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{c}{6}\left(J - \frac{c}{24}\right)} = 2\pi r_+^2 \tag{4.3.23}$$

Rezultat za konformnu entropiju ekstremalne Rimanove Kerove crne rupe u PG teoriji se poklapa sa rezultatom iz opšte relativnosti [49], i predstavlja gladak limes neekstremalnog rezultata gravitacione entropije za generičnu crnu rupu u istoj teoriji [74]. Time je proračun u Rimanovom slučaju završen, prelazimo na teleparelelni slučaj.

4.4 Ekstremalna Kerova crna rupa u teleparalelnoj teoriji gravitacije

Teleparalelna gravitacija(TG), je specijalni slučaj PG teorije definisan uslovom nestajanja krivine $R^{ij} = 0$ [76]. Kerovo rešenje zadovoljava jednačine teleparalelne gravitacije [74].

Uslov R^{ij} ne povlači da je koneksija jednaka nuli, međutim koneksija je u teleparalelnoj gravitaciji pa možemo izabrati radi jednostavnosti gradijentni uslov $\omega^{ij} = 0$. Dakle, tetrada postaje jedina dinamička promenljiva i torzija ima oblik $T^i = d\vartheta^i$. Za prostorvreme sa tetradom (4.1.10), dobijamo nenulte 2-forme torzije u obliku:

$$\begin{aligned} T^0 &= -\frac{1}{\rho_+}\vartheta^0 \wedge \vartheta^1 + \frac{r_+^2 \sin 2\theta}{2\rho_+^3}\vartheta^0 \wedge \vartheta^2, \qquad T^1 = \frac{r_+^2 \sin 2\theta}{2\rho_+^3}\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \\ T^3 &= \frac{2r_+^2 \sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^0 \wedge \vartheta^1 + \frac{2r_+^2 \cos\theta}{\rho_+^3 \sin\theta}\vartheta^2 \wedge \vartheta^3 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Sve ireducibilne komponente T^i su nenulte.

Kerovo rešenje iz opšte relativnosti je rešenje TG teorije za specijalan izbor Lagranževih parametara, koji čine ovaj slučaj teleparalelne teorije ekvivalentnom sa opštom relativnosti. Lagranžijan takozvanog teleparalelnog ekvivalenta, $GR_\parallel$ je:

$$L_T := a_0 T^i \,{}^*\!\left({}^{(1)}T_i - 2\,{}^{(2)}T_i - \frac{1}{2}\,{}^{(3)}T_i\right) \tag{4.4.2}$$

Iako su ove dve teorije dinamički ekvivalentne, njihov geometrijski sadržaj je vrlo različit: opšta relativnost je karakterisana nestajanjem torzije i postojanjem Rimanove krivine, dok teleparalelnu geometriju $GR_\parallel$ karakteriše netrivijalna torzija dok je krivina jednaka nuli.

Računamo kovarijantne impulse iz Lagranžijana (4.4.2):

$$H^i = 2a_0 \overset{*}{\left({}^{(1)}T_i - 2\,{}^{(2)}T_i - \frac{1}{2}\,{}^{(3)}T_i \right)} \tag{4.4.3}$$

Eksplicitno, komponente H^i su:

$$\begin{aligned}
H^0 &= 2a_0\left(-\frac{r_+^2 \sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^0\wedge\vartheta^2 + \frac{\cos\theta}{\rho_+\sin\theta}\vartheta^1\wedge\vartheta^3\right)\\
H^1 &= 2a_0\left(\frac{\cos\theta}{\rho_+\sin\theta}\vartheta^0\wedge\vartheta^3 - \frac{r_+^2\sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^1\wedge\vartheta^2\right)\\
H^2 &= -2a_0\frac{1}{\rho_+}\vartheta^0\wedge\vartheta^3\\
H^3 &= 2a_0\left(-\frac{r_+^2\sin 2\theta}{\rho_+^3}\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + \frac{1}{\rho_+}\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - \frac{r_+^2\sin\theta}{\rho_+^3}\vartheta^2\wedge\vartheta^3\right)
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Prelazimo na proračun održanog i centralnog naboja u ovom rešenju.

4.4.1 Održani naboj

Kao i u Rimanovom slučaju, održani naboj dobijamo iz varijacije površinskog člana na horizontu zamenom egzaktnog Kilingovog vektora $\xi = \partial_\varphi$. Pošto je $H_{ij} = 0$, varijacija kanonskog generatora se svodi na:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_H &= \oint_{S_H}\delta B\\
\delta B &= \vartheta_{i\varphi}\delta H^i + \delta\vartheta^i\wedge H_{i\varphi}
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Nenulti doprinos održanom naboju dolazi od člana:

$$\vartheta_{3\varphi}\delta H^3 + \delta\vartheta^3\wedge H_{3\varphi} = \frac{4a_0\sin^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}\delta(2\sin^2\theta r_+^2)d\theta d\varphi \tag{4.4.6}$$

Integracijom dobijamo:

$$J = 16\pi a_0 r_+^2 \equiv r_+^2 \tag{4.4.7}$$

4.4.2 Centralni naboj i entropija crne rupe

Centralni naboj se dobija iz algebre popravljenih kanonskih generatora asimptotske simetrije, na isti način kao u sekciji 4.3.2. Variramo pozadinsku konfiguraciju i računamo $\delta_0(\xi_1)\Gamma_H(\xi_2)$ gde je xi asimptotski Kilingov vektor (4.2.7).

Računamo nenulte varijacije kovarijantnih impulsa:

$$\delta_0\bar{H}_1 = -2a_0\frac{r_+\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\varepsilon'' d\theta d\varphi \tag{4.4.8a}$$

$$\delta_0\bar{H}_3 = -4a_0\frac{\sin^2\theta}{r_+(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\varepsilon' d\theta d\varphi \tag{4.4.8b}$$

Koristeći nenulte proizvode sa tetradom (4.2.7), dobijamo prvi član posle integracije:

$$\oint_{S_H} (\xi_2 \rfloor \bar{\vartheta}^i)\delta_0(\xi_1)\bar{H}_i = 4a_0 r_+^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon_2'' \varepsilon_1' d\varphi - 8a_0 r_+^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 \varepsilon_1' d\varphi \tag{4.4.9}$$

Netrivijalni unutrašnji proizvodi sa kovarijantnim impulsima su:

$$\xi \rfloor \bar{H}_1 = -2a_0 \frac{r_+ \sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} \varepsilon' d\theta \qquad \xi \rfloor \bar{H}_3 = -4a_0 \frac{\sin^2\theta}{r_+(1+\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \varepsilon d\theta \tag{4.4.10a}$$

Dobijamo drugi deo varijacije površinskog člana:

$$\oint_{S_H} \delta_0(\xi_1)\bar{\vartheta}^i(\xi_2 \rfloor \bar{H}_i) = -4a_0 r_+^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon_1'' \varepsilon_2' d\varphi + 8a_0 r_+^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 \varepsilon_2' d\varphi \tag{4.4.11}$$

Konačno, dobijamo centralni član u istom obliku kao kod Rimanovog rešenja:

$$C = -4a_0 r_+^2 \int_0^{2\pi} (\varepsilon_1' \varepsilon_2'' - \varepsilon_2' \varepsilon_1'') d\varphi \tag{4.4.12}$$

Razvijamo kanonsku algebru preko Furijeovih moda, i dobijamo njen Virazoro oblik:

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{m+n} - \frac{c}{12} i n^3 \delta_{n+m,0} \tag{4.4.13}$$

gde u normalizaciji teorije struna imamo:

$$c = 12 \cdot 16\pi a_0 r_+^2 = 12 r_+^2 \equiv 12J \tag{4.4.14}$$

Entropija je konačno data Kardijevom formulom:

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{c}{6}\left(J - \frac{c}{24}\right)} = 2\pi r_+^2 \tag{4.4.15}$$

Vidimo da se rezultat za centralni naboj u teleparalelnom ekvivalentu $GR_{\parallel}$ poklapa sa Rimanovim slučajem. Ponovo smo dobili entropiju koja je gladak limes neekstremalne entropije nađene u [74], a konformni rezultat se slaže sa rezultatom iz opšte relativnosti [49].

4.5 Diskusija

Metod dobijanja entropije ekstremalnih crnih rupa putem analize njihove geometrije u blizini horizonta, bio je analiziran na primeru ekstremalne Kerove crne rupe, u formalizmu lokalne Poenkareove teorije. Dva razmotrena slučaja sektora teorije u kojima se ovo rešenje pojavljuje, Rimanov sektor i teleparalelni ekvivalent opšte relativnosti, dali su isti rezultat koji je gladak limes ustpostavljenog neekstremalnog rezultata [74]. Naš proračun sugeriše da se ovaj metod može primeniti i opštije od Kerovog rešenja, te ćemo u sledećoj glavi razmatrati drugačiji primer, kod kojeg rezultati nisu potpuno usaglašeni sa rezultatima prethodnog neekstremalnog računa.

5 Simetrija u blizini horizonta ekstremalnih prostorno razvučenih crnih rupa

Topološki masivna gravitacija (TMG) je proširenje opšte relativnosti sa kosmološkom konstantom dodavanjem u dejstvo Čern-Sajmonsovog člana [77]. Za negativne vrednosti kosmološke konstante, teorija poseduje interesantna rešenja, naime, maksimalno simetrično AdS_3 prostorvreme, i BTZ crnu rupu [78, 79]. Dok je opšta relativnost u tri dimenzije topološka teorija, TMG je dinamička teorija, poseduje propagirajući stepen slobode, masivni graviton [80, 81, 82]. Međutim, ova rešenja su obeležena ozbiljnim problemima. Za uobičajeni znak gravitacione konstante interakcije, masivne ekscitacije oko AdS_3 pozadine imaju negativnu energiju, što čini takvo osnovno stanje nestabilnim. Menjanje znaka G daje BTZ crnoj rupi negativnu energiju [83, 84]. Za rešenje ovog problema, predloženo je da se umesto toga razmatra deformisani(eng. *warped*) AdS_3 vakuum kao moguće stabilno osnovno stanje teorije [85, 86].

Deformisani AdS_3 je rešenje TMG kod kojeg je grupa simetrije $SL(2,R) \times SL(2,R)$ redukovana na $SL(2,R) \times U(1)$. Posmatrajući AdS_3 kao fibraciju AdS_2, deformisano rešenje se dobija istezanjem ili sabijanjem duž vlakna prostornog i vremenskog tipa [87]. Eliminišući mogućnost postojanja zatvorenih krivih vremenskog tipa, koje su pronađene u slučaju deformacije u vremenskom pravcu [85], usmerićemo pažnju na prostorno razvučena rešenja. Koristeći topološke identifikacije, prostorno razvučeno rešenje za crnu rupu se može dobiti iz prostorno razvučenog AdS_3, na sličan način kao što se BTZ crna rupa može dobiti topološkom identifikacijom običnog AdS_3 prostorvremena. Ove crne rupe su predmet našeg istraživanja u ovom poglavlju.

Naime, Aninos i saradnici [85] su istraživali termodinamičke osobine ovih rešenja, i postavili hipotezu o tome da bi ona mogla biti dualna dvodimenzionalnoj konformnoj teoriji polja na granici. Asimptotske simetrije deformisanog AdS_3 su ispitivane od strane Kompera i Deturnea [88]. Koristeći kanonski formalizam kao prirodan način za ispitivanje asimptotskih simetrija dinamičkih sistema, Blagojević i Cvetković [89] su potvrdili hipotezu Aninosa i saradnika, i dobili izraz za gravitacionu entropiju crne rupa iz centralnih naboja asimptotskih generatora simetrije, metodom koji je opisan u drugom poglavlju. Entropija je takođe izražena na jednostavan način preko veličina u blizini horizonta u neekstremalnom slučaju u [90]. Međutim, kao što je ranije napomenuto, ovaj metod nije moguće koristiti u ekstremalnom slučaju.

Ova glava je zasnovana na radu [91], u kojem se ovaj problem razrešava proračunom entropije ekstremalne crne rupe putem ispitivanja njenog limesa u blizini horizonta. Analogno sa Ker/CFT korespondencijom ispitivanom u [49], dobijena je geometrija u blizini horizonta ekstremalne prostorno razvučene crne rupe, i ispitana je struktura asimptotskih simetrija ovog rešenja koristeći kanonski formalizam u prvom redu, u skladu sa [31]. Nakon uvođenja konzistentnog skupa asimptotskih graničnih uslova, dobijena je asimptotska grupa simetrije u obliku Virazoro algebre, što je različito od neekstremalnog slučaja, gde je očekivana Virazoro simetrija izvedena iz semidirektnog zbira Kac-Mudi algebre i Virazoro algebre [89]. Oslanjajući se na rezultat Brauna i Enoa [75], entropija je određena iz centralnih naboja Kardijevom formulom, i kao što ćemo videti, rešenje nije neprekidno povezano sa neekstremalnim slučajem.

5.1 Ekstremalne prostorno razvučene crne rupe i njihova geometrija u blizini horizonta

Topološki masivna gravitacija sa kosmološkom konstantom se može prirodno napisati na jeziku lokalne Poenkareove teorije [32]. S obzirom da radimo na trodimenzionalnom modelu, korisno je 2-forme krivine i torzije pretvoriti u odgovarajuće duale, date formulom $A^{ij} := -\varepsilon^{ij}{}_k A^k$, za proizvoljni antisimetričan tenzor A^{ij}(u Lorencovom bazisu). Dakle, dobijamo dualnu koneksiju ω^i i krivinu R^i. Kartanove jednačine preko dualnih promenljivih su date u obliku:

$$T^i = D\vartheta^i = d\vartheta^i + \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge \vartheta^k \qquad R^i = d\omega^i + \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \tag{5.1.1}$$

U slučaju $T^i = 0$ ova geometrija se svodi na standardnu Rimanovu geometriju u 3 dimenzije.

5.1.1 Lagranžijan TMG i jednačine polja

Lagranžijan TMG je definisan kao:

$$L = 2a\vartheta^i \wedge R_i - \frac{\Lambda}{3}\varepsilon_{ijk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge \vartheta^k + \frac{a}{\mu}L_{CS}(\omega) + \lambda_i \wedge T^i \tag{5.1.2}$$

gde je $a = \frac{1}{16\pi G}$, $\Lambda < 0$ je kosmološka konstanta, μ je masa gravitona, $L_{CS}(\omega) = \omega^i \wedge d\omega_i + \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k$ je Čern-Sajmonsov Lagranžijan i λ_i je Lagranžev množitelj koji obezbeđuje važenje veze $T^i = 0$.

Variranjem dejstva $S = \int L$ u odnosu na ϑ^i, ω^i i λ^i, dobijamo jednačine polja. Treća jednačina je samo veza $T^i = 0$, a njenom zamenom, prve dve jednačine dobijaju oblik:

$$2aR_i - \Lambda\varepsilon_{ijk}\vartheta^j \wedge \vartheta^k + \frac{2a}{\mu}C_i = 0\,, \tag{5.1.3a}$$

$$\lambda_i = \frac{2a}{\mu}L_i\,, \tag{5.1.3b}$$

gde je Shoutenova 1-forma L^i zadana kao:

$$L^i = (Ric)^i - \frac{1}{4}R\vartheta^i\,. \tag{5.1.4}$$

Ovde, Ričijeva 1-forma je data kao $(Ric)^i = \varepsilon^{ijk}e_j \lrcorner R_k$ dok je skalarna krivina $R = e_i \lrcorner (Ric)^i$. Kotonova 2-forma je definisana kao $C^i = \nabla L^i := dL^i + \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge L^k$.

TMG poseduje rešenje za prostorno razvučenu crnu rupu. Sada ćemo ukratko predstaviti ovo rešenje i diskutovati njegove osnovne osobine, pre nego što pređemo na ekstremalni slučaj.

