УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маријана Бабић

Хермитске структуре и геодезијске линије на четвородимензионим хиперболичким просторима

докторска дисертација

Београд, 2026

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Marijana Babić

Hermitian structures and geodesics of four-dimensional hyperbolic spaces

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

проф. др Срђан Вукмировић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

проф др Тијана Шукиловић, ванредни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Мирослава Антић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Божидар Јовановић, научни саветник,
Математички институт САНУ

Датум одбране:

Аци, Петру, Биљани и Бранку

Хермитске структуре и геодезијске линије на четвородимензионим хиперболичким просторима

Резиме

Једини некомпактни четвородимензиони симетрични простори ранга један су комплексна хиперболичка раван $\mathbb{C}H^2$ и четвородимензиони реални хиперболички простор $\mathbb{R}H^4$. Као повезане хомогене многострукости негативне секционе кривине, ови простори имају структуру реалне решиве четвородимензионе Лијеве групе са лево-инваријантном метриком. Ова Лијева група се јасно види у Поенкареовом полупросторном моделу реалног хиперболичког простора и у Зигеловом параболоидном моделу комплексне хиперболичке равни, на чијој граници се реализује Хајзенбергова група.

Хермитску структуру чине лево-инваријантна Риманова метрика и са њом сагласна комплексна структура. У овој тези је дата класификација свих таквих структура и проучаване су њихове геометријске особине. Доказано је да свака Риманова метрика реалног хиперболичког простора допушта дводимензиону сферу хермитских комплексних структура. У случају комплексне хиперболичке равни испоставља се да неке од метрика допуштају тачно четири различите хермитске комплексне структуре, а неке допуштају дводимензиону сферу таквих структура. Испитују се њихове кривинске особине, група холономије и ауто-дуалност. Показујемо да је стандардна метрика комплексне хиперболичке равни једина Келерова метрика у оквиру добијене класификације, док су све Риманове метрике реалног хиперболичког простора Ајнштајнове.

Геодезијске линије решивих Лијевих група које одговарају просторима $\mathbb{C}H^2$ и $\mathbb{R}H^4$ у односу на све могуће лево-инваријантне Риманове метрике проучавамо помоћу Ојлер-Арнољдових једначина, којима се систем диференцијалних једначина другог реда на Лијевој групи своди на систем једначина првог реда на одговарајућој Лијевој алгебри. Нумеричким решавањем добијених система диференцијалних једначина омогућена је визуализација геодезијских линија и геодезијских сфера.

Кључне речи: лево-инваријантне метрике, хермитске комплексне структуре, симетрични простори ранга један, комплексна хиперболичка раван, реални хиперболички простор, Ојлер-Арнољдове једначине, геодезијске линије, геодезијске сфере.

Научна област: Математика
Ужа научна област: Геометрија
УДК број: 514.765, 512.554 (043.3)

Hermitian structures and geodesics of four-dimensional hyperbolic spaces

Abstract

The only non-compact four-dimensional rank-one symmetric spaces are the complex hyperbolic plane $\mathbb{C}H^2$ and the four-dimensional real hyperbolic space $\mathbb{R}H^4$. As connected homogeneous manifolds of negative sectional curvature, these spaces admit the structure of a four-dimensional real solvable Lie group equipped with a left-invariant metric. This Lie group appears naturally in the Poincaré half-space model of real hyperbolic space and in the Siegel paraboloid model of the complex hyperbolic plane. The boundary of the paraboloid model carries the structure of the Heisenberg group.

Hermitian structures consist of a left-invariant Riemannian metric together with a compatible complex structure. In this thesis, all such structures are classified and their geometric properties are studied. It is shown that every Riemannian metric on real hyperbolic space admits a two-dimensional sphere of Hermitian complex structures. In the case of the complex hyperbolic plane, some metrics admit exactly four distinct Hermitian complex structures, while others admit a two-dimensional sphere of such structures. Their curvature properties, holonomy groups, and self-duality are investigated. It is shown that the standard metric on the complex hyperbolic plane is the unique Kähler metric within the obtained classification, whereas all Riemannian metrics on real hyperbolic space are Einstein.

Geodesics on the solvable Lie groups of the spaces $\mathbb{C}H^2$ and $\mathbb{R}H^4$, with respect to all possible left-invariant Riemannian metrics, are studied in this thesis using the Euler–Arnold equations. These equations effectively reduce a system of second-order differential equations on a Lie group to a system of first-order equations on the corresponding Lie algebra. Numerical solutions of these equations enable the visualization of geodesics and geodesic spheres.

Keywords: left-invariant metrics, Hermitian complex structures, rank-one symmetric spaces, complex hyperbolic plane, real hyperbolic space, Euler–Arnold equations, geodesics, geodesic spheres.

Academic discipline : Mathematics
Academic sub-discipline : Geometry
UDK number: 514.765, 512.554 (043.3)

Захвалница

Огромну захвалност дугујем пре свега свом ментору, професору Срђану Вукмировићу. Током година имала сам прилику да од њега учим на различите начине: као студент основних и докторских студија, током израде мастер рада и докторске дисертације, као и кроз заједнички рад у настави, науци и на конференцијама. Имао је велики утицај на то да геометрију одаберем као област свог научног рада, а затим и да докторске студије успешно приведем крају. Његова несебична помоћ, подршка и мотивација биле су од непроцењивог значаја током рада на овој дисертацији, док су креативност, радозналост и интуиција биле покретач истраживања из којих су настали научни радови. Научио ме је да математика може бити игра.

Чланови комисије, професорке Тијана Шукиловић и Мирослава Антић, као и професор Божидар Јовановић, својим пажљивим читањем, коментарима и сугестијама значајно су унапредили квалитет ове тезе, на чему сам им неизмерно захвална.

Посебну захвалност дугујем професорки Тијани Шукиловић, која је током свих ових година умела да буде пријатељ и подршка када је било потребно, али и довољно строга да ме натера да испоштујем рокове онда када је то било неопходно. Такође, имала сам привилегију да неколико година учествујем у редовним састанцима са ментором, професорком Тијаном и професорком Недом Бокан. Ти састанци су ми омогућили да стекнем увид у њихов начин размишљања и истраживања и да видим како приступају новим проблемима. Користим прилику да им се захвалим и да истакнем да су били и остали узор за упорност, истрајност, бесконачну енергију, радозналост и ентузијазам.

Од срца захваљујем колегиници Андријани Декић не само на помоћи у писању ове тезе, већ и на свим некада лепим, некада тешким тренуцима које смо заједно провеле у учењу за испите на докторским студијама, као и у заједничким истраживањима чији су резултати објављени у нашим радовима.

Свим професорима Катедре за геометрију који су ми предавали на основним и докторским студијама, захвална сам на свему што су ме научили. Већини сам имала част да будем асистент док сам радила на Математичком факултету. Колегама асистентима и сарадницима са којима сам дуго година делила курсеве и испите захваљујем на сјајној сарадњи. Заиста је било задовољство радити са вама.

Захваљујем и садашњим колегама са Одељења за механику Математичког института САНУ на подршци, стрпљењу и разумевању.

Семинар Одељења за механику и Геометријски семинар, који се једном недељно одржавају на Математичком институту, веома су ми значили током свих ових година, како да чујем излагања других истраживача, тако и да презентујем своје резултате, поставим питања и учествујем у вредним дискусијама. Захваљујем свима који су улагали своје време и енергију како би се ти семинари одржавали много пре мог доласка, као и онима који ће омогућити да трају и за генерације које долазе.

Највише захваљујем својој породици и пријатељима, што су веровали у мене и мотивисали ме да завршим докторске студије. Без њихове љубави и подршке ова теза не би била написана.

Београд, 2026. године Маријана Бабић

Садржај

Увод

Симетрични простори су један од основних предмета проучавања диференцијалне геометрије. Међу њима посебно место заузимају некомпактни симетрични простори ранга један, који представљају примере повезаних хомогених многострукости негативне секционе кривине. То су реални, комплексни и кватернионски хиперболички простори, као и Кејлијева хиперболичка раван. У реалној димензији четири једини такви простори су комплексна хиперболичка раван $\mathbb{C}H^2$ и реални четвородимензиони хиперболички простор $\mathbb{R}H^4$. Први је простор константне холоморфне секционе кривине, а други је простор константне секционе кривине. Оба простора су Ајнштајнове многострукости, а комплексна хиперболичка раван је додатно и Келерова.

Са становишта теорије симетричних простора ове многострукости су детаљно проучаване и имају веома богату геометрију (видети на пример [21]). Међутим, у литератури се ређе истиче чињеница да ови простори имају и структуру решивих Лијевих група са лево-инваријантним метрикама. Да бисмо их разликовали од класичних симетричних простора $\mathbb{C}H^2$ и $\mathbb{R}H^4$, ове Лијеве групе означавамо са $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$.

Поред стандардних Ајнштајнових метрика, Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ допуштају читаву фамилију међусобно неизометричних лево-инваријантних метрика. Сваки позитивно дефинитни скаларни производ на Лијевој алгебри одређује левим транслацијама јединствену лево-инваријантну метрику на Лијевој групи, и обрнуто. Због тога класе еквиваленције неизометричних лево-инваријантних Риманових метрика одговарају орбитама групе аутоморфизама Лијеве алгебре која дејствује на простору симетричних позитивно дефинитних матрица. У тези најпре представљамо класификацију тих метрика, а затим проучавамо геометрију Лијевих група $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ са произвољним Римановим лево-инваријантним метрикама.

Под хермитском структуром подразумевамо пар који чине лево-инваријантна метрика и са њом сагласна комплексна структура. У тези је дата класификација свих Риманових хермитских структура на Лијевим групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$. Стандардна метрика комплексне хиперболичке равни је једина Ајнштајнова метрика из класификације, и једина која допушта Келерову структуру. На реалном хиперболичком простору су све лево-инваријантне Риманове метрике Ајнштајнове и исте до на константу. Показано је да свака метрика из класификације на $\mathcal{CH}^2$ допушта најмање четири хермитске комплексне структуре. Једна класа метрика на $\mathcal{CH}^2$, као и све метрике на $\mathcal{RH}^4$, допуштају дводимензионе сфере хермитских комплексних структура [75].

Следећи проблем који разматрамо јесте одређивање геодезијских линија и геодезијских сфера у односу на класификоване лево-инваријантне Риманове метрике. Свакој геодезијској линији на Лијевој групи одговара придружена крива на Лијевој алгебри, дата Ојлер-Арнољдовом једначином [1]. На тај начин се систем диференцијалних једначина другог реда који описује геодезијске линије на групи своди на систем диференцијалних једначина првог реда на алгебри. Геодезијске линије Келерове метрике комплексне хиперболичке равни су добро познате [21], док су геодезијске у односу на остале лево-инваријантне метрике на $\mathcal{CH}^2$ разматране у раду [4]. Геодезијске реалних хиперболичких простора су проучаване у раду [76]. Нумеричко решавање ових система једначина омогућава визуализацију геодезијских сфера. Пошто смо се у мастер раду [5] бавили визуализацијом тродимензионог хиперболичког простора $\mathbb{R}H^3$, визуализација хиперболичких простора $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ је природан наставак тог истраживања.

У првој глави ове дисертације уводимо структуру Лијевих група на четвородимензионим хиперболичким просторима. Ивасава декомпозиција представља разлагање групе изометрија хиперболичких простора на компактан, нилпотентан и Абелов део. Полудиректан производ нилпотентног и Абеловог дела делује просто транзитивно на одговарајући простор и тиме му даје структуру решиве Лијеве групе. У реалном случају, ова структура се најбоље види у Поенкареовом полупросторном моделу хиперболичког простора. Еквивалент овог модела у комплексном случају је Зигелов параболоидни модел комплексне хиперболичке равни. Граница, односно апсолута овог модела има природну структуру Хајзенбергове групе. Ако посматрамо све орисфере са центром у једној издвојеној бесконачно далекој тачки пројективног простора, добијамо фолијацију хиперболичке равни орисферама које имају исту структуру Хајзенбергове групе као и граница модела. Због тога у параболоидном моделу користимо орисферне координате [22, 56] изведене из ове фолијације. Из закона множења изводимо комутаторе одговарајућих Лијевих алгебри, а затим повезујемо добијене алгебре са постојећим класификацијама. На крају посматрамо реалну и комплексну хиперболичку раван из угла симетричних простора.

Аутоморфизми Лијевих алгебри ch_2 и rh_4, као и класификација неизометричних лево-инваријантних Риманових метрика су приказани у другој глави.

Класификација хермитских комплексних структура у односу на добијене лево-инваријантне метрике дата је у трећој глави. Ако је g Риманова метрика на многострукости, а J комплексна структура, онда је J хермитска ако је сагласна са метриком, тј. ако важи $g(X, Y) = g(JX, JY)$ за сва векторска поља X и Y. У добијеној класификацији на Лијевој алгебри ch_2 појављује се сфера хиперкомплексних структура из рада Барберис [7] у коме су класификоване све хиперкомплексне структуре на четвородимензионим Лијевим алгебрама. У случају стандардне Ајнштајнове метрике на оба простора, структуре из наше класификације одговарају класама холоморфно еквивалентних структура из радова Овандо [53, 54].

Кривинске особине ових простора се испитују у четвртој глави. За сваку метрику из класификације израчунати су Риманов тензор кривине, Ричијев тензор, скаларна и секциона кривина. На Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$ показано је да само стандардна метрика допушта Келерову структуру. Доказано је да све лево-инваријантне Риманове метрике Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ имају пуну групу холономије, изузев Келерове метрике, чија је група холономије унитарна група $U(2)$. Све метрике на $\mathcal{RH}^4$ имају константну негативну секциону кривину и пуну групу холономије.

У петој глави тражимо геодезијске линије за произвољне Риманове лево-инваријантне метрике. Теорема 5.1 даје Ојлер-Арнољдове једначине за криву $\gamma(t)$ Лијеве алгебре ch_2 која одговара геодезијској линији $c(t)$ произвољне лево-инваријантне Риманове метрике Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$. Овај резултат се у наредном поглављу користи за визуализацију геодезијских сфера. Одређене су криве Лијеве алгебре ch_2 које одговарају геодезијским линијама Келерове метрике. У последици 5.1 формулисан је проблем реконструкције одговарајућих кривих на групи $\mathcal{CH}^2$. Такође су одређене све тотално геодезијске подмногострукости Келерове метрике и показано је да се минимум секционе кривине постиже на комплексним, а максимум на тотално реалним подмногострукостима. На крају су експлицитно израчунате геодезијске линије Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$ за све Риманове лево-инваријантне метрике.

Помоћу програма Волфрам математика у шестој глави визуализујемо геодезијске линије Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ које садрже неутрал, као и геодезијске сфере са центром у неутралу.

1 Структура Лијеве групе на хиперболичким просторима

1.1 Некомпактни симетрични простори ранга један

Захваљујући резултатима Хајнцеа [27, 28], хиперболички простори се могу посматрати као решиве Лијеве групе са лево-инваријантним метрикама. Наиме, свака повезана хомогена многострукост непозитивне секционе кривине допушта транзитивно дејство решиве групе изометрија [79], па се може представити као хомогени простор облика

$$M = S/L,$$

где је S повезана, затворена, решива подгрупа групе изометрија, а L компактна изотропна подгрупа. На основу тога, Хајнце је показао да у случају строго негативне секционе кривине постоји решива Лијева група која делује просто транзитивно на M, односно

Теорема 1.1. *[27] Повезана хомогена многострукост негативне кривине се може представити као решива Лијева група са лево-инваријантном метриком.*

Риманова многострукост је **равна** ако је тензор кривине идентички једнак нули. Ако је M Риманов симетрични простор, **ранг** простора M је максимална димензија равне тотално геодезијске подмногострукости [29, стр. 245]. У даљем тексту, за основна тврђења из теорије Лијевих група, хомогених и симетричних простора користићемо уџбеник Хелгасона [29].

Испитујући решиве Лијеве алгебре чија изводна алгебра има кодимензију један, Хајнце је добио широку класу хомогених многострукости негативне секционе кривине, чиме је показао да некомпактни симетрични простори ранга један нису једини примери таквих простора [27]. Полазећи од структуре ових Лијевих алгебри, добио је једноставну класификацију некомпактних симетричних простора ранга један без коришћења коренских система. Овај резултат је специјалан случај потпуне класификације симетричних простора коју је дао Ели Картан у низу радова из двадесетих и тридесетих година двадесетог века [12,13].

Последица 1.1. *[27] Сви комплетни, некомпактни, повезани симетрични простори ранга један су хиперболички простори $\mathbb{R}H^n$, $\mathbb{C}H^n$, $\mathbb{H}H^n$ и $\mathbb{O}H^2$. Секциона кривина је у реалном случају константна и једнака*

$$K = -c^2,$$

док у комплексном, кватернионском и октонионском случају важи

$$-4c^2 \leq K \leq -c^2,$$

за неко $c \neq 0$.

Посматрајмо сада некомпактне симетричне просторе ранга један. При Ивасава декомпозицији полупросте повезане групе изометрија на компактни, Абелов и нилпотентни део [29, стр. 270]

$$G = KAN,$$

решива подгрупа $S = AN$ групе изометрија G дејствује просто транзитивно на многострукост

$$M = G/K, \tag{1.1}$$

чиме јој даје структуру решиве Лијеве групе.

Реални, комплексни и кватернионски хиперболички простори, као и Кејлијева хиперболичка раван имају реалне полупросте групе изометрија. Њихова конкретна реализација као симетричних простора облика (1.1) је:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}H^n &= SO_0(1,n)/SO(n),\\
\mathbb{C}H^n &= SU(1,n)/S(U(1)\times U(n)),\\
\mathbb{H}H^n &= Sp(1,n)/(Sp(1)\times Sp(n)),\\
\mathbb{O}H^2 &= F_{4(-20)}/Spin(9).
\end{aligned}$$

$SO_0(1,n)$ је компонента повезаности идентитета специјалне ортогоналне групе $SO(1,n)$, односно група линеарних трансформација које чувају реалну квадратну форму сигнатуре $(1,n)$ и оријентацију времена.

Група $SU(1,n)$ се састоји од комплексних линеарних трансформација које чувају хермитску форму сигнатуре $(1,n)$, док $Sp(1,n)$ представља групу кватернионских линеарних трансформација које чувају кватернионску хермитску форму сигнатуре $(1,n)$.

Група $F_{4(-20)}$ представља некомпактну реалну форму комплексне Лијеве групе специјалног типа F_4. Димензија ове групе је 52, а -20 означава индекс Килингове форме одговарајуће Лијеве алгебре.

Одговарајуће Лијеве алгебре полупростих група изометрија ових простора су просте.

У реалној димензији четири постоје само два симетрична простора ранга један: комплексна хиперболичка раван и реални хиперболички простор, јер је кватернионска хиперболичка права $\mathbb{H}H^1$ изоморфна простору $\mathbb{R}H^4$:

$$\mathbb{H}H^1 = Sp(1,1)/(Sp(1)\times Sp(1)) \cong SO_0(1,4)/SO(4) = \mathbb{R}H^4.$$

У наставку рада описујемо моделе комплексне хиперболичке равни $\mathbb{C}H^2$, који омогућавају да се експлицитно одреди структура одговарајуће Лијеве групе.

1.2 Модели комплексне хиперболичке равни

Дефинишимо стандардне моделе комплексне хиперболичке равни $\mathbb{C}H^2$: пројективни модел, Бергманов модел лопте и Зигелов параболоидни модел.

Теоријски део излагања у овој глави прати приступ из књига Паркера [56] и Голдмана [21].

Најпре размотримо на који начин хермитске матрице задају хермитске форме на комплексним просторима. Ако је $A = (a_{ij})$ комплексна матрица, њена хермитски адјунгована матрица је $A^* = \overline{A}^T = (\overline{a}_{ji})$. Кажемо да је матрица A **хермитска** ако важи $A = A^*$.

Нека је $\mu \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A, а $X \in \mathbb{C}^n$ одговарајући сопствени вектор. Ако X посматрамо као колону у $\mathbb{C}^n$, тада важи

$$\mu X^* X = X^*(\mu X) = X^* A X = X^* A^* X = (AX)^* X = (\mu X)^* X = \overline{\mu} X^* X.$$

Пошто је $X^* X$ реалан број различит од нуле, следи да је сопствена вредност μ реална. Свакој хермитској матрици A формата $n \times n$ природно придружујемо хермитску форму

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

дефинисану са

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^* A \mathbf{z},$$

где векторе $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$ представљамо матрично колонама у $\mathbb{C}^n$. Приметимо да за свако $\lambda \in \mathbb{C}$ важи

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle &\in \mathbb{R}, \\ \langle \mathbf{z}, \lambda \mathbf{w} \rangle &= \overline{\lambda} \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle, \\ \langle \lambda \mathbf{z}, \lambda \mathbf{w} \rangle &= |\lambda|^2 \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

На комплексном векторском простору $V = \mathbb{C}^3$ посматрамо хермитске матрице сигнатуре $(2,1)$:

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

које одређују хермитске форме

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_1 = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2 - z_3 \overline{w}_3, \qquad \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_2 = z_1 \overline{w}_3 + z_2 \overline{w}_2 + z_3 \overline{w}_1. \tag{1.2}$$

Ове форме дају две еквивалентне реализације специјалне унитарне групе типа $(1,2)$

$$\begin{aligned} SU(1,2) &= \{A \mid A^* E_{21} A = E_{21},\ \det A = 1\}, \\ \widetilde{SU}(1,2) &= \{A \mid A^* \widetilde{E}_{21} A = \widetilde{E}_{21},\ \det A = 1\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Простор V са хермитском формом сигнатуре $(2,1)$ означимо са $\mathbb{C}^{2,1}$. У даљем тексту користићемо индекс када је потребно нагласити коју форму посматрамо. Када индекс није наведен, тврђење важи независно од избора хермитске форме.

Вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1} \backslash \{0\}$ је **негативан (временски)** ако је $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0$, **изотропан (светлосни)** ако је $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0$, или **позитиван (просторни)** ако је $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0$.

Приметимо да множење произвољним комплексним бројем $\lambda \neq 0$ не мења тип вектора, зато што важи

$$\langle \lambda \mathbf{z}, \lambda \mathbf{z} \rangle = |\lambda|^2 \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle.$$

Релација еквиваленције

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

даје пројективизацију простора $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2,1}) = \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} / \sim .$$

Комплексна права $l \subset \mathbb{C}^{2,1}$ је **негативна, изотропна** или **позитивна** ако је било који ненула вектор који јој припада редом негативан, изотропан или позитиван. **Пројективни модел** комплексног хиперболичког простора је скуп свих негативних правих. Његова граница се састоји од свих изотропних правих.

1.2.1 Модел лопте и параболоидни модел

Остале стандардне моделе комплексне хиперболичке равни добијамо тако што пројективни модел пресечемо са хиперравни $z_3 = 1$, редом, за прву и другу хермитску форму. Модел лопте и параболоидни модел су пресеци ове хиперравни са негативним правама.

- За форму E_{21}, вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, 1) \in \mathbb{C}^{2,1}$ је негативан ако и само ако важи

  $$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_1 = z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 - 1 < 0,$$

  односно

  $$|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1.$$

  Ово је унутрашњост јединичне сфере у $\mathbb{C}^2$. На овај начин добијамо **модел лопте**, односно **Бергманов модел** комплексне хиперболичке равни:

  $$\mathbf{B} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \right\}.$$

  Граница модела је сфера S^3

  $$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

- За форму $\widetilde{E}_{21}$, вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, 1) \in \mathbb{C}^{2,1}$ је негативан ако и само ако важи

  $$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_2 = z_1 + z_2 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 < 0,$$

  односно

  $$2\,\mathrm{Re}(z_1) + |z_2|^2 < 0.$$

  На овај начин добијамо **Зигелов домен** или **параболоидни модел** комплексне хиперболичке равни

  $$\mathbf{S} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; 2\,\mathrm{Re}(z_1) + |z_2|^2 < 0 \right\}.$$

Тачке границе модела, $(z_1, z_2) \in \partial\mathbf{S}$, задовољавају једначину

$$2\,\mathrm{Re}(z_1) + |z_2|^2 = 0.$$

Ако означимо $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, овај услов постаје

$$2a_1 + a_2^2 + b_2^2 = 0.$$

Променљива b_1 је слободна, па је граница параболички цилиндар

$$a_1 = -\frac{a_2^2 + b_2^2}{2}.$$

Зигелов домен се компактификује једном бесконачно далеком тачком q_∞, чиме граница постаје дифеоморфна са сфером $\mathbb{S}^3$. На граници пројективног модела, тачки q_∞ одговара изотропан вектор $\mathbf{q}_\infty = (1, 0, 0) \in \mathbb{C}^{2,1}$.