5.1.2 Ekstremalne prostorno razvučene crne rupe

Nakon uvođenja prikladnije notacije za parametre:

$$\Lambda = -\frac{a}{\ell^2} \qquad \nu = \frac{\mu\ell}{3} \tag{5.1.5}$$

kostruišemo metriku prostorno razvučene crne rupe prateći proceduru iz [85]. Nalazimo da u koordinatama Švarcšildovog tipa (t,r,φ), metrika ima oblik:

$$ds^2 = N^2dt^2 - \frac{dr^2}{B^2} - K^2(d\varphi + N_\varphi dt)^2 \tag{5.1.6a}$$

gde imamo:

$$N^2 = \frac{(\nu^2+3)(r-r_+)(r-r_-)}{4K^2}, \qquad B^2 = \frac{4N^2K^2}{\ell^2} \tag{5.1.6b}$$

$$K^2 = \frac{r}{4}[3(\nu^2-1)r + (\nu^2+3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{r_+r_-(\nu^2+3)}], \tag{5.1.6c}$$

$$N_\varphi = \frac{2\nu r - \sqrt{r_+r_-(\nu^2+3)}}{2K^2}. \tag{5.1.6d}$$

Rešenje postoji u sektoru $\nu^2 > 1$, dok su r_pm koordinate unutrašnjeg i spoljašnjeg horizonta, redom. Ekstremalno rešenje se dobija iz uslova da je $r_+ = r_-$, odakle dobijamo:

$$N^2 = \frac{(\nu^2+3)(r-r_+)^2}{4K^2}, \qquad B^2 = \frac{4N^2K^2}{\ell^2}, \tag{5.1.7a}$$

$$K^2 = \frac{r}{4}[3(\nu^2-1)r + 2(\nu^2+3)r_+ - 4\nu r_+\sqrt{\nu^2+3}], \tag{5.1.7b}$$

$$N_\varphi = \frac{2\nu r - r_+\sqrt{\nu^2+3}}{2K^2}. \tag{5.1.7c}$$

Specifična osobina ekstremalnog rešenja je mogućnost konstrukcije geometrije u blizini horizonta. Konstrukcija se dobija razvijanjem metrike u okolini horizonta, odakle izvodimo transformaciju koordinata:

$$t = \frac{\tilde{t}}{\varepsilon r_+}\frac{2K_+\ell}{\nu^2+3} \qquad r = r_+(1+\varepsilon\tilde{r}) \qquad \varphi = \tilde{\varphi} - \frac{2\ell}{\nu^2+3}\frac{\tilde{t}}{\varepsilon r_+} \tag{5.1.8}$$

i vršimo limes nakon transformacije $\varepsilon \to \infty$, i gde je:

$$K_+ := K(r_+) = \frac{r_+}{2}[2\nu - \sqrt{\nu^2+3}]$$

Nakon transformacije, dobijamo granično rešenje za geometriju u blizini horizonta ekstremalne prostorno razvučene crne rupe:

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2+3}\left(\tilde{r}^2d\tilde{t}^2 - \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2}\right) - \left(K_+d\tilde{\varphi} - \frac{2\nu\ell}{(\nu^2+3)}\tilde{r}d\tilde{t}\right)^2 \tag{5.1.9}$$

Trijade, koneksija i krivina. Pošto je metrika zadana u dijagonalnoj formi, ortonormalni bazis 1-formi trijada se može pravolinijski izabrati u obliku:

$$\begin{aligned}
&\vartheta^0 = \frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}\tilde{r}d\tilde{t} \qquad \vartheta^1 = \frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} \\
&\vartheta^2 = K_+d\tilde{\varphi} - \frac{2\nu\ell}{(\nu^2+3)}\tilde{r}d\tilde{t}
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Levi-Čivita koneksija se dobija iz Kartanovih strukturnih jednačina (5.1.1) kada je $T^i = 0$:

$$\omega^0 = \frac{\nu}{\ell}\vartheta^0 \qquad \omega^1 = \frac{\nu}{\ell}\vartheta^1 \qquad \omega^2 = -\frac{\sqrt{\nu^2+3}}{\ell}\vartheta^0 - \frac{\nu}{\ell}\vartheta^2 \tag{5.1.11}$$

Konačno, koristeći drugu strukturnu jednačinu, dobijamo 2-forme krivine:

$$R^0 = -\frac{\nu^2}{\ell^2}\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \qquad R^1 = -\frac{\nu^2}{\ell^2}\vartheta^0 \wedge \vartheta^2 \qquad R^2 = -\frac{2\nu^2-3}{\ell^2}\vartheta^0 \wedge \vartheta^1 \,. \tag{5.1.12}$$

Onda, Ričijeva 1-forma $(Ric)^i = \varepsilon^{ijk} e_j \rfloor R_k$ ima oblik:

$$(Ric)^0 = \frac{3-\nu^2}{\ell^2}\vartheta^0 \,, \qquad (Ric)^1 = \frac{3-\nu^2}{\ell^2}\vartheta^i \,, \qquad (Ric)^2 = \frac{2\nu^2}{\ell^2}\vartheta^2 \,. \tag{5.1.13a}$$

Konačno, Kotonova 2-forma je:

$$C_0 = \frac{3\nu}{\ell^3}(\nu^2-1)\vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \,, \quad C_1 = \frac{3\nu}{\ell^3}(\nu^2-1)\vartheta^2 \wedge \vartheta^0 \,, \quad C_2 = -\frac{6\nu}{\ell^3}(\nu^2-1)\vartheta^0 \wedge \vartheta^1 \,.$$

Kao što je i očekivano, jednačine polja su egzaktno zadovoljene.

5.2 Asimptotski granični uslovi

Nakon definisanja geometrije u blizini horizonta, formulisaćemo asimptotske granične uslove u oblasti blizu horizonta. Transformacija kojom smo prešli u graničnu geometriju je singularna posle limesa, i rezultujuće prostorvreme nije difeomorfno početnom. Slična situacija je viđena u [71], tj. analizi opisanoj u prethodnom poglavlju. Pošto geometrija nije asimptotski ravna, nije očigledno koje granične uslove treba nametnuti. U slučaju trodimenzionalnih deformisanih geometrija, asimptotske simetrije su ispitivane u [88]. U opštoj relativnosti, ovaj rezultat je dobijen za različite geometrije [49, 69]. Koristeći ove pristupe kao referencu, tražimo konzistentne asimptotske uslove za metriku. Takođe, kao i u prethodnoj glavi, asimptotski uslovi trijada nisu potpuno fiksirani uslovima nametnutim na metriku, tako da ćemo uspostaviti kompatibilne konzistentne uslove na trijadu, iz kojih će se dobiti asimptotska konformna simetrija karakteristična za geometrije u blizini horizonta.

Asimptotika metrike. Uvodimo sledeći skup asimptotskih graničnih uslova za metriku kada $\tilde{r} \to \infty$:

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{-2} & \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_0 \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_4 & \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_0 \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

Koristimo notaciju $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}(\tilde{r}^{-n})$. Vidimo da uslovi odstupaju od uobičajene pretpostavke o graničnim uslovima koji sadrže prve subdominantne članove u metrici. Rezultat je blisko analogan sa rezultatom dobijenim kod Kerove crne rupe [49, 71].

Asimptotika trijade. Granični uslovi na trijadu kompatibilni sa (5.2.1) su dati u obliku:

$$\vartheta^i{}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{-1} & \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_1 & \bar{b}^1{}_{\tilde{r}} + \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_0 \\ \frac{\bar{b}^2{}_{\tilde{t}}}{f(\tilde{\varphi})} + \mathcal{O}_0 & \mathcal{O}_3 & \bar{b}^2{}_{\tilde{\varphi}} f(\tilde{\varphi}) + \mathcal{O}_1 \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

gde su pozadinska polja trijade:

$$\bar{b}^i{}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}\tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}\frac{1}{\tilde{r}} & 0 \\ -\frac{2\nu\ell}{(\nu^2+3)}\tilde{r} & 0 & K_+ \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

i $f(\tilde{\varphi}) = 1 + h(\tilde{\varphi})$ je proizvoljna funkcija φ, pri čemu $h(\tilde{\varphi}) \ll 1$.

Asimptotska simetrija. Asimptotska forma metrike je očuvana pri dejstvu opšteg asimptotskog Kilingovog vektora ξ, datog u obliku:

$$\xi = (T - C\tilde{t} + \mathscr{O}_3)\partial_{\tilde{t}} + (-\tilde{r}(\varepsilon'(\tilde{\varphi}) + C) + \mathscr{O}_1)\partial_{\tilde{r}} + (\varepsilon(\tilde{\varphi}) + \mathscr{O}_2)\partial_{\tilde{\varphi}} \tag{5.2.4}$$

gde su T, C, proizvoljne konstante, i $\varepsilon(\tilde{\varphi})$ proizvoljna funkcija $\tilde{\varphi}$.

Subdominantni članovi u gornjem izrazu odgovaraju trivijalnim difemorfizmima koji ne doprinose održanim veličinama i možemo ih zanemariti. Takođe, transformacije sa $\varepsilon = 0$ predstavljaju rezidualne gradijentne transformacije koje daju trivijalni doprinos centralnom naboju, i nisu od interesa u trenutnom tretmanu. Formiramo asimptotsku grupu simetrije kao količnik svih asimptotskih simetrija generisanih vektorom ξ sa rezidualnim transformacijama. Ono što preostaje je asimptotski Kilingov vektor koji generiše grupu difeomorfizama na krugu Diff(S^1):

$$\xi = -\tilde{r}\varepsilon'(\tilde{\varphi})\partial_{\tilde{r}} + \varepsilon(\tilde{\varphi})\partial_{\tilde{\varphi}} \tag{5.2.5}$$

Iz generalne algebre lokalne Poenkareove teorije, nalazimo da je kompozicija asimptotskih transformacija data preko:

$$\begin{aligned} &[\delta_0(\varepsilon_1), \delta_0(\varepsilon_2)] = \delta_0(\varepsilon_3), \\ &\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2' - \varepsilon_2\varepsilon_1' \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

gde $'$ predstavlja izvod po $\tilde{\varphi}$.

Prepisana preko Furijeovih moda, $\ell_n = \delta_0(\varepsilon = e^{in\tilde{\varphi}})$, algebra dobija oblik Vitove algebre:

$$[\ell_n, \ell_m] = i(m-n)\ell_{m+n} \tag{5.2.7}$$

Zakon transformacije trijada pri lokalnim Poenkareovim transformacijama je:

$$\delta_0\vartheta^i{}_\mu = -\varepsilon^i{}_{jk}\vartheta^j{}_\mu\theta^k - (\partial_\mu\xi^\rho)\vartheta^i{}_\rho - \xi^\rho\partial_\rho\vartheta^i{}_\mu \tag{5.2.8}$$

Iz uslova da je asimptotska forma trijade očuvana pri ovim transformacijama, dobijamo ponašanje Lorencovih parametara θ^{ij}:

$$\theta^0 = \mathscr{O}_2 \qquad \theta^1 = \mathscr{O}_1 \qquad \theta^2 = \mathscr{O}_2 \tag{5.2.9}$$

Spinska koneksija je Rimanova, te se može izraziti preko tetrade. Stoga je njeno asimptotsko ponašanje implicirano ponašanjem tetrade, pa je zakon transformacije za spinsku koneksiju zadovoljen pri transformacijama generisanim (5.2.5) i (5.2.9).

U nastavku, primenićemo kanonski pristup da ispitamo održane naboje, kanonsku realizaciju asimptotske algebre i entropiju sistema.

5.3 Održani naboj, centralni naboj i entropija

U proračunu centralnog naboja i održanog naboja, koristićemo opštu formulu za varijaciju kanonskog generatora na horizontu, razvijenu u [31]:

$$\delta\Gamma = \oint_{S_H} \delta B(\xi)\,,$$
$$\delta B(\xi) := (\xi \lrcorner\, \vartheta^i)\delta\tau_i + \delta\vartheta^i(\xi \lrcorner\, \tau_i) + (\xi \lrcorner\, \omega^i)\delta\rho_i + \delta\omega^i(\xi \lrcorner\, \rho_i)\,, \tag{5.3.1}$$

gde su $\rho_i = \frac{\partial L}{\partial R^i}$ i $\tau_i = \frac{\partial L}{\partial T^i}$ kovarijantni impulsi. Kovarijantni impulsi se jednostavno dobijaju iz Lagranžijana:

$$\tau_i = \lambda_i = \frac{2a}{\mu}L_i \qquad \rho_i = 2ab_i + \frac{a}{\mu}\omega_i \tag{5.3.2}$$

Eksplicitni oblik kovarijantnih impulsa je:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{a(-2\nu^2+3)}{3\nu\ell}\vartheta^0 \qquad & \rho_0 &= \frac{7a}{3}\vartheta^0 \\
\tau_1 &= \frac{a(2\nu^2-3)}{3\nu\ell}\vartheta^1 \qquad & \rho_1 &= -\frac{7a}{3}\vartheta^1 \\
\tau_2 &= -\frac{a(4\nu^2-3)}{3\nu\ell}\vartheta^2 \qquad & \rho_2 &= \frac{a\sqrt{\nu^2+3}}{3\nu}\vartheta^0 - \frac{5a}{3}\vartheta^2
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

5.3.1 Održani naboj

U ovoj sekciji računamo održani naboj koji se dobija zamenom egzaktnog Kilingovog vektora $\xi = \partial_\varphi$ u opštu formulu (5.3.1). Nenulti članovi u varijaciji površinskog člana su:

$$\vartheta^2{}_{\tilde\varphi}\delta\tau_2 = \delta\vartheta^2\tau_{2\tilde\varphi} = -\frac{a(4\nu^2-3)(2\nu-\sqrt{\nu^2+3})^2}{24\nu\ell}\delta[r_+^2]d\tilde\varphi \tag{5.3.4}$$

$$\omega^2{}_{\tilde\varphi}\delta\rho_2 = \delta\omega^2\rho_{2\tilde\varphi} = \frac{5a\nu(2\nu-\sqrt{\nu^2+3})^2}{24\ell}\delta[r_+^2]d\tilde\varphi \tag{5.3.5}$$

Iz gornjih izraza, dobijamo da je održani naboj, koji predstavlja moment impulsa ekstremalne crne rupe:

$$J = \oint_{S_H} \vartheta^2{}_{\tilde\varphi}\delta\tau_2 + \delta\vartheta^2\tau_{2\tilde\varphi} + \omega^2{}_{\tilde\varphi}\delta\rho_2 + \delta\omega^2\rho_{2\tilde\varphi} = \frac{a\pi(\nu^2+3)(2\nu-\sqrt{\nu^2+3})^2}{6\nu\ell}r_+^2 \tag{5.3.6}$$

5.3.2 Centralni naboj

Centralni naboj se dobija iz algebre popravljenih kanonskih generatora lokalne simetrije, koja ima sledeći oblik:

$$\{\tilde G(\varepsilon_1), \tilde G(\varepsilon_2)\} = \tilde G(\varepsilon_3) + C \tag{5.3.7}$$

gde je ε_3 definisano pravilom kompozicije (5.2.6), i C je centralno produženje algebre.

Koristimo opšti rezultat Brauna i Enoa [75] kako bismo pojednostavili algebru kanonskih generatora u sledeći niz slabih jednakosti:

$$\{\tilde G(\varepsilon_1), \tilde G(\varepsilon_2)\} \approx \delta(\varepsilon_1)\Gamma(\varepsilon_2) \approx \Gamma(\varepsilon_3) + C \tag{5.3.8}$$

Pošto je centralni naboj konstantni funkcional, može se izračunati vršeći varijacije na pozadinskoj konfiguraciji polja, koristeći asimptotski Kilingov vektor (5.2.5) u opštoj formuli (5.3.1). Iz gornjih jednakosti vidimo da je potrebno samo izračunati varijaciju $\delta(\varepsilon_1)\Gamma(\varepsilon_2)$.
Koristimo sledeće nenulte unutrašnje proizvode asimptotskog Kilingovog vektora sa trijadom i koneksijom:

$$\xi \lrcorner \bar{b}^1 = -\frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon'(\tilde{\varphi}) \qquad \xi \lrcorner \bar{b}^2 = K_+\varepsilon(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.9}$$

$$\xi \lrcorner \bar{\omega}^1 = -\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon'(\tilde{\varphi}) \qquad \xi \lrcorner \bar{\omega}^2 = -\frac{\nu}{\ell}K_+\varepsilon(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.10}$$

Koristeći ove unutrašnje proizvode, izvodimo nenulte unutrašnje proizvode sa kovarijantnim impulsima:

$$\xi \lrcorner \rho^1 = -\frac{7a\ell}{3\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon'(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.11}$$

$$\xi \lrcorner \rho^2 = \frac{5a}{3}K_+\varepsilon(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.12}$$

$$\xi \lrcorner \tau^1 = -\frac{a(-2\nu^2+3)}{3\nu\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon'(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.13}$$

$$\xi \lrcorner \tau^2 = \frac{a(4\nu^2-3)}{3\nu\ell}K_+\varepsilon(\tilde{\varphi}) \tag{5.3.14}$$

Nenulte komponente varijacije pozadinskog polja trijada, definisanog na granici $\tilde{t} = \text{const.}$, $\tilde{r} \to \infty$, dobijaju se u obliku:

$$\delta_0\bar{b}^1 = \varepsilon''(\tilde{\varphi})\frac{\ell}{\sqrt{\nu^2+3}}d\tilde{\varphi} \qquad \delta_0\bar{b}^2 = -\varepsilon'(\tilde{\varphi})K_+d\tilde{\varphi} \tag{5.3.15}$$

Koristeći ove rezultate, možemo izračunati varijaciju kovarijantnih impulsa:

$$\delta_0\tau^1 = \frac{a(-2\nu^2+3)}{3\nu\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon''(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \qquad \delta_0\tau^2 = -\frac{a}{3\nu\ell}(4\nu^2-3)K_+\varepsilon'(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \tag{5.3.16}$$

(5.3.17)

$$\delta_0\rho^1 = \frac{7a\ell}{3\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon''(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \qquad \delta_0\rho^2 = -\frac{5}{3}aK_+\varepsilon'(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \tag{5.3.18}$$

Konačno, varijacija koneksije na pozadinskoj konfiguraciji je data kao:

$$\delta_0\omega^1 = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+3}}\varepsilon''(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} \qquad \delta_0\omega^2 = \frac{\nu}{\ell}\varepsilon'(\tilde{\varphi})K_+d\tilde{\varphi} \tag{5.3.19}$$

Sumirajući sve ove doprinose i integraleći ih po formuli (5.3.1), dobijamo da je granični član oblika:

$$\Gamma = aK_+^2\frac{\nu^2+3}{3\nu\ell}\int_0^{2\pi}(\varepsilon_1\varepsilon_2' - \varepsilon_2\varepsilon_1')d\tilde{\varphi} - \frac{a\ell}{3\nu}\frac{5\nu^2+3}{\nu^2+3}\int_0^{2\pi}(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'\varepsilon_1'')d\tilde{\varphi} \tag{5.3.20}$$

Identifikujemo drugi član kao centralni naboj, dok je prvi član površinski član sa parametrom $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2' - \varepsilon_2\varepsilon_1'$. Dakle, dobijamo centralni naboj u obliku:

$$C = -\frac{a\ell}{3\nu}\frac{5\nu^2+3}{\nu^2+3}\int_0^{2\pi}(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'\varepsilon_1'')d\tilde{\varphi} \tag{5.3.21}$$

Preko Furijeovih moda, kanonska algebra uzima oblik Virazoro algebre:

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{m+n} - \frac{c}{12} i n^3 \delta_{n,-m} \tag{5.3.22}$$

Koristeći standardnu normalizaciju iz teorije struna, imamo:

$$c = 12 \cdot \frac{4a\ell\pi}{3\nu} \frac{5\nu^2+3}{\nu^2+3} \tag{5.3.23}$$

Na kraju, entropiju dobijamo Kardijevom formulom:

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{cL_0}{6}} = \frac{4a\pi^2\sqrt{5\nu^2+3}}{3\nu}(2\nu - \sqrt{\nu^2+3})r_+ \tag{5.3.24}$$

5.4 Poređenje sa neekstremalnim rezultatom

Entropija prostorno razvučenih crnih rupa, izračunata je u neekstremalnom slučaju u [89, 90]. Dobijen je rezultat:

$$S = \frac{\pi}{24\nu G}\left[(9\nu^2+3)r_+ - (\nu^2+3r_- - 4\nu\sqrt{r_+r_-(\nu^2+3)})\right] \tag{5.4.1}$$

Ukoliko bismo uzeli ekstremalni limes ovog rešenja $r_- \to r_+$, dobili bismo da se entropija razlikuje od entropije dobijene našom analizom za konstantni multiplikativni faktor. Razlog ovog odstupanja može se naći u razlici između asimptotskih algebri nađenih u neekstremalnom slučaju i slučaju geometrije u blizini horizonta ekstremalne crne rupe.

Kao što nam je poznato na osnovu opšte diskusije u glavi 3, kao i rezultata za Kerovu crnu rupu predstavljenih u glavi 4, geometrije u blizini horizonta imaju proširenu simetriju u odnosu na simetriju početne crne rupe zbog pojave AdS_2 faktora. Međutim, ukoliko posmatramo iz perspektive AdS_3 vakuuma, odnosno ukoliko uočimo da kod geometrije u blizini horizonta postoji deformisani AdS_3 faktor, onda je u odnosu na pun AdS_3 ova simetrija smanjena. Ovo smanjenje se obično predstavlja zamrzavanjem jednog kiralnog sektora u konformnoj teoriji na granici, pa tako od geometrija u blizini horizonta očekujemo da postoji Virazoro faktor koji odgovara kiralnoj teoriji [92]. U slučaju prostorno razvučenih crnih rupa, u [89], nađeno je da je asimptotska algebra semidirektan zbir Kac-Mudi afine algebre i Virazoro algebre, tj. $u(1)_{KM} \oplus Vir$. Konstrukcijom Sugavare [93], moguće je iz kvadratnih kombinacija generatora Kac-Mudi algebre dobiti Virazoro algebru, i na osnovu ovih novih generatora dobijena je entropija preko Kardijeve formule. Ekstremalni limes onda zamrzava jedan od sektora, i iz neekstremalnog rešenja preostaje samo sektor koji dolazi od Kac-Mudi algebre. Međutim u geometriji u blizini horizonta se pojavljuje upravo drugi sektor kao aktivan. Ova razlika u asimptotskoj simetriji dovodi do razlike u izrazu za entropiju. Potrebno je pažljivije istražiti vezu ovih modela sa stanovišta asimptotske simetrije, kako bi se utvrdilo da li ovo odstupanje predstavlja manjkavost jednog od pristupa, ili su osobine ove vrste crnih rupa takve da je ovakvo odstupanje u entropiji opravdano.

6 Geometrija u blizini horizonta sa torzijom: Ker-AdS crna rupa

U prethodnim poglavljima predstavili smo proračune entropije crnih rupa u kojima se pokazalo da primena kanonskog metoda analize asimptotskih simetrija na geometriju u blizini horizonta daje rezultate, i da je moguće na ovaj način tretirati problem entropije ekstremalnih crnih tupa u formalizmu lokalne Poenkareove teorije. Ipak, modeli koje smo posmatrali su na neki način imali trivijalnu torziju. Torzija nije davala značajan doprinos entropiji, već je formalizam lokalne Poenkareove teorije bio testiran na ovim primerima, te se očekuje da isti formalizam možemo primeniti i na primere sa netrivijalnom torzijom. Ispostavlja se, međutim, da netrivijalna torzija može lako da dovede to loše definisanog limesa u blizini horizonta. Štaviše, ispostavlja se da kod svih netrivijalnih modela sa dinamičkom torzijom koji su nam poznati u kvadratnoj Poenkareovoj teoriji, torzija divergira u limesu u blizini horizonta, iako je uslov ekstremalnosti ispunjen. Postavlja se pitanje da li je moguće otkloniti ovu divergenciju, na koje ćemo u ovoj glavi odgovoriti negativno. U skladu sa tim, uspostavićemo potrebne i dovoljne uslove koje tenzor torzije mora da zadovolji da bi postojala dobro definisana geometrija u blizini horizonta. Na primeru Ker-AdS crne rupe sa torzijom, predstavljen je slučaj kada ovi uslovi nisu ispunjeni, a nakon toga, prelazimo na rešavanje jednačina polja u cilju ispitivanja mogućih drugih rešenja koja nemaju ovaj problem. Jedno takvo rešenje je pronađeno, mada je pitanje opšteg rešenja ostalo otvoreno. Glava je zasnovana na radu [56].

6.1 Limes u blizini horizonta u prisustvu torzije

Kada je torzija različita od nule, razmatramo naše prostorvreme kao mnogostrukost sa opštom metrički kompatibilnom afinom koneksijom (M,g,Γ). Svaka metrički kompatibilna koneksija ima jedinstvenu dekompoziciju:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho} + K^{\mu}{}_{\nu\rho}\,, \tag{6.1.1}$$

gde je $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}$ Levi-Čivita koneksija i $K^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}(T^{\mu}{}_{\nu\rho} - T_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu} + T_{\nu\rho}{}^{\mu})$ je tenzor kontorzije, a $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 2\Gamma^{\mu}_{[\rho\nu]}$ tenzor torzije.

Sada je lako uvideti da prostornovremenska geometrija u ovom slučaju može biti jedinstveno određena metrikom i torzijom, umesto metrikom i koneksijom. Ako sada primetimo Kilingov horizont u M, kao što smo uradili u sekciji 3.1.1, tamo dobijeni rezultati o postojanju geometrije blizu horizonta ostaju validni, pa sada pretpostavljamo da je površinska gravitacija jednaka nuli, tj. da je horizont degenerisan. Treba nam uslov koji torzija mora da zadovolji da bi imala gladak limes u blizini horizonta. Zahtevaćemo da je torzija analitička i regularna u Gausovim nul koordinatama (3.1.3) u blizini horizonta. Onda vršimo transformaciju blizu horizonta (3.1.4) i dobijamo sledeće ponašanje nezavisnih komponenti torzije:

$$T^r{}_{u\alpha} \to \frac{1}{\varepsilon^2} T^r{}_{u\alpha}\,, \tag{6.1.2a}$$

$$T^r{}_{ur} \to \frac{1}{\varepsilon} T^r{}_{ur}\,, \qquad T^r{}_{\alpha\beta} \to \frac{1}{\varepsilon} T^r{}_{\alpha\beta}\,, \qquad T^\alpha{}_{u\beta} \to \frac{1}{\varepsilon} T^\alpha{}_{u\beta}\,, \tag{6.1.2b}$$

$$T^r{}_{r\alpha} \to T^r{}_{r\alpha}\,, \qquad T^u{}_{u\alpha} \to T^u{}_{u\alpha}\,, \qquad T^\alpha{}_{ur} \to T^\alpha{}_{ur}\,, \qquad T^\alpha{}_{\beta\gamma} \to T^\alpha{}_{\beta\gamma}\,, \tag{6.1.2c}$$

$$T^u{}_{ur} \to \varepsilon T^u{}_{ur}\,, \qquad T^u{}_{\alpha\beta} \to \varepsilon T^u{}_{\alpha\beta}\,, \qquad T^\alpha{}_{r\beta} \to \varepsilon T^\alpha{}_{r\beta}\,, \tag{6.1.2d}$$

$$T^u{}_{r\alpha} \to \varepsilon^2 T^u{}_{r\alpha}\,. \tag{6.1.2e}$$

Komponente se razdvajaju po stepenu parametra ε, pa možemo lako identifikovati sledeće uslove koji obezbeđuju glatkost limesa u blizini horizonta.

$$\begin{aligned} &T^r{}_{u\alpha}|_{r=0} = 0\,, \qquad \partial_r T^r{}_{u\alpha}|_{r=0} = 0\,, \qquad T^r{}_{ur}|_{r=0} = 0\,, \\ &T^r{}_{\alpha\beta}|_{r=0} = 0\,, \qquad T^\alpha{}_{u\beta}|_{r=0} = 0\,. \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Želimo da uopštimo ove uslove u kovarijantne uslove.

Primećujemo iz konstrukcije Gausovih nul koordinata u sekciji 3.1.1, da ukoliko restrikujemo kartu na $(u,0,x^\alpha)$, dobijamo kartu intrinsičnu horizontu $\mathscr{H}$. Uzimanjem proizvoljne karte $\{y^\mu\}$ u okolini $\mathscr{H}$ u M, možemo konstruisati bazis tangentnih vektora na $\mathscr{H}$ kao:

$$k^\mu = \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial u}\right)_{x^\alpha}\,, \qquad e^\mu{}_\alpha = \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right)_u\,. \tag{6.1.4}$$

Pomoćno vektorsko polje ℓ kompletira bazis u svakoj tačku u bazis tangentnog prostora na M. U konstrukciji Gausovih nul koordinata oko horizonta, napominjemo da je bazis tangentnog prostora $\mathscr{H}$ da u obliku:

$$k^\mu = \delta^\mu_u\,, \qquad e^\mu{}_\alpha = \delta^\mu_\alpha\,.$$

Onda koristimo prethodno upotrebljenu tehniku zamene partikularnih komponenti kontrakcijama sa bazisom. Dobijamo sledeće kovarijantne uslove:

$$\begin{aligned} &T_{\mu\nu\rho} k^\mu k^\nu = 0\,, \\ &k_\mu T^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv k_\mu T^\mu{}_{\nu\rho} e^\nu{}_\alpha e^\rho{}_\beta = 0\,, \\ &T_{\alpha\mu\beta} k^\mu \equiv T_{\nu\mu\rho} k^\mu e^\nu{}_\alpha e^\nu{}_\beta = 0\,, \\ &\ell^\mu \nabla_\mu (T_{\nu\rho\sigma} k^\nu k^\rho e^\sigma{}_\alpha) = 0\,, \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

gde se sve jednačine računaju na $\mathscr{H}$.

Svi uslovi su skalari u odnosu na promene koordinata u M, i kovarijantni u odnosu na promene intrinsičnih koordinata na $\mathscr{H}$, pa smo dakle dobili kovarijantni uslov postojanja limesa u blizini horizonta u prisustvu torzije. Zapravo, vektor k u gore navedenim uslovima ne mora da bude Kilingov vektor(može biti bilo koje vektorsko polje nulte norme, tangentno na generatore horizonta), ali za naše potrebe mi ćemo ga definisati kao Kilingovo polje koje generiše horizont.

Ako obeležimo bazis tangentnog prostora u tački u $\mathscr{H}$ sa $E_A \equiv (k, e_\alpha)$, možemo definisati indukovanu torziju analogno sa indukovanom metrikom kao povlačenje torzije na horizont:

$$T_{ABC} = T_{\mu\nu\rho} E^\mu{}_A E^\nu{}_B E^\rho{}_C\,. \tag{6.1.6}$$

Onda naši uslovi imaju smisao ograničenja na indukovanu torziju. Konkretno, prva tri uslova ograničavaju indukovanu torziju tako da može imati nenulte komponente samo u pravcima tangentnim na presek H od $\mathscr{H}$. Prvi uslov se pojavljivao ranije u [94], gde je korišćen u proširenju dokaza nultog zakona termodinamike na slučaj nenulte torzije. On implicira da je struja torzije nula duž generatora $\mathscr{H}$. Na neki način, zahtevamo ovim uslovima da je indukovana torzija na $\mathscr{H}$ slično degenerisana kao indukovana metrika, imajući nenulte komponente samo na presecima H. Poslednji uslov ograničava transverzalni izvod indukovane torzije. Nažalost, najzanimljivija rešenja u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, koja opisuju crne rupe sa dinamičkom torzijom, ne zadovoljavaju ove uslove. Diskutovaćemo ovu činjenicu u daljim sekcijama, i probati da ponudimo privremeno rešenje ovog problema.

6.2 Primer: Ker-AdS crna rupa sa torzijom

Kao i u prethodnim glavma, opisujemo geometriju prostorvremena sa torzijom u formalizmu lokalne Poenkareove teorije(PG). Geometrijska struktura zadata je sa dva gradijentna polja, 1-formom tetrade i spinske koneksije $(\vartheta^i, \omega^{ij})$, i njihovim odgovarajućim jačinama polja, 2-formama torzije i krivine T^i i R^{ij}, zadanim Kartanovim strukturnim jednačinama:

$$T^i = d\vartheta^i + \omega^i{}_j \wedge \vartheta^j \qquad R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^i{}_k \wedge \omega^{kj} \tag{6.2.1}$$

Rešenje je dato u opštoj teoriji invarijantnoj na parnost i najviše kvadratnoj po jačinama polja, zadatoj Lagranžijanom:

$$L_G = -{}^*(a_0 R + 2\Lambda) + T^i \wedge \sum_{n=1}^{3} {}^*(a_n {}^{(n)}T_i) + \frac{1}{2} R^{ij} \wedge \sum_{n=1}^{6} {}^*(b_n {}^{(n)}R_{ij}) \tag{6.2.2}$$

gde su (a_0, Λ, a_n, b_n) konstante interakcije, prvi član dolazi iz Ajnštajn-Kartanove gravitacije sa kosmološkom konstantom, a ostali članovi se konstruišu od ireducibilnih komponenti krivine i torzije. Eksplicitni oblik ireducibilnih komponenti, naveden je u sekciji 6.A.