1.2.2 Пресликавања између модела

Кејлијева трансформација је линеарно пресликавање које повезује две хермитске форме исте сигнатуре. Она није јединствена, јер се може компоновати са елементима групе $U(2,1)$ који чувају одговарајуће хермитске форме. Посматрајмо трансформацију дату матрицом

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ова трансформација је инволуција, тј. важи $C^{-1} = C$. Такође, матрица C је хермитска, јер је $C^* = C$. Одатле следи

$$C^* E_{21} C = C E_{21} C = \widetilde{E}_{21},$$

односно Кејлијева трансформација преводи хермитску форму одређену матрицом E_{21} у хермитску форму одређену матрицом $\widetilde{E}_{21}$. Тиме омогућава прелаз са модела лопте на параболоидни модел и обрнуто.

Приметимо да за сваки негативан вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}$, у односу на обе хермитске форме (1.2) важи $z_3 \neq 0$. Зато можемо да дефинишемо пројекцију

$$\pi : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}),$$

која омогућава прелаз из пројективног модела у одговарајуће афине моделе, тј. у модел лопте и параболоидни модел. Обрнуто, из афиних модела прелазимо у пројективни модел тако што тачки (z_1, z_2) придружимо комплексну праву одређену вектором $(z_1, z_2, 1)$.

1.2.3 Орисферне координате параболоидног модела

Орисферне координате у параболоидном моделу комплексног хиперболичког простора димензије n су први увели Голдман и Паркер у раду [22]. Ове координате су посебно значајне, јер се у њима најјасније види структура Лијеве групе. Наиме, коренска декомпозиција Лијеве алгебре групе изометрија $SU(1,n)$ индукује природне координате на апсолути параболоидног модела комплексног хиперболичког простора, чиме јој даје структуру Хајзенбергове групе (детаљно изведено у Голдмановој књизи [21]). Голдман и Паркер су посматрали фолијацију комплексног хиперболичког простора произвољне димензије орисферама са центром у фиксираној тачки апсолуте q_∞. Геодезијска перспектива индукована параболичким праменом реалних геодезијских кроз q_∞ пројектује структуру Хајзенбергове групе са апсолуте на орисфере. На тај начин се на сваку орисферу уводи структура Хајзенбергове групе. Овако уведене Хајзенбергове координате заједно са функцијом висине граде систем орисферних координата [22]. Погледајмо како то изгледа конкретно у параболоидном моделу комплексне хиперболичке равни.

Фиксирајмо $x \in \mathbb{R}^+$. Посматрајмо скуп свих тачака Зигеловог домена

$$(z_1, z_2) \in \mathbf{S},$$

чији одговарајући вектори пројективног модела

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, 1) \in \mathbb{C}^{2,1}$$

задовољавају услов

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_2 = -2x.$$

По дефиницији хермитске форме $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$, то је

$$z_1 + \overline{z}_1 + |z_2|^2 = -2x,$$

односно

$$2\,\mathrm{Re}(z_1) = -|z_2|^2 - 2x.$$

Ако уведемо ознаку

$$z_2 = \sqrt{2}\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

тада претходни услов постаје

$$\mathrm{Re}(z_1) = -|\zeta|^2 - x,$$

па z_1 можемо да запишемо

$$z_1 = -|\zeta|^2 - x + iv,$$

где је $v \in \mathbb{R}$ имагинарни део комплексног броја z_1.

Означимо са $\mathcal{O}_x$ скуп свих тачака $\mathbb{C}^2$ чији одговарајући вектори у $\mathbb{C}^{2,1}$ задовољавају услов $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_2 = -2x$. Овај скуп називамо **орисфера висине** x. Скуп $\mathcal{O}_0 = \partial\mathbf{S}$ чини границу или **апсолуту** параболоидног модела.

Веза између **орисферних** (x, ζ, v) и **Зигелових координата** (z_1, z_2) параболоидног модела дата је формулама:

$$\begin{aligned} z_1 &= -|\zeta|^2 - x + iv, \\ z_2 &= \sqrt{2}\zeta, \end{aligned} \tag{1.4}$$

односно,

$$\begin{aligned} x &= -\operatorname{Re}(z_1) - \frac{|z_2|^2}{2}, \\ \zeta &= \frac{z_2}{\sqrt{2}}, \\ v &= \operatorname{Im}(z_1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2.4 Структура Хајзенбергове групе на орисфери

Хајзенбергова група $\mathcal{H}^3$ је скуп $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ са законом множења

$$(\zeta, v) \cdot (\xi, t) = \left(\zeta + \xi,\ v + t + 2\operatorname{Im}(\zeta\overline{\xi})\right),$$

где су $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ и $v, t \in \mathbb{R}$.

Ова група је нилпотентна у два корака, има једнодимензиони центар и представља најједноставнији пример простора са природном контактном структуром. Неутрални елемент је $(0, 0)$, а инверз елемента (ζ, v) је

$$(\zeta, v)^{-1} = (-\zeta, -v).$$

Уведимо најпре структуру Хајзенбергове групе на апсолути, односно граници Зигеловог модела.

Тачка (z_1, z_2) припада апсолути ако је одговарајући вектор пројективног модела

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, 1) \in \mathbb{C}^{2,1}$$

изотропан, односно ако $\mathbf{z}$ припада граници пројективног модела. Другим речима, за тачке са апсолуте Зигеловог модела важи

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_2 = z_1 + \overline{z}_1 + |z_2|^2 = 0.$$

У орисферним координатама (x, ζ, v), апсолута је хиперповрш дата једначином

$$\mathcal{O}_0 : \ x = 0.$$

Тачке границе пројективног модела које се сликају на апсолуту $\mathcal{O}_0$ имају координате

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, 1) = (-|\zeta|^2 + iv, \sqrt{2}\,\zeta, 1). \tag{1.6}$$

Изотропан вектор границе пројективног модела

$$\mathbf{q}_\infty = (1, 0, 0) \in \mathbb{C}^{2,1}$$

одговара бесконачно далекој тачки апсолуте Зигеловог модела q_∞. На овај начин се граница пројективног модела идентификује са компактификацијом простора $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ једном тачком.

Дефинишимо пресликавање

$$T:\mathbb{C}\times\mathbb{R}\to GL(3,\mathbb{C})$$

са

$$T(\zeta,v)=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\,\overline{\zeta} & -|\zeta|^2+iv\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,\zeta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ова трансформација припада групи изометрија комплексне хиперболичке равни $\widetilde{SU}(1,2)$, дефинисаној релацијом (1.3), јер важи

$$T(\zeta,v)^{-1}=\widetilde{E}_{21}T(\zeta,v)^*\widetilde{E}_{21}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\,\overline{\zeta} & -|\zeta|^2-iv\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\zeta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=T(-\zeta,-v).$$

Означимо са $\mathcal{K}_0$ светлосни конус у $\mathbb{C}^{2,1}$

$$\mathcal{K}_0=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^{2,1}\backslash\{0\}\mid\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle_2=0\}.$$

Пошто трансформација $T(\zeta,v)$ чува хермитску форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, она чува и светлосни конус:

$$T(\zeta,v):\mathcal{K}_0\to\mathcal{K}_0.$$

Одмах видимо да $T(\zeta,v)$ фиксира изотропан вектор $\mathbf{q}_\infty\in\mathcal{K}_0$ који одговара бесконачно далекој тачки апсолуте q_∞.

Координатном почетку апсолуте у систему орисферних координата $(0,0)\in\mathcal{O}_0$ одговара вектор светлосног конуса

$$\mathbf{o}=(0,0,1)\in\mathcal{K}_0.$$

Пошто важи

$$T(\zeta,v)(\mathbf{o})=(-|\zeta|^2+iv,\sqrt{2}\,\zeta,1),$$

видимо да се $\mathbf{o}$ слика у вектор $\mathbf{z}\in\mathcal{K}_0$ који одговара тачки апсолуте $(\zeta,v)\in\mathcal{O}_0$. Другим речима, ако идентификујемо тачке апсолуте $\mathcal{O}_0$ са одговарајућим изотропним векторима из $\mathcal{K}_0$ помоћу једнакости (1.6), можемо да кажемо да је

$$T(\zeta,v):\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$$

трансформација апсолуте која слика координатни почетак у тачку (ζ,v).

На простору $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ закон множења директно добијамо множењем матрица

$$\begin{aligned}T(\zeta,v)T(\xi,t)&=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\,\overline{\zeta} & -|\zeta|^2+iv\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,\zeta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\,\overline{\xi} & -|\xi|^2+it\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,\xi\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\,(\overline{\zeta}+\overline{\xi}) & -|\zeta|^2-|\xi|^2-2\overline{\zeta}\xi+i(v+t)\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\,(\zeta+\xi)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=T\left(\zeta+\xi,v+t+2\,\mathrm{Im}(\zeta\overline{\xi})\right).\end{aligned}$$

При последњем прелазу искористили смо

$$\begin{aligned}-|\zeta|^2 - |\xi|^2 - 2\overline{\zeta}\xi &= -|\zeta|^2 - |\xi|^2 - \zeta\overline{\xi} - \overline{\zeta}\xi + \zeta\overline{\xi} - \overline{\zeta}\xi = -|\zeta+\xi|^2 + \zeta\overline{\xi} - \overline{\zeta}\xi \\ &= -|\zeta+\xi|^2 + 2i\,\mathrm{Im}(\zeta\overline{\xi}).\end{aligned}$$

На овај начин закон множења

$$T(\zeta, v)T(\xi, t) = T\left(\zeta+\xi, v+t+2\,\mathrm{Im}(\zeta\overline{\xi})\right)$$

даје простору $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ структуру Хајзенбергове групе $\mathcal{H}^3$, а пресликавање T је хомоморфизам из $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ у групу $\widetilde{SU}(1,2)$.

Трансформацију $T(\zeta, v)$ зовемо **Хајзенбергова транслација** за вектор (ζ, v). Хајзенбергова транслација за вектор $(0, v)$ се зове **вертикална транслација** за $v \in \mathbb{R}$.

Голдман и Паркер [22] су разматрали параболички прамен реалних геодезијских кроз бесконачно далеку тачку q_∞. Овај прамен дефинише **геодезијску перспективу**, тј. пресликавање

$$\Pi_x : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_x,$$

које повезује апсолуту са орисфером висине $x > 0$

$$\Pi_x : (0, \zeta, v) \mapsto (x, \zeta, v). \tag{1.7}$$

На орисфери висине x Хајзенбергова транслација за вектор (ξ, v)

$$T(\xi, v) : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x,$$

дата је са

$$T(\xi, v):\ (x, \zeta, t) \mapsto \left(x, \zeta+\xi, v+t+2\,\mathrm{Im}(\zeta\overline{\xi})\right).$$

Уведимо сада реалне координате (x, y, z, w) тако да се координата x не мења и да важи

$$z = \mathrm{Re}(\zeta), \quad y = -\mathrm{Im}(\zeta), \quad w = \frac{1}{4}v.$$

У овим координатама добијамо реалну реализацију Хајзенбергове групе на $\mathbb{R}^3$, са законом множења

$$(y, z, w)\cdot(y', z', w') = \left(y+y',\ z+z',\ w+w'+\frac{1}{2}\left(zy'-yz'\right)\right).$$

1.3 Закон множења на групи $\mathcal{CH}^2$ и комутатори алгебре ch_2

Комплексна хиперболичка раван је симетричан простор негативне секционе кривине

$$\mathbb{C}H^2 = SU(1,2)/S(U(1)\times U(2)).$$

Посматрајмо сада реалну репрезентацију групе изометрија $SU_{\mathbb{R}}(1,2)$. При њеној Ивасава декомпозицији

$$SU_{\mathbb{R}}(1,2) = KAN,$$

компактни део K је изоморфан унитарној групи $U(2)$, нилпотентни део N је тродимензиона Хајзенбергова група $\mathcal{H}^3$, док је A једнодимензиона Абелова група. У орисферним координатама параболоидног модела групу N чине Хајзенбергове транслације описане у претходном поглављу. Потпуно решива група

$$\begin{aligned}\mathcal{CH}^2 = AN = \mathbb{R}^+ \ltimes \mathcal{H}^3 = \mathbb{R}^+ \ltimes (\mathbb{C} \ltimes \mathbb{R}) = \\ = \{(x,y,z,w) \mid x \in \mathbb{R}^+,\ \ (y,z,w) \in \mathcal{H}^3\} \\ = \{(x,\zeta,w) \mid x \in \mathbb{R}^+,\ \ \zeta \in \mathbb{C},\ \ w \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

дејствује просто транзитивно на комплексну хиперболичку раван, дајући јој структуру реалне решиве Лијеве групе. Приметимо да, иако је простор $\mathbb{C}H^2$ комплексна многострукост, група $\mathcal{CH}^2$ није комплексна Лијева група.

Лијева група $\mathcal{CH}^2$ припада класи хармонијских NA група (прилог A). Закон множења на овим групама добија се применом Кампбел-Бејкер-Хаусдорфове формуле [70, стр. 106 и 162]. Конкретно, операција множења на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$, задата у орисферним координатама, има облик

$$(x,y,z,w)\cdot(x',y',z',w') = \left(xx',\ y+\sqrt{x}y',\ z+\sqrt{x}z',\ w+xw'+\frac{1}{2}\sqrt{x}(zy'-yz')\right).$$

Неутрал је $e=(1,0,0,0)$, а инверзни елемент је

$$(x,y,z,w)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{\sqrt{x}}y, -\frac{1}{\sqrt{x}}z, -\frac{1}{x}w\right).$$

На основу закона множења на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$ одређујемо комутаторе Лијеве алгебре ch_2 и везу између координатне и лево-инваријантне базе.

Лема 1.1. *Веза између координатне* $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}\right)$ *и лево-инваријантне базе* (e_1,e_2,e_3,e_4) *Лијеве алгебре* ch_2 *је следећа*

$$e_1 = x\frac{\partial}{\partial x},\ \ e_2 = \sqrt{x}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial}{\partial w}\right),\ \ e_3 = \sqrt{x}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial w}\right),\ \ e_4 = x\frac{\partial}{\partial w}. \tag{1.8}$$

Доказ: Лево-инваријантна векторска поља се добијају левим транслацијама координатних векторских поља. Нека је

$$\alpha(t) = (1+t,0,0,0)$$

параметризована крива кроз неутрал $e=(1,0,0,0)$ у правцу координатног вектора $\frac{\partial}{\partial x}$, тј.

$$\alpha'(0) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ако са L_q означимо леву транслацију за произвољан елемент $q=(x,y,z,w)$ Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$, онда је

$$L_q(\alpha(t)) = q\cdot\alpha(t) = (x,y,z,w)\cdot(1+t,0,0,0) = (x(1+t),y,z,w).$$

Диференцирањем претходне једначине добијамо лево-инваријантно векторско поље e_1 :

$$\frac{d}{dt}\left(L_q(\alpha(t))\right)\Big|_{t=0} = (x,0,0,0) = x\frac{\partial}{\partial x} = e_1.$$

Аналогно, посматрајмо криве кроз неутрал, редом, у правцима координатних вектора $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial w}$:

$$\beta(t) = (1,t,0,0), \quad \gamma(t) = (1,0,t,0), \quad \delta(t) = (1,0,0,t).$$

Левим транслацијама добијамо криве

$$\begin{aligned}
L_g(\beta(t)) &= g\cdot\beta(t) = (x,y,z,w)\cdot(1,t,0,0) = \left(x, y+\sqrt{x}t, z, w+\frac{1}{2}\sqrt{x}zt\right),\\
L_g(\gamma(t)) &= g\cdot\gamma(t) = (x,y,z,w)\cdot(1,0,t,0) = \left(x, y, z+\sqrt{x}t, w-\frac{1}{2}\sqrt{x}yt\right),\\
L_g(\delta(t)) &= g\cdot\delta(t) = (x,y,z,w)\cdot(1,0,0,t) = (x,y,z,w+xt).
\end{aligned}$$

Диференцирањем претходних једначина, за $t=0$, добијају се лево-инваријантна векторска поља e_2, e_3, e_4:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(L_g(\beta(t))\right)\Big|_{t=0} &= \left(0,\sqrt{x},0,\frac{1}{2}\sqrt{x}z\right) = \sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w} = e_2,\\
\frac{d}{dt}\left(L_g(\gamma(t))\right)\Big|_{t=0} &= \left(0,0,\sqrt{x},-\frac{1}{2}\sqrt{x}y\right) = \sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w} = e_3,\\
\frac{d}{dt}\left(L_g(\delta(t))\right)\Big|_{t=0} &= (0,0,0,x) = x\frac{\partial}{\partial w} = e_4.
\end{aligned}$$

□

Матрице преласка између координатне и лево-инваријантне базе су

$$dL_q = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{x} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{x}}{2}z & -\frac{\sqrt{x}}{2}y & x \end{pmatrix}, \qquad dL_q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x}} & 0\\ 0 & -\frac{z}{2x} & \frac{y}{2x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Последица 1.2. *Сви комутатори Лијеве алгебре ch_2 различити од нула су*

$$ch_2: \quad [e_1,e_2] = \frac{1}{2}e_2, \quad [e_1,e_3] = \frac{1}{2}e_3, \quad [e_1,e_4] = e_4, \quad [e_3,e_2] = e_4. \tag{1.10}$$

Доказ: На основу леме 1.1 добијамо комутаторе директним рачуном:

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w}\right) - \left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{4\sqrt{x}}\frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{4}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}e_2,\\
[e_1, e_3] &= e_1e_3 - e_3e_1 = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w}\right) - \left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{y}{4\sqrt{x}}\frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{4}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}e_3,\\
[e_3, e_2] &= e_3e_2 - e_2e_3 =\\
&= \left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w}\right)\\
&\quad - \left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}z\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\sqrt{x}y\frac{\partial}{\partial w}\right)\\
&= \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial w} = x\frac{\partial}{\partial w} = e_4,\\
[e_1, e_4] &= e_1e_4 - e_4e_1 = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial w}\right) - x\frac{\partial}{\partial w}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial w} = e_4.
\end{aligned}
$$

Сви остали комутатори су нула. □

Лијева алгебра ch_2 је полудиректан производ једнодимензионе Абелове алгебре разапете вектором e_1 и нилпотентног Хајзенберговог идеала.

$$ch_2 = \mathbb{R} \ltimes \mathfrak{h}_3 = \mathbb{R} \ltimes (\mathbb{C} \ltimes \mathbb{R})$$

Решива је у три корака.

Прва изводна алгебра је Хајзенбергова алгебра $\mathfrak{h}_3$, разапета векторима (e_2, e_3, e_4). Једини ненула комутатор је

$$\mathfrak{h}_3 : [e_3, e_2] = e_4.$$

Алгебра $\mathfrak{h}_3$ је нилпотентна у два корака и има центар димензије један. Центар Хајзенбергове алгебре разапет је вектором e_4 и уједно представља другу изводну алгебру Лијеве алгебре ch_2.

1.4 Лијева група $\mathcal{RH}^4$

Реални хиперболички простор

$$\mathbb{R}H^4 = SO_0(1, 4)/SO(4),$$

где је $SO_0(1, 4)$ компонента повезаности идентитета групе изометрија $SO(1, 4)$, представља уопштење равни и простора Лобачевског [41–44]. Стандардни модели овог простора су хиперболоидни [58], Белтрами-Клајнов [8], Поенкареов сферни [58] и Поенкареов полупросторни модел [59, 60]. Ови модели, као и изометрије између њих, детаљно су представљени на српском језику у [5].

При Ивасава декомпозицији повезане групе изометрија простора $\mathbb{R}H^4$

$$SO_0(1,4) = KAN,$$

компактни део K је група $SO(4)$, нилпотентни је $\mathbb{R}^3$, а Абелов део је једнодимензион. Лијева група

$$\mathcal{RH}^4 = AN = \mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{R}^3,$$

дејствује просто транзитивно на реалан хиперболички простор $\mathbb{R}H^4$ и тиме му даје структуру решиве Лијеве групе.

Ова структура се најприродније види у Поенкареовом полупросторном моделу, где се $\mathbb{R}H^4$ идентификује са горњим полупростором

$$H^4_+ = \left\{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; y > 0\right\},$$

са стандардном Римановом метриком

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dy^2}{y^2}.$$

Произвољан елемент групе $\mathcal{RH}^4$ у полупросторном моделу има облик

$$q = (x_1, x_2, x_3, y) \in \mathcal{RH}^4, \quad x_1, x_2, x_3, y \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

а операција множења је дата формулом

$$(x_1, x_2, x_3, y) \cdot (x_1', x_2', x_3', y') = (x_1 + yx_1', x_2 + yx_2', x_3 + yx_3', yy').$$

Неутрал је $e = (0,0,0,1)$, а инверзни елемент је

$$(x_1, x_2, x_3, y)^{-1} = \left(-\frac{x_1}{y}, -\frac{x_2}{y}, -\frac{x_3}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

Ова група је подгрупа групе горње троугаоних матрица. У матричној репрезентацији множење има облик

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & y & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & y & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' & 0 & 0 & x_1' \\ 0 & y' & 0 & x_2' \\ 0 & 0 & y' & x_3' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yy' & 0 & 0 & x_1 + yx_1' \\ 0 & yy' & 0 & x_2 + yx_2' \\ 0 & 0 & yy' & x_3 + yx_3' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одредимо сада како изгледају лево-инваријантна векторска поља изражена преко координатних.

Лема 1.2. *Лево-инваријантна база (e_1, e_2, e_3, e_4) Лијеве алгебре rh_4, изражена преко координатне базе $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, је*

$$e_1 = y\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = y\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = y\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad e_4 = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Доказ: Посматрајмо параметризоване криве кроз неутрал $e = (0, 0, 0, 1)$ у правцу координатних вектора $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$:

$$\alpha(t) = (0, 0, 0, 1 + t), \qquad \beta(t) = (t, 0, 0, 1).$$

Ако је $q = (x_1, x_2, x_3, y)$ произвољан елемент Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$, тада левом транслацијом кривих α и β добијамо

$$\begin{aligned} L_q(\alpha(t))) &= q \cdot \alpha(t) = (x_1, x_2, x_3, y) \cdot (0, 0, 0, 1 + t) = (x_1, x_2, x_3, y(1 + t)), \\ L_q(\beta(t))) &= q \cdot \beta(t) = (x_1, x_2, x_3, y) \cdot (t, 0, 0, 1) = (x_1 + ty, x_2, x_3, y). \end{aligned}$$

Лево-инваријантна векторска поља e_4 и e_1 се добијају диференцирањем претходних једначина

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(L_q(\alpha(t)))\right|_{t=0} &= (0, 0, 0, y) = y\frac{\partial}{\partial y} = e_4 \\ \frac{d}{dt} \left(L_q(\beta(t)))\right|_{t=0} &= (y, 0, 0, 0) = y\frac{\partial}{\partial x_1} = e_1. \end{aligned}$$

Преостала лево-инваријантна поља e_2 и e_3 се рачунају на исти начин. □

Матрица преласка са лево-инваријантне базе на координатну је

$$dL_q = yI.$$

Последица 1.3. *Лијева алгебра*

$$rh_4 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$$

разапета је векторима (e_1, e_2, e_3, e_4) *са ненула комутаторима:*

$$rh_4 : [e_4, e_k] = e_k, \quad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{1.11}$$

Доказ: Директним рачуном се добија

$$[e_k, e_4] = \ e_k e_4 - e_4 e_k = y\frac{\partial}{\partial x_k}\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = 0 - y\frac{\partial}{\partial x_k} = -e_k,$$

за $k \in \{1, 2, 3\}$. Сви остали комутатори су нула. □

Алгебра rh_4 је решива у два корака. Прва изводна алгебра је комутативна и разапета векторима (e_1, e_2, e_3).