Varijacija Lagranžijana daje vakuumske jednačine polja, koja se mogu kovarijantno zapisati u obliku:

$$\delta\vartheta^i : \qquad DH_i + E_i = 0\,, \tag{6.2.3a}$$

$$\delta\omega^{ij} : \qquad DH_{ij} + E_{ij} = 0\,, \tag{6.2.3b}$$

gde su $H_i := \partial L_G / \partial T^i$ i $H_{ij} = \partial L_G / \partial R^{ij}$ gravitacioni kovarijantni impulsi, i $E_i := \partial L_G / \partial \vartheta^i$ and $E_{ij} = \partial L_G / \partial \omega^{ij}$ njihove pridružene gravitacione struje, i D predstavlja spoljašnji kovarijantni izvod sa koneksijom ω^{ij}.

Razmatraćemo ovde rešenje jednačina polja (6.2.3), otkriveno od strane Beklera i njegove grupe [95, 96], koje opisuje Ker-AdS crnu rupu sa dinamičkom torzijom. Kanonska analiza rešenja je izvršena u [45], gde je dobijena entropija u neekstremalnom slučaju. Videćemo da limes torzije u blizini horizonta nije dobro definisan za ovo rešenje.

Metrika Ker-AdS crne tupe u Bojer-Lindkvistovim koordinatama [97] data je u obliku:

$$ds^2 = N^2 \left(dt - \frac{a}{\alpha} \sin^2\theta d\varphi \right)^2 - \frac{dr^2}{N^2} - \frac{d\theta^2}{F^2} - F^2 \sin^2\theta \left(a dt - \frac{(r^2 + a^2)}{\alpha} d\varphi \right)^2 , \tag{6.2.4}$$

gde su $N = \sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}}$, $F = \sqrt{\frac{f}{\rho^2}}$ i:

$$\begin{aligned} &\Delta(r) = (r^2+a^2)(1+\lambda r^2) - 2mr\,, \qquad \alpha = 1-\lambda a^2\,, \\ &\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \qquad f(\theta) = 1-\lambda a^2\cos^2\theta\,. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Parametri m i a su parametri rešenja koji odgovaraju masi i specifičnom momentu impulsa crne rupe, a $\lambda = -\frac{\Lambda}{3} := \frac{1}{\ell^2}$ je vezana sa AdS radijusom pozadinske geometrije. Nule funkcije $\Delta(r)$ određuju radijalnu koordinatu horizonta, i generično, $\Delta(r) = 0$ ima dva rešenja, radijalne koordinate unutrašnjeg i spoljašnjeg horizonta r_- i r_+. Ekstremalni slučaj je definisan kao slučaj kada je $r_- = r_+$. Dobijamo parametre mase i specifičnog momenta impulsa u ovom slučaju rešavanjem sistema jednačina $\Delta(r_+) = 0$, $\partial_r\Delta(r)|_{r=r_+} = 0$. Rešenje je:

$$a_{\text{ext}} = r_+\sqrt{\frac{1+3\lambda r_+^2}{1-\lambda r_+^2}}\,, \qquad m_{\text{ext}} = r_+\frac{(1+\lambda r_+^2)^2}{1-\lambda r_+^2}\,. \tag{6.2.6}$$

Površinska gravitacija rešenja se može izračunati da je jednaka $\kappa = \left.\frac{\partial_r\Delta(r)}{r^2+a^2}\right|_{r=r_+}$, što je jednako nuli u ekstremalnom slučaju, kao što je i očekivano.

Pošto je metrika stavljena u dijagonalnu formu, dobijamo prirodan izbor ortonormalne tetrade:

$$\begin{aligned} &\vartheta^0 = N\left(dt - \frac{a}{\alpha}\sin^2\theta d\varphi\right)\,, \qquad \vartheta^1 = \frac{dr}{N}\,, \\ &\vartheta^2 = \frac{d\theta}{F}\,, \qquad \vartheta^3 = F\sin\theta\left(adt - \frac{(r^2+a^2)}{\alpha}d\varphi\right)\,. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Torzija je u ovom bazisu data u obliku:

$$\begin{aligned} &T^0 = T^1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}(-V_1\vartheta^0\wedge\vartheta^1 - 2V_4\vartheta^2\wedge\vartheta^3) \\ &+\frac{\rho^2}{\Delta}(V_2(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^2 + V_3(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^3)\,, \\ &T^2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}(V_5(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^2 + V_4(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^3)\,, \\ &T^3 = \sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}}(-V_4(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^2 + V_5(\vartheta^0-\vartheta^1)\wedge\vartheta^3)\,, \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

gde su:

$$\begin{aligned} &V_1 = \frac{m}{\rho^4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,, \qquad V_2 = -\frac{mF}{\rho^4}ra^2\sin\theta\cos\theta\,, \\ &V_3 = \frac{mF}{\rho^4}r^2 a\sin\theta\,, \qquad V_4 = \frac{m}{\rho^4}ra\cos\theta\,, \qquad V_5 = \frac{m}{\rho^4}r^2\,. \end{aligned}$$

Ovo rešenje ima dve nenulte ireducibilne komponente krivine [45]:

$$
\begin{aligned}
{}^{(4)}R^{02} &= {}^{(4)}R^{12} = \frac{\lambda m r}{\Delta}(\vartheta^0 - \vartheta^1)\wedge\vartheta^2\,,\\
{}^{(4)}R^{03} &= {}^{(4)}R^{13} = \frac{\lambda m r}{\Delta}(\vartheta^0 - \vartheta^1)\wedge\vartheta^3,\\
{}^{(6)}R^{ij} &= \lambda\vartheta^i\wedge\vartheta^j\,.
\end{aligned}
$$

Jedina ireducibilna komponenta torzije koja je jednaka nuli je ${}^{(3)}T^i$. Sektor teorije u kojem postoji ovo rešenje zadan je sledećim relacijama među parametrima Lagranžijana:

$$
2a_1 + a_2 = 0\,, \qquad a_0 - a_1 - \lambda(b_4 + b_6) = 0\,, \qquad 3\lambda a_0 + \Lambda = 0\,. \tag{6.2.9}
$$

6.2.1 Limes u blizini horizonta

Umesto prelaza u Gausove nul koordinate, pišemo ovde transformaciju u blizini horizonta direktno. Razvijamo metriku oko horizonta smenom $r = r_+(1+\varepsilon r')$, i onda, koristeći ekstremalne parametre (6.2.6), dobijamo da važi:

$$
\Delta(r) \sim \varepsilon^2 r_+^2 r'^2 V + \mathscr{O}(\varepsilon^3)\,, \qquad V = \frac{1 + 6\lambda r_+^2 - 3\lambda^2 r_+^4}{1 - \lambda r_+^2}\,. \tag{6.2.10}
$$

Limes u blizini horizonta je zadan transformacijom:

$$
t = \frac{(r_+^2 + a^2)}{V}\frac{t'}{\varepsilon r_+}\,, \qquad r = r_+(1+\varepsilon r')\,, \qquad \varphi = \varphi' + \frac{a\alpha}{V}\frac{t'}{\varepsilon r_+}\,, \tag{6.2.11}
$$

zajedno sa limesom $\varepsilon \to 0$ posle transformacije. Napisana u ovoj formi, ovo je kompozicija transformacije koja postavlja metriku u sistem koji korotira sa horizontom, i transformacije skaliranja (3.1.4). Da bi koordinate bile u Gausovoj nul formi, potrebno je takođe preći u koordinate svetlosnog tipa, koje regulišu metriku na horizontu, pre izvođenja transformacije (3.1.4). Naše koordinate nisu svetlosnog tipa, ali je metrika difeomorfna metrici koju bismo dobili ovom dodatnom transformacijom.

Dobijamo Ker-AdS metriku blizu horizonta(NHEK-AdS):

$$
ds^2 = \frac{\rho_+^2}{V} r^2 dt^2 - \frac{\rho_+^2}{V}\frac{dr^2}{r^2} - \frac{\rho_+^2}{f} d\theta^2 - \frac{f\sin^2\theta}{\rho_+^2}\left(\frac{2ar_+}{V} r dt + \frac{r_+^2 + a^2}{\alpha} d\varphi\right)^2\,, \tag{6.2.12}
$$

gde smo uklonili primove na koordinatama, i $\rho_+ = \rho(r_+)$.

Ako probamo da primenimo ovu transformaciju na tenzor torzije, nalazimo da sve tetradne komponente torzije divergiraju. Pošto ortonormalna tetrada (6.2.7) ostaje regularna u limesu, ovo odmah sugeriše na to da limes u blizini horizonta za torziju ne postoji. Obrazložićemo sada ovu tvrdnju sa više tehničkih detalja. Tetradne komponente torzije su skalari pri koordinatnim transformacijama i kovarijantne pri lokalnim Lorencovim transformacijama, koje povezuju različite izbore tetradnih bazisa. Ova činjenica prirodno dovodi do pitanja o mogućnosti alternativnoh izbora tetradnog bazisa, u kojem bi divergencija komponenti torzije u limesu blizu horizonta bila otklonjena.

Pod lokalnom Lorencovom transformacijom $\Lambda(x)$, tetradni bazis, i komponente torzije, transformišu se kao:

$$
\tilde{\vartheta}^i = \Lambda(x)^i{}_j\vartheta^j \qquad \tilde{T}^i{}_{jk} = \Lambda(x)^i{}_m\Lambda^{-1}(x)^n{}_j\Lambda^{-1}(x)^p{}_k T^m{}_{np}\,. \tag{6.2.13}
$$

Ako su nove tetrade $\tilde{\vartheta}^i$ vezane sa originalnim tetradama ϑ^i transformacijom koja ostaje regularna u limesu blizu horizonta, onda transformisane komponente torzije ostaju singularne. Ovo sledi jer su nove komponente zadate kao linearna kombinacija starih, sa koeficijentima koji su određeni invertibilnom matricom transformacije. Posledično, ako bi se divergencija mogla otkloniti ovakvom transformacijom, to bi impliciralo da singularne komponente torzije možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju, sa regularnim koeficijentima, regularnih komponenti torzije, a to svakako nije moguće.

Ako su nove tetrade vezane sa početnim tetradama transformacijom $\Lambda(x)$ koja postaje singularna u limesu blizu horizonta, onda je u principu moguće regularisati komponente torzije ovakvom transformacijom. Međutim, ovo bi učinilo nove tetrade singularnim u limesu, pošto bi one bile dobijene kao singularna linearna kombinacija starih tetrada. Posledično, tenzor torzije u celini ostaje singularan i u ovom slučaju.

Prethodnim argumentom, zaključujemo da divergencija tenzora torzije u limesu blizu horizonta modela ekstremalne Ker-AdS crne rupe koji je gore razmatran ne može biti otklonjena nikakvim alternativnim izborom tetrada. Da bismo imali dobro definisan limes, moramo se dakle ograničiti na tetrade koje ostaju regularne u ovom limesu i da zahtevamo da tetradne komponente u takvom bazisu budu neprekidne na horizontu. Ova procedura je direktno povezana geometrijskim uslovima dobijenim u sekciji 6.1, i radi kompletnosti, izveščemo eksplicitno ovu korespodenciju.
Pošto je metrika regularna na horizontu u Gausovim nul koordinatam, možemo u opštem slučaju konstruisati tetradu koja je takođe regularna u ovim koordinatama, koja može da se napiše u obliku:

$$\vartheta^i = \vartheta^i{}_u(r,x)du + \vartheta^i{}_r(r,x)dr + \vartheta^i{}_\alpha(r,x)dx^\alpha \tag{6.2.14}$$

Vidimo onda da je izbor tetrade regularan u limesu pod uslovom da važi:

$$\vartheta^i{}_u|_{r=0} = 0 \Leftrightarrow \vartheta^i{}_\mu k^\mu|_{\mathscr{H}} = 0 \tag{6.2.15}$$

Prepisujući uslove (6.1.5) u ovom bazisu tetrada dobijamo:

$$\begin{aligned}
&(T_{\mu\nu\rho}k^\mu k^\nu)|_{\mathscr{H}} = (T_{ijk}\vartheta^i{}_\mu k^\mu \vartheta^j{}_\nu k^\nu \vartheta^k{}_\rho)|_{\mathscr{H}} = 0\,,\\
&(k_\mu T^\mu{}_{\alpha\beta})|_{\mathscr{H}} \equiv (k_\mu T^\mu{}_{\nu\rho}e^\nu{}_\alpha e^\rho{}_\beta)|_{\mathscr{H}} = (T_{ijk}\vartheta^i{}_\mu k^\mu \vartheta^j{}_\nu e^\nu{}_\alpha \vartheta^k{}_\rho e^\rho{}_\beta)|_{\mathscr{H}} = 0\,,\\
&(T_{\alpha\mu\beta}k^\mu)|_{\mathscr{H}} \equiv (T_{\nu\mu\rho}k^\mu e^\nu{}_\alpha e^\nu{}_\beta)|_{\mathscr{H}} = (T_{ijk}\vartheta^i{}_\mu e^\mu{}_\alpha \vartheta^j{}_\nu k^\nu \vartheta^k{}_\rho e^\rho{}_\beta)|_{\mathscr{H}} = 0\,,\\
&(\ell^\mu \nabla_\mu (T_{\nu\rho\sigma}k^\nu k^\rho e^\sigma{}_\alpha))|_{\mathscr{H}} = (\ell^i \nabla_i (T_{jkl}\vartheta^j{}_\mu k^\mu \vartheta^k{}_\nu k^\nu \vartheta^l{}_\rho e^\rho{}_\alpha))|_{\mathscr{H}} = 0\,.
\end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Primećujemo da svi uslovi u jednačini (6.2.16) slede iz jednačine (6.2.15), zajedno sa pretpostavkom o regularnosti tetradnih komponenti torzije. Poslednja relacija je dobijena korišćenjem Lajbnicovog pravila, sa $\nabla_i \equiv e_i{}^\mu \nabla_\mu$, gde $e_i{}^\mu$ označava dualni tetradni bazis. Može se takođe proveriti da predstavljanje ostalih komponenti torzije u ovom bazisu ne daje nikakve dodatne uslove. Relevantni uslovi su dakle određeni izborom regularne tetrade i neprekidnošću tetradnih komponenti torzije, kao što je prethodno tvrđeno.

Ova procedura definisanja limesa preko regularnih tetrada se može formulisati u potpuno opštem slučaju, nezavisno od specijalnog slučaja tenzora torzije ili limesa blizu horizonta. Za generalnu diskusiju limesa prostorvremena, pogledati [98].

Pošto divergencija koju smo otkrili ne može biti otklonjena, ne možemo primeniti tehniku analize geometrije u blizini horizonta kako bismo dobili entropiju ekstremalne crne rupe za ovaj model crne rupe. Može se lako proveriti, koristeći gore predstavljeni princip, da najinteresantniji slučajevi crnih rupa sa dinamičkom torzijom [96, 99], imaju isti problem. Posvetićemo ostatak glave konstruisanju modela u kojem ovaj problem ne postoji, tražeći rešenje sa torzijom koje ima istu NHEK-AdS metriku (6.2.12), ali različit oblik torzije.

6.3 Simetrijski anzac za torziju u NHEK-AdS

Pošto je rešavanje jednačina polja za novo rešenje za crnu rupu sa dinamičkom torzijom prilično težak zadatak, probaćemo ove umesto toga da vidimo da li postoji rešenje koje ima istu metriku (6.2.12), i netrivijalnu torziju, koristeći osobine geometrije u blizini horizonta poznate iz opšte relativnosti. Konkretno, upotrebićemo povećanje simetrije koje postoji u geometrijama blizu horizonta ekstremalnih crnih rupa, opisano u sekciji 3.1.2.

Rešavanjem Kilingovih jednačina za metriku (6.2.12), dobijamo sledeće Kilingove vektore:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = \partial_\varphi\,, \qquad \xi_2 = \partial_t\,, \qquad \xi_3 = t\partial_t - r\partial_r\,,\\
&\xi_4 = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2r^2}\right)\partial_t - tr\partial_r - \frac{H}{r}\partial_\varphi\,,
\end{aligned} \tag{6.3.1}
$$

gde je $H = \dfrac{2a\alpha r_+}{V(r_+^2 + a^2)}$.

Kilingovi vektori zadovoljavaju algebru $SL(2,\mathbb{R}) \times U(1)$ simetrije, datu komutacionim relacijama:

$$
\begin{aligned}
&[\xi_1,\xi_2] = [\xi_1,\xi_3] = [\xi_1,\xi_4] = 0\,,\\
&[\xi_2,\xi_3] = \xi_2\,, \quad [\xi_2,\xi_4] = \xi_3\,, \quad [\xi_3,\xi_4] = \xi_4\,.
\end{aligned} \tag{6.3.2}
$$

Prva dva Kilingova vektora su nasleđena iz rešenja crne rupe pre limesa, i povezana su sa aksisimetričnoti i stacionarnosti rešenja. Treba biti oprezan, međutim, i ne mešati ova dva vektora sa Kilingovim vektorima originalnog rešenja. Može se lako uvideti, na primer, da Kilingov vektor k koji generiše horizont, definisan u sekciji 3.1.1 teži nuli u limesu blizu horizonta. Prema tome, smisao o kojem su ovi vektori nasleđeni, je da korespondiraju vremenskim translacijama i aksijalnim rotacijama granične geometrije. Možemo se zapitati, s obzirom na ovo zapažanje, o tome da li se simetrija prostorvremena može izgubiti pri prelasku limesom u granično prostorvreme. Dokazano je, međutim, u [98], da limes prostorvremena koje poseduje n Kilingovih vektora ima najmanje n Kilingovih vektora. Treći Kilingov vektor je zapravo generator transformacije skaliranja (3.1.4) koja definiše limes blizu horizonta. Naime, ako posmatramo transformaciju (3.1.4) kao jednoparametarsku grupu difeomorfizama, paremetrizovanu sa ε, možemo lako videti da je granična tačka $\varepsilon \to 0$, fiksna tačka pod kompozicijom takvih transformacija. Stoga ξ_3, kao generator ove transformacije, automatski postaje Kilingov vektor graničnog rešenja. Štaviše, za proizvoljan tenzor koji ima dobro definisan limes, istim argumentom nalazimo da je njegov Lijev izvod po ξ_3 jednak nuli posle limesa, pa ovaj vektor takođe generiše i simetriju torzije u limesu blizu horizonta. Kao što smo videli u sekciji 3.1.2, geometrija u blizini horizonta za sva poznata rešenja poseduje i četvrti Kilingov vektor, koji povećava simetriju blizu horizonta do $SL(2,\mathbb{R})$ grupe. Međutim, ova činjenica, kao što je ranije opisano, zavisi od primene Ajnštajnovih jednačina. To znači da je povećanje simetrije zavisno od modela i nije garantovano za slučaj kvadratne Poenkareove teorije zadate Lagranžijanom (6.2.2). Zapravo, može se proveriti da nametanje invarijantnosti tenzora torzije na delovanje prva tri Kilingova vektora, daje komponente torzije u obliku.

$$
T^{\mu}{}_{\nu\rho} = r^n f^{\mu}{}_{\nu\rho}(\theta)
$$

gde je zavisnost od r data stepenim zakonom sa eksponentom $n \in \{-2,-1,0,1,2\}$ koji se menja između komponenti, i odgovara eksponentu ε u jednačini (6.1.2), i funkcije $f^{\mu}{}_{\nu\rho}$ su proizvoljne nekorelisane funkcije θ.

Prema tome, vidimo da nametanje ove simetrije ne smanjuje broj nezavisnih komponenti torzije, i jednačine polja postaju komplikovani nelinearni sistem sa 24 slobodne funkcije. S obzirom da veliku neodređenost koju ove 24 komponente unose u jednačine kretanja, nije jasno da će generično postojati povećanje simetrije kao posledica jednačina polja, kao što je to bio slučaj u opštoj relativnosti, pa je moguće da postoje rešenja jednačina polja u kojima simetrija torzije nije ista kao simetrija metrike. Štaviše, pošto je naš cilj konstrukcija partikularnog rešenja koje opisuje graničnu geometriju u blizini horizonta sa netrivijalnom torzijom, rešavanje ovog visoko nelinearnog sistema diferencijalnih jednačina sa 24 nezavisne nepoznate funkcije se čini kao nesavladivo.

Iz tog praktičnog razloga, pretpostavićemo, u konstrukciji našeg anzaca za torziju, da torzija ima kompletnu simetriju metrike u blizini horizonta, odnosno da važi $\pounds_{\xi} T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ za svako $\xi \in (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Rešavanjem za nezavisne komponente, dobijamo sledeći anzac:

$$T^{t}{}_{t\theta} = T^{r}{}_{r\theta} = p_1(\theta)\,, \quad T^{\varphi}{}_{t\theta} = -Hr[p_1(\theta) + p_4(\theta)]\,, \tag{6.3.3a}$$

$$T^{t}{}_{t\varphi} = T^{r}{}_{r\varphi} = p_2(\theta)\,, \quad T^{r}{}_{tr} = T^{\varphi}{}_{t\varphi} = -Hrp_2(\theta)\,, \tag{6.3.3b}$$

$$T^{\theta}{}_{\theta\varphi} = p_3(\theta)\,, \qquad T^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = p_4(\theta)\,, \quad T^{\theta}{}_{t\theta} = -Hrp_3(\theta)\,, \tag{6.3.3c}$$

$$T^{\theta}{}_{tr} = p_5(\theta)\,, \qquad T^{\varphi}{}_{tr} = p_6(\theta)\,, \qquad T^{r}{}_{\theta\varphi} = T^{\theta}{}_{t\varphi} = 0\,, \tag{6.3.3d}$$

$$T^{t}{}_{r\theta} = \frac{p_7(\theta)}{r^2}\,, \quad T^{t}{}_{r\varphi} = \frac{p_8(\theta)}{r^2}\,, \quad T^{t}{}_{tr} = T^{\varphi}{}_{r\varphi} = -\frac{Hp_8(\theta)}{r}\,, \quad T^{\varphi}{}_{r\theta} = -\frac{Hp_7(\theta)}{r}, \tag{6.3.3e}$$

$$T^{r}{}_{t\theta} = r^2 p_7(\theta)\,, \qquad T^{r}{}_{t\varphi} = r^2 p_8(\theta)\,, \qquad T^{t}{}_{\theta\varphi} = T^{\theta}{}_{r\theta} = T^{\theta}{}_{r\varphi} = 0\,. \tag{6.3.3f}$$

gde su funkcije p_i, $i = 1\ldots 8$ proizvoljne funkcije θ.
Korisno je onda pretvoriti ovaj anzac u tetradni oblik. Dobijamo tetrade blizu horizonta uzimanjem limesa tetrada zadanih jednačinom (6.2.7). Nalazimo:

$$\begin{aligned}
\vartheta^0 &= \sqrt{\frac{\rho_+^2}{V}}\, r dt\,, \qquad \vartheta^1 = \sqrt{\frac{\rho_+^2}{V}}\frac{dr}{r}\,,\\
\vartheta^2 &= \sqrt{\frac{\rho_+^2}{f}}\, d\theta\,, \qquad \vartheta^3 = -\sqrt{\frac{f}{\rho_+^2}}\sin\theta\left(\frac{2ar_+}{V} r dt + \frac{r_+^2 + a^2}{\alpha} d\varphi\right)\,.
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Tenzor torzije u ovom bazisu dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
T^0 &= \Psi_1 \vartheta^0 \wedge \vartheta^2 + \Psi_2 \vartheta^0 \wedge \vartheta^3 + \Psi_3 \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 + \Psi_4 \vartheta^1 \wedge \vartheta^3\,,\\
T^1 &= \Psi_3 \vartheta^0 \wedge \vartheta^2 + \Psi_4 \vartheta^0 \wedge \vartheta^3 + \Psi_1 \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 + \Psi_2 \vartheta^1 \wedge \vartheta^3\,,\\
T^2 &= \Psi_5 \vartheta^0 \wedge \vartheta^1 + \Psi_6 \vartheta^2 \wedge \vartheta^3\,,\\
T^3 &= \Psi_7 \vartheta^0 \wedge \vartheta^1 + \Psi_8 \vartheta^2 \wedge \vartheta^3\,,
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

gde su sada Ψ_i, $i = 1\ldots 8$, nove nezavisne nepoznate funkcije θ, koje bijektivno korespondiraju sa nepoznatim funkcijama iz (6.3.3).

Anzac izgleda dovoljno jednostavno sada, imajući isti broj neodređenih funkcija kao u slučaju sferne simetrije [99, 100]. Uprkos tome, pronalaženje opšteg rešenja nije lak zadatak, i biće dovoljno tražiti partikularno rešenje gde je torzija netrivijalna. Da bismo ovo uradili, primenićemo takozvani metod *dvostruke dualnosti.*

6.3.1 Dvostruko dualni anzac u PG teoriji

Puno rešenja u PG teoriji je dobijeno koristeći metod dvostruke dualnosti, koji drastično pojednostavljuje jednačine polja. Metod je detaljno objašnjen u [101, 102]. Mi ćemo ovde dati kratak pregled metoda, pre nego što ga primenimo na naš torzioni anzac u sledećoj sekciji.

Metod se zasniva na osobini ireducibilnih komponenti krivine, tj. identitetu koje sve ireducibilne komponente krivine zadovoljavaju:

$$ {}^{*(n)}R^{*}_{ij} = \eta_n\, {}^{(n)}R_{ij}\,, \tag{6.3.6}$$

gde je $\eta_n = \pm 1$ u zavisnosti od pojedačne komponente. Komponente se zovu dvostruko dualne za $\eta_n = 1$ i anti-dvostruko dualne $\eta_n = -1$.

Ovde je levi operator $*$ uobičajeni Hodžov dual diferencijalnih formi, dok je desni operator takozvani 'desni' dual, definisan kao:

$$ {}^{(n)}R^{*}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}R^{kl}\,.$$

Dokaz identiteta (6.3.6) se može naći u [101].

Na osnovu ove dvostruke dualnosti komponenti krivine, može se napisati anzac koji povezuje ireducibilne komponente krivine sa njenim dvostrukim dualom. Ovde uzimamo verziju anzaca predstavljenu u [102]:

$$ \bar{R}_{ij} = \zeta\, {}^{*}R^{*}_{ij} + \chi\, \vartheta_i \wedge \vartheta_j\,, \tag{6.3.7}$$

gde je $\bar{R}_{ij} = \sum_{n=1}^{6}(b_n\, {}^{(n)}R_{ij})$, i ζ i χ su neodređene konstante.

Hodžov dual gornje relacija daje vezu na kovarijantne impulse konjugovane krivini, i ove relacije se zamenjuju u jednačine polja (6.2.3). Može se dokazati nakon dugačkog, mada pravolinijskog računa, da prva jednačina uzima oblik Ajnštajnove jednačine sa efektivnom kosmološkom i gravitacionom konstantom, dok druga jednačina postaje algebarska veza na ireducibilne komponente torzije. Konkretno, u vakuumu, dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$ -(a_0-\chi)\varepsilon_{ijkl}\vartheta^j \wedge \tilde{R}^{kl} - 2\Lambda_{\text{eff}}\varepsilon_{ijkl}\vartheta^j \wedge \vartheta^k \wedge \vartheta^l = 0\,, \tag{6.3.8a}$$

$$ (a_1 - a_0 + \chi)\, {}^{(1)}T^i = 0\,, \tag{6.3.8b}$$

$$ (a_2 + 2a_0 - 2\chi)\, {}^{(2)}T^i = 0\,, \tag{6.3.8c}$$

$$ (2a_3 + a_0 - \chi)\, {}^{(3)}T^i = 0\,, \tag{6.3.8d}$$

gde je $\Lambda_{\text{eff}} \equiv \Lambda + \frac{1}{4}\chi R$ efektivna kosmološka konstanta, $(a_0 - \chi)$ efektivna gravitaciona konstanta, dok $\tilde{R}^{ij}$ predstavlja Rimanovu krivinu, koja se dobija iz Levi-Čivita koneksije.

Sama relacija dvostruke dualnosti (6.3.6), daje skup algebarskih veza na ireducibilne komponente krivine, koje možemo napisati u obliku:

$$ (b_1 + \zeta)\, {}^{(1)}R_{ij} = 0\,, \tag{6.3.9a}$$

$$ (b_2 - \zeta)\, {}^{(2)}R_{ij} = 0\,, \tag{6.3.9b}$$

$$ (b_3 + \zeta)\, {}^{(3)}R_{ij} = 0\,, \tag{6.3.9c}$$

$$ (b_4 - \zeta)\, {}^{(4)}R_{ij} = 0\,, \tag{6.3.9d}$$

$$ (b_5 + \zeta)\, {}^{(5)}R_{ij} = 0\,, \tag{6.3.9e}$$

$$ (b_6 + \zeta)R - 12\chi = 0\,. \tag{6.3.9f}$$

Iz relacije koja definiše efektivnu kosmološku konstantu, kao i iz (6.3.9f), vidimo da Ričijev skalar mora biti konstantan, osim u slučaju kada je $\chi = 0$. Kada je $\chi = 0$, svi delovi torzije su uklonjeni iz prve jednačine polja, i ona se svodi na Ajnštajnovu jednačinu. Parametri a_i su vezani sa a_0 tako da pretvore torzioni deo Lagranžijana u deo koji odgovara teleparalelnom ekvivalentu opšte relativnosti. Dakle, da bi se dobilo ne trivijalno rešenje u PG teoriji, pretpostavljamo $\chi \neq 0$, i posledično, Ričijev skalar mora biti konstantan. Metod pronalaženja dvostruko dualnih rešenja može biti očigledan u ovom trenutku. Biramo metriku koja zadovoljava Ajnštajnove jednačine. Onda efektivna kosmološka konstanta fiksira vezu između Lagranžijanskog parametra kosmološke konstante i odgovarajućeg metričkog parametra. Torzione veze (6.3.8b)-(6.3.8d) dozvoljavaju da uklopimo parametre Lagranžijana vezujući ih za konstantu χ, ostavivši ih neodređenim za ireducibilne delove torzije koji su nula u rešenju, i fiksirajući ih u suprotnom. Veze na krivinu (6.3.9) daju na sličan način uslove na konstante interakcije članova u Lagranžijanu kvadratnih po krivini. Dakle, rešavanje jednačina za dvostruko dualno rešenje se svodi na pogodan izbor nenultih ireducibilnih komponenti krivine i torzije. Primećujemo, onda, da je sloboda u dobijanju dvostruko dualnog rešenja prilično velika, pa je često slučaj da torzija kod ovakvih vakuumskih rešenja sadrži proizvoljne funkcije. Pronaćićemo da primenom ovog metoda na naš anzac za torziju, možemo dobiti rešenje koje nema takvu proizvoljnost, pa ima potencijal da opisuje interesantniju fiziku.

6.4 Ker-AdS rešenje u blizini horizonta sa torzijom

U ovoj sekciji, tražićemo partikularno rešenje jednačina polja, pretpostavljajući da rešenje poseduje NHEK-AdS metriku (6.2.12), i da je torzija data anzacom (6.3.5). Iako anzac ima veliku simetriju, komponente Riman-Kartanove krivine koje se dobijaju zamenom tetrada (6.3.4) i torzije (6.3.5) su već veoma komplikovane. Razuno je onda pretpostaviti da mogu postojati više rešenja problema u različitim sektorima teorije. Stoga, mi ćemo pokušati da nađemo rešenje koje odgovara istom, ili sličnom sektoru, kao što je onaj u kojem je već dobijeno rešenje za Ker-AdS crnu rupu sa torzijom, datom jednačinom (6.2.9).