1.5 Веза са постојећим класификацијама

Лијеве алгебре ch_2 и rh_4 се појављују у класификацији четвородимензионих решивих Лијевих алгебри коју је први дао Мубараказјанов [48]. Алгебра ch_2 припада класи алгебри $g^{\alpha}_{4,8}$ и одговара случају $\alpha = 1$, док rh_4 припада класи $g^{\alpha,\beta}_{4,5}$, и добија се за $\alpha = \beta = 1$.

Такође, појављују се у класификацији симплектичких и продукт структура четвородимензионих решивих Лијевих алгебри [3, 55]. Алгебра ch_2 припада класи $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$, за $\lambda = \frac{1}{2}$, док rh_4 припада класи $\mathfrak{r}_{4,\alpha,\beta}$, за $\alpha = \beta = 1$.

У класификацији лево-инваријантних Риманових метрика на решивим Лијевим групама [15], алгебре ch_2 и rh_4 означене су редом са $A^1_{4,9}$ и $A^{1,1}_{4,5}$. У [54] се разматрају холоморфно еквивалентне комплексне структуре на решивим Лијевим групама чија је изводна алгебра тродимензиона, а ове алгебре означене су редом са H_3 и A_4.

Рад	ch_2	rh_4
[48, 65]	$g^{\alpha}_{4,8}\quad \alpha = 1$	$g^{\alpha,\beta}_{4,5}\quad \alpha = \beta = 1$
[3, 55]	$\mathfrak{d}_{4,\lambda}\quad \lambda = \frac{1}{2}$	$\mathfrak{r}_{4,\alpha,\beta}\quad \alpha = \beta = 1$
[15]	$A^1_{4,9}$	$A^{1,1}_{4,5}$
[54]	H_3	A_4

Табела 1.1. Ознаке алгебри ch_2 и rh_4 у различитим класификацијама

Обе алгебре су једнодимензионе екстензије Лијеве алгебре реалног тродимензионог хиперболичког простора [65, примедба 2.3]:

$$rh_3: \quad [f_0, f_1] = f_1, \quad [f_0, f_2] = f_2.$$

- Лијеву алгебру rh_4 добијамо проширењем алгебре rh_3 вектором f_3, где су комутатори са новим вектором дати са

  $$[f_0, f_3] = f_3, \quad [f_1, f_3] = [f_2, f_3] = 0.$$

  Када преименујемо базу

  $$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (f_1, f_2, f_3, f_0),$$

  добијамо комутаторе алгебре rh_4 облика (1.11).

- Лијеву алгебру ch_2 добијамо тако што алгебру rh_3 проширимо вектором f_3 и додамо комутаторе

  $$[f_2, f_1] = f_3, \quad [f_1, f_3] = [f_2, f_3] = 0.$$

  Из Јакобијевог идентитета следи да на базним векторима постоји још један ненула комутатор:

  $$\begin{aligned}[f_0, f_3] &= [f_0, [f_2, f_1]] = -[f_2, [f_1, f_0]] - [f_1, [f_0, f_2]] = [f_2, f_1] - [f_1, f_2] \\ &= 2[f_2, f_1] = 2f_3.\end{aligned}$$

  Након преименовања базе

  $$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{1}{2} f_0, f_1, f_2, f_3\right),$$

  добијамо комутаторе алгебре ch_2 облика (1.10).

1.6 Симетрични простори $\mathbb{R}H^2$ и $\mathbb{C}H^2$

Ели Картан је први систематски увео симетричне просторе [12, 13], а затим је дао класификацију ових простора засновану на теорији полупростих Лијевих група. Теоријски оквир излагања у овом делу прати уџбенике Хелгасона [29] и Кнапа [34], а примењен је на примерима реалне и комплексне хиперболичке равни. Разматрања из овог поглавља могу се уопштити на произвољне димензије, али смо се због прегледности, интуиције и могућности визуализације одлучили да излагање ограничимо на мале димензије. Као једноставнији пример, најпре посматрамо реалну хиперболичку раван.

1.6.1 Реална хиперболичка раван

Реална хиперболичка раван је симетричан простор, односно повезана група изометрија посечена по максималној компактној подгрупи

$$\mathbb{R}H^2 = G/K = SO_0(1,2)/SO(2).$$

Ако означимо

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{R}),$$

онда је група изометрија које чувају просторну оријентацију

$$SO(1,2) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \,|\, A^T E_{21} A = E_{21},\, \det A = 1\}.$$

Ако је $A = (a_{ij}) \in SO(1,2)$, онда из релације

$$A^T E_{21} A = E_{21}$$

за елементе треће колоне матрице A важи

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1,$$

односно

$$a_{33}^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + 1.$$

Према томе, $a_{33} \neq 0$, па група $SO(1,2)$ има две компоненте повезаности, одређене условима

$$a_{33} > 0 \qquad \text{и} \qquad a_{33} < 0.$$

Група

$$SO_0(1,2) = \{A \in SO(1,2) \mid a_{33} > 0\}$$

је компонента повезаности једнице, односно подгрупа која чува просторну и временску оријентацију.

Компактан део Ивасава декомпозиције групе $SO_0(1,2)$ је стабилизатор тачке $e_3 = (0,0,1)$

$$K = \{A \in SO_0(1,2) \,|\, Ae_3 = e_3\} \cong SO(2).$$

Лијева алгебра групе изометрија је

$$so(1,2) = \left\{ A \in gl_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^T E_{21} + E_{21} A = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^2, A \in so(2) \right\}.$$

Посматрајмо Картанову декомпозицију [34]

$$so(1,2) = \kappa \oplus p,$$

где је κ Лијева алгебра компактне групе $K \cong SO(2)$:

$$\kappa = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in so(2) \right\}, \quad p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ово разлагање има структуру [34, стр. 1]:

$$[\kappa, \kappa] \subseteq \kappa, \quad [\kappa, p] \subseteq p, \quad [p, p] \subseteq \kappa.$$

Форма E_{21} на $\mathbb{R}^3$ задаје скаларни производ Минковског

$$\langle X, Y \rangle = X^T E_{21} Y.$$

Простор $\mathbb{R}^3$ са овим производом означавамо са $\mathbb{R}^{2,1}$ и зовемо простор Минковског.

У овом простору посматрамо хиперболоид

$$\{X \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|X\|^2 = -1\}.$$

Његова горња компонента представља хиперболоидни модел реалне хиперболичке равни [1]

$$H^2_{\mathbb{R}} = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}.$$

У овом моделу група $K \cong SO(2)$ фиксира тачку $e_3 = (0,0,1)$, па делује као група ротација око осе x_3.

При идентификацији $\mathbb{R}H^2 \cong H^2_{\mathbb{R}}$, базној тачки $o = eK$ симетричног простора $\mathbb{R}H^2$ одговара тачка e_3 хиперболоидног модела $H^2_{\mathbb{R}}$, а тангентни простор у базној тачки је

$$T_o \mathbb{R}H^2 \cong p.$$

Килингова форма задаје скаларни производ на тангентном простору, тј. за $x, y \in p$, на следећи начин:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} xy^T & 0 \\ 0 & x^T y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & 0 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2. \end{aligned}$$

---

[1] Анри Поенкаре [58] је 1881. конструисао модел равни Лобачевског на хиперболоиду користећи квадратну форму коју смо овде означили са E_{21}. У истом раду је разматрао и пројекцију из тачке $(0,0,-1)$ на раван $x_3 = 0$, чиме је добио модел равни Лобачевског унутар јединичног круга, данас познат као Поенкареов диск модел. У раду [61] из 1905. године увео је светлосни конус и структуру простор-времена. Овај простор се данас назива простор Минковског, или простор Поенкаре-Минковског, по Херману Минковском, који је ове идеје даље развио и систематски изложио у радовима [46, 47].

Овако дефинисани скаларни производ који произилази из структуре симетричног простора сагласан је са рестрикцијом скаларног производа Минковског на тангентни простор хиперболоида у тачки e_3.

На симетричним просторима геодезијске линије кроз базну тачку $o = eK$ су орбите једнопараметарских група [29, стр. 208]

$$\gamma(t) = \exp(tX)o, \quad X \in p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Приметимо да за $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix} \in p$, где је $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, важи

$$X^2 = \begin{pmatrix} xx^T & 0 \\ 0 & \|x\|^2 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \|x\|^2 X, \quad X^4 = \|x\|^2 X^2,$$

одакле следи

$$X^{2k} = \|x\|^{2k-2} X^2, \quad X^{2k+1} = \|x\|^{2k} X, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Сада можемо да израчунамо једнопараметарску подгрупу

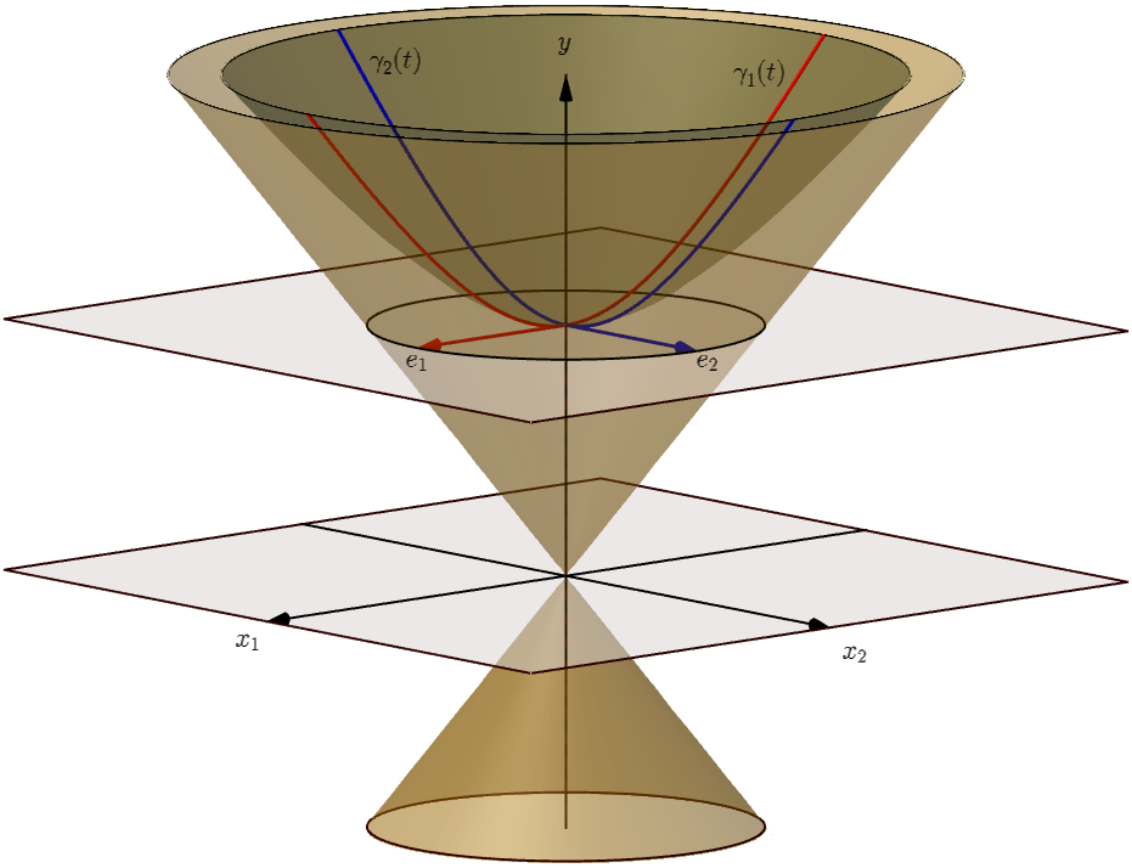
$$\begin{aligned}
\exp(tX) = exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}\right) &= I_3 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \frac{(tX)^4}{4!} + \frac{(tX)^5}{5!} + \dots \\
&= I_3 + X\left(t + \frac{t^3}{3!}\|x\|^2 + \frac{t^5}{5!}\|x\|^4 + \dots\right) \\
&\quad + X^2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\|x\|^2 + \frac{t^6}{6!}\|x\|^4 + \dots\right) \\
&= I_3 + \frac{X}{\|x\|}\left(t\|x\| + \frac{t^3}{3!}\|x\|^3 + \dots\right) \\
&\quad + \frac{X^2}{\|x\|^2}\left(-1 + 1 + \frac{t^2}{2!}\|x\|^2 + \frac{t^4}{4!}\|x\|^4 + \frac{t^6}{6!}\|x\|^6 + \dots\right) \\
&= I_3 + \frac{X}{\|x\|}\sinh(\|x\|t) + \frac{X^2}{\|x\|^2}(-1 + \cosh(\|x\|t)) \\
&= \begin{pmatrix} I_2 + \frac{\cosh(\|x\|t)-1}{\|x\|^2}xx^T & \frac{\sinh(\|x\|t)}{\|x\|}x \\ \frac{\sinh(\|x\|t)}{\|x\|}x^T & \cosh(\|x\|t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Пошто базној тачки o одговара тачка e_3 хиперболоидног модела, геодезијске линије у $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ су хиперболе

$$\gamma(t) = \exp(tX)e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(\|x\|t)}{\|x\|}x \\ \cosh(\|x\|t) \end{pmatrix}.$$

На овај начин добијамо геодезијске кроз неутрал $e_3 = (0, 0, 1)$ у правцу тангентног вектора $(x_1, x_2, 0)$. На пример, у правцима вектора $e_1 = (1, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 1, 0)$, односно за $x = (1, 0)^T$ и $x = (0, 1)^T$, геодезијске су хиперболе

$$\gamma_1(t) = \exp(te_1)e_3 = \begin{pmatrix} \sinh t \\ 0 \\ \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = \exp(te_2)e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}.$$



Слика 1.1: Геодезијске на хиперболоидном моделу реалне хиперболичке равни

1.6.2 Комплексна хиперболичка раван

Нека је $A^* = \overline{A}^T$ хермитски адјунгована матрица матрице A и нека је

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

Посматрајмо специјалну унитарну групу типа $(1, 2)$

$$G = SU(1,2) = \{A \mid A^* E_{21} A = E_{21},\ \det A = 1\}.$$

Како по дефиницији група $SU(1,2)$ чува хермитску форму задату матрицом E_{21}, она изометријски дејствује на скупу негативних правих простора $\mathbb{C}^{2,1}$. Лако се проверава да је то дејство транзитивно. Изотропна подгрупа негативне праве $\mathbb{C}e_3$ пројективног модела одређене вектором $e_3 = (0, 0, 1)$ је

$$K = S(U(2) \times U(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \;\middle|\; \det A = e^{-i\phi}, A \in U(2) \right\},$$

па је $\mathbb{C}H^2$ хомогени простор

$$\mathbb{C}H^2 = G/K = SU(1,2)/S(U(1) \times U(2)).$$

Додатно, $\mathbb{C}H^2$ је симетричан простор. Картанова инволуција [34]

$$\Theta : SU(1,2) \to SU(1,2),$$

$$\Theta(A) = (A^*)^{-1} = E_{21}AE_{21}$$

фиксира подгрупу $K = S(U(2) \times U(1))$, па је то симетрија која чини $\mathbb{C}H^2$ симетричним простором. Њен диференцијал

$$\theta = (d\Theta)_e,$$

$$\theta(M) = -M^*$$

је аутоморфизам Лијеве алгебре

$$\begin{aligned} su(1,2) &= \{M \mid M^*E_{21} + E_{21}M = 0, \mathrm{Tr}(M) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & w & z_1 \\ -\overline{w} & ix_2 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & -i(x_1+x_2) \end{pmatrix} \middle| \, z_1, z_2, w \in \mathbb{C}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Пошто је $\theta^2 = Id$, сопствене вредности су ± 1, па добијамо разлагање на сопствене потпросторе (Картанову декомпозицију)

$$su(1,2) = \kappa \oplus p,$$

где је κ сопствени простор сопствене вредности 1, а p сопствени простор вредности -1.

$$\begin{aligned} \kappa &= \{A \in su(1,2) \mid \theta(A) = A\} = \{A \in su(1,2) \mid A = -A^*\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & w & 0 \\ -\overline{w} & ix_2 & 0 \\ 0 & 0 & -i(x_1+x_2) \end{pmatrix} \middle| \, w \in \mathbb{C}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \{A \in su(1,2) \mid \theta(A) = -A\} = \{A \in su(1,2) \mid A = A^*\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Алгебра p се састоји од хермитски адјунгованих матрица, а κ од косо-хермитски адјунгованих матрица. Поново важи

$$[\kappa, \kappa] \subseteq \kappa, \quad [\kappa, p] \subseteq p, \quad [p, p] \subseteq \kappa.$$

Простор p идентификујемо са тангентним простором $\mathbb{C}H^2$ у истакнутој тачки $o = eK$

$$T_o\mathbb{C}H^2 = T_o(G/K) \cong p.$$

Пошто је $[p, p] \subseteq \kappa$, одатле следи да је коваријантни извод у тачки o

$$(\nabla_X Y)_o = \frac{1}{2}[X, Y]_p = 0,$$

где је p у индексу ознака за пројекцију на простор p.

$\mathbb{C}H^2$ има инваријантну хермитску комплексну структуру $J : p \to p$ која је дата множењем са i у простору p. Уз идентификацију

$$p(z) \sim z, \quad p(z) = Z = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix} \in p, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z^* = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{pmatrix},$$

важи

$$Jp(z) = J \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & iz \\ -iz^* & 0 \end{pmatrix} = p(iz). \tag{1.12}$$

Приметимо да важи

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y) = \frac{1}{2}[X, JY]_p - 0 = 0, \quad X, Y \in p,$$

па је ова структура паралелна,

$$\nabla_X J = 0,$$

тј. $\mathbb{C}H^2$ је Келеров простор.

Скаларни производ на p је дат Килинговом формом на $su(1,2)$.

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle = \langle Z, W \rangle = \mathrm{Tr}(ZW) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & w_2 \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} z_1\overline{w}_1 & z_1\overline{w}_2 & 0 \\ z_2\overline{w}_1 & z_2\overline{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z}_1 w_1 + \overline{z}_2 w_2 \end{pmatrix} = 2Re(z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2) \\ &= 2Re(w^*z) = w^*z + z^*w, \end{aligned}$$

за $z, w \in p$, па је

$$\langle Z, JW \rangle = \langle z, iw \rangle = (iw)^*z + z^*iw = i(z^*w - w^*z) = i\left(-2iIm(w^*z)\right) = 2Im(w^*z).$$

Одатле следи

$$w^*z = \frac{1}{2}(\langle Z, W \rangle + i\langle Z, JW \rangle). \tag{1.13}$$

Проверимо још да је J хермитска у односу на Килингову форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пошто важи

$$JZ = J \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & iz_1 \\ 0 & 0 & iz_2 \\ -i\overline{z}_1 & -i\overline{z}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

добијамо

$$\begin{aligned} \langle JZ, W \rangle &= 2Re(iz_1\overline{w}_1 + iz_2\overline{w}_2), \\ \langle Z, JW \rangle &= 2Re(-iz_1\overline{w}_1 - iz_2\overline{w}_2). \end{aligned}$$

Дакле

$$\langle JZ, W \rangle + \langle Z, JW \rangle = 0,$$

одакле следи

$$\langle JZ, W\rangle = -\langle Z, JW\rangle, \qquad \langle JZ, JW\rangle = \langle Z, W\rangle,$$

па је J хермитска у односу на $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Одредимо сада холоморфну секциону кривину. Најпре можемо да израчунамо комутатор $[Z, W] \in \kappa$, за $Z, W \in p$

$$\begin{aligned}
[Z, W] &= p(z)p(w) - p(w)p(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & w \\ w^* & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} zw^* & 0 \\ 0 & z^*w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} wz^* & 0 \\ 0 & w^*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zw^* - wz^* & 0 \\ 0 & z^*w - w^*z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

На симетричном простору оператор кривине у базној тачки o се рачуна преко комутатора [29, стр. 226] на следећи начин:

$$\begin{aligned}
R_o(Z, W)X &= -[[p(z), p(w)], p(x)] = -\left[\begin{pmatrix} zw^* - wz^* & 0 \\ 0 & z^*w - w^*z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & (zw^* - wz^*)x - x(z^*w - w^*z) \\ (z^*w - w^*z)x^* - x^*(zw^* - wz^*) & 0 \end{pmatrix} \\
&= -p((zw^* - wz^*)x - x(z^*w - w^*z)) \\
&= p(-zw^*x + wz^*x + xz^*w - xw^*z) \\
&= \frac{1}{2}(-\langle X, W\rangle Z - \langle X, JW\rangle JZ + \langle X, Z\rangle W + \langle X, JZ\rangle JW \\
&\quad + \langle W, Z\rangle X + \langle W, JZ\rangle JX - \langle Z, W\rangle X - \langle Z, JW\rangle JX) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\langle X, W\rangle Z - \langle X, JW\rangle JZ + \langle X, Z\rangle W + \langle X, JZ\rangle JW - 2\langle Z, JW\rangle JX\right).
\end{aligned}$$

У претходном рачуну смо искористили једнакости (1.12) и (1.13).

За јединични вектор X важи

$$\begin{aligned}
K(X, JX) &= \langle R(X, JX)X, JX\rangle \\
&= \frac{1}{2}(-\langle X, X\rangle\langle X, JX\rangle - \langle X, -X\rangle\langle JX, JX\rangle + \langle X, X\rangle\langle JX, JX\rangle \\
&\quad + \langle X, JX\rangle\langle -X, JX\rangle - 2\langle X, -X\rangle\langle JX, JX\rangle) = -2,
\end{aligned}$$

па видимо да је ово простор константне холоморфне секционе кривине (видети дефиницију 4.7).

Одредимо сада геодезијске линије као једнопараметарске групе генерисане векторима $Z \in p$ кроз базну тачку $o = eK$

$$\gamma(t) = \exp(tZ)o,$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix} \in p, \quad \text{где је} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z^* = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Директним рачуном видимо да важи

$$Z^2 = \begin{pmatrix} zz^* & 0 \\ 0 & z^*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1\overline{z}_2 & 0 \\ z_2\overline{z}_1 & |z_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|z\|^2 \end{pmatrix},$$

$$Z^3 = \begin{pmatrix} zz^* & 0 \\ 0 & z^*z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & zz^*z \\ z^*zz^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \|z\|^2 z \\ \|z\|^2 z^* & 0 \end{pmatrix} = \|z\|^2 Z,$$

па је

$$Z^{2(n+1)} = \|z\|^{2n} Z^2, \quad Z^{2n+1} = \|z\|^{2n} Z, \quad n \geq 1.$$

Израчунајмо једнопараметарску подгрупу за произвољно $Z \in p$.

$$\begin{aligned}
\exp(tZ) =& \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix}\right) = I_3 + tZ + \frac{(tZ)^2}{2!} + \frac{(tZ)^3}{3!} + \dots \\
&= I_3 + Z\left(t + \frac{t^3}{3!}\|z\|^2 + \frac{t^5}{5!}\|z\|^4 + \dots\right) \\
&\quad + Z^2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\|z\|^2 + \frac{t^6}{6!}\|z\|^4 + \dots\right) \\
&= I_3 + \frac{Z}{\|z\|}\left(t\|z\| + \frac{t^3}{3!}\|z\|^3 + \frac{t^5}{5!}\|z\|^5 + \dots\right) \\
&\quad + \frac{Z^2}{\|z\|^2}\left(-1 + 1 + \frac{t^2}{2!}\|z\|^2 + \frac{t^4}{4!}\|z\|^4 + \frac{t^6}{6!}\|z\|^6 + \dots\right) \\
&= I_3 + \frac{Z}{\|z\|}\sinh(\|z\|t) + \frac{Z^2}{\|z\|^2}(-1 + \cosh(\|z\|t)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 + u|z_1|^2 & uz_1\overline{z}_2 & \sinh(t\|z\|)\frac{z_1}{\|z\|} \\ uz_2\overline{z}_1 & 1 + u|z_2|^2 & \sinh(t\|z\|)\frac{z_2}{\|z\|} \\ \sinh(t\|z\|)\frac{\overline{z}_1}{\|z\|} & \sinh(t\|z\|)\frac{\overline{z}_2}{\|z\|} & \cosh(t\|z\|) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
u &= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4\|z\|^2}{4!} + \dots = \frac{1}{\|z\|^2}\left(-1 + 1 + \frac{t^2\|z\|^2}{2!} + \frac{t^4\|z\|^4}{4!} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\|z\|^2}\left(\cosh(t\|z\|) - 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Подсетимо се да пројективни модел комплексног хиперболичког простора чине негативне праве простора $\mathbb{C}^{2,1}$ са хермитском формом

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_1 = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 - z_3\overline{w}_3,$$

датом матрицом E_{21} (поглавље 1.2). Базној тачки o у овом моделу одговара негативна права чији је вектор правца $e_3 = (0, 0, 1)$. Геодезијске линије кроз o у правцу тангентног вектора $z = (z_1, z_2) \in p$ су

$$\gamma(t) = \exp(tZ)e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(t\|z\|)}{\|z\|} z \\ \cosh(t\|z\|) \end{pmatrix}.$$

За избор јединичног тангентног вектора z важи

$$\|\gamma(t)\|^2 = \sinh^2(t) - \cosh^2(t) = -1,$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\cosh(t)z_1, \cosh(t)z_2, \sinh(t)),$$

па је $\dot{\gamma}(0) = (z_1, z_2, 0)$, односно z је заиста тангентни вектор криве γ за $t = 0$.