Od šest ireducibilnih komponenti krivine, ${}^{(1)}R^{ij}$, ${}^{(4)}R^{ij}$ i ${}^{(6)}R^{ij}$ odgovaraju uobičajenim komponentama poznatim iz opšte relativnosti, a to su Vajlov tenzor, Ričijev tenzor bez traga, i Ričijev skalar, redom. Ostale tri komponente ${}^{(2)}R^{ij}$, ${}^{(3)}R^{ij}$, ${}^{(5)}R^{ij}$ dolaze od prisustva torzije. Prva komponenta ${}^{(1)}R^{ij}$ je obično najkomplikovanija, pa nametanje uslova da ova komponenta bude jednaka nuli može biti previše jak uslov, čineći sistem jednačine predeterminisanim. Stoga ćemo, u našem dvostruko dualnom pristupu, tražiti rešenje sledećeg sistema jednačina:

$$ {}^{(2)}R^{ij} = 0\,, \qquad {}^{(3)}R^{ij} = 0\,, \qquad {}^{(5)}R^{ij} = 0\,, \qquad {}^{(3)}T^{i} = 0\,. \tag{6.4.1} $$

Jednačina za torziju se može jednostavno rešiti, i rešenje je dato sledećim relacijama:

$$ \Psi_5 = 2\Psi_3\,, \qquad \Psi_7 = 2\Psi_4\,. \tag{6.4.2} $$

Druga i treća ireducibilna komponenta krivine su generisane pseudo-Ričijevom 1-formom X^i, datom u dodatku na kraju poglavlja(takođe videti [31, 101]). Peta ireducibilna komponenta predstavlja antisimetrični deo Ričijevog tenzora. Zbog naših pretpostavki o simetriji, uzimanje $X^i = 0$ daje šest nezavisnih uslova, i time potpuno fiksira anzac za torziju. Može se proveriti da ova restrikcija potpuno odgovara tome da su prve tri jednačine iz (6.4.1) zadovoljene. Pišemo sistem jednačina za $X^i = 0$.

$$
\begin{aligned}
&F_+\Psi_2' + (\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta)\Psi_2 + \frac{ar_+F_+\sin\theta}{\rho_+^2}\Psi_3 + \frac{a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}(\Psi_6 - \Psi_2) \\
&-\Psi_1\Psi_6 - \Psi_2\Psi_8 = 0\,, && (6.4.3a)\\
&F_+\Psi_4' + \left(\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta - \frac{a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right)\Psi_4 + \frac{ar_+F_+\sin\theta}{\rho_+^2}(\Psi_1 + \Psi_8) \\
&-2\Psi_2\Psi_3 + 2\Psi_1\Psi_4 + \Psi_3\Psi_6 + \Psi_4\Psi_8 = 0\,, && (6.4.3b)\\
&\left(\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta + \frac{a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right)\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3 - \Psi_4(\Psi_1+\Psi_8) = 0\,, && (6.4.3c)\\
&F_+\Psi_3' + \frac{ar_+F_+\sin\theta}{\rho_+^2}\Psi_6 - \frac{3a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\Psi_3 + 2\Psi_1\Psi_3 + \Psi_4\Psi_6 = 0\,, && (6.4.3d)\\
&\frac{ar_+F_+\sin\theta}{\rho_+^2}\Psi_2 + (\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta)\Psi_3 + 2\Psi_2\Psi_4 - \Psi_3\Psi_8 = 0\,, && (6.4.3e)\\
&F_+\Psi_4' - \frac{2a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\Psi_4 + \frac{ar_+F_+\sin\theta}{\rho_+^2}(\Psi_1+\Psi_8) + \Psi_2\Psi_3 + \Psi_1\Psi_4 - \Psi_3\Psi_6 = 0\,, && (6.4.3f)
\end{aligned}
$$

gde smo definisali $F_+ \equiv \sqrt{\frac{f}{\rho_+^2}}$.
Izvod Ψ_4 može biti eliminisan iz jednačina (6.4.3b) i (6.4.3f), i dobijamo sistem tri algebarske i tri diferencijalne jednačine. Dalje, Ψ_1, Ψ_6 i Ψ_8 se mogu eliminisati koristeći algebarske jednačine, pod uslovom da je $\Psi_3 \neq 0$ i $\Psi_4 \neq 0$. Konačno dobijamo sistem tri nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda po Ψ_2, Ψ_3 i Ψ_4. Može se takođe proveriti da $\Psi_3 = 0$ implicira $\Psi_4 = 0$, i obrnuto, $\Psi_4 = 0$ implicira $\Psi_3 = 0$. Dakle, sistem se grana u dve grane: ili su Ψ_3 i Ψ_4 obe jednake nuli, ili su obe nenulte. Nelinearni sistem koji se dobija pri pretpostavci da su Ψ_3 i Ψ_4 obe nenulte može imati interesantnih rešenja, pošto jednačine polja ne restrikuju a priori izbor grane u sistemu. Međutim, rezultujući sistem je veoma komplikovan sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina, i pokušaji analize koristeći analitičke metode poznate autorima do sada nije bio uspešan. Stoga ćemo ovu analizu ostaviti za buduće istraživanje i našu pažnju usmeriti na mnogo jednostavniji degenerisani slučaj $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$, pošto je naš trenutni cilj konstrukcija prvog eksplicitnog primera geometrije u blizini horizonta sa netrivijalnom torzijom. Pod ovom pretpostavkom, sistem (6.4.3) se drastično pojednostavljuje, i dobijamo:

$$
\Psi_1 = -\Psi_8\,, \qquad \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \Psi_6 = 0\,. \tag{6.4.4}
$$

Tenzor torzije sada zavisi samo od jedne funkcije, i sistem jednačina (6.4.1) je zadovoljen. Ostaje nametanje uslova da je Ričijev skalar konstantan u ovom slučaju. Računamo Ričijev skalar, i dobijamo:

$$
R = 6\left(2\lambda + F_+\Psi_1' + \Psi_1\left(\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta - \frac{2a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right) + \Psi_1^2\right)\,. \tag{6.4.5}
$$

Primećujemo da možemo identifikovati Ričijev skalar sa skalarom poznatog rešenja, rešavanjem jednačine:

$$
F_+\Psi_1' + \Psi_1\left(\partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta - \frac{2a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right) + \Psi_1^2 = 0\,. \tag{6.4.6}
$$

Ova jednačina se može eksplicitno rešiti, i dobijamo egzaktno rešenje u obliku:

$$\Psi_1(\theta) = \left(\sqrt{\lambda} a \ln\left(\frac{1+\sqrt{\lambda} a\cos\theta}{1-\sqrt{\lambda} a\cos\theta}\right) - \ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) + c\right)^{-1} \frac{2\alpha}{\rho_+\sqrt{f}\sin\theta}\,, \tag{6.4.7}$$

gde je c integraciona konstanta.
Na taj način je dobijeno rešenje sa netrivijalnom torzijom koje ima metriku NHEK-AdS rešenja. Računamo prvo ireducibilne komponente krivine i torzije, da bismo pronašli sektor teorije u kojem leži dobijeno rešenje. Nenulte ireducibilne komponente krivine su date sa:

$$ {}^{(1)}R^{01} = -2C\vartheta^0\wedge\vartheta^1 - 2D\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.4.8a}$$
$$ {}^{(1)}R^{02} = C\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - D\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, \qquad {}^{(1)}R^{03} = C\vartheta^0\wedge\vartheta^3 + D\vartheta^1\wedge\vartheta^2\,, \tag{6.4.8b}$$
$$ {}^{(1)}R^{12} = C\vartheta^1\wedge\vartheta^2 - D\vartheta^0\wedge\vartheta^3\,, \qquad {}^{(1)}R^{13} = C\vartheta^1\wedge\vartheta^3 + D\vartheta^0\wedge\vartheta^2\,, \tag{6.4.8c}$$
$$ {}^{(1)}R^{23} = -2C\vartheta^2\wedge\vartheta^3 + 2D\vartheta^0\wedge\vartheta^1\,, \tag{6.4.8d}$$

gde su:

$$C = \frac{mr_+}{\rho_+^6}(r_+^2 - 3a^2\cos^2\theta)\,, \qquad D = \frac{ma\cos\theta}{\rho_+^6}(3r_+^2 - a^2\cos^2\theta)\,,$$

$$ {}^{(4)}R^{01} = P\vartheta^0\wedge\vartheta^1\,, \tag{6.4.9a}$$
$$ {}^{(4)}R^{02} = -Q\vartheta^0\wedge\vartheta^2\,, \qquad {}^{(4)}R^{03} = Q\vartheta^0\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.4.9b}$$
$$ {}^{(4)}R^{12} = -Q\vartheta^1\wedge\vartheta^2\,, \qquad {}^{(4)}R^{13} = Q\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.4.9c}$$
$$ {}^{(4)}R^{23} = -P\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.4.9d}$$

gde su:

$$P = \Psi_1(\theta)\left(\Psi_1(\theta) - \frac{2a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right),$$
$$Q = \Psi_1(\theta)\left(\Psi_1(\theta) + \partial_\theta F_+ + F_+\cot\theta - \frac{a^2F_+\sin\theta\cos\theta}{\rho_+^2}\right),$$

$$ {}^{(6)}R^{ij} = \lambda\,\vartheta^i\wedge\vartheta^j\,. \tag{6.4.10}$$

Jedina ireducibilna komponenta torzije koja je nenulta je ${}^{(2)}T^i$, pa imamo $T^i = {}^{(2)}T^i$.
Vidimo da je sektor rešenja različit od sektora prezentovanog u sekciji 6.2. Računamo veze između parametara Lagranžijana:

$$b_1 = -b_4 \qquad a_2 + 2a_0 - 2\lambda(b_4+b_6) = 0 \qquad \Lambda + 3\lambda a_0 = 0 \tag{6.4.11}$$

Važno pitanje koje sada preostaje je o tome da li ovo rešenje odgovara limesu blizu horizonta neke crne rupe sa torzijom. Odgovaramo na ovo pitanje u sledećoj sekciji.

6.5 Put ka rešenju za crnu rupu

Rešenje koje smo dobili za torziju u prethodnoj sekciji je dato u obliku:

$$\begin{aligned} T^0 &= \Psi(\theta)\vartheta^0 \wedge \vartheta^2, && (6.5.1a)\\ T^1 &= \Psi(\theta)\vartheta^1 \wedge \vartheta^2, && (6.5.1b)\\ T^2 &= 0, && (6.5.1c)\\ T^3 &= -\Psi(\theta)\vartheta^2 \wedge \vartheta^3, && (6.5.1d) \end{aligned}$$

gde je $\Psi(\theta)$ zadana jednačinom (6.4.7).

Želimo da nađemo crnu rupu koja korespondira ovom rešenju , tj, Ker-AdS crnu rupu sa torzijom, čija su metrika i tetrada date jednačinama (6.2.4) i (6.2.7), torzija se svodi na (6.5.1) nakon uzimanja limesa u blizini horizonta u ekstremalnom slučaju. Ova crna rupa očigledno ne mora da opseduje kompletnu simetriju rešenja u blizini horizonta, već ćemo zahtevati samo da bude stacionarna i aksisimetrična. Stoga, možemo očekivati da u principu postoji više mogućih crnih rupa koji imaju isti limes u blizini horizonta.

Da bismo maksimalno umanjili neodređenost u biranju generalizacije za torziju, probaćemo da generališemo naše rešenje u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} T^0 &= \Psi(r,\theta)\vartheta^0 \wedge \vartheta^2, && (6.5.2a)\\ T^1 &= \Psi(r,\theta)\vartheta^1 \wedge \vartheta^2, && (6.5.2b)\\ T^2 &= 0, && (6.5.2c)\\ T^3 &= -\Psi(r,\theta)\vartheta^2 \wedge \vartheta^3. && (6.5.2d) \end{aligned}$$

gde tetrade sada dolaze iz metrike crne rupe, date jednačinom (6.2.7). Promena tetrada i forme funkcije Ψ u anzacu će indukovati promenu u komponentama krivine, a i možemo očekivati pojavljivanje novih članova. Glavni uslov koji želimo prvi da proverimo je promena Ričijevog skalara, koji moramo da održimo konstantnim da bismo primenili dvostruko dualni metod. Računamo Ričijev skalar, i dobijamo:

$$R = 6\left(2\lambda + F(\partial_\theta\Psi) + \Psi\left(\partial_\theta F + F\cot\theta - 2\frac{a^2 F\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\right) + \Psi^2\right), \tag{6.5.3}$$

gde je $F = \sqrt{\frac{f}{\rho^2}}$ i $\rho = \sqrt{r^2 + a^2\cos\theta}$, što su funkcije koje se pojavljuju u metrici crne rupe.

Dobili smo istu formu jednačine kao što smo dobili i kod rešenja u blizini horizonta. Rešavanjem za $R = 12\lambda$ kao i ranije, dobijamo:

$$\Psi(r,\theta) = \left(\sqrt{\lambda}a\ln\left(\frac{1+\sqrt{\lambda}a\cos\theta}{1-\sqrt{\lambda}a\cos\theta}\right) - \ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) + c(r)\right)^{-1}\frac{2\alpha}{\rho\sqrt{f}\sin\theta}. \tag{6.5.4}$$

Primećujemo da integraciona konstanta koja se pojavila u graničnom rešenju postaje proizvoljna funkcija radijalne koordinate, $c(r)$. Ponašanje ove funkcije nije ograničeno jednačinama polja, koje su zadovoljene specifičnim skupom parametara Lagranžijana datom kasnije u ovoj sekciji. Posledično, dobijamo klasu rešenja za crne rupe u kojoj, za svaki izbor $c(r)$ koji je neprekidan na horizontu, imamo dobro definisan limes u blizini horizonta, sa $c = c(r_+)$. Funkcija $c(r)$ se može dalje ograničiti asimptotskim graničnim uslovima koji zadaju asimptotsko ponašanje torzije u prostornoj beskonačnosti, kao i zahtevom da imamo dobro definisane održane naboje. Međutim, ovakvi uslovi ne određuju nužno $c(r)$ na jedinstven način, već ograničavaju njeno dozvoljeno asimptotsko ponašanje. Proizvoljnost u izboru $c(r)$ proističe iz slobode inherentne u konstrukciji rešenja dvostruko dualnim metodom, kao što smo diskutovali na kraju sekcije 6.3. Fizički značaj ove funkcije stoga zahteva detaljniju analizu rešenja, koju ostavljamo za buduće istraživanje.

Pošto smo uspeli da uspostavimo uslov da je Ričijev skalar konstantan, i da torzija zapravo tačno korespondira torziji nađenoj u sekciji 6.4 nakon uzimanja limesa u blizini horizonta, nastavljamo da računamo ostale ireducibilne komponente krivine i torzije. Možemo očekivati da promena u anzacu može indukovati pojavu novih nenultih ireducibilnih komponenti, i ovo će se ispostaviti kao tačno.

Ireducibilne komponente torzije su ponovo jednostavne, i date su kao:

$$ {}^{(1)}T^i = 0\,, \qquad {}^{(2)}T^i = T^i\,, \qquad {}^{(3)}T^i = 0\,. \tag{6.5.5} $$

Nenulte ireducibilne komponente krivine su:

$$ {}^{(1)}R^{01} = -2C\vartheta^0\wedge\vartheta^1 - \Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - 2D\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.6a} $$
$$ {}^{(1)}R^{02} = -\Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + C\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - D\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, $$
$$ {}^{(1)}R^{03} = C\vartheta^0\wedge\vartheta^3 + D\vartheta^1\wedge\vartheta^2\,, \tag{6.5.6b} $$
$$ {}^{(1)}R^{12} = C\vartheta^1\wedge\vartheta^2 - D\vartheta^0\wedge\vartheta^3\,, $$
$$ {}^{(1)}R^{13} = C\vartheta^1\wedge\vartheta^3 + D\vartheta^0\wedge\vartheta^2 + \Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.6c} $$
$$ {}^{(1)}R^{23} = -2C\vartheta^2\wedge\vartheta^3 + 2D\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + \Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.6d} $$

gde su:

$$ C = \frac{mr}{\rho^6}(r^2 - 3a^2\cos^2\theta)\,, \qquad D = \frac{ma\cos\theta}{\rho^6}(3r^2 - a^2\cos^2\theta)\,, $$

$$ {}^{(2)}R^{01} = -\Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^2\,, \qquad {}^{(2)}R^{02} = \Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^1\,, \qquad {}^{(2)}R^{03} = 0\,, \tag{6.5.7a} $$
$$ {}^{(2)}R^{12} = 0\,, \qquad {}^{(2)}R^{13} = \Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \qquad {}^{(2)}R^{23} = -\Psi\frac{rN}{2\rho^2}\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.7b} $$

$$ {}^{(4)}R^{01} = P\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - \Psi\frac{aN\cos\theta}{\rho^2}\vartheta^1\wedge\vartheta^3\,, $$
$$ {}^{(4)}R^{02} = \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^0\wedge\vartheta^1 - Q\vartheta^0\wedge\vartheta^2 - \Psi\frac{aN\cos\theta}{\rho^2}\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, $$
$$ {}^{(4)}R^{03} = Q\vartheta^0\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.8a} $$
$$ {}^{(4)}R^{12} = -Q\vartheta^1\wedge\vartheta^2\,, $$
$$ {}^{(4)}R^{13} = \Psi\frac{aN\cos\theta}{\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^1 + Q\vartheta^1\wedge\vartheta^3 + \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.8b} $$
$$ {}^{(4)}R^{23} = \Psi\frac{aN\cos\theta}{\rho^2}\vartheta^0\wedge\vartheta^2 + \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^1\wedge\vartheta^3 - P\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.8c} $$

gde su:

$$
\begin{aligned}
P &= \Psi(r,\theta)\left(\Psi(r,\theta) - \frac{2a^2 F \sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\right)\,, \\
Q &= \Psi(r,\theta)\left(\Psi(r,\theta) + \partial_\theta F + F\cot\theta - \frac{a^2 F \sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\right)\,,
\end{aligned}
$$

$$
{}^{(5)}R^{01} = -\frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^0\wedge\vartheta^2\,, \qquad {}^{(5)}R^{02} = \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^0\wedge\vartheta^1\,, \qquad {}^{(1)}R^{03} = 0\,, \tag{6.5.9a}
$$

$$
{}^{(5)}R^{12} = 0 \qquad {}^{(5)}R^{13} = -\frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^2\wedge\vartheta^3\,, \tag{6.5.9b}
$$

$$
{}^{(5)}R^{23} = \frac{1}{2}N(\partial_r\Psi)\vartheta^1\wedge\vartheta^3 \tag{6.5.9c}
$$

$$
{}^{(6)}R^{ij} = \lambda\,\vartheta^i\wedge\vartheta^j\,. \tag{6.5.10}
$$

Primetimo da su se nove ireducibilne komponente zaista pojavile, i da limes ireducibilnih komponenti tačno korespondira rešenju u blizini horizonta, koje smo već odredili. Pojava novih komponenti znači da će sektor rešenja biti manji nego što je sektor graničnog rešenja, što je razumno očekivati. Sektor rešenja se može samo smanjiti ili ostati isti pri "podizanju" limesa, što odgovara činjenici da više crnih rupa u principu mogu imati isti limes u blizini horizonta. Računamo sektor rešenja i dobijamo veze između parametara Lagranžijana:

$$
b_1 = -b_2 = -b_4 = b_5\,, \qquad a_2 + 2a_0 - 2\lambda(b_4 + b_6) = 0\,, \qquad \Lambda + 3\lambda a_0 = 0\,. \tag{6.5.11}
$$

Ovim je dobijena Ker-AdS crna rupa sa netrivijalnom torzijom koja ima regularni limes u blizini horizonta. Analiza dobijenog rešenja se ostavlja za budući rad.

6.6 Diskusija

Razmotrili smo generalni problem utvrđivanja geometrija u blizini horizonta za ekstremalne crne rupe sa torzijom. Čini se da većina rešenja za crne rupe, koja su najkompleksnija u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, ne poseduju regularan limes blizu horizonta u ekstremalnom slučaju. Pronalaženjem rešenja koje ima ovu osobinu, otvorili smo vrata daljem istraživanju na ovu temu. Ipak, puno pitanja ostaje nerazjašnjeno.

Razvili smo opšti metod izvođenja limesa u blizini horizonta ekstremalnih crnih rupa sa torzijom. Iako smo dali interpretaciju dobijenih geometrijskih uslova, dublja analiza bi mogla da dovede do dodatnih uvida. Na primer, tri od četiri uslova daju restrikcije na ponašanje struje torzije na horizontu. Ovi uslovi bi mogli biti dalje interpretirani u kontekstu stacionarnosti horizonta sa netrivijalnom torzijom, slično kao što je prvi uslov diskutovan u [94]. Četvrti uslov je diferencijalan i podseća na uslov ekstremalnosti koji se nameće na metriku u opštoj relativnosti. Detaljnije razumevanje ovog uslova moglo bi da unapredi naše razumevanje pojma ekstremalnosti u kontekstu geometrija sa torzijom.

Model geometrije u blizini horizonta koji smo razvili je zasnovan na proširenju poznatih simetrija u blizini horizonta tako da simetrije tenzora torzije budu uključene. Ovaj pristup se očekuje da daje rezultate konzistentne sa metodom dvostruke dualnosti, pošto se jednačine polja pojednostavljuju u sistem jednačina sličnim Ajnštajnovim, što je važan aspekt dokaza ovih simetrija u opštoj relativnosti [59, 55]. Ipak, kompletan sistem jednačina je ostao nerešen u opštem slučaju. Dalje istraživanje može da pokaže rešenja koja se manje razlikuju od poznatog rešenja Beklera i njegovih saradnika [96].Takođe, ovde predstavljeno rešenje zahteva detaljnu analizu u kanonskom formalizmu. Pošto je sektor u kome je konstruisana crna rupa više restrikovan od sektora koji odgovara graničnoj geometriji, proračuni entropije u ekstremalnom slučaju moraju da se vrše u ovom užem sektoru. Idealno, ovo bi moglo da se popravi modifikovanjem anzaca za proširenje torzije na crnu rupu, dodajući članove koji nestaju u limesu u blizini horizonta, i time uskladivši sektor crne rupe sa sektorom graničnog rešenja. Ipak, to je delikatan proces, pošto dodavanje dodatnih članova u torziju drastično komplikuje komponente krivine, a time i otežava mogućnost rešenja jednačina polja.

Nadamo se da će odgovori na ova pitanja u budućnosti produbiti naše razumevanje geometrija crnih rupa sa torzijom. Ovo može dovesti do poboljšanih interpretacija ovih geometrija i njihove veze sa dobro uspostavljenim rezultatima iz standardne teorije opšte relativnosti.

6.A Dodatak: ireducibilna dekompozicija krivine i torzije

Predstavljamo ovde formule za ireducibilne komponente krivine i torzije u 4d prostorvremenu. Ove formule su iste kao one date u [31].
2-forma torzije ima tri ireducibilne komponente:

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}T^i &= \frac{1}{3}\vartheta^i \wedge (e_m \rfloor T^m)\,, \\
{}^{(3)}T^i &= \frac{1}{3}e^i \rfloor (T^m \wedge \vartheta_m)\,, \\
{}^{(1)}T^i &= T^i - {}^{(2)}T^i - {}^{(3)}T^i\,.
\end{aligned} \tag{6.A.1}$$

2-forma krivine ima šest ireducibilnih komponenti:

$$\begin{aligned}
&{}^{(2)}R^{ij} = {}^*(\vartheta^{[i} \wedge W^{j]})\,, && {}^{(4)}R^{ij} = \vartheta^{[i} \wedge V^{j]}\,, \\
&{}^{(3)}R^{ij} = \frac{1}{12}X\,{}^*(\vartheta^i \wedge \vartheta^j)\,, && {}^{(6)}R^{ij} = \frac{1}{12}R\vartheta^i \wedge \vartheta^j\,, \\
&{}^{(5)}R^{ij} = \frac{1}{2}\vartheta^{[i} \wedge e^{j]} \rfloor (\vartheta^m \wedge Ric_i)\,, && {}^{(1)}R^{ij} = R^{ij} - \sum_{m=2}^{6} {}^{(m)}R^{ij}\,,
\end{aligned} \tag{6.A.2}$$

gde su:

$$\begin{aligned}
&Ric^i \equiv e_j \rfloor R^{ji}\,, \qquad R \equiv e_i \rfloor Ric^i\,, \\
&X^i \equiv {}^*(R^{ik} \wedge \vartheta_k)\,, \qquad X \equiv e_i \rfloor X^i\,,
\end{aligned} \tag{6.A.3}$$

i:

$$\begin{aligned}
V^i &= Ric^i - \frac{1}{4}R\vartheta^i - \frac{1}{2}e^i \rfloor (\vartheta^m \wedge Ric_m)\,, \\
W^i &= X^i - \frac{1}{4}X\vartheta^i - \frac{1}{2}e^i \rfloor (\vartheta^m \wedge X_m)\,.
\end{aligned} \tag{6.A.4}$$

Zaključak i dalje istraživanje

Rezultatima naše teze definisan je metod proračuna entropije ekstremalnih crnih rupa u lokalnoj Poenkareovoj teoriji koristeći korespodenciju sa konformnom teorijom polja. Ipak, rezultati objavljenih radova ostavljaju više pitanja otvorenih. U kontekstu prostorno razvučenih crnih rupa u tri dimenzije, potrebno je detaljnije analizirati asimptotsku strukturu da bi se objasnilo odstupanje entropije koju smo dobili od očekivane entropije u opštoj relativnosti. Rezultati o generalnoj definiciji limesa u blizini horizonta treba da budu bolje interpretirani. Posmatranjem uslova definicije limesa u blizini horizonta, može se uvideti da su uslovi na torziju netrivijalni, pa je logično pitanje o tome da li ovi uslovi važe generalno u kontekstu definicije ekstremalnosti u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, ili su vezani samo za limes teorije koji je bio objekat ispitivanja u ovoj tezi. Nova crna rupa koja je dobijena treba da bude ispitana u kanonskom formalizmu, a potraga za rešenjima koja bolje korespondiraju rešenjima već poznatim u teoriji je otvoren problem. Ostavljeno je, dakle, više pitanja koja će biti razrešena u daljem radu.

Ipak, smatramo da rezultati predstavljeni u dosadašnjem radu predstavljaju bitnu dopunu literaturi u lokalnoj Poenkareovih teoriji, baš iz razloga što otvaraju put ka daljem ispitivanju koje pre toga nije bilo široko zastupljeno. Bolje razumevanje pojma torzije u kontekstu veze sa termodinamikom crnih rupa, iz kojih se mogu izvući razmatranja za uopšteno posmatranje torzije u opštim modelima u lokalnoj Poenkareovoj teoriji, omogućavaju poboljšanje poređenja ove teorije sa ostalim teorijama gravitacije, a potencijalno i provere koje će moći da ustanove njenu održivost u poređenju sa standardnom opštom teorijom relativnosti.

Literatura

[1] Jacob D. Bekenstein. “Black Holes and Entropy”. In: *Phys. Rev. D* 7 (8 Apr. 1973), pp. 2333–2346. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2333.

[2] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. “The four laws of black hole mechanics”. In: *Communications in Mathematical Physics* 31.2 (1973), pp. 161–170. DOI: 10.1007/BF01645742.

[3] R. Penrose and R. M. Floyd. “Extraction of Rotational Energy from a Black Hole”. In: *Nature Physical Science* 229.6 (1971), pp. 177–179. DOI: 10.1038/physci229177a0.

[4] Roy P. Kerr. “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”. In: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 Sept. 1963), pp. 237–238. DOI: 10.1103/PhysRevLett.11.237.

[5] Barrett O’Neill. *The Geometry of Kerr Black Holes*. Mineloa, New York: Dover, Mar. 2014. ISBN: 978-0-486-49342-8.

[6] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1983. ISBN: 9780198512912.

[7] S. W. Hawking. “Gravitational Radiation from Colliding Black Holes”. In: *Phys. Rev. Lett.* 26 (21 May 1971), pp. 1344–1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.26.1344.

[8] S. W. Hawking. “Black holes in general relativity”. In: *Communications in Mathematical Physics* 25.2 (1972), pp. 152–166. DOI: 10.1007/BF01877517.

[9] S. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973. ISBN: 9780521099066.

[10] Edward Witten. “Light rays, singularities, and all that”. In: *Rev. Mod. Phys.* 92 (4 Nov. 2020), p. 045004. DOI: 10.1103/RevModPhys.92.045004.

[11] R.M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, 1994. ISBN: 9780226870274.

[12] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.

[13] Demetrios Christodoulou. “Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics”. In: *Phys. Rev. Lett.* 25 (22 Nov. 1970), pp. 1596–1597. DOI: 10.1103/PhysRevLett.25.1596.

[14] Demetrios Christodoulou and Remo Ruffini. “Reversible Transformations of a Charged Black Hole”. In: *Phys. Rev. D* 4 (12 Dec. 1971), pp. 3552–3555. DOI: 10.1103/PhysRevD.4.3552.

[15] S. W. Hawking. “Particle creation by black holes”. In: *Communications in Mathematical Physics* 43.3 (1975), pp. 199–220. DOI: 10.1007/BF02345020.

[16] Brandon Carter. “Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time”. In: *Journal of Mathematical Physics* 10.1 (1969), pp. 70–81. DOI: 10.1063/1.1664763. URL: https://doi.org/10.1063/1.1664763.

[17] Robert M. Wald. “The First law of black hole mechanics”. In: *Directions in General Relativity: An International Symposium in Honor of the 60th Birthdays of Dieter Brill and Charles Misner*. May 1993. arXiv: gr-qc/9305022.

[18] Vivek Iyer and Robert M. Wald. “Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy”. In: *Phys. Rev. D* 50 (2 July 1994), pp. 846–864. DOI: 10.1103/PhysRevD.50.846.

[19] Robert M. Wald. “Black hole entropy is the Noether charge”. In: *Phys. Rev. D* 48 (8 Oct. 1993), R3427(R)–R3431(R). DOI: 10.1103/PhysRevD.48.R3427.

[20] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity”. In: *Phys. Rev.* 116 (5 Dec. 1959), pp. 1322–1330. DOI: 10.1103/PhysRev.116.1322.

[21] Daniel Sudarsky and Robert M. Wald. “Extrema of mass, stationarity, and staticity, and solutions to the Einstein-Yang-Mills equations”. In: *Phys. Rev. D* 46 (4 Aug. 1992), pp. 1453–1474. DOI: 10.1103/PhysRevD.46.1453.

[22] J. Lee and Robert M. Wald. “Local symmetries and constraints”. In: *J. Math. Phys.* 31 (1990), pp. 725–743. DOI: 10.1063/1.528801.

[23] Lorenzo Rossi. “The First Law of Black Hole Mechanics”. In: (Dec. 2020). arXiv: 2012.04593 [gr-qc].

[24] Tullio Regge and Claudio Teitelboim. “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity”. In: *Annals Phys.* 88 (1974), p. 286. DOI: 10.1016/0003-4916(74)90404-7.

[25] Istvan Racz and Robert M. Wald. “Global extensions of space-times describing asymptotic final states of black holes”. In: *Class. Quant. Grav.* 13 (1996), pp. 539–553. DOI: 10.1088/0264-9381/13/3/017. arXiv: gr-qc/9507055.

[26] Robert Wald. “Gedanken experiments to destroy a black hole”. In: *Annals of Physics* 82.2 (1974), pp. 548–556. ISSN: 0003-4916. DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90125-0.

[27] Jonathan Sorce and Robert M. Wald. “Gedanken experiments to destroy a black hole. II. Kerr-Newman black holes cannot be overcharged or overspun”. In: *Phys. Rev. D* 96.10 (2017), p. 104014. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.104014. arXiv: 1707.05862 [gr-qc].

[28] Christoph Kehle and Ryan Unger. “Gravitational collapse to extremal black holes and the third law of black hole thermodynamics”. In: (Nov. 2022). arXiv: 2211.15742 [gr-qc].

[29] Harvey S. Reall. “Third law of black hole mechanics for supersymmetric black holes and a quasilocal mass-charge inequality”. In: *Phys. Rev. D* 110.12 (2024), p. 124059. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.124059. arXiv: 2410.11956 [gr-qc].

[30] Aidan M. McSharry and Harvey S. Reall. “Supersymmetric black holes and the third law of black hole mechanics”. In: *Phys. Rev. D* 112.10 (2025), p. 104009. DOI: 10.1103/s44z-rbzx. arXiv: 2507.06870 [gr-qc].

[31] Milutin Blagojević and Branislav Cvetković. “Entropy in Poincaré gauge theory: Hamiltonian approach”. In: *Phys. Rev. D* 99.10 (2019), p. 104058. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.104058. arXiv: 1903.02263 [gr-qc].

[32] M. Blagojevic. *Gravitation and gauge symmetries*. 2002. ISBN: 978-0-429-18716-2. DOI: 10.1201/9781420034264.

[33] T. W. B. Kibble. “Lorentz invariance and the gravitational field”. In: *J. Math. Phys.* 2 (1961). Ed. by Jong-Ping Hsu and D. Fine, pp. 212–221. DOI: 10.1063/1.1703702.

[34] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, monograph series. Dover Publications, 2001. ISBN: 9780486417134.

[35] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. 1992. ISBN: 978-0-691-03769-1.

[36] Ignjat A. Nikolic. “Dirac’s Hamiltonian Structure of $R+R^2+T^2$ Poincare Gauge Theory of Gravity Without Gauge Fixing”. In: *Phys. Rev. D* 30 (1984), p. 2508. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.2508.

[37] Leonardo Castellani. “Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems”. In: *Annals Phys.* 143 (1982), p. 357. DOI: 10.1016/0003-4916(82)90031-8.

[38] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991. ISBN: 9780070542365.