На пример, у правцу вектора $(z_1, z_2) = (1, 0)$, геодезијска кроз $e_3 = (0, 0, 1)$ у пројективном моделу је

$$\gamma(t) = (\sinh(t), 0, \cosh(t)).$$

Када поделимо трећом координатом, односно преласком у модел лопте, видимо да у том моделу одговарајућа геодезијска има једначину

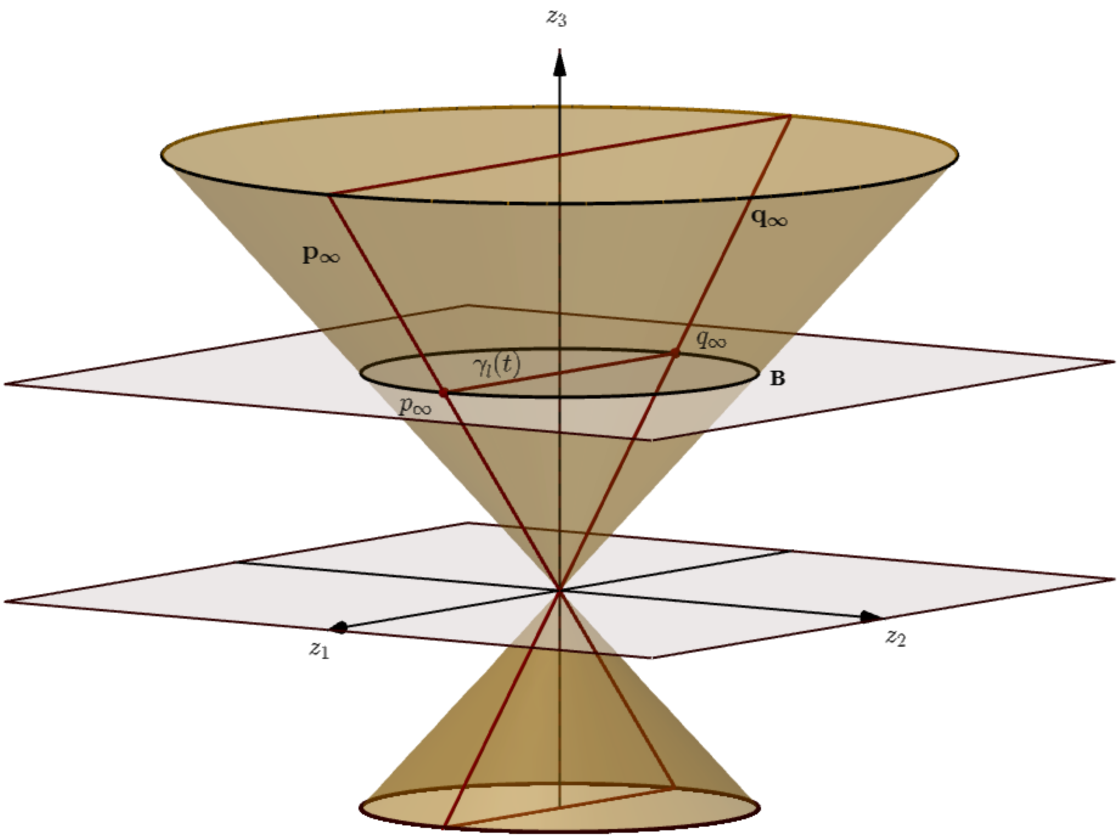
$$\gamma_l(t) = (\tanh(t), 0) \in \mathbf{B}$$

и да повезује тачке на граници

$$p_\infty = \lim_{t\to\infty} \gamma_l(t) = (1, 0), \quad \text{и} \quad q_\infty = \lim_{t\to-\infty} \gamma_l(t) = (-1, 0).$$

Вектори представници ових тачака на граници пројективног модела су

$$\mathbf{p}_\infty = \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = (1, 0, 1) \quad \text{и} \quad \mathbf{q}_\infty = \lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = (-1, 0, 1).$$



Слика 1.2: Геодезијска у правцу вектора $(1, 0)$ у моделу лопте. Пројективни и Бергманов модел $\mathbb{C}H^2$ илустровани су у поједностављеном облику: $\mathbf{B}$ је реалне димензије 4, док су праве $\mathbf{p}_\infty$ и $\mathbf{q}_\infty$ реалне димензије 2.

2 Лево-инваријантне Риманове метрике

Скаларни производ на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ левим транслацијама одређује лево-инваријантну метрику одговарајуће просто повезане Лијеве групе G. Због тога је класификација лево-инваријантних метрика на групи G еквивалентна класификацији скаларних производа на њеној Лијевој алгебри. У овом поглављу описујемо класификацију Риманових лево-инваријантних метрика на групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$, односно класификацију позитивно-дефинитних скаларних производа на одговарајућим Лијевим алгебрама ch_2 и rh_4.

Нека је S симетрична матрица позитивно дефинитног скаларног производа у некој фиксираној бази алгебре $\mathfrak{g}$. Тада матрица

$$A^T S A, \quad A \in Aut(\mathfrak{g})$$

представља исти скаларни производ записан у другој бази у којој комутатори имају исти облик. Различити скаларни производи одговарају класама еквиваленције у односу на релацију

$$S \sim A^T S A, \quad A \in Aut(\mathfrak{g}).$$

Дакле, неизоморфни скаларни производи одговарају различитим орбитама дејства групе аутоморфизама Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$. Зато фиксирамо лево-инваријантну базу са одговарајућим комутаторима, а затим посматрамо дејство групе аутоморфизама алгебре на простор симетричних матрица. Бирамо најједноставније представнике орбита, који дају представнике неизоморфних скаларних производа.

Просто повезана решива Лијева група са лево-инваријантном метриком назива се **решива многострукост**[1]. Две Риманове решиве многострукости могу бити изометричне чак и када одговарајуће Лијеве групе нису изоморфне. Гордон и Вилсон [23] су развили апстрактну теорију модификација решивих Лијевих алгебри, као и критеријум за проверу када су две Риманове решиве многострукости изометричне. У [65] овај критеријум је примењен на четвородимензионе решиве Лијеве групе, при чему је показано да су у свим случајевима изометричне метрике уједно и изоморфне. Због тога, у нашем случају орбите дејства групе аутоморфизама Лијеве алгебре дају потпуну класификацију неизометричних лево-инваријантних Риманових метрика на групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$.

Класификација лево-инваријантних Риманових и псеудо-Риманових метрика на Лијевим групама је веома интересантна област истраживања у којој је последњих деценија објављен велики број радова. Прекретницу у њеном развоју представља Милноров прегледни чланак *Кривине лево-инваријантних метрика на Лијевим групама* [45] из 1976. године. Један од резултата овог

[1] solvmanifold [38]

рада, класификација Риманових метрика на тродимензионим унимодуларним Лијевим групама коришћењем структуре векторског производа, практично је отворио врата даљим истраживањима.

Након Милноровог рада појављује се низ радова у три димензије који користе векторски производ. С. Рахмани је 1992. године класификовала Лоренцове метрике на тродимензионим унимодуларним Лијевим групама [62], а затим је у заједничком раду са Н. Рахмани класификовала и Лоренцове метрике на тродимензионој Хајзенберговој групи [63]. Кордеро и Паркер су 1997. године дали потпуну класификацију Лоренцових метрика на свим тродимензионим Лијевим групама [17].

У димензији четири није могуће применити технике засноване на векторском производу, па је потребно користити друге методе. Лаурет [37] је 1997. године класификовао Риманове метрике на нилпотентним Лијевим групама димензија три и четири. Потпуна класификација неизоморфних лево-инваријантних Риманових метрика на свим четвородимензионим Лијевим групама дата је у раду [15] из 2002. године. У тој класификацији појављују се и Риманове метрике на групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ које разматрамо у овом поглављу. Ове групе, са стандардном метриком, јављају се и у класификацији хомогених Ајнштајнових четвородимензионих простора [31] коју је Јенсен 1969. радио у оквиру своје докторске дисертације, као и у класификацији четвородимензионих Ајнштајнових Лијевих група коју су дали Карки и Томсон [32]. Лоренцове метрике на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама $H^3 \times \mathbb{R}$ и G_4 класификоване су у раду [11] из 2015. године. Резултати у неутралној сигнатури су новијег датума. Т. Шукиловић је 2016. године класификовала све лево-инваријантне метрике неутралне сигнатуре на нилпотентним Лијевим групама [66], а затим 2020. године и на свим решивим четвородимензионим Лијевим групама [65].

Један од првих резултата у вишим димензијама је класификација свих Риманових и Лоренцових лево-инваријантних метрика Хајзенбергове групе произвољне димензије [72], коју је 2015. године дао Вукмировић. Након тога су класификоване лево-инваријантне метрике произвољне сигнатуре на реалном хиперболичком простору $\mathbb{R}H^n$ методом варијације Лијевих заграда [36] и методом варијације скаларних производа [76].

Методу одређивања неизоморфних лево-инваријантних метрика преко орбита групе аутоморфизама Лијеве алгебре систематски је представио Тамару са коауторима у више прегледних радова. Риманов случај описан је у [35] и [26], а псеудо-Риманов у [36]. У тим радовима орбите су назване *модули простори*, а резултати добијени овом техником названи су *Теореме Милноровог типа*. Ове врсте тврђења обухватају класификације неизоморфних лево-инваријантних метрика на конкретним Лијевим групама, као и одређивање посебних врста метрика на ширим класама Лијевих група. Лаурет је користио орбите групе аутоморфизама алгебре за проналажење алгебарских Ричи солитона на нилпотентним [39] и решивим [40] Лијевим групама. Метрике произвољне сигнатуре на шестодимензионом простору котангентног раслојења Хајзенбергове групе класификоване су у [68].

2.1 Групе аутоморфизама Лијевих алгебри ch_2 и rh_4

Аутоморфизам Лијеве алгебре је линеарно пресликавање φ које чува комутаторе:

$$\varphi[X,Y] = [\varphi X, \varphi Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

У фиксираној лево-инваријантној бази алгебре одговарају им матрице $A = [\varphi]_e$.

Лема 2.1. *Група аутоморфизама Лијеве алгебре ch_2 је*

$$\begin{aligned} Aut(ch_2) = \Bigg\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & M & 0 \\ a & v^T & \lambda \end{pmatrix} \Bigg| \, M \in GL(2,\mathbb{R}),\ \ M^T J M = \lambda J, \\ u, v \in \mathbb{R}^2,\ \ a, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda \neq 0,\ \ u = \frac{1}{2\lambda} M J v \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где је $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ канонска симплектичка матрица.

Доказ: Посматрајмо базу (e_1, e_2, e_3, e_4) Лијеве алгебре ch_2 са комутаторима облика (1.10) и произвољан аутоморфизам $A = (a_{ij})$ у овој бази.

Пошто аутоморфизми чувају комутаторе, морају да чувају и изводне подалгебре. Прва изводна алгебра је Хајзенбергова $\mathfrak{h}_3$, разапета векторима (e_2, e_3, e_4), одакле одмах следи да су коефицијенти $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$. Друга изводна алгебра је једнодимензиона, разапета вектором e_4, па је $a_{24} = a_{34} = 0$.

Ако означимо $\lambda = a_{44}$, онда важи

$$\lambda e_4 = Ae_4 = A[e_3, e_2] = [Ae_3, Ae_2] = \left[\sum_{i=2}^{4} a_{2i} e_i, \sum_{i=2}^{4} a_{3i} e_i \right] = (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33}) e_4,$$

$$\lambda e_4 = Ae_4 = A[e_1, e_4] = [Ae_1, Ae_4] = \left[\sum_{i=1}^{4} a_{1i} e_i, \lambda e_4 \right] = \lambda a_{11} e_4,$$

па је

$$\lambda = a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33} \quad \text{и} \quad a_{11} = 1.$$

Слично, из услова

$$Ae_2 = 2[Ae_1, Ae_2], \quad \text{и} \quad Ae_3 = 2[Ae_1, Ae_3]$$

следи да је

$$a_{42} = 2a_{21}a_{32} - 2a_{31}a_{22} \quad \text{и} \quad a_{43} = 2a_{21}a_{33} - 2a_{31}a_{23}.$$

Одатле након једноставног сређивања добијамо облик (2.1) из исказа леме. $\square$

Издвојимо три типа аутоморфизама који генеришу све остале.

Лема 2.2. *Компонента јединице групе аутоморфизама Лијеве алгебре ch_2 је полудиректан производ симплектичких, дијагоналних и унипотентних аутоморфизама.*

$$Aut_0(ch_2) = P \ltimes (D \ltimes U)\,,$$

$$P = \left\{ A(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\; M^T J M = J \right\} \cong Sp(2,\mathbb{R}) \cong SL(2,\mathbb{R}),$$

$$D = \left\{ A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \;\Big|\; \alpha > 0 \right\} \cong \mathbb{R}^+,$$

$$U = \left\{ A(v,a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}Jv & I & 0 \\ a & v^T & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\; a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2 \right\} \cong \mathcal{H}^3,$$

где је $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Адјунгована репрезентација Лијеве групе је хомоморфизам групе G у групу аутоморфизама њене Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to Aut(\mathfrak{g}), \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g, \end{aligned}$$

Ако је

$$C_g(h) = ghg^{-1}, \quad g, h \in G,$$

конјугација на групи G, онда је

$$\mathrm{Ad}_g = (dC_g)_e.$$

Еквивалентно,

$$\mathrm{Ad}_g X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \exp(tX) g^{-1}, \quad g \in G,\; X \in \mathfrak{g}.$$

Центар групе G је језгро адјунговане репрезентације

$$Z(G) = Ker(\mathrm{Ad}).$$

Свака Лијева група посечена својим центром је изоморфна групи унутрашњих аутоморфизама своје Лијеве алгебре [25, стр. 66, 72]

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Ad}(G) \cong Inn(\mathfrak{g}) \trianglelefteq Aut(\mathfrak{g}),$$

где је $Inn(\mathfrak{g})$ група унутрашњих аутоморфизама Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$, односно адјунгована група алгебре $\mathfrak{g}$.

Пошто је $\mathcal{CH}^2$ решива Лијева група, њен центар је тривијалан, па је изоморфна својој адјунгованој репрезентацији и самим тим нормална подгрупа групе $Aut(ch_2)$

$$\mathcal{CH}^2 = AN = \mathbb{R}^+ \ltimes \mathcal{H}^3 \cong D \ltimes U.$$

Лема 2.3. *Група аутоморфизама Лијеве алгебре* rh_4

$$Aut(rh_4) = \left\{ \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in GL(3,\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{2.2}$$

изоморфна је са $Aff_3(\mathbb{R})$*, групом афиних трансформација простора* $\mathbb{R}^3$.

Доказ: Фиксирајмо базу (e_1, e_2, e_3, e_4) Лијеве алгебре rh_4 са комутаторима облика (1.11). Нека је $A = (a_{ij})$ матрица произвољног аутоморфизма у овој бази. За $i \in \{1,2,3\}$ важи

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ji} e_j = Ae_i = A[e_i, e_4] = [Ae_i, Ae_4] = \left[\sum_{j=1}^{4} a_{ji} e_j, \sum_{j=1}^{4} a_{j4} e_j\right] = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} a_{44} e_j.$$

Изједначавањем коефицијената уз базни вектор e_4 најпре следи да је $a_{4i} = 0$ за $i \in \{1,2,3\}$. Затим, изједначавањем коефицијената уз остале базне векторе, следи да је $a_{44} = 1$. Директном провером осталих комутатора видимо да не постоје додатне рестрикције на коефицијенте матрице аутоморфизма. □

2.2 Класификација метрика

Теорема 2.1. *Неизометрични позитивно дефинитни скаларни производи Лијеве алгебре* ch_2*, у лево-инваријантној бази са комутаторима облика (1.10), дати су матрицама*

$$S(p,b,\beta) = \begin{pmatrix} p & b & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где је $b \geq 0,\ \beta > 0,\ p - b^2 > 0.$

Доказ: Нека је $S \in GL(4,\mathbb{R})$ произвољна симетрична позитивно дефинитна матрица. Тражимо најједноставније представнике орбита под дејством групе аутоморфизама $Aut(ch_2)$ у неколико корака. Запишимо најпре S у облику блок матрице:

$$S = \begin{pmatrix} p_1 & z_0^T & l \\ z_0 & \tilde{S} & w \\ l & w^T & \bar{\beta} \end{pmatrix},$$

где је $p_1, l, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$, $z_0, w \in \mathbb{R}^2$, и $\tilde{S} \in GL(2,\mathbb{R})$.

Унипотентним аутоморфизмом $A_1(-\frac{1}{\bar{\beta}}w, 0) \in U$, где је U дефинисано у леми 2.2, најпре поништимо вектор w. Поједностављена матрица скаларног производа је сада

$$S_1 = A_1^T S A_1 = \begin{pmatrix} p_2 & z_1^T & l \\ z_1 & \bar{S} & 0 \\ l & 0^T & \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Пошто је полазна матрица S позитивно дефинитна, и матрица $\bar{S}$ је позитивно дефинитна. На основу Вилијамсонове теореме [78], постоји симплектичка матрица $M \in Sp(2,\mathbb{R})$ која дијагонализује позитивно дефинитну симетричну матрицу $\bar{S}$ и трансформише је у Вилијамсонову дијагоналну форму

$$d_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

где је $\sigma = \sqrt{\det \bar{S}} > 0$ симплектичка сопствена вредност матрице $\bar{S}$. Другим речима

$$M^T \bar{S} M = d_\sigma.$$

Оваква симплектичка матрица M није јединствена. Ако је

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} a & h \\ h & c \end{pmatrix},$$

онда је

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{h}{\sqrt{|a|\sigma}} & \sqrt{\frac{\sigma}{|a|}} \\ \sqrt{\frac{|a|}{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}$$

пример симплектичке матрице која трансформише $\bar{S}$ у Вилијамсонову дијагоналну форму. Ако сада одаберемо аутоморфизам

$$A_2(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P,$$

скаларни производ постаје

$$S_2 = A_2^T S_1 A_2 = \begin{pmatrix} p_2 & z_1^T M & l \\ M^T z_1 & M^T \bar{S} M & 0 \\ l & 0 & \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & z_2^T & l \\ z_2 & d_\sigma & 0 \\ l & 0 & \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Поништимо сада l унипотентним аутоморфизмом $A_3\left(0, -\frac{l}{\bar{\beta}}\right) \in U$:

$$S_3 = A_3^T S_2 A_3 = \begin{pmatrix} p_2 - \frac{l^2}{\bar{\beta}} & z_2^T & 0 \\ z_2 & d_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & z_2^T & 0 \\ z_2 & d_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Дијагонални аутоморфизам $A_4\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \in D$ своди дијагоналну матрицу d_σ на јединичну

$$S_4 = A_4^T S_3 A_4 = \begin{pmatrix} p & \frac{1}{\sqrt{\sigma}} z_2^T & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} z_2 & \frac{1}{\sigma} d_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\beta}}{\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & z^T & 0 \\ z & I & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Ако је $x_1^2 + x_2^2 = 0$, онда је доказ завршен, матрица скаларног производа је облика (2.3). У супротном, посматрамо аутоморфизам

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & h & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P,$$

где је

$$a = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad h = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad c = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad d = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Дејством ове ротације матрица скаларног производа добија тражени облик

$$S_5 = A_5^T S_4 A_5 = \begin{pmatrix} p & ax_1 + cx_2 & hx_1 + dx_2 & 0 \\ ax_1 + cx_2 & a^2 + c^2 & ah + cd & 0 \\ hx_1 + dx_2 & ah + cd & h^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & b & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$b \geq 0, \ \beta > 0, \ p - b^2 > 0.$ □

Означимо са $g(p, b, \beta)$ метрику на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$ која одговара скаларном производу $S(p, b, \beta)$ на алгебри ch_2. Пошто скаларни производ на алгебри левим транслацијама јединствено одређује лево-инваријантну метрику, претходна теорема даје класификацију свих лево-инваријантних Риманових метрика на групи $\mathcal{CH}^2$. Показаћемо у поглављу 4 да је у случају $b = 0$ и $p\beta = 1$ одговарајућа метрика Ајнштајнова. Простор $\mathcal{CH}^2$ са овом метриком и стандардном комплексном структуром је Келерова многострукост константне холоморфне секционе кривине $-\beta$.

Приметимо да дејство групе аутоморфизама на простор симетричних матрица није слободно. Наиме, постоје неидентички аутоморфизми који скаларни производ $S(p, b, \beta)$ облика (2.3) остављају инваријантним, односно испуњавају услов $A^T S A = S$. Група оваквих аутоморфизама дефинисаће у поглављу 3 класе еквиваленције на простору комплексних структура, па их због тога сада посебно издвајамо.

Лема 2.4. *Нека је $S = S(p, b, \beta)$ скаларни производ облика (2.3), Лијеве алгебре ch_2 у бази $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ са комутаторима облика* (1.10). *Тада је стабилизатор скаларног производа S у групи аутоморфизама*

$$Aut(ch_2)_S = \{A \in Aut(ch_2) \mid A^T S A = S\} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & b > 0, \\ O(2), & b = 0. \end{cases}$$

Доказ: Матрица аутоморфизма A је облика (2.1). Директним рачуном из услова $A^T S A = S$ добијамо следеће могућности:

- Ако је $b > 0$, онда је A јединична матрица или $A = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$.
- Ако је $b = 0$, онда је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\lambda\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \lambda\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \pm 1.$$

□

Теорема 2.2. *Неизометрични позитивно дефинитни скаларни производи Лијеве алгебре rh_4, у лево-инваријантној бази (e_1, e_2, e_3, e_4) са комутаторима облика (1.11), дати су матрицама*

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0. \tag{2.4}$$

Доказ: Неизометричне скаларне производе на Лијевој алгебри rh_4 тражимо као орбите групе $Aut(rh_4)$, односно као класе еквиваленције позитивно дефинитних симетричних матрица S у односу на релацију $S \sim A^T S A$, где је $A = A(M, b)$ аутоморфизам облика (2.2). Нека је $S \in GL(4, \mathbb{R})$ произвољна симетрична позитивно дефинитна матрица. Запишимо је као блок матрицу

$$S = \begin{pmatrix} \bar{S} & v \\ v^T & \bar{\lambda} \end{pmatrix},$$

где је $\bar{S}$ симетрична позитивно дефинитна 3×3 матрица, $v \in \mathbb{R}^3$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Најпре дејством аутоморфизма $A_1(I_3, -\bar{S}^{-1}v)$ поништимо вектор v

$$S_1 = A_1^T S A_1 = \begin{pmatrix} \bar{S} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Нека је M матрица која симетричну матрицу $\bar{S}$ своди на јединичну. Применом аутоморфизма $A_2(M, 0)$ добијамо тражени облик скаларног производа

$$S_2 = A_2^T S_1 A_2 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

□

Скаларни производ $S(\lambda)$ на алгебри rh_4 једнозначно одређује лево-инваријантну Риманову метрику $g(\lambda)$ на групи $\mathcal{RH}^4$ левим транслацијама. У поглављу 4 показујемо да је простор $\mathcal{RH}^4$ са овом метриком Риманова многострукост константне негативне секционе кривине $-\frac{1}{\lambda}$.

Проблем класификације лево-инваријантних метрика реалног хиперболичког простора је решен у свим димензијама и сигнатурама. Све лево-инваријантне метрике на $\mathbb{R}H^n$ класификоване су у раду [76].

3 Хермитске комплексне структуре

Основни циљ овог поглавља је класификација лево-инваријантних хермитских комплексних структура на Лијевим групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ са произвољним лево-инваријантним Римановим метрикама.

Ово истраживање инспирисано је радом Овандо, *Комплексне структуре на* $\mathbb{R}H^4$ *и* $\mathbb{C}H^2$ [53], који је био део њене докторске дисертације под менторством Изабеле Доти. У том раду проучаване су класе еквиваленције лево-инваријантних комплексних структура на Лијевим алгебрама ch_2 и rh_4, добијене дејством групе аутоморфизама на одређене подалгебре комплексификације полазних алгебри. Ове резултате Овандо је затим проширила на све лево-инваријантне четвородимензионе решиве групе које имају тродимензиону изводну алгебру [54]. Тај рад представља уопштење резултата Сноу [64], која је још 1990. дала класификацију холоморфно еквивалентних лево-инваријантних комплексних структура на решивим Лијевим групама са изводним алгебрама димензије мање од три. Овандо је затим применила сличан приступ за проучавање комплексних структура на тангентним и котангентним алгебрама димензије шест [69], као и на класе еквиваленције симплектичких структура четвородимензионих Лијевих алгебри [55].

Заједничко за наведене радове је да се комплексне структуре посматрају у односу на стандардне метрике хиперболичких простора, док је овде примењен другачији приступ - одређене су хермитске структуре за све могуће лево-инваријантне Риманове метрике.

Занимљиво је да се ch_2 појављује у класификацији инваријантних хиперкомплексних структура на четвородимензионим Лијевим алгебрама Марије Барберис [7]. На овој алгебри пронашла је дводимензиону сферу комплексних структура. Испоставља се да ове структуре јесу хермитске, али нису Келерове, и појављују се као један од случајева у нашој класификацији који одговара метрици $g\left(\frac{1}{4\beta}, 0, \beta\right)$. Блажић и Вукмировић [10] су показали да је ch_2 једна од три четвородимензионе Лијеве алгебре која није Абелова, а допушта у исто време и хиперкомплексну и пара-хиперкомплексну структуру.

Скоро комплексна структура J на многострукости M је аутоморфизам $J : TM \to TM$, који задовољава услов

$$J^2 = -\mathrm{Id}.$$

Нијенхуисов тензор N скоро комплексне структуре J је тензорско поље типа $(1, 2)$, дефинисано изразом

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY], \quad X, Y \in TM. \tag{3.1}$$

Скоро комплексна структура J назива се **комплексна структура** ако је њен Нијенхуисов тензор идентички једнак нули

$$N \equiv 0.$$

У том случају кажемо да је M **комплексна многострукост**, а да је оператор J **интеграбилан**.

J је **хермитска (скоро) комплексна структура** ако је сагласна са Римановом метриком g, тј.

$$g(X,Y) = g(JX,JY), \quad X,Y \in TM.$$

Ако су комплексна структура и Риманова метрика лево-инваријантне, претходни услов је еквивалентан са једначином на Лијевој алгебри

$$J^T S + SJ = 0,$$

где је S матрица скаларног производа који одговара метрици g.

Комплексна структура J је **Абелова** ако важи $[X,Y] = [JX,JY]$ за све $X,Y \in TM$.

Нека је ∇ Леви-Чивита повезаност метрике g. Комплексна структура је **паралелна** ако је

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y) = 0, \quad X,Y \in TM.$$

Риманова многострукост (M,g,J) је **(скоро) Келерова** ако је (скоро) комплексна структура паралелна у односу на Леви-Чивита повезаност метрике g.

Овандо [53, 69] је посматрала реалну Лијеву алгебру $\mathfrak{g}$ и њену комплексификацију $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Произвољан елемент $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ је облика $X \otimes c$, где је $X \in \mathfrak{g}$, $c \in \mathbb{C}$. Свака (скоро) комплексна структура J се са алгебре $\mathfrak{g}$ шири на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ преко $J(X \otimes c) = JX \otimes c$. Уз стандардну идентификацију $X \in \mathfrak{g}$ са $X \otimes 1 \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, сваки елемент $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ се може записати у облику $(X + iY)$, $X,Y \in \mathfrak{g}$. Сопствени простор који одговара имагинарној сопственој вредности i оператора J је подалгебра m алгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$$m = \{X - iJX \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Ако је σ коњугација на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, тј.

$$\sigma(X + iY) = X - iY, \qquad X,Y \in \mathfrak{g},$$

онда је m сопствени потпростор који одговара сопственој вредности i, а $\sigma(m)$ је сопствени потпростор који одговара $-i$. Тада се комплексификација разбија на следећи начин:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = m \oplus \sigma(m). \tag{3.2}$$

Ако је J скоро комплексна структура, одговара јој јединствена комплексна подалгебра m и обрнуто, свако разбијање (3.2) јединствено одређује скоро комплексну структуру J. Прецизније, сваки вектор из алгебре $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ може да се запише јединствено као $X = U + V \in m \oplus \sigma(m)$, па можемо да дефинишемо пресликавање J преко $JX = iU - iV$. Пошто важи $\sigma \circ J = J \circ \sigma$, пресликавање J дефинише скоро комплексну структуру на $\mathfrak{g}$.

Две комплексне структуре J_1 и J_2 на $\mathfrak{g}$ су **холоморфно еквивалентне** ако постоји аутоморфизам φ алгебре $\mathfrak{g}$ такав да

$$\varphi \circ J_1 = J_2 \circ \varphi, \qquad \varphi \in Aut(\mathfrak{g}).$$

Ово је еквивалентно са тиме да постоји аутоморфизам φ комплексификације $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ који чува одговарајуће подалгебре

$$\varphi m_1 = m_2, \qquad \varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi, \qquad \varphi \in Aut(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}).$$

Резултати Овандо односе се на стандардне метрике и ортонормиране базе Лијевих алгебри ch_2 и rh_4, и поклапају се са нашим резултатима у специјалним случајевима који одговарају метрикама $g(1,0,1)$ на $\mathcal{CH}^2$ и $g(1)$ на $\mathcal{RH}^4$.

3.1 Класификација

Теорема 3.1. *Лево-инваријантне хермитске комплексне структуре на метричкој Лијевој групи* $(\mathcal{CH}^2, g)$ *којој одговара Лијева алгебра* ch_2 *са скаларним производом* $S(p,b,\beta)$ *облика* (2.3) *су*

1а) за $b = 0,\ 1 - 4p\beta = 0,$ *дводимензиона сфера структура*

$$\{J_{s,r,q} \mid s^2 + r^2 + q^2 = 1\},$$

1б) за $b = 0,\ 1 - 4p\beta \neq 0,$ *4 структуре* $J_{K\pm}, J_{NK\pm}$,

2а) за $b > 0,\ 1 - 4p\beta = 0,$ *4 структуре* $J_{1\pm},\ J_{2\pm}$,

2б₁) за $b > 0,\ 1 - 4p\beta \neq 0,\ detS \neq 4p^2\beta^2,$ *4 структуре* $J_{3\pm}, J_{4\pm}$,

2б₂) за $b > 0,\ 1 - 4p\beta \neq 0,\ detS = 4p^2\beta^2,$ *4 структуре* $J_{5\pm}, J_{6\pm}$.

Матрице ових структура у лево-инваријантној бази са комутаторима облика (1.10) дате су у табели 3.1.

Доказ: Нека је $J = (a_{ij})$ матрица комплексне структуре J у бази са комутаторима облика (1.10). Пошто је J хермитска структура, мора да задовољава услов

$$J^T S + SJ = 0,$$

односно

$$\begin{aligned}
&a_{33} = 0, \quad a_{44} = 0, \quad a_{22} = -a_{12}b,\\
&a_{34} = -a_{43}\beta, \quad a_{11} = a_{12}b, \quad a_{21} = -a_{12}p,\\
&a_{13} = \frac{a_{31} - a_{32}b}{b^2 - p}, \quad a_{23} = \frac{-a_{32}p + a_{31}b}{p - b^2},\\
&a_{14} = \frac{-a_{41}\beta + a_{42}b\beta}{p - b^2}, \quad a_{24} = \frac{-a_{42}p\beta + a_{41}b\beta}{p - b^2}.
\end{aligned}$$

$S(p,b,\beta)$	Хермитске комплексне структуре	Изоморфне
$b=0$ $1-4p\beta=0$	$J_{s,r,q}=\begin{pmatrix} 0 & -2s\sqrt{\beta} & -2r\sqrt{\beta} & -2q\beta \\ \frac{s}{2\sqrt{\beta}} & 0 & -q & r\sqrt{\beta} \\ \frac{r}{2\sqrt{\beta}} & q & 0 & -s\sqrt{\beta} \\ \frac{q}{2\beta} & -\frac{r}{\sqrt{\beta}} & \frac{s}{\sqrt{\beta}} & 0 \end{pmatrix},\ s^2+r^2+q^2=1$	$(s,r,q)\sim(0,\widetilde{r},\widetilde{q})$ $\widetilde{r},\widetilde{q}\geq 0$ $\widetilde{r}^2+\widetilde{q}^2=1$
$b=0$ $1-4p\beta\neq 0$	$J_{K\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\beta}{p}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{p}{\beta}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{NK\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\beta}{p}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\beta}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$J_{K+}\sim J_{K-}$ $J_{NK+}\sim J_{NK-}$
$b>0$ $1-4p\beta=0$	$J_{i\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b\left(r_i^2-2p^2\right)}{2pr_i(p-b^2)} & -\frac{r_i^2-2pb^2}{4pr_i(p-b^2)} \\ 0 & 0 & \frac{r_i^2-2pb^2}{2r_i(p-b^2)} & -\frac{b\left(r_i^2-2p^2\right)}{4pr_i(b^2-p)} \\ -\frac{pb}{r_i} & -\frac{r_i}{2p} & 0 & 0 \\ r_i & \frac{2pb}{r_i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $i\in\{1,2\},\qquad r_1=p\sqrt{2\left(1+2\sqrt{\det S}\right)},\qquad r_2=p\sqrt{2\left(1-2\sqrt{\det S}\right)}$	$J_{1+}\sim J_{1-}$ $J_{2+}\sim J_{2-}$
$b>0$ $1-4p\beta\neq 0$ $\det S\neq 4p^2\beta^2$	$J_{i\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2q(2pt_i+1)b\beta}{(p-b^2)(1-4p\beta)} & \frac{q\beta\left(-2t_ib^2-4\beta b^2+4p\beta-1\right)}{(p-b^2)(1-4p\beta)} \\ 0 & 0 & \frac{q\left(4t_i\beta p^2-t_ip+t_ib^2+2b^2\beta\right)}{(p-b^2)(1-4p\beta)} & \frac{q(2pt_i+1)b\beta}{(p-b^2)(1-4p\beta)} \\ \frac{qb(t_i+2\beta)}{1-4p\beta} & qt_i & 0 & 0 \\ q & -\frac{2qb(t_i+2\beta)}{1-4p\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $i\in\{3,4\},\qquad q=\sqrt{\frac{1-4p\beta}{t_i^2-4\beta^2}},\qquad t_3=\frac{2b^2\beta+\sqrt{\beta(p-b^2)(4p\beta-1)^2}}{-4p^2\beta+p-b^2},\qquad t_4=\frac{2b^2\beta-\sqrt{\beta(p-b^2)(4p\beta-1)^2}}{-4p^2\beta+p-b^2}$	$J_{3+}\sim J_{3-}$ $J_{4+}\sim J_{4-}$
$b>0$ $1-4p\beta\neq 0$ $\det S=4p^2\beta^2$	$J_{5\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{\frac{1-4p\beta}{p(12p\beta+1)}} & -\frac{4p\beta+1}{2p\sqrt{12p\beta+1}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{12p\beta+1}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4p\beta}{p(12p\beta+1)}} \\ -\sqrt{\frac{p(1-4p\beta)}{12p\beta+1}} & -\frac{4p\beta+1}{\sqrt{12p\beta+1}} & 0 & 0 \\ \frac{4p}{\sqrt{12p\beta+1}} & 2\sqrt{\frac{p(1-4p\beta)}{12p\beta+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_{6\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{p}} & -\frac{\sqrt{1-4p\beta}}{2p} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{p}} \\ \sqrt{p} & \sqrt{1-4p\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{p} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$J_{5+}\sim J_{5-}$ $J_{6+}\sim J_{6-}$

Табела 3.1. Хермитске комплексне структуре на ch_2 са скаларним производом $S(p,b,\beta)$

J је комплексна структура, па важи:

$$N(X,Y)=0, \quad J^2=-Id, \tag{3.3}$$

где је N Нијенхуисов тензор (3.1).

Решавање ових квадратних једначина поделимо на случајеве

1) $b=0$
   1а) $b=0,\ 1-4p\beta=0,$
   1б) $b=0,\ 1-4p\beta\neq 0;$
2) $b>0$
   2а) $b>0,\ 1-4p\beta=0,$
   2б) $b>0,\ 1-4p\beta\neq 0,$
      2б$_1$) $\det S\neq 4p^2\beta^2,$
      2б$_2$) $\det S=4p^2\beta^2.$

Случај 1а) $b=0, \quad 1-4p\beta=0.$
У овом случају квадратни услови (3.3) постају

$$4a_{31}^2\beta+4a_{41}^2\beta^2+a_{43}^2\beta=1.$$

Ако означимо

$$r=2a_{31}\sqrt{\beta}, \quad s=a_{43}\sqrt{\beta}, \quad q=2a_{41}\beta,$$

онда структуре $J_{r,s,q}$ задовољавају услов $r^2+s^2+q^2=1$, па добијамо сферу хермитских комплексних структура

$$J_{s,r,q}=\begin{pmatrix} 0 & -2s\sqrt{\beta} & -2r\sqrt{\beta} & -2q\beta \\ \frac{s}{2\sqrt{\beta}} & 0 & -q & r\sqrt{\beta} \\ \frac{r}{2\sqrt{\beta}} & q & 0 & -s\sqrt{\beta} \\ \frac{q}{2\beta} & -\frac{r}{\sqrt{\beta}} & \frac{s}{\sqrt{\beta}} & 0 \end{pmatrix}, \quad s^2+r^2+q^2=1.$$

Случај 1б) $b=0, \quad 1-4p\beta\neq 0.$
Квадратни услови (3.3) и регуларност матрице J сада дају систем једначина

$$a_{43}=0, \quad a_{12}=0, \quad a_{42}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{32}^2=1, \quad a_{41}^2=\frac{p}{\beta}.$$

Решење овог система су тачно четири хермитске комплексне структуре, $J_{K\pm}$ и $J_{NK\pm}$:

$$J_{K\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\beta}{p}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{p}{\beta}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{NK\pm}=\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\beta}{p}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\beta}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Случај 2) $b > 0$.
Квадратни услови (3.3) и регуларност матрице J сада дају систем:

$$
\begin{aligned}
&a_{43} = 0, \quad a_{12} = 0, \\
&a_{31} = a_{32}b - 2a_{42}p\beta + 2a_{41}b\beta, \qquad (3.4) \\
&a_{32}^2 + \frac{(a_{42} + 2a_{32}b)(a_{42}p - a_{41}b)\beta}{p - b^2} - 1 = 0, \qquad (3.5) \\
&a_{32}^2 + \frac{4(a_{42}p - a_{41}b)^2\beta^2}{p - b^2} - 1 = 0. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Случај 2а) $b > 0, \quad 1 - 4p\beta = 0$.
Сада из једначина (3.5) и (3.6) следи $a_{32} = -\dfrac{a_{41}}{2p}$. Из једначине (3.4) онда добијемо $a_{31} = -\dfrac{a_{42}}{2}$. Услови (3.3) сада постају

$$a_{41}a_{42} = 2pb, \qquad (3.7)$$

$$a_{41}^2 + a_{42}^2 p = 4p^2. \qquad (3.8)$$

Посматрајмо систем (3.7), (3.8) у равни са координатама (a_{41}, a_{42}). Пошто је $p > 0$, $b > 0$, једначина (3.7) представља хиперболу, а једначина (3.8) представља елипсу. Директно проверимо да се ове две криве секу у четири тачке

$$a_{41} = \pm p\sqrt{2(1 \pm 2\sqrt{\det S})}, \quad a_{42} = \frac{2pb}{a_{41}}.$$

Сва четири решења по a_{41} су реална. Ако означимо

$$r_1 = p\sqrt{2(1 + 2\sqrt{\det S})}, \quad r_2 = p\sqrt{2(1 - 2\sqrt{\det S})},$$

добијамо комплексне структуре $J_{1\pm}$ и $J_{2\pm}$.

$$J_{i\pm} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b\left(r_i^2 - 2p^2\right)}{2pr_i(p-b^2)} & -\frac{r_i^2 - 2pb^2}{4pr_i(p-b^2)} \\ 0 & 0 & \frac{r_i^2 - 2pb^2}{2r_i(p-b^2)} & -\frac{b\left(r_i^2 - 2p^2\right)}{4pr_i(b^2-p)} \\ -\frac{pb}{r_i} & -\frac{r_i}{2p} & 0 & 0 \\ r_i & \frac{2pb}{r_i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad i \in \{1, 2\}.$$

Случај 2б) $b > 0, \quad 1 - 4p\beta \neq 0$.

Услови (3.5), (3.6) и регуларност матрице J дају

$$a_{42} = \frac{2(a_{32}b + 2a_{41}b\beta)}{4p\beta - 1}.$$

Квадратни услови (3.3) су сада еквивалентни са

$$a_{32}^2 - 4a_{41}^2\beta^2 + 4p\beta - 1 = 0, \qquad (3.9)$$

$$(4\beta p^2 - p + b^2)a_{32}^2 + 4a_{32}a_{41}\beta b^2 + (\beta - 4\beta^2 p + 4\beta^2 b^2)a_{41}^2 = 0. \qquad (3.10)$$

Једначина (3.9) по непознатим a_{32}, a_{41} представља хиперболу. Детерминанта квадратне форме (3.10) је

$$-(1-4p\beta)^2 \det S.$$

Строго је негативна, па једначина (3.10) представља две праве кроз координатни почетак. Дакле, решење система је пресек хиперболе и уније две праве. Коефицијент уз a_{32}^2 у једначини (3.10) је $\frac{1}{\beta}(4p^2\beta^2 - \det S)$, па због тога имамо гранање:

2б$_1$) $detS \neq 4p^2\beta^2$,

2б$_2$) $detS = 4p^2\beta^2$.

Случај 2б$_1$) $b > 0, \quad 1-4p\beta \neq 0, \quad \det S \neq 4p^2\beta^2$.
У овом случају је $a_{41} \neq 0$. Уведимо смену $a_{32} = ta_{41}$. Сада из једначине (3.10) следи

$$a_{41} = \sqrt{\frac{1-4p\beta}{t^2-4\beta^2}}, \quad t_\pm = \frac{2b^2\beta \pm \sqrt{\beta\,(p-b^2)\,(4p\beta-1)^2}}{-4p^2\beta+p-b^2}.$$

Ако уведемо ознаке $t_3 = t_+$, $t_4 = t_-$, $q = a_{41}$, решења су четири структуре $J_{3\pm}$ и $J_{4\pm}$:

$$J_{i\pm} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2q(2pt_i+1)b\beta}{(p-b^2)(1-4p\beta)} & \frac{q\beta\left(-2t_ib^2-4\beta b^2+4p\beta-1\right)}{(p-b^2)(1-4p\beta)} \\ 0 & 0 & \frac{q\left(4t_i\beta p^2-t_ip+t_ib^2+2b^2\beta\right)}{(p-b^2)(1-4p\beta)} & \frac{q(2pt_i+1)b\beta}{(p-b^2)(1-4p\beta)} \\ \frac{qb(t_i+2\beta)}{1-4p\beta} & qt_i & 0 & 0 \\ q & -\frac{2qb(t_i+2\beta)}{1-4p\beta} & 0 & 0, \end{pmatrix},$$

$$i \in \{3,4\}, \qquad q = \sqrt{\frac{1-4p\beta}{t_i^2-4\beta^2}},$$

$$t_3 = \frac{2b^2\beta + \sqrt{\beta\,(p-b^2)\,(4p\beta-1)^2}}{-4p^2\beta+p-b^2}, \quad t_4 = \frac{2b^2\beta - \sqrt{\beta\,(p-b^2)\,(4p\beta-1)^2}}{-4p^2\beta+p-b^2}.$$

Случај 2б$_2$) $b > 0, \quad 1-4p\beta \neq 0, \quad \det S = 4p^2\beta^2$.

У овом случају једначина (3.10) постаје

$$a_{41}\beta(1-4p\beta)(4a_{32}p + 4a_{41}p\beta + a_{41}) = 0.$$

Једине опције су

$$a_{41} \neq 0 \quad \text{и} \quad a_{41} = 0,$$

што даје редом структуре $J_{5\pm}$ и $J_{6\pm}$.

$$J_{5\pm} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{\frac{1-4p\beta}{p(12p\beta+1)}} & -\frac{4p\beta+1}{2p\sqrt{12p\beta+1}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{12p\beta+1}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4p\beta}{p(12p\beta+1)}} \\ -\sqrt{\frac{p(1-4p\beta)}{12p\beta+1}} & -\frac{4p\beta+1}{\sqrt{12p\beta+1}} & 0 & 0 \\ \frac{4p}{\sqrt{12p\beta+1}} & 2\sqrt{\frac{p(1-4p\beta)}{12p\beta+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{6\pm} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{p}} & -\frac{\sqrt{1-4p\beta}}{2p} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{p}} \\ \sqrt{p} & \sqrt{1-4p\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{p} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Овим су покривени сви могући случајеви и класификација хермитских комплексних структура је потпуна. □

Дефиниција 3.1. Хермитске комплексне структуре J и $\widetilde{J}$ називамо **изоморфним** ако постоји аутоморфизам $A \in Aut(ch_2)_S$ који чува скаларни производ S такав да важи

$$\widetilde{J} = A^{-1}JA.$$

Ова дефиниција задаје релацију еквиваленције на простору комплексних структура, а изоморфне структуре суштински задају исту геометрију на Лијевој групи. На основу леме 2.4 директним рачуном добијамо које структуре из класификације су међусобно изоморфне. Одговарајуће класе еквиваленције приказане су у последњој колони табеле 3.1.

Приметимо да за сваку лево-инваријантну метрику групе $\mathcal{CH}^2$ постоји дводимензиона сфера хермитских скоро комплексних структура. Међутим, услов интеграбилности намеће додатна ограничења, понекад толико јака да постоје Лијеве групе парне димензије које не допуштају ни једну интеграбилну комплексну структуру [24].

Последица 3.1. *На Лијевој алгебри ch_2 не постоје Абелове хермитске комплексне структуре.*

Доказ: Проверимо услов $[X, Y] = [JX, JY]$ за све комплексне структуре из табеле 3.1.

За сферу комплексних структура $J_{s,r,q}$, услов $[e_1, e_2] = [Je_1, Je_2]$ повлачи $s = 1$, $r = q = 0$. Међутим, у том случају је $[Je_1, Je_3] = 0$, док је $[e_1, e_3] = \frac{1}{2}e_3 \neq 0$, па $J_{s,r,q}$ није Абелова.

У свим осталим случајевима из табеле 3.1, важи да су Je_1 и Je_2 линеарне комбинације e_3 и e_4, па је $[Je_1, Je_2] = 0$, док је $[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 \neq 0$.

Према томе, ниједна комплексна структура није Абелова. □

Барберис [7] је класификовала све хиперкомплексне структуре на четвородимензионим реалним Лијевим алгебрама. У тој класификацији се појављује Лијева алгебра ch_2, а њена сфера хиперкомплексних структура одговара нашем случају $J_{s,r,q}$ из теореме 3.1. Наиме, за структуре

$$I = J_{1,0,0}, \quad J = J_{0,1,0}, \quad K = J_{0,0,1},$$

сфере $\{J_{s,r,q} \mid s^2 + r^2 + q^2 = 1\}$ важи

$$IJ = K = -JI,$$

па оне чине хиперкомплексну структуру (I, J, K). Таква структура на четвородимензионој многострукости одређује конформно јединствену хермитску метрику. У нашем случају, то је метрика $g\left(\frac{1}{4\beta}, 0, \beta\right)$ из класификације дате у теореми 2.1.

Овандо [53, 54] је одредила три класе холоморфно еквивалентних комплексних структура на Лијевој алгебри ch_2. Посматрала је ортонормирану базу у односу на стандардну метрику и приметила је да једна од тих класа садржи стандардну Келерову структуру комплексног хиперболичког простора. Овај случај одговара структурама $J_{K\pm}$ из наше класификације за метрику $g(1, 0, 1)$, док друга класа одговара структурама $J_{NK\pm}$. Комплексне структуре из треће класе нису хермитске.

Теорема 3.2. *Свака лево-инваријантна Риманова метрика $g(\lambda)$ на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$, задата позитивно дефинитним скаларним производом $S(\lambda)$, $\lambda > 0$, облика (2.4) на Лијевој алгебри rh_4, допушта дводимензиону сферу хермитских комплексних структура:*

$$J_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & -\gamma\sqrt{\lambda} \\ \alpha & 0 & -\gamma & \beta\sqrt{\lambda} \\ \beta & \gamma & 0 & -\alpha\sqrt{\lambda} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} & -\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Доказ: Нека је $J = (a_{ij})$ матрица комплексне структуре J у бази са комутаторима облика (1.11). Пошто је J хермитска, задовољава услов

$$J^T S + SJ = 0,$$

односно

$$a_{11} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_{33} = 0,\ a_{44} = 0,\ a_{21} = -a_{12},\ a_{32} = -a_{23},$$

$$a_{31} = -a_{13},\ a_{14} = -a_{41}\lambda,\ a_{24} = -a_{42}\lambda,\ a_{34} = -a_{43}\lambda.$$

Ако означимо

$$a_{21} = \alpha, \qquad a_{31} = \beta, \qquad a_{32} = \gamma,$$

услов $J^2 = -Id$ даје једначине:

$$a_{41}^2 = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\lambda}, \qquad a_{42}^2 = \frac{1 - \alpha^2 - \gamma^2}{\lambda}, \qquad a_{43}^2 = \frac{1 - \beta^2 - \gamma^2}{\lambda},$$

$$\lambda(a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2) = 1.$$

Одатле директно следи коначан облик матрице и услов

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Директном провером услова интеграбилности, испостави се да је и он задовољен. Другим речима свака скоро комплексна хермитска структура на $\mathcal{RH}^4$ је уједно и комплексна. $\square$

За стандардну метрику $g(1)$ реалног хиперболичког простора, Овандо [53] је пронашла сферу комплексних структура, што се слаже са резултатом претходне теореме.

Последица 3.2. *На Лијевој алгебри $r\mathfrak{h}_4$ нема Абеловиx хермитских комплексних структура.*

Доказ: Непосредном провером услова $[e_1, e_k] = [Je_1, Je_k]$ за $k \in \{2, 3, 4\}$ видимо да он није испуњен ни за једну комплексну структуру $J_{\alpha,\beta,\gamma}$ из претходне теореме. $\square$

Примедба 3.1. *Све комплексне структуре Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$ су еквивалентне у смислу дефиниције 3.1.*

4 Геометрија

У овом поглављу разматрамо кривинске особине лево-инваријантних Риманових метрика $g(p,b,\beta)$ на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$, као и метрика $g(\lambda)$ на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$.

Приказани су детаљни рачуни кривинских особина за наведене просторе у односу на све могуће лево-инваријантне Риманове метрике. За сваку метрику одређени су Леви-Чивита повезаност, Риманов тензор кривине, Ричијев тензор и скаларна кривина. На групи $\mathcal{CH}^2$ су проверени услови под којима постоји Келерова структура, а затим су одређене метрике у односу на које је $\mathcal{CH}^2$ ауто-дуална многострукост. Показује се да је стандардна метрика комплексног хиперболичког простора једина Ајнштајнова метрика у добијеној класификацији. Она је уједно и једина метрика која допушта Келерову структуру. Са друге стране, на групи $\mathcal{RH}^4$ су све лево-инваријантне Риманове метрике Ајнштајнове, јер се разликују само до на константу.

Теоријски део овог поглавља који се односи на ауто-дуалност заснован је на прегледном раду Фридриха [19], где су дати основни појмови и тврђења. Део посвећен холономији се највише ослања на рад Нијенхуиса [51], који пратимо због јасног и систематичног излагања и лепо изведених доказа веза између различитих типова група холономије.

4.1 Повезаност, оператор кривине и ауто-дуалност

Нека је ∇ Леви-Чивита повезаност која одговара метрици Риманове многострукости (M,g). За сва глатка векторска поља на M важи Кожулова формула:

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y)\\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y), \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Пошто су и метрика g и векторска поља лево-инваријантни на Лијевој групи G, функције $g(X,Y)$ су константне, па прва три члана Кожулове формуле нестају:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y), \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.2}$$

У лево-инваријантној бази $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ метрици g одговара позитивно дефинитан скаларни производ S Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$. Уведимо ознаку

$$koz(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\left(g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\right).$$

Ако идентификујемо векторска поља са матрицама колона координата у датој бази $\mathbf{e}$, претходни израз можемо записати у облику

$$koz(X,Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) = (\nabla_X Y)^T S Z = Z^T S \nabla_X Y.$$

Да бисмо израчунали координате (v_1, v_2, v_3, v_4) вектора

$$v = S\nabla_X Y$$

у бази $\mathbf{e}$, применимо претходну једначину на базне векторе:

$$v_k = e_k^T v = e_k^T S\nabla_X Y = koz(X, Y, e_k).$$

На овај начин добијамо експлицитну формулу за рачунање повезаности:

$$S\nabla_X Y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y = S^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Нека је сада (M^{2n}, g) оријентисана Риманова многострукост. Ако је $(f_1, \dots, f_{2n})$ локална база тангентног раслојења TM, онда са Λ^k означавамо раслојење k-вектора

$$\Lambda^k = \mathbb{R}\langle f_{i1} \wedge \dots f_{i_k} \rangle, \qquad \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, 2n\}.$$

Риманова метрика g на T_pM природно индукује позитивно-дефинитни скаларни производ $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ на простору к-вектора Λ^k на следећи начин:

$$\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_k, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k \rangle := \det(g(X_i, Y_j)).$$

Дефиниција 4.1. Нека је $(f_1, \dots, f_{2n})$ локална ортонормирана база TM и нека је $\omega = f_1 \wedge \dots \wedge f_{2n}$ запреминска форма на M^{2n}. Дефинишимо **Хоџов звезда** оператор

$$* : \Lambda^k \to \Lambda^{2n-k}$$

релацијом

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \; \omega. \tag{4.4}$$

Хоџов звезда оператор има следеће особине:

1. $*^2 = (-1)^k Id$ на Λ^k

2. Ако је $I = (i_1 < \dots < i_p)$ и $J = (j_1 < \dots < j_{2n-p})$ разбијање скупа индекса $(1, \dots, 2n)$, онда важи
$$*(f_I) = \mathrm{sgn}(I, J) f_J,$$
где је $f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}$, $f_J = f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_{2n-p}}$, а $\mathrm{sgn}(I, J)$ је знак пермутације
$$\mathrm{sgn}(I, J) = \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & 2n \\ i_1 & \dots & i_p & j_{p+1} & \dots & j_{2n-p} \end{pmatrix}.$$

3. У димензији n Хоџов звезда оператор је ортогонална трансформација $* : \Lambda^n \to \Lambda^n$, $*^2 = (-1)^n Id$.

За четвородимензионе многострукости M^4 посматрамо раслојење $2-$вектора $\Lambda^2 M$. Хоџов звезда оператор $* : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ је сада ортогонална инволуција $*^2 = Id$, па индукује ортогоналну декомпозицију

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \tag{4.5}$$

шестодимензионог простора Λ^2 на тродимензионе сопствене просторе оператора $*$ који одговарају сопственим вредностима ± 1. Одаберимо произвољну ортонормирану базу $\mathbf{f}$ позитивне оријентације. Тада је $\mathbf{H} = (h_1^+, h_2^+, h_3^+, h_4^-, h_5^-, h_6^-)$ база простора $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ састављена од сопствених вектора:

$$\begin{aligned}
h_1^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4), & h_4^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_1 \wedge f_2 - f_3 \wedge f_4\right), \\
h_2^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_1 \wedge f_3 - f_2 \wedge f_4\right), & h_5^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_3 + f_2 \wedge f_4), \\
h_3^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_4 + f_2 \wedge f_3), & h_6^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_4 - f_2 \wedge f_3)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Проверимо да је рецимо $(f_1 \wedge f_3 + f_2 \wedge f_4)$ заиста сопствени вектор:

$$\begin{aligned}
*(f_1 \wedge f_3 + f_2 \wedge f_4) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} f_2 \wedge f_4 + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} f_1 \wedge f_3 \\
&= -(f_2 \wedge f_4 + f_1 \wedge f_3).
\end{aligned}$$

Из претходне једначине видимо да је $f_1 \wedge f_3 + f_2 \wedge f_4$ сопствени вектор за сопствену вредност -1, односно да припада сопственом простору Λ^2_-. На исти начин се проверава и за све остале сопствене векторе.

Дефиниција 4.2. Ако је ∇ Леви-Чивита повезаност Риманове многострукости (M, g) онда пресликавање $R : TM \times TM \times TM \rightarrow TM$,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{4.7}$$

називамо **Риманов оператор кривине**, а пресликавање

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W), \quad X,Y,Z,W \in TM. \tag{4.8}$$

зовемо **Риманов тензор кривине**.

Ово пресликавање има следеће симетрије:

$$\begin{aligned}
&1) \quad R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \\
&2) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \\
&3) \quad g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z), \\
&4) \quad g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ако у бази $\mathbf{f}$ означимо компоненте тензора кривине

$$R_{ijkl} = g(R(f_i,f_j)f_k,f_l),$$

онда се симетрије (4.9) краће записују

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= -R_{jikl}, \\
R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0, \\
R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \\
R_{ijkl} &= R_{klij}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Дефиниција 4.3. Ричијев тензор кривине је билинеарна форма на простору TM таква да важи

$$\rho(X,Y) = Tr(Z \mapsto R(Z,X)Y), \quad X,Y \in TM. \tag{4.11}$$

Компоненте Ричијевог тензора су

$$\rho_{ij} = \sum_k R_{ikkj}.$$

Ричијев оператор је

$$Ric(X) = \sum_j \rho(X,e_j)e_j.$$

Дефиниција 4.4. Скаларна кривина је траг Ричијевог тензора у односу на метрику g.

$$\tau = \sum_i \rho_i^i = \sum_{i,j} g^{ij}\rho_{ji}, \tag{4.12}$$

где су $\rho_{ij} = \rho(f_i, f_j)$ компоненте Ричијевог тензора.

Дефиниција 4.5. Многострукост (M,g) је **Ајнштајнова** ако је Ричијев тензор ρ пропорционалан са метриком g.

Коефицијент пропорционалности Ричијевог тензора и Ајнштајнове метрике је

$$k = \frac{\tau}{n}, \tag{4.13}$$

где је τ скаларна кривина, а n димензија многострукости M.

Косо-симетрични ендоморфизми из алгебре $so(g)$ могу се идентификовати са бивекторима спољашње алгебре Λ^2 помоћу једнакости

$$(X \wedge Y)(Z) := g(Z,Y)X - g(Z,X)Y, \quad Z \in TM.$$

Из симетрија Римановог оператора кривине (једначине (4.9), услов 3) следи да оператор $R(X,Y)$ припада алгебри косо-симетричних ендоморфизама $so(g)$, па се може изразити преко бивектора који генеришу $so(g)$. Другим речима, услов

$$R(X,Y) = -R(Y,X)$$

који следи из ових симетрија омогућава да уместо $R(X,Y)$ пишемо $R(X \wedge Y)$, односно да оператор R посматрамо као оператор на простору бивектора. Дефинишимо зато пресликавање

$$R : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

на базним векторима

$$R(f_i \wedge f_j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl}\ f_k \wedge f_l.$$

Лако се проверава да дефиниција не зависи од избора базе.

Пропозиција 4.1. *[19] Оператор кривине $R : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ је самоадјунговани ендоморфизам.*

Из (4.5) добијамо декомпозицију овог оператора:

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} : \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \to \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-.$$

Овде

$$A : \Lambda^2_+ \to \Lambda^2_+ \quad \text{и} \quad C : \Lambda^2_+ \to \Lambda^2_-$$

представљају самоадјунговане ендоморфизме, а

$$B : \Lambda^2_- \to \Lambda^2_+$$

је адјунговано пресликавању

$$B^* : \Lambda^2_+ \to \Lambda^2_-.$$

Одавде се после дужег рачуна добија позната декомпозиција оператора кривине

$$R = \frac{\tau}{12} I_6 + \begin{pmatrix} W_+ & B \\ B^* & W_- \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

За детаљан рачун и доказ ове декомпозиције видети [19].

Тензор

$$W = W_+ \oplus W_- = (A + \frac{\tau}{12}) \oplus (C + \frac{\tau}{12})$$

назива се **Вејлов тензор**. Он је самоадјунгован, без трага, комутира са оператором $*$ и има исте симетрије као тензор кривине.

Дефиниција 4.6. Оријентисана четвородимензиона Риманова многострукост (M, g) је **ауто-дуална** ако је $W_- = 0$. Ако је $W_+ = 0$ кажемо да је многострукост **анти-ауто-дуална**. Метрика је **конформно равна** ако је $W_+ = W_- = 0$. Ако је само један од $W_\pm$ нула, онда је метрика **полу-конформно равна**.

Приметимо да неки аутори користе обрнуту нотацију за ауто-дуалне и анти-ауто-дуалне многострукости у зависности од оријентације.

Многострукост је Ајнштајнова ако је $B = 0$.

Дефиниција 4.7. Нека је (X, Y) база дводимензионе равни $\pi \subset T_pM$. Тада је

$$K(\pi) := \frac{g(R(X,Y)Y, X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \tag{4.15}$$

секциона кривина у равни π. Ако на многострукости M постоји хермитска комплексна структура J, онда за сваки јединични вектор $X \in T_pM$, вектори X и JX чине ортонормирану базу J-инваријантне равни π. Тада се $K(\pi)$ назива **холоморфна секциона кривина** равни π.

4.2 Холономија

Нека је M повезана диференцијабилна многострукост са афином повезаности ∇ и нека је $\gamma : [0,1] \to M$ диференцијабилна крива на M. Векторско поље V дуж криве γ је **паралелно** ако је

$$\frac{DV}{dt} = 0, \quad \text{за свако} \quad t \in [0,1].$$

Пропозиција 4.2. *[16] Нека је $\gamma : [0,1] \to M$ диференцијабилна крива на многострукости M и нека је $V_0 \in T_pM$ тангентни вектор у тачки $p = \gamma(0)$. Тада постоји јединствено паралелно векторско поље V дуж криве γ такво да је $V(0) = V_0$.*

Векторско поље $V(t)$ из претходне пропозиције се назива **паралелно померање** вектора V_0 дуж криве γ. Оно индукује линеарни изоморфизам векторских простора

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\gamma(t)} : \ T_{\gamma(0)}M &\to T_{\gamma(t)}M \\ V_0 &\mapsto V(t), \end{aligned}$$

који називамо **оператор паралелног померања** дуж криве γ.

Оператор паралелног померања дуж диференцијабилних оријентисаних затворених кривих које почињу и завршавају у фиксираној тачки p генерише Лијеву групу коју називамо **група холономије** многострукости M у тачки p

$$Hol(M,p) = \left\{ \mathcal{P}_{\gamma(1)} \mid \gamma(0) = \gamma(1) = p \right\}.$$

Група холономије је подгрупа линеарне групе

$$Hol(M,p) \leq Aut(T_pM) \cong Gl(n,\mathbb{R}).$$

Њена компонента повезаности и уједно нормална подгрупа која одговара кривама хомотопним тачки, назива се **рестрикована група холономије**, у ознаци $Hol^0(M,p)$. Ако су p и q произвољне тачке многострукости M, онда су групе $Hol(M,p)$ и $Hol(M,q)$ као и $Hol^0(M,p)$ и $Hol^0(M,q)$ изоморфне, па се зато ознака за тачку често изоставља.

Ако је ∇ Леви–Чивита повезаност Риманове метрике g, онда паралелно померање чува скаларни производ. За сваку затворену криву γ базирану у p важи

$$g_p(\mathcal{P}_\gamma X, \mathcal{P}_\gamma Y) = g_p(X,Y), \qquad X, Y \in T_pM,$$

па је група холономије подгрупа ортогоналне групе тангентног простора

$$Hol(M,p) \subset O(T_pM, g_p) \cong O(n)$$

За рестриковану групу холономије важи

$$Hol^0(M,p) \subset SO(n).$$

Нека је U отворена околина тачке p. Означимо са $Hol^0(U,p)$ рестриковану групу холономије многострукости U. Ако је отворена околина $V \subset U,\ p \in V$, онда је $Hol^0(V,p) \subset Hol^0(U,p)$. На овај начин низ отворених околина тачке p

$$U_l \supset U_2 \supset \dots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{p\}$$

даје опадајући низ Лијевих група $Hol^0(U_i,p)$, $i \in \mathbb{N}$. Њихов пресек је такође повезана Лијеве група и назива се **локална група холономије** у тачки p

$$Hol^*(p) = \bigcap_{U \ni p} Hol^0(U,p).$$

Лијева алгебра $h'(M,p)$ разапета операторима кривине $R(\cdot,\cdot)$ и њиховим коваријантним изводима $\nabla^k R$ свих редова $k \in \mathbb{N}$ назива се **инфинитезимална алгебра холономије**. Одговарајућа, јединствено одређена повезана подгрупа групе $GL(n,\mathbb{R})$, у ознаци $Hol'(M,p)$, назива се **инфинитезимална група холономије**.

Теорема 4.1. *[51] Ако је многострукост M аналитичка, групе Hol^0, Hol^* и Hol' се поклапају.*

4.3 Кривинске особине Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$

У наставку разматрамо Лијеву групу $\mathcal{CH}^2$ са метриком $g(p,b,\beta)$, одређену скаларним производом облика (2.3).

Лема 4.1. *У лево-инваријантној бази* $\mathbf{e}$ *Лијеве алгебре ch_2 са комутаторима облика (1.10), сви коваријантни изводи различити од нуле су следећи:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1}e_1 = \frac{b}{2(p-b^2)}(be_1 - pe_2), \quad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{b}{2(p-b^2)}(e_1 - be_2),\\
&\nabla_{e_2}e_1 = \frac{1}{2(p-b^2)}(be_1 - pe_2), \quad \nabla_{e_2}e_2 = \frac{1}{2(p-b^2)}(e_1 - be_2),\\
&\nabla_{e_2}e_3 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_2}e_4 = \frac{\beta}{2}e_3, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_4,\\
&\nabla_{e_3}e_3 = \frac{1}{2(p-b^2)}(e_1 - be_2), \quad \nabla_{e_3}e_4 = \frac{\beta}{2(p-b^2)}(be_1 - pe_2),\\
&\nabla_{e_4}e_1 = -e_4, \quad \nabla_{e_4}e_2 = \frac{\beta}{2}e_3, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \frac{\beta}{2(p-b^2)}(be_1 - pe_2),\\
&\nabla_{e_4}e_4 = \frac{\beta}{p-b^2}(e_1 - be_2).
\end{aligned}$$

Доказ: Применом формуле (4.3) израчунајмо на пример $\nabla_{e_1}e_2$:

$$
\begin{aligned}
v_1 = koz(e_1,e_2,e_1) &= \frac{1}{2}\left(g([e_1,e_2],e_1) - g([e_2,e_1],e_1) + g([e_1,e_1],e_2)\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{2}e_2,e_1\right) + g\left(\frac{1}{2}e_2,e_1\right)\right) = \frac{1}{2}b,\\
v_2 = koz(e_1,e_2,e_2) &= \frac{1}{2}\left(g([e_1,e_2],e_2) - g([e_2,e_2],e_1) + g([e_2,e_1],e_2)\right) = 0,\\
v_3 = koz(e_1,e_2,e_3) &= \frac{1}{2}\left(g([e_1,e_2],e_3) - g([e_2,e_3],e_1) + g([e_3,e_1],e_2)\right) = 0,\\
v_4 = koz(e_1,e_2,e_4) &= \frac{1}{2}\left(g([e_1,e_2],e_4) - g([e_2,e_4],e_1) + g([e_4,e_1],e_2)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Одатле добијамо да су координате $\nabla_{e_1}e_2$ у бази $\mathbf{e}$

$$
[\nabla_{e_1}e_2]_e = S^{-1}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-b^2} & -\frac{b}{p-b^2} & 0 & 0\\ -\frac{b}{p-b^2} & \frac{p}{p-b^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{b}{2}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2(p-b^2)}\\ -\frac{b^2}{2(p-b^2)}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},
$$

односно

$$
\nabla_{e_1}e_2 = \frac{b}{2(p-b^2)}e_1 - \frac{b^2}{2(p-b^2)}e_2.
$$

Остали коваријантни изводи се рачунају аналогно. □

Лема 4.2. *Риманов оператор кривине R алгебре ch_2 у лево-инваријантној бази*

e *са комутаторима облика (1.10) има матрични облик:*

$$
\begin{aligned}
R(e_1,e_2) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} -b & -1 & 0 & 0\\ p & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta b^2-\beta p\\ 0 & 0 & p-b^2 & 0\end{pmatrix},\\
R(e_1,e_3) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2b\beta\\ 0 & 0 & 0 & p\beta\\ p & b & 0 & 0\\ pb & 2b^2-p & 0 & 0\end{pmatrix},\\
R(e_1,e_4) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3\beta b & -4\beta\\ 0 & 0 & 2p\beta & 2b\beta\\ pb\beta & 3b^2\beta-2p\beta & 0 & 0\\ 4p-2b^2 & 2b & 0 & 0\end{pmatrix},\\
R(e_2,e_3) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3b\beta & 2\beta\\ 0 & 0 & -3p\beta-1 & -3b\beta\\ b & 3p\beta-3b^2\beta+1 & 0 & 0\\ 3b^2-2p & b & 0 & 0\end{pmatrix},\\
R(e_2,e_4) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & -b\beta^2\\ 0 & 0 & -2b\beta & \beta(p\beta-2)\\ 2b^2\beta-p\beta & b\beta & 0 & 0\\ 2b & 2-p\beta+b^2\beta & 0 & 0\end{pmatrix},\\
R(e_3,e_4) &= \frac{1}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} -b\beta & -\beta & 0 & 0\\ p\beta & b\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta(p\beta-2)\\ 0 & 0 & 2-p\beta & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Доказ: Израчунајмо на пример $R(e_2,e_4)$. По дефиницији оператора кривине (4.7) и на основу леме 4.1 важи

$$
\begin{aligned}
R(e_2,e_4)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_4}e_1 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_4]}e_1 = -\nabla_{e_2}e_4 - \frac{1}{2(p-b^2)}\nabla_{e_4}(be_1-pe_2)\\
&= -\frac{\beta}{2}e_3 - \frac{1}{2(p-b^2)}\left(-be_4 - p\frac{\beta}{2}e_3\right) = \frac{2b^2\beta-p\beta}{4(p-b^2)}e_3 + \frac{b}{2(p-b^2)}e_4.
\end{aligned}
$$

Коефицијенти уз базне векторе претходне једначине представљају прву колону матрице оператора $R(e_2,e_4)$. Пронађимо и остале колоне матрице овог оператора.

$$
\begin{aligned}
R(e_2,e_4)e_2 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_4}e_2 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2,e_4]}e_2 = \frac{\beta}{2}\nabla_{e_2}e_3 - \frac{1}{2(p-b^2)}\nabla_{e_4}(e_1 - be_2)\\
&= -\frac{\beta}{4}e_4 + \frac{1}{2(p-b^2)}\left(e_4 + \frac{b\beta}{2}e_3\right) = \frac{1}{4(p-b^2)}(b\beta e_3 + (2 - p\beta + b^2\beta)e_4),\\
R(e_2,e_4)e_3 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_4}e_3 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{[e_2,e_4]}e_3 = \frac{\beta}{2(p-b^2)}\nabla_{e_2}(be_1 - pe_2) + \frac{1}{2}\nabla_{e_4}e_4\\
&= \frac{\beta}{2(p-b^2)}\left(b\frac{be_1-pe_2}{2(p-b^2)} - p\frac{e_1-be_2}{2(p-b^2)}\right) + \frac{\beta}{2(p-b^2)}(e_1 - be_2)\\
&= \frac{\beta}{4(p-b^2)}e_1 - \frac{b\beta}{2(p-b^2)}e_2,\\
R(e_2,e_4)e_4 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_4}e_4 - \nabla_{e_4}\nabla_{e_2}e_4 - \nabla_{[e_2,e_4]}e_4 = \frac{\beta}{p-b^2}\nabla_{e_2}(e_1 - be_2) - \frac{\beta}{2}\nabla_{e_4}e_3\\
&= \frac{\beta}{p-b^2}\left(\frac{be_1-pe_2}{2(p-b^2)} - b\frac{e_1-be_2}{2(p-b^2)}\right) - \frac{\beta^2}{4(p-b^2)}(be_1 - pe_2)\\
&= \frac{1}{4(p-b^2)}\left(-b\beta^2e_1 + \left(-2\beta + p\beta^2\right)e_2\right).
\end{aligned}
$$

Овим смо израчунали матрицу оператора $R(e_2,e_4)$. На исти начин се рачунају и остале матрице Римановог оператора кривине на базним векторима. □

Лема 4.3. *Нека је*

$$
\mathbf{E} = (e_1\wedge e_2,\ e_1\wedge e_3,\ e_1\wedge e_4,\ e_2\wedge e_3,\ e_2\wedge e_4,\ e_3\wedge e_4) \tag{4.16}
$$

стандардна база простора 2-вектора Λ^2 Лијеве алгебре ch_2. Оператор кривине

$$
R:\Lambda^2\to\Lambda^2
$$

алгебре ch_2 са метриком $g(p,b,\beta)$ у бази $\mathbf{E}$ има следећи облик:

$$
\begin{aligned}
R(e_1\wedge e_2) &= -\frac{1}{4(p-b^2)}(e_1\wedge e_2 + (p-b^2)e_3\wedge e_4),\\
R(e_1\wedge e_3) &= -\frac{1}{4(p-b^2)}(e_1\wedge e_3 + 2be_1\wedge e_4 - pe_2\wedge e_4),\\
R(e_1\wedge e_4) &= -\frac{1}{4(p-b^2)}(3b\beta e_1\wedge e_3 + 4e_1\wedge e_4 - 2p\beta e_2\wedge e_3 - 2be_2\wedge e_4),\\
R(e_2\wedge e_3) &= \frac{1}{4(p-b^2)}(3b\beta e_1\wedge e_3 + 2e_1\wedge e_4 - (1+3p\beta)e_2\wedge e_3 - 3be_2\wedge e_4),\\
R(e_2\wedge e_4) &= \frac{1}{4(p-b^2)}(\beta e_1\wedge e_3 - b\beta e_1\wedge e_4 - 2b\beta e_2\wedge e_3 + (p\beta-2)e_2\wedge e_4),\\
R(e_3\wedge e_4) &= -\frac{1}{4(p-b^2)}(\beta e_1\wedge e_2 - (p\beta-2)e_3\wedge e_4).
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Доказ: Запишимо операторе $e_i \wedge e_j$ у матричном облику:

$$(e_1 \wedge e_2) = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ -p & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (e_1 \wedge e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(e_1 \wedge e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (e_2 \wedge e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(e_2 \wedge e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (e_3 \wedge e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Колоне сваке матрице су оператори $e_i \wedge e_j$ примењени редом на векторе лево-инваријантне базе $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ алгебре ch_2. Израчунајмо рецимо оператор $R(e_1 \wedge e_2)$ у овој бази:

$$R(e_1 \wedge e_2) = a_1 e_1 \wedge e_2 + a_2 e_1 \wedge e_3 + a_3 e_1 \wedge e_4 + a_4 e_2 \wedge e_3 + a_5 e_2 \wedge e_4 + a_6 e_3 \wedge e_4.$$

Из леме (4.2) знамо матрични облик оператора $R(e_1 \wedge e_2)$, па из претходне једначине непосредно одређујемо непознате коефицијенте $(a_1, \ldots, a_6)$. Директна провера у овом случају даје

$$a_1 = -\frac{1}{4(p - b^2)}, \quad a_6 = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

На исти начин се одређују сви остали оператори $R(e_i \wedge e_j)$. □

Теорема 4.2. *Лијева група $\mathcal{CH}^2$ са метриком $g(p, b, \beta)$ има следеће кривинске особине:*

1. *Ричијев тензор кривине је*

$$\rho = \frac{1}{p - b^2} \begin{pmatrix} \frac{b^2 - 3p}{2} & -b & 0 & 0 \\ -b & -\frac{p\beta - b^2\beta + 2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p\beta + 2}{2} & \frac{-5b\beta}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-5b\beta}{4} & \frac{\beta(p\beta - 4)}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

2. *Скаларна кривина је строго негативна и дата је изразом*

$$\tau = -\frac{11 + p\beta}{2(p - b^2)}. \tag{4.19}$$

3. *Једина Ајнштајнова метрика добија се за $b = 0$, $p\beta = 1$. То је уједно и једина метрика која допушта Келерову структуру. Група $\mathcal{CH}^2$ са метриком $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$ и комплексном структуром $J_{K\pm}$ из табеле (3.1) је решива многострукост константне холоморфне секционе кривине $-\beta$ и изометрична је стандардној комплексној хиперболичкој равни $\mathbb{C}H^2$.*

4. *$g\left(\frac{1}{4\beta}, 0, \beta\right)$ и $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$ су једине полу-конформно равне метрике. Многострукост $\mathcal{CH}^2$ са овим метрикама је ауто-дуална.*

Доказ:

1) Ричијев тензор кривине рачунамо директно. Приказаћемо детаљан рачун за $\rho_{34} = \rho(e_3, e_4)$. Пресликавање из дефиниције 4.11

$$m(X,Y) : Z \mapsto R(Z,X)Y,$$

је у овом случају

$$m(e_3, e_4) : Z \mapsto R(Z, e_3)e_4.$$

Применимо m на базне векторе

$$\begin{aligned}
m(e_3,e_4)(e_1) &= R(e_1,e_3)e_4 = \frac{\beta}{4(p-b^2)}(-2be_1 + pe_2),\\
m(e_3,e_4)(e_2) &= R(e_2,e_3)e_4 = \frac{\beta}{4(p-b^2)}(2e_1 - 3be_2),\\
m(e_3,e_4)(e_3) &= R(e_3,e_3)e_4 = 0,\\
m(e_3,e_4)(e_4) &= R(e_4,e_3)e_4 = \frac{\beta(2-p\beta)}{4(p-b^2)}e_3
\end{aligned}$$

да бисмо добили колоне матрице пресликавања

$$m(e_3,e_4) = \frac{\beta}{4(p-b^2)}\begin{pmatrix} -2b & 2 & 0 & 0\\ p & -3b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-p\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одатле, директно из дефиниције, следи

$$\rho_{34} = Tr(m(e_3,e_4)) = -\frac{5\beta b}{4\,(p-b^2)}.$$

Све остале компоненте се одређују аналогно.

2) Скаларну кривину рачунамо на основу дефиниције (4.12) и претходно израчунатог Ричијевог тензора (4.18):

$$\tau = \sum_{i,j} g^{ij}\rho_{ji} = -\frac{11 + p\beta}{2(p-b^2)}.$$

Скаларни производ $S(p,b,\beta)$ који одговара метрици $g(p,b,\beta)$ је позитивно дефинитан, па важи $p - b^2 = \det S > 0$. Пошто је $p, \beta > 0$, скаларна кривина је строго негативна.

3) Метрика је g Ајнштајнова ако важи $\rho = kg$, $k \in \mathbb{R}$. Поређењем Ричијевог тензора (4.18) и метричког тензора (2.3) видимо да је овај услов испуњен ако и само ако је $b = 0$, $p\beta = 1$ и $k = -\frac{3}{2}\beta$. Приметимо да је у том случају испуњено (4.13), односно заиста важи

$$k = \frac{\tau}{\dim(\mathcal{CH}^2)} = \frac{-6\beta}{4} = -\frac{3}{2}\beta.$$

Овиме је показано да је $g(\frac{1}{\beta}, 0, \beta)$ једина Ајнштајнова метрика на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$.

За комплексну структуру $J_{K\pm}$ из табеле 3.1, у случају $p\beta = 1$ важи

$$\nabla_X J_{K\pm} = 0 \text{ за свако } X \in ch_2.$$

Одавде следи да је $(\mathcal{CH}^2, g(\frac{1}{\beta}, 0, \beta), J_{K\pm})$ Келерова многострукост константне холоморфне секционе кривине $-\beta$, па је изометрична комплексној хиперболичкој равни $\mathbb{C}H^2$.

Приметимо да комплексна структура $J_{NK\pm}$ са метриком $g(\frac{1}{\beta}, 0, \beta)$ такође има константну холоморфну секциону кривину $-\beta$, али није паралелна, па у том случају многострукост није Келерова.

Појединачном провером свих комплексних структура из табеле 3.1 показује се да ниједна од њих није паралелна, односно да ниједна друга метрика не допушта Келерову структуру.

4) Нека је $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ лево-инваријантна база Лијеве алгебре ch_2 са комутаторима облика (1.10). Стандардна база простора 2-вектора $\Lambda^2 ch_2$ је

$$\mathbf{E} = (e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_4,\ e_3 \wedge e_4).$$

Из једначина (4.17) леме 4.3 знамо да оператор кривине у бази $\mathbf{E}$ има матрични облик

$$[R]_{\mathbf{E}} = \frac{1}{4(p-b^2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -1 & -3b\beta & 3b\beta & \beta & 0 \\ 0 & -2b & -4 & 2 & -b\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2p\beta & -3\beta p - 1 & -2b\beta & 0 \\ 0 & p & 2b & -3b & p\beta - 2 & 0 \\ b^2 - p & 0 & 0 & 0 & 0 & p\beta - 2 \end{pmatrix}.$$

Колоне су коефицијенти $R(e_i \wedge e_j)$ уз векторе стандардне базе $e_i \wedge e_j$.

Нека је $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ ортонормирана база алгебре ch_2 у односу на скаларни производ $S(p, b, \beta)$.

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{p-b^2}} e_1 - \frac{b}{\sqrt{p-b^2}} e_2, \qquad f_2 = e_2, \qquad f_3 = e_3, \qquad f_4 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e_4. \tag{4.20}$$

Означимо са

$$\mathbf{F} = (f_1 \wedge f_2,\ f_1 \wedge f_3,\ f_1 \wedge f_4,\ f_2 \wedge f_3,\ f_2 \wedge f_4,\ f_3 \wedge f_4)$$

ортонормирану базу простора $\Lambda^2 ch_2$.

Користимо везу (4.20) између ортонормиране и лево-инваријантне базе алгебре ch_2 да одредимо матрицу преласка $C_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}}$ са стандардне базе $\mathbf{E}$ на ортонормирану базу $\mathbf{F}$ простора $\Lambda^2 ch_2$. Израчунајмо рецимо прву, другу и последњу колону матрице $C_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}}$.

$$
\begin{aligned}
f_1 \wedge f_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{p-b^2}}e_1 - \frac{b}{\sqrt{p-b^2}}e_2\right) \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{p-b^2}}e_1 \wedge e_2,\\
f_1 \wedge f_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{p-b^2}}e_1 - \frac{b}{\sqrt{p-b^2}}e_2\right) \wedge e_3 = \frac{1}{\sqrt{p-b^2}}e_1 \wedge e_3 - \frac{b}{\sqrt{p-b^2}}e_2 \wedge e_3,\\
f_3 \wedge f_4 &= \frac{1}{\sqrt{\beta}}e_3 \wedge e_4.
\end{aligned}
$$

На исти начин се добијају и остале колоне:

$$
C_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{p-b^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{\sqrt{p-b^2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta}\sqrt{p-b^2}} & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{b}{\sqrt{p-b^2}} & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{b}{\sqrt{\beta}\sqrt{p-b^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\beta}}
\end{pmatrix}
$$

Оператор кривине у бази $\mathbf{F}$ рачунамо преко

$$
[R]_{\mathbf{F}} = C^{-1}_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}}[R]_{\mathbf{E}}C_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}},
$$

па је

$$
[R]_{\mathbf{F}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}
-\frac{1}{p-b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}}\\
0 & -\frac{3b^2\beta+1}{p-b^2} & -\frac{4b\sqrt{\beta}}{p-b^2} & \frac{3b\beta}{\sqrt{p-b^2}} & \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}} & 0\\
0 & -\frac{4b\sqrt{\beta}}{p-b^2} & \frac{b^2\beta-4}{p-b^2} & \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}} & -\frac{b\beta}{\sqrt{p-b^2}} & 0\\
0 & \frac{3b\beta}{\sqrt{p-b^2}} & \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}} & \frac{3b^2\beta-3p\beta-1}{p-b^2} & -\frac{b\sqrt{\beta}}{p-b^2} & 0\\
0 & \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}} & -\frac{b\beta}{\sqrt{p-b^2}} & -\frac{b\sqrt{\beta}}{p-b^2} & \frac{p\beta-b^2\beta-2}{p-b^2} & 0\\
-\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{p-b^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p\beta-2}{p-b^2}
\end{pmatrix}.
$$

Ортонормиране базе сопствених потпростора $\Lambda^2_{\pm}$ оператора Хоџове звезде (4.4) за сопствене вредности ± 1 су (4.6):

$$
\Lambda^2_{\pm} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_2 \pm f_3 \wedge f_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_3 \mp f_2 \wedge f_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \wedge f_4 \pm f_2 \wedge f_3)\right)
$$

Веза између ортонормиране базе $\mathbf{F}$ и базе $\mathbf{H}$, састављене од сопствених вектора

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ & f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4,\ f_1 \wedge f_3 - f_2 \wedge f_4,\ f_1 \wedge f_4 + f_2 \wedge f_3,\\
& f_1 \wedge f_2 - f_3 \wedge f_4,\ f_1 \wedge f_3 + f_2 \wedge f_4,\ f_1 \wedge f_4 - f_2 \wedge f_3\ ),
\end{aligned}
$$

дата је матрицом

$$C_{\mathbf{F}\to\mathbf{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а оператор кривине у бази $\mathbf{H}$ је

$$[R]_{\mathbf{H}} = C^{-1}_{\mathbf{F}\to\mathbf{H}}[R]_{\mathbf{F}}C_{\mathbf{F}\to\mathbf{H}}.$$

Из декомпозиције (4.14) следи

$$\begin{pmatrix} W_+ & B \\ B^* & W_- \end{pmatrix} = [R]_{\mathbf{H}} - \frac{\tau}{12}I_6,$$

односно

$$W_\pm = \frac{\beta}{\det S}\begin{pmatrix} \frac{2\beta p+1\pm 3\sqrt{\det S}}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\beta p-6\beta b^2+1\pm 3\sqrt{\det S}}{12} & -\frac{b\sqrt{\beta}\left(3\pm 4\sqrt{\det S}\right)}{8} \\ 0 & -\frac{b\sqrt{\beta}\left(3\pm 4\sqrt{\det S}\right)}{8} & -\frac{2\beta p-3\beta b^2+1\pm 3\sqrt{\det S}}{6} \end{pmatrix},$$

где је $\det S = p - b^2$ детерминанта матрице скаларног производа $S(p, b, \beta)$.

Приметимо да је $W_+ \neq 0$, па ниједна од метрика није конформно равна. Краћи рачун показује да за $b \neq 0$, ни W_- не може да буде нула, па у том случају нема ни полу-конфорно равних метрика.

Нека је сада $b = 0$. Добијамо

$$W_- = \beta\frac{1 - 3\sqrt{p\beta} + 2p\beta}{12p}\operatorname{diag}(1, 1, -2).$$

W_- је једнак нули ако и само ако је $4p\beta = 1$ или $p\beta = 1$. Одговарајуће метрике $g\left(\frac{1}{4\beta}, 0, \beta\right)$ и $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$ тада су полуконформно равне, па је многострукост $\mathcal{CH}^2$ са овим метрикама ауто-дуална. $\square$

Милнор је показао да је на решивој Лијевој групи скаларна кривина сваке Риманове метрике која није равна строго негативна (видети [45], теорема 3.1). Како ниједна од метрика из класификације није равна, претходна теорема се слаже са Милноровим резултатом.

Теорема 4.3. *Све лево-инваријантне метрике $g(p, b, \beta)$ Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ имају пуну групу холономије $SO(4)$, изузев Келерове метрике $g(\frac{1}{\beta}, 0, \beta)$, чија је група холономије унитарна група $U(2) \subset SO(4)$.*

Доказ: Група $\mathcal{CH}^2$ је просто повезана, па је група холономије једнака локалној групи холономије. Пошто је Лијева група аналитичка многострукост, по теореми 4.1 њена рестрикована, локална и инфинитезимална група холономије се поклапају. Из тог разлога, довољно је да израчунамо инфинитезималну алгебру холономије на ch_2 помоћу тензора кривине и њихових коваријантних извода, а одговарајућа повезана Лијева група представља групу холономије многострукости $\mathcal{CH}^2$ са метриком $g(p, b, \beta)$.

У случају $p\beta = 1$ и $b = 0$ метрика је симетрична, па је $\nabla R = 0$, и алгебра холономије $u(2)$ је разапета само операторима кривине.

У свим осталим случајевима, обиман рачун показује да је алгебра холономије изоморфна са $so(4)$ и да је разапета операторима кривине и њиховим првим коваријантним изводима.

Из претходног следи да је у случају $p\beta = 1$ и $b = 0$ група холономије $U(2)$. У свим осталим случајевима, метрика g има пуну групу холономије. $\square$

Последица 4.1. *Метричка Лијева група* $(\mathcal{CH}^2, g)$ *није разложива ни за једну метрику* $g(p, b, \beta)$.

4.4 Кривинске особине Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$

У реалном случају рачун је далеко једноставнији. У наставку посматрамо Лијеву групу $\mathcal{RH}^4$ опремљену метриком $g(\lambda)$, која је одређена скаларним производом $S(\lambda) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \lambda)$.

Лема 4.4. *У лево-инваријантној бази алгебре* rh_4 *са комутаторима облика (1.11), ненула коваријантни изводи су*

$$\nabla_{e_1} e_4 = -e_1, \quad \nabla_{e_2} e_4 = -e_2, \quad \nabla_{e_3} e_4 = -e_3, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = \frac{e_4}{\lambda}.$$

Лема 4.5. *Нека је* a_{ij} *стандардна база алгебре* $gl(4, \mathbb{R})$*, тј.* a_{ij} *су матрице које имају јединицу на месту* (i, j)*, а нуле на осталим местима. Риманов оператор кривине алгебре* rh_4 *са метриком* $g(\lambda)$ *у лево-инваријантној бази* $\mathbf{e}$ *са комутаторима облика (1.11) има матрични облик*

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j) &= \frac{1}{\lambda}\left(a_{ji} - a_{ij}\right), \\ R(e_i, e_4) &= \frac{1}{\lambda} a_{4i} - a_{i4}, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Лема 4.6. *Оператор кривине* $R : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ *Лијеве алгебре* rh_4 *са метриком* $g(\lambda)$*, на бази простора 2-вектора* Λ^2 *има облик:*

$$R(e_i \wedge e_j) = -\frac{1}{\lambda} e_i \wedge e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

Теорема 4.4. *Све лево-инваријантне Риманове метрике* $g(\lambda)$ *на Лијевој групи* $\mathcal{RH}^4$ *су Ајнштајнове. Имају константну негативну секциону кривину* $-\frac{1}{\lambda}$*, скаларну кривину* $-\frac{12}{\lambda}$ *и пуну групу холономије* $SO(4)$.

Доказ: Из леме 4.6 се одмах види да је секциона кривина

$$K(\pi) = -\frac{1}{\lambda},$$

за све дводимензионе равни $\pi \subset T_p\mathcal{RH}^4$.

По дефиницији 4.11 добијамо да је Ричијев тензор

$$\rho = \mathrm{diag}(-\frac{3}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}, -3).$$

Пошто је пропорционалан скаларном производу $S(\lambda) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \lambda)$ који одговара метрици $g(\lambda)$, следи да су све метрике Ајнштајнове.

Скаларна кривина је

$$\tau = \sum_{i,j} g^{ij}\rho_{ji} = -\frac{12}{\lambda}.$$

Одмах се види да је испуњено (4.13), односно, да је коефицијент пропорционалности Ричијевог тензора и метрике $k = \frac{\tau}{4} = -\frac{3}{\lambda}$.

На основу леме 4.5 следи да су $R(e_i, e_j)$ линеарно независни, па је алгебра холономије шестодимензиона. Самим тим алгебра холономије је једнака $so(4)$. Пошто је Лијева група $\mathcal{RH}^4$ просто повезана, група холономије је потпуно одређена својом Лијевом алгебром, па све метрике имају пуну групу холономије $SO(4)$. $\square$

Приметимо да је поново кривина строго негативна што је сагласно са резултатима из Милноровог рада [45]. Резултат добијен рачуном, да су све метрике Ајнштајнове, је био очекиван, јер су Риманове метрике $g(\lambda)$ исте до на константу, а Хербер [30] је показао да важи:

Теорема 4.5. *Свака решива Лијева група S допушта највише једну лево-инваријантну стандардну Ајнштајнову метрику, до на изометрију и скалирање. Ако таква метрика постоји, онда S не допушта ни једну нестандардну Ајнштајнову метрику, па је Ајнштајнова метрика суштински јединствена.*

Претходна теорема се односи само на Риманове метрике и не важи у псеудо-Римановом случају.

5 Геодезијске линије

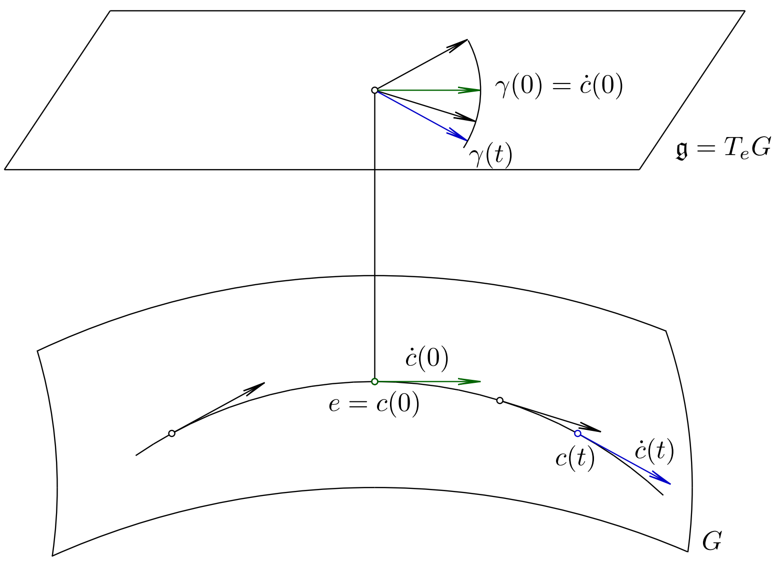
Геодезијске линије, уз кривину, представљају један од кључних појмова Риманове геометрије [16]. Могу се дефинисати као криве са нултим убрзањем, односно криве чији је тангентни вектор паралелан дуж саме криве у односу на Леви-Чивита повезаност метрике. Такође, могу се посматрати и као криве које минимизују растојања на многострукости за тачке које су „довољно близу“.

На Лијевим групама опремљеним лево-инваријантним метрикама постоји стандардан начин за одређивање геодезијских линија. Помоћу Ојлер–Арнољдове једначине, диференцијалне једначине другог реда које описују геодезијске линије на групи своде се на диференцијалне једначине првог реда на одговарајућој Лијевој алгебри. Овај приступ примењен је у раду [4] за одређивање геодезијских линија комплексне хиперболичке равни у односу на произвољне Риманове лево-инваријантне метрике.

У овом поглављу приказујемо како се одређују геодезијске криве на групама $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$ опремљеним лево-инваријантним Римановим метрикама описаним у поглављу 2.

Свакој кривој $c(t)$ на Лијевој групи G придружимо јединствену криву $\gamma(t)$ на одговарајућој Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ помоћу једначине

$$\gamma(t) = dL_{c(t)}^{-1}\dot{c}(t). \tag{5.1}$$



Слика 5.1: Придружена крива у алгебри

Ако је крива
$$c(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$
дата у локалним координатама на G, геодезијска, тј. ако важи
$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0,$$
тада придружена крива
$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t), \gamma^4(t)),$$
у бази $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ алгебре $\mathfrak{g}$ задовољава Ојлер-Арнољдову једначину
$$\dot{\gamma} = ad^*_\gamma \gamma, \tag{5.2}$$
где је ad^*_γ адјунговани оператор за ad_γ у односу на лево-инваријантну метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle$:
$$\langle ad^*_\gamma X, Y \rangle = \langle X, ad_\gamma Y \rangle.$$

Арнољд [1] је први показао да су криве добијене на овај начин заиста геодезијске. Систематичан приступ овој теми са детаљно изложеним доказима може се пронаћи у књигама [2, 71]. За примену ових резултата у визуализацији геодезијских сфера важно је да геодезијске линије добијене на овај начин буду природно параметризоване.

Лема 5.1. *Ако је крива $\gamma(t) = dL^{-1}_{c(t)}\dot{c}(t)$ на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ решење Ојлер-Арнољдове једначине (5.2), онда је одговарајућа геодезијска $c(t)$ на Лијевој групи G природно параметризована.*

Доказ: Нека је g лево-инваријантна метрика на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$. Када применимо Кожулову формулу (4.1) на геодезијску $c(t)$ и произвољно векторско поље Z добијамо:
$$0 = 2g(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, Z) = 2\dot{c}g(\dot{c}, Z) - Zg(\dot{c}, \dot{c}) - 2g(\dot{c}, [\dot{c}, Z]). \tag{5.3}$$
Лајбницово правило и чињеница да је Z лево-инваријантно поље дају
$$\dot{c}g(\dot{c}, Z) = g(\dot{c}(\dot{c}), Z) + g(\dot{c}, \dot{c}(Z)) = g(\ddot{c}, Z)$$
и
$$g(\dot{c}, [\dot{c}, Z]) = g(\dot{c}, ad_{\dot{c}}Z) = g(ad^*_{\dot{c}}\dot{c}, Z).$$
Сада једначина (5.3) постаје
$$2g(\ddot{c}, Z) - Zg(\dot{c}, \dot{c}) - 2g(ad^*_{\dot{c}}\dot{c}, Z) = 0.$$
Из једначине (5.2) следи
$$g(\dot{\gamma}, Z) = g(ad^*_\gamma \gamma, Z).$$
Пошто су векторско поље Z и метрика g лево-инваријантни, левим транслацијама се добија
$$g(\ddot{c}, Z) = g(ad^*_{\dot{c}}\dot{c}, Z).$$
Одатле директно следи
$$Zg(\dot{c}, \dot{c}) = 0,$$
чиме је показано да је крива природно параметризована. □

5.1 Ојлер-Арнољдове једначине на алгебри ch_2

Следећа теорема описује криве Лијеве алгебре ch_2 које одговарају геодезијским линијама Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ са произвољном лево-инваријантном Римановом метриком $g(p, b, \beta)$.

Теорема 5.1. *Ако је $g(p, b, \beta)$ лево-инваријантна Риманова метрика одређена скаларним производом (2.1), онда су Ојлер-Арнољдове једначине на Лијевој алгебри ch_2 облика*

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}^1 &= -\frac{(b\gamma^1+\gamma^2)^2+(\gamma^3)^2+2b\beta\gamma^3\gamma^4+2\beta\,(\gamma^4)^2}{2\,(p-b^2)},\\
\dot{\gamma}^2 &= \frac{pb\,(\gamma^1)^2+(p+b^2)\,\gamma^1\gamma^2+b\,(\gamma^2)^2+b\,(\gamma^3)^2+2\beta\gamma^4\,(p\gamma^3+b\gamma^4)}{2\,(p-b^2)},\\
\dot{\gamma}^3 &= \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^3-\beta\gamma^2\gamma^4,\\
\dot{\gamma}^4 &= \gamma^1\gamma^4,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где је $\gamma(t) = \gamma^i(t)e_i$ крива у алгебри придружена геодезијској линији на групи, записана у лево-инваријантној бази $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ са комутаторима облика (1.10).

Доказ: Означимо

$$\dot{\gamma}(t) = v(t) = v^i(t)e_i.$$

Желимо да одредимо координате $v^i(t)$ вектора $v(t)$ у лево-инваријантној бази $\mathbf{e}$. Ојлер-Арнољдову једначину

$$v = \dot{\gamma} = ad^*_{\gamma}\gamma$$

помножимо са e_i:

$$\langle v, e_i\rangle = \langle ad^*_{\gamma}\gamma, e_i\rangle = \langle \gamma, ad_{\gamma}e_i\rangle = \langle \gamma, [\gamma, e_i]\rangle.$$

У Ајнштајновој нотацији, претходна једначина има облик

$$\langle v^j e_j, e_i\rangle = \langle \gamma^k e_k, [\gamma^l e_l, e_i]\rangle,$$

односно

$$v^j\langle e_j, e_i\rangle = \gamma^k\gamma^l\langle e_k, [e_l, e_i]\rangle.$$

Када коефицијенте метрике g означимо са $g_{ji} = \langle e_j, e_i\rangle = g_{ij}$ добијамо

$$v^j g_{ji} = \gamma^k\gamma^l\langle e_k, [e_l, e_i]\rangle.$$

Помножимо инверзном матрицом $S^{-1} = \{g^{ij}\}$

$$\begin{aligned}
v^j &= g^{ji}\gamma^k\gamma^l\langle e_k, [e_l, e_i]\rangle = g^{ij}\gamma^k\gamma^l\langle e_k, c^m_{li}e_m\rangle = \\
&= g^{ij}\gamma^k\gamma^l c^m_{li}\langle e_k, e_m\rangle = g^{ij}g_{km}c^m_{li}\gamma^k\gamma^l,
\end{aligned}$$

где су c_{li}^m структурне константе алгебре ch_2:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^m e_m.$$

Пошто су комутатори

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2, \ \ [e_1, e_3] = \frac{1}{2}e_3, \ \ [e_1, e_4] = e_4, \ \ [e_3, e_2] = e_4,$$

онда су једине ненула структурне константе

$$c_{12}^2 = \frac{1}{2} = -c_{21}^2, \ \ c_{13}^3 = \frac{1}{2} = -c_{31}^3, \ \ c_{14}^4 = 1 = -c_{41}^4, \ \ c_{23}^4 = -1 = -c_{32}^4,$$

одакле се директно добијају једначине (5.4). □

Теорема 5.2. *Када је метрика Келерова ($p\beta = 1, \ b = 0$), крива $\gamma(t) = \gamma^i(t)e_i$ је дата у параметарском облику:*

- *у равни* $\Sigma = Span\{e_1, e_4\}$

$$\gamma(t) = \left(-2c_1 \tanh(2c_1 t + c_2), 0, 0, \pm\frac{2c_1}{\beta\cosh(2c_1 t + c_2)}\right), \tag{5.5}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0,$$

или

$$\gamma(t) = (1, 0, 0, 0).$$

- *у равни* $\Pi_\phi = Span\{e_1, e_\phi\}, \ e_\phi = \cos\phi\, e_2 + \sin\phi\, e_3, \ \phi \in [0, \pi)$

$$\gamma(t) = \left(-2c_1 \tanh(c_1 t + c_2), \frac{2c_1\cos\phi}{\sqrt{\beta}\cosh(c_1 t + c_2)}, \frac{2c_1\sin\phi}{\sqrt{\beta}\cosh(c_1 t + c_2)}, 0\right),$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0.$$

- *у општем случају:* $ch_2\backslash\left(\bigcup_{\phi\in[0,\pi)}\Pi_\phi\right)\backslash\Sigma$

$$\begin{aligned}
\gamma^1 &= \frac{2c_2\left(e^{4c_2(c_4-t)} - 16c_1^2c_2^2 - 4\right)}{\left(2 + e^{2c_2(c_4-t)}\right)^2 + 16c_1^2c_2^2}, \\
\gamma^2 &= \sqrt{\frac{2}{\beta}}r\cos\varphi, \\
\gamma^3 &= \sqrt{\frac{2}{\beta}}r\sin\varphi, \\
\gamma^4 &= \pm\frac{c_1}{\beta}r^2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\text{где је} \quad r = \frac{4c_2e^{c_2(c_4-t)}}{\sqrt{4 + 16c_1^2c_2^2 + 4e^{2c_2(c_4-t)} + e^{4c_2(c_4-t)}}},$$

$$\varphi = s\arcsin\left(\frac{1 + c_1^2r^2}{\sqrt{1 + 4c_1^2c_2^2}}\right) + c_3, \qquad s = -\operatorname{sgn}\gamma^1\operatorname{sgn}\gamma^4,$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0.$$

Доказ: У Келеровом случају, систем (5.4) постаје

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}^1 &= -\frac{\beta}{2}\left(\left(\gamma^2\right)^2+\left(\gamma^3\right)^2+2\beta\left(\gamma^4\right)^2\right),\\
\dot{\gamma}^2 &= \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2+\beta\gamma^3\gamma^4,\\
\dot{\gamma}^3 &= \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^3-\beta\gamma^2\gamma^4,\\
\dot{\gamma}^4 &= \gamma^1\gamma^4.
\end{aligned}$$

Линеарна смена

$$\gamma^1=2\alpha_1,\qquad \gamma^2=\sqrt{\frac{2}{\beta}}\alpha_2,\qquad \gamma^3=\sqrt{\frac{2}{\beta}}\alpha_3,\qquad \gamma^4=\frac{1}{\beta}\alpha_4,$$

трансформише претходни систем у

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= -\frac{1}{2}\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2\right),\\
\dot{\alpha}_2 &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4,\\
\dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4,\\
\dot{\alpha}_4 &= 2\alpha_1\alpha_4.
\end{aligned}$$

Раван

$$\Sigma:\alpha_2=\alpha_3=0$$

је инваријантна многострукост претходног система. Рестрикција система на ову раван је

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= -\frac{1}{2}\alpha_4^2,\\
\dot{\alpha}_4 &= 2\alpha_1\alpha_4.
\end{aligned}$$

Решење система у равни Σ је

$$\alpha_1=-c_1\tanh(2c_1t+c_2),\ \ \alpha_4=\pm\frac{2c_1}{\cosh(2c_1t+c_2)},\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R},\ \ c_1>0,$$

или $\alpha_4=0$ и $\alpha_1=const$.
Када претходно решење вратимо у линеарну смену (5.1), добијамо први специјални случај из исказа теореме (5.5).

Посматрајмо сада $ch_2\backslash\Sigma$. Увођењем цилиндричних координата:

$$\alpha_2=r\cos\varphi,\quad \alpha_3=r\sin\varphi, \tag{5.7}$$

систем постаје

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{1}{2}\left(r^2+\alpha_4^2\right), \tag{5.8}$$

$$\dot{r} = \alpha_1 r, \tag{5.9}$$

$$\dot{\varphi} = -\alpha_4, \tag{5.10}$$

$$\dot{\alpha}_4 = 2\alpha_1\alpha_4. \tag{5.11}$$

Инваријантна раван Σ одговара случају $r=0$. Пошто сада радимо на $ch_2\backslash\Sigma$, знамо да је

$$r \neq 0.$$

Једначине (5.9) и (5.11) дају

$$\alpha_1 = \frac{\dot r}{r}, \quad \dot\alpha_4 = 2\alpha_1\alpha_4 = 2\frac{\dot r}{r}\alpha_4. \tag{5.12}$$

Ако је $\alpha_4 = 0$, онда из једначине (5.10) следи да је φ константа. Нека је $\varphi = \phi$, $\phi \in [0,\pi)$, онда је раван

$$\Pi_\phi = Span\{e_1, e_\phi\}, \quad e_\phi = \cos\phi\, e_2 + \sin\phi\, e_3$$

инваријантна раван система. Рестрикција система на ову раван је

$$\dot\alpha_1 = -\frac{1}{2}r^2,$$
$$\dot r = \alpha_1 r,$$

а решење је:

$$\alpha_1 = -c_1\tanh(c_1t+c_2), \quad r = \frac{c_1\sqrt{2}}{\cosh(c_1t+c_2)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0.$$

Када се решење изрази у цилиндричним координатама (5.7), добијамо:

$$\alpha_1 = -c_1\tanh(c_1t+c_2),\ \alpha_2 = r\cos\phi = \frac{c_1\sqrt{2}\cos\phi}{\cosh(c_1t+c_2)},\ \alpha_3 = r\sin\phi = \frac{c_1\sqrt{2}\sin\phi}{\cosh(c_1t+c_2)}.$$

Уврштавањем овог израза у линеарну смену (5.1) добија се други специјални случај из исказа теореме (5.2).

Решимо сада општи случај на $ch_2\backslash\left(\bigcup_{\phi\in[0,\pi)}\Pi_\phi\right)\backslash\Sigma$.

Сада важи $r \neq 0$ и $\alpha_4 \neq 0$, па из једначине (5.12) следи

$$\frac{\dot\alpha_4}{\alpha_4} = 2\frac{\dot r}{r}.$$

Интегралимо претходну једначину:

$$\ln|\alpha_4| = 2\ln r + \bar c, \quad |\alpha_4| = r^2 e^{\bar c},$$

$$\alpha_4 = \pm c_1 r^2, \quad c_1 > 0. \tag{5.13}$$

Једначине (5.8), (5.9) и (5.13) дају

$$-\frac{1}{2}\left(r^2 + c_1^2r^4\right) = -\frac{1}{2}\left(r^2+\alpha_4^2\right) = \dot\alpha_1 = \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\alpha_1}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d\alpha_1}{dr}\dot r = \frac{d\alpha_1}{dr}\alpha_1 r,$$

$$-\frac{1}{2}\left(r + c_1^2r^3\right)dr = \alpha_1 d\alpha_1,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{c_1^2r^4}{4}\right)+c=\frac{\alpha_1^2}{2},\ c\geq 0,\quad \alpha_1^2=-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+2c.$$

Преименујемо $c_2^2=2c$ и добијамо решење

$$\alpha_1=\pm\sqrt{-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+c_2^2}, \tag{5.14}$$

уз услов:

$$c_2^2>\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right),\quad \text{тј.}\quad 4c_2^2-2r^2-c_1^2r^4>0. \tag{5.15}$$

Једначине (5.9) и (5.14) дају

$$\frac{dr}{dt}=\dot r=\alpha_1 r=\pm r\sqrt{-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+c_2^2},$$

$$dt=\pm\frac{dr}{r\sqrt{-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+c_2^2}}.$$

Интеграцијом претходних једначина добијамо

$$t=\pm\left(\frac{1}{2c_2}\left(\ln\left(8c_2^2-2r^2+4c_2\sqrt{4c_2^2-2r^2-c_1^2r^4}\right)-2\ln r\right)+c_4\right),$$

$$r=\frac{4c_2e^{c_2(c_4-t)}}{\sqrt{4+16c_1^2c_2^2+4e^{2c_2(c_4-t)}+e^{4c_2(c_4-t)}}}. \tag{5.16}$$

Ако вратимо резултат (5.16) у једначину (5.15) видимо да је тај услов испуњен за свако t :

$$4c_2^2-2r^2-c_1^2r^4>0,\quad \frac{4c_2^2\left(e^{4c_2(c_4-t)}-16c_1^2c_2^2-4\right)^2}{\left(\left(e^{2c_2(c_4-t)}+2\right)^2+16c_1^2c_2^2\right)^2}>0.$$

Из једначина (5.10) и (5.13) следи

$$\dot\varphi=-\alpha_4=\mp c_1r^2,$$

што заједно са (5.9) даје

$$-\operatorname{sgn}(\alpha_4)c_1r^2=\dot\varphi=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{d\varphi}{dr}\alpha_1 r.$$

Претходна једначина и (5.14) дају

$$-\operatorname{sgn}(\alpha_4)c_1r=\operatorname{sgn}(\alpha_1)\frac{d\varphi}{dr}\sqrt{-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+c_2^2},$$

$$d\varphi=-\operatorname{sgn}(\alpha_1)\operatorname{sgn}(\alpha_4)\frac{c_1r\,dr}{\sqrt{-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{c_1^2r^2}{2}\right)+c_2^2}},$$

$$\varphi = -\operatorname{sgn}(\alpha_1)\operatorname{sgn}(\alpha_4)\arcsin\left(\frac{1+c_1^2r^2}{\sqrt{1+4c_1^2c_2^2}}\right)+c_3. \tag{5.17}$$

Ограничење за константе

$$\frac{1+c_1^2r^2}{\sqrt{1+4c_1^2c_2^2}} \in (-1,1), \text{ односно } 4c_2^2 > 2r^2 + c_1^2r^4$$

је исто као раније добијено (5.15).

Из једначина (5.9) и (5.16) следи

$$\alpha_1 = \frac{\dot r}{r} = \frac{c_2\left(e^{4c_2(c_4-t)} - 16c_1^2c_2^2 - 4\right)}{\left(e^{2c_2(c_4-t)}+2\right)^2 + 16c_1^2c_2^2}. \tag{5.18}$$

Када добијена решења за α_1, r, φ, α_4, тј. једначине (5.18), (5.16), (5.17), (5.13) уврстимо у линеарну смену координата (5.1), добијамо решење (5.6) из исказа теореме.

□

5.2 Геодезијске линије Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$

Након што се пронађе решење Ојлер–Арнољдове једначине на алгебри, следећи корак је реконструкција геодезијских линија на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$ са Келеровом метриком. У даљем раду користимо орисферне координате параболоидног модела комплексног хиперболичког простора.

Последица 5.1. *У случају Келерове метрике $g\left(\frac{1}{\beta},0,\beta\right)$, геодезијске*

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$, које пролазе кроз неутрал $e = (1,0,0,0)$, задовољавају следећи систем једначина

$$\dot x = x\gamma^1, \quad \dot y = \sqrt{x}\gamma^2, \quad \dot z = \sqrt{x}\gamma^3, \quad \dot w = \frac{1}{2}z\sqrt{x}\gamma^2 - \frac{1}{2}y\sqrt{x}\gamma^3 + x\gamma^4, \tag{5.19}$$

са почетним условима

$$c(0) = (1,0,0,0), \quad \dot c(0) = \gamma(0),$$

где је γ крива из теореме 5.2. Специјално

- *У равни*

$$\sigma : y = z = 0,$$

која је интегрална раван дистрибуције

$$\Sigma = Span\{e_1, e_4\},$$

геодезијске кроз неутрал су полукругови дати са

$$c(t) = \left(\frac{\cosh c_2}{\cosh(2c_1 t + c_2)}, 0, 0, \pm \left(\frac{\cosh c_2}{\beta} \tanh(2c_1 t + c_2) - \frac{\sinh c_2}{\beta} \right) \right),$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

и полуправа

$$c(t) = (e^t, 0, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- *Равни*

$$\pi_\phi : w = 0, \ \cos\phi\, z - \sin\phi\, y = 0$$

су интегралне равни дистрибуција

$$\Pi_\phi = Span\{e_1, e_\phi\}, \quad e_\phi = \cos\phi\, e_2 + \sin\phi\, e_3, \quad \phi \in [0, \pi).$$

У овим равнима геодезијске

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$$

кроз неутрал су полукругови дати са

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cosh^2 c_2}{\cosh^2(c_1 t + c_2)}, \\ y(t) &= \frac{2}{\sqrt{\beta}} \cos(\phi) \left(\cosh c_2 \, \tanh(c_1 t + c_2) - \sinh(c_2)\right), \\ z(t) &= \frac{2}{\sqrt{\beta}} \sin(\phi) \left(\cosh c_2 \, \tanh(c_1 t + c_2) - \sinh(c_2)\right), \\ w(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

и полуправа

$$c(t) = (e^t, 0, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказ: Веза између координатне и лево-инваријантне базе Лијеве алгебре ch_2 дата је матрицом преласка (1.9). Ако релацију (5.1) која повезује геодезијску линију на групи и придружену криву на алгебри

$$\dot{c}(t) = dL_{c(t)} \gamma(t),$$

запишемо у матричном облику

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x}}{2} z & -\frac{\sqrt{x}}{2} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \\ \gamma^4 \end{pmatrix},$$

одмах добијамо да геодезијске на групи $\mathcal{CH}^2$ задовољавају систем једначина

$$\dot{x} = x\gamma^1, \quad \dot{y} = \sqrt{x}\gamma^2, \quad \dot{z} = \sqrt{x}\gamma^3, \quad \dot{w} = \frac{1}{2} z\sqrt{x}\gamma^2 - \frac{1}{2} y\sqrt{x}\gamma^3 + x\gamma^4. \tag{5.20}$$

Одредимо сада геодезијске у равни σ. На основу првог случаја (5.5) теореме 5.2, у тангентној равни $\Sigma = Span\{e_1, e_4\}$, придружена крива на алгебри је:

$$\gamma^1 = 2\alpha_1 = -2c_1 \tanh(2c_1 t + c_2), \;\; \gamma^2 = 0, \;\; \gamma^3 = 0, \;\; \gamma^4 = \frac{1}{\beta}\alpha_4 = \pm\frac{2c_1}{\beta\cosh(2c_1 t + c_2)},$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1 > 0.$$

или

$$\gamma(t) = (1, 0, 0, 0).$$

Једначине геодезијских линија на групи (5.20), уз почетни услов да геодезијска пролази кроз неутрал

$$c(0) = (1, 0, 0, 0),$$

у интегралној равни $\sigma : y = 0, z = 0$, дистрибуције Σ постају:

$$\dot{x} = x\gamma^1 = -2xc_1 \tanh(2c_1 t + c_2), \;\; \dot{y} = 0, \;\; \dot{z} = 0, \;\; \dot{w} = x\gamma^4 = \pm x\frac{2c_1}{\beta\cosh(2c_1 t + c_2)}.$$

Најпре одредимо координату x. Пошто радимо у орисферним координатама параболоидног модела комплексне хиперболичке равни, важи $x > 0$, па можемо да запишемо

$$\frac{\dot{x}}{x} = -2c_1 \tanh(2c_1 t + c_2).$$

Интеграцијом добијамо

$$\log x = -\log\cosh(2c_1 t + c_2) + c,$$

одакле следи

$$x = \frac{d_1}{\cosh(2c_1 t + c_2)}.$$

Из почетног услова $x(0) = 1$ добијамо вредност константе $d_1 = \cosh(c_2)$, па је решење

$$x = \frac{\cosh(c_2)}{\cosh(2c_1 t + c_2)}.$$

Сада одредимо координату w. Заменом добијеног израза за x у једначину за $\dot{w}$, добијамо

$$\dot{w} = x\gamma^4 = \pm\frac{\cosh(c_2)}{\cosh(2c_1 t + c_2)}\frac{2c_1}{\beta