[39] Ignjat A. Nikolic. “Canonical structure of Poincare gauge invariant theory of gravity”. In: *Fizika* 18 (1986), pp. 135–139.

[40] Ignjat A. Nikolic. “Constraint algebra from local Poincare symmetry”. In: *Gen. Rel. Grav.* 24 (1992), pp. 159–170. DOI: 10.1007/BF00756783.

[41] M. Blagojevic, Irina Nikolic, and M. Vasilic. “Local Poincare Generators in the $R+T^2+R^2$ Theory of Gravity”. In: *Nuovo Cim. B* 101 (1988), p. 439. DOI: 10.1007/BF02828922.

[42] Emmy Noether. “Invariant Variation Problems”. In: *Gott. Nachr.* 1918 (1918), pp. 235–257. DOI: 10.1080/00411457108231446. arXiv: physics/0503066.

[43] Glenn Barnich and Friedemann Brandt. “Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges”. In: *Nucl. Phys. B* 633 (2002), pp. 3–82. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00251-1. arXiv: hep-th/0111246.

[44] Milutin Blagojević and Branislav Cvetković. “Entropy in general relativity: Kerr-AdS black hole”. In: *Phys. Rev. D* 101.8 (2020), p. 084023. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.084023. arXiv: 2002.05029 [gr-qc].

[45] Milutin Blagojević and Branislav Cvetković. “Entropy in Poincaré gauge theory: Kerr-AdS solution”. In: *Phys. Rev. D* 102.6 (2020), p. 064034. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.064034. arXiv: 2007.10721 [gr-qc].

[46] Milutin Blagojević and Branislav Cvetković. “Entropy of Reissner-Nordström-like black holes”. In: *Phys. Lett. B* 824 (2022), p. 136815. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136815. arXiv: 2112.02099 [gr-qc].

[47] Milutin Blagojević and Branislav Cvetković. “Entropy of Kerr-Newman-AdS black holes with torsion”. In: *Phys. Rev. D* 105.10 (2022), p. 104014. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.104014. arXiv: 2203.14696 [gr-qc].

[48] Steven Carlip. “Effective Conformal Descriptions of Black Hole Entropy”. In: *Entropy* 13 (2011), pp. 1355–1379. DOI: 10.3390/e13071355. arXiv: 1107.2678 [gr-qc].

[49] Monica Guica et al. “The Kerr/CFT Correspondence”. In: *Phys. Rev. D* 80 (2009), p. 124008. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.124008. arXiv: 0809.4266 [hep-th].

[50] Juan Martin Maldacena. “The Large *N* limit of superconformal field theories and supergravity”. In: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), pp. 231–252. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1. arXiv: hep-th/9711200.

[51] B. Cvetković and D. Simić. “Near-horizon geometry with torsion”. In: *Phys. Rev. D* 99.2 (2019), p. 024032. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.024032. arXiv: 1809.00555 [gr-qc].

[52] P. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1997. ISBN: 9780387947853.

[53] Ralph Blumenhagen and Erik Plauschinn. *Introduction to conformal field theory: with applications to String theory*. Vol. 779. 2009. DOI: 10.1007/978-3-642-00450-6.

[54] Paul H. Ginsparg. “Applied Conformal Field Theory”. In: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena*. Sept. 1988. arXiv: hep-th/9108028.

[55] Hari K. Kunduri and James Lucietti. “Classification of near-horizon geometries of extremal black holes”. In: *Living Rev. Rel.* 16 (2013), p. 8. DOI: 10.12942/lrr-2013-8. arXiv: 1306.2517 [hep-th].

[56] B. Cvetković and D. Rakonjac. “Near-horizon geometry with torsion: Kerr-AdS black hole”. In: *Phys. Rev. D* 113.12 (2026), p. 124059. DOI: 10.1103/f5hg-kxrw. arXiv: 2511.15106 [gr-qc].

[57] Helmut Friedrich, Istvan Racz, and Robert M. Wald. “On the rigidity theorem for space-times with a stationary event horizon or a compact Cauchy horizon”. In: *Commun. Math. Phys.* 204 (1999), pp. 691–707. DOI: 10.1007/s002200050662. arXiv: gr-qc/9811021.

[58] Vincent Moncrief and James Isenberg. “Symmetries of cosmological Cauchy horizons”. In: *Commun. Math. Phys.* 89.3 (1983), pp. 387–413. DOI: 10.1007/BF01214662.

[59] Hari K. Kunduri, James Lucietti, and Harvey S. Reall. “Near-horizon symmetries of extremal black holes”. In: *Class. Quant. Grav.* 24 (2007), pp. 4169–4190. DOI: 10.1088/0264-9381/24/16/012. arXiv: 0705.4214 [hep-th].

[60] Hari K. Kunduri and James Lucietti. “Uniqueness of near-horizon geometries of rotating extremal AdS(4) black holes”. In: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), p. 055019. DOI: 10.1088/0264-9381/26/5/055019. arXiv: 0812.1576 [hep-th].

[61] Hari K. Kunduri and James Lucietti. “A Classification of near-horizon geometries of extremal vacuum black holes”. In: *J. Math. Phys.* 50 (2009), p. 082502. DOI: 10.1063/1.3190480. arXiv: 0806.2051 [hep-th].

[62] Hari K. Kunduri. “Electrovacuum Near-horizon Geometries in Four and Five Dimensions”. In: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011). Ed. by Donald Marolf and Daniel Sudarsky, p. 114010. DOI: 10.1088/0264-9381/28/11/114010. arXiv: 1104.5072 [hep-th].

[63] Heinz Hopf. “Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche”. In: *Mathematische Annalen* 104.1 (1931), pp. 637–665. DOI: 10.1007/BF01457962. URL: https://doi.org/10.1007/BF01457962.

[64] J. David Brown and M. Henneaux. “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity”. In: *Commun. Math. Phys.* 104 (1986), pp. 207–226. DOI: 10.1007/BF01211590.

[65] John L. Cardy. “Effect of Boundary Conditions on the Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories”. In: *Nucl. Phys. B* 275 (1986), pp. 200–218. DOI: 10.1016/0550-3213(86)90596-1.

[66] H. W. J. Blöte, John L. Cardy, and M. P. Nightingale. “Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality”. In: *Phys. Rev. Lett.* 56 (7 Feb. 1986), pp. 742–745. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.742.

[67] Milutin Blagojevic and Friedrich W. Hehl. “Gauge Theories of Gravitation”. In: (Oct. 2012). arXiv: 1210.3775 [gr-qc].

[68] Friedrich W. Hehl. “Four Lectures on Poincaré Gauge Field Theory”. In: *International School of Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation and Supergravity*. 1979. arXiv: 2303.05366 [gr-qc].

[69] Geoffrey Compère. “The Kerr/CFT Correspondence and its Extensions”. In: *Living Rev. Rel.* 15.1 (2012), pp. 11–81. DOI: 10.12942/lrr-2012-11. arXiv: 1203.3561 [hep-th].

[70] James M. Nester. “A covariant Hamiltonian for gravity theories”. In: *Mod. Phys. Lett. A* 6 (1991), pp. 2655–2661. DOI: 10.1142/S0217732391003092.

[71] Branislav Cvetković and Danilo Rakonjac. “Extremal Kerr black hole entropy in Poincaré gauge theory”. In: *Phys. Rev. D* 107.4 (2023), p. 044054. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.044054. arXiv: 2208.04383 [gr-qc].

[72] Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist. “Maximal analytic extension of the Kerr metric”. In: *J. Math. Phys.* 8 (1967), p. 265. DOI: 10.1063/1.1705193.

[73] James M. Bardeen and Gary T. Horowitz. “The Extreme Kerr throat geometry: A Vacuum analog of AdS(2) x S**2”. In: *Phys. Rev. D* 60 (1999), p. 104030. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.104030. arXiv: hep-th/9905099.

[74] M. Blagojević and B. Cvetković. “Hamiltonian approach to black hole entropy: Kerr-like spacetimes”. In: *Phys. Rev. D* 100.4 (2019), p. 044029. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.044029. arXiv: 1905.04928 [gr-qc].

[75] J. David Brown and M. Henneaux. “On the Poisson Brackets of Differentiable Generators in Classical Field Theory”. In: *J. Math. Phys.* 27 (1986), pp. 489–491. DOI: 10.1063/1.527249.

[76] Folkert Müller-Hoissen and Jürgen Nitsch. “Teleparallelism—A viable theory of gravity?” In: *Phys. Rev. D* 28 (4 Aug. 1983), pp. 718–728. DOI: 10.1103/PhysRevD.28.718.

[77] Stanley Deser, R. Jackiw, and S. Templeton. “Three-Dimensional Massive Gauge Theories”. In: *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982), pp. 975–978. DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.975.

[78] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. “The Black hole in three-dimensional space-time”. In: *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992), pp. 1849–1851. DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.1849. arXiv: hep-th/9204099.

[79] Maximo Banados et al. “Geometry of the (2+1) black hole”. In: *Phys. Rev. D* 48 (1993). [Erratum: Phys.Rev.D 88, 069902 (2013)], pp. 1506–1525. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.1506. arXiv: gr-qc/9302012.

[80] Steven Carlip. “Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity, and the BTZ black hole”. In: *Class. Quant. Grav.* 22 (2005), R85–R124. DOI: 10.1088/0264-9381/22/12/R01. arXiv: gr-qc/0503022.

[81] Steven Carlip. “The Constraint Algebra of Topologically Massive AdS Gravity”. In: *JHEP* 10 (2008), p. 078. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/10/078. arXiv: 0807.4152 [hep-th].

[82] M. Blagojevic and B. Cvetkovic. “Canonical structure of topologically massive gravity with a cosmological constant”. In: *JHEP* 05 (2009), p. 073. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/05/073. arXiv: 0812.4742 [gr-qc].

[83] Karim Ait Moussa, Gerard Clement, and Cedric Leygnac. “The Black holes of topologically massive gravity”. In: *Class. Quant. Grav.* 20 (2003), pp. L277–L283. DOI: 10.1088/0264-9381/20/24/L01. arXiv: gr-qc/0303042.

[84] Wei Li, Wei Song, and Andrew Strominger. “Chiral Gravity in Three Dimensions”. In: *JHEP* 04 (2008), p. 082. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/04/082. arXiv: 0801.4566 [hep-th].

[85] Dionysios Anninos et al. “Warped AdS(3) Black Holes”. In: *JHEP* 03 (2009), p. 130. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/03/130. arXiv: 0807.3040 [hep-th].

[86] Dionysios Anninos, Mboyo Esole, and Monica Guica. “Stability of warped AdS(3) vacua of topologically massive gravity”. In: *JHEP* 10 (2009), p. 083. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/10/083. arXiv: 0905.2612 [hep-th].

[87] Ingemar Bengtsson and Patrik Sandin. “Anti de Sitter space, squashed and stretched”. In: *Class. Quant. Grav.* 23 (2006), pp. 971–986. DOI: 10.1088/0264-9381/23/3/022. arXiv: gr-qc/0509076.

[88] Geoffrey Compere and Stephane Detournay. “Boundary conditions for spacelike and timelike warped AdS_3 spaces in topologically massive gravity”. In: *JHEP* 08 (2009), p. 092. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/08/092. arXiv: 0906.1243 [hep-th].

[89] M. Blagojevic and B. Cvetkovic. “Asymptotic structure of topologically massive gravity in spacelike stretched AdS sector”. In: *JHEP* 09 (2009), p. 006. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/09/006. arXiv: 0907.0950 [gr-qc].

[90] Daniel Grumiller, Philip Hacker, and Wout Merbis. “Soft hairy warped black hole entropy”. In: *JHEP* 02 (2018), p. 010. DOI: 10.1007/JHEP02(2018)010. arXiv: 1711.07975 [hep-th].

[91] B. Cvetković and D. Rakonjac. “Near horizon symmetry of extremal spacelike-stretched black holes”. In: *Phys. Rev. D* 109.12 (2024), p. 124043. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.124043. arXiv: 2403.08529 [gr-qc].

[92] Ashoke Sen. “Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates”. In: *Gen. Rel. Grav.* 40 (2008), pp. 2249–2431. DOI: 10.1007/s10714-008-0626-4. arXiv: 0708.1270 [hep-th].

[93] Hirotaka Sugawara. “A Field theory of currents”. In: *Phys. Rev.* 170 (1968), pp. 1659–1662. DOI: 10.1103/PhysRev.170.1659.

[94] Ramit Dey, Stefano Liberati, and Daniele Pranzetti. “Spacetime thermodynamics in the presence of torsion”. In: *Phys. Rev. D* 96.12 (2017), p. 124032. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.124032. arXiv: 1709.04031 [gr-qc].

[95] J. D. McCrea, P. Baekler, and M. Gürses. "A Kerr-like solution of the Poincaré gauge field equations". In: *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 99.2 (1987), pp. 171–177. DOI: 10.1007/BF02726580. URL: https://doi.org/10.1007/BF02726580.

[96] P. Bakler et al. "The Exterior Gravitational Field of a Charged Spinning Source in the Poincare Gauge Theory: A Kerr-Newman Metric With Dynamic Torsion". In: *Phys. Lett. A* 128 (1988), pp. 245–250. DOI: 10.1016/0375-9601(88)90366-0.

[97] B. Carter. "Black holes equilibrium states". In: *Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Black Holes*. 1973, pp. 57–214.

[98] Robert Geroch. "Limits of spacetimes". In: *Communications in Mathematical Physics* 13.3 (1969), pp. 180–193. DOI: 10.1007/BF01645486. URL: https://doi.org/10.1007/BF01645486.

[99] Jose A. R. Cembranos and Jorge Gigante Valcarcel. "New torsion black hole solutions in Poincaré gauge theory". In: *JCAP* 01 (2017), p. 014. DOI: 10.1088/1475-7516/2017/01/014. arXiv: 1608.00062 [gr-qc].

[100] Rick Rauch and H. T. Nieh. "Birkhoff's Theorem for General Riemann-Cartan Type $R+R^2$ Theories of Gravity". In: *Phys. Rev. D* 24 (1981), p. 2029. DOI: 10.1103/PhysRevD.24.2029.

[101] Yuri N. Obukhov. "Poincare gauge gravity: Selected topics". In: *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 3 (2006), pp. 95–138. DOI: 10.1142/S021988780600103X. arXiv: gr-qc/0601090.

[102] V. V. Zhytnikov. "Double duality and hidden gauge freedom in the Poincare gauge theory of gravitation". In: *Gen. Rel. Grav.* 28 (1996), pp. 137–162. DOI: 10.1007/BF02105420.

Biografija

Danilo Rakonjac je rođen 16. novembra 1995. godine u Beogradu. Osnovne studije završio je 2018. godine na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu sa prosečnom ocenom 9.67. Master studije je završio 2019. godine na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu sa prosečnom ocenom 10.

Doktorske studije upisao je 2019. godine na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu u grupi za kvantna polja, čestice i gravitaciju pod mentorstvom Dr Branislava Cvetkovića. Bavi se istraživanjem ekstremalnih crnih rupa u lokalnoj Poenkareovoj teoriji.

Od januara 2020. godine, zaposlen je na Institutu za Fiziku u Beogradu, gde trenutno ima zvanje istraživač saradnik. Ova teza je rezultat njegovih doktorskih studija, bazirana na originalnim radovima referisanim ispod.

Izabrani radovi

- Branislav Cvetković and Danilo Rakonjac. "Extremal Kerr black hole entropy in Poincaré gauge theory". Phys. Rev. D 107.4 (2023)
- B. Cvetković and D. Rakonjac. "Near horizon symmetry of extremal spacelike-stretched black holes". Phys. Rev. D 109.12 (2024)
- B. Cvetković and D. Rakonjac. "Near-horizon geometry with torsion: Kerr-AdS black hole". Phys. Rev. D 113.12 (2026)

образац изјаве о ауторству

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора : Данило Ракоњац ______________________

Број индекса: 8011/2019 ________________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Екстремалне црне рупе у локалној Поенкареовој теорији: структура у близини хоризонта и ентропија

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, _______________

____

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Данило Ракоњац ___________________________

Број индекса: 8011/2019 ____

Студијски програм: Квантна поља, честице и гравитација _____

Наслов рада: Екстремалне црне рупе у локалној Поенкареовој

теорији: структура у близини хоризонта и ентропија _______

Ментор: Бранислав Цветковић _________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, ________________________

____

образац изјаве о коришћењу

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Екстремалне црне рупе у локалној Поенкареовој теорији: структура у близини хоризонта и ентропија

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, ________________________

____

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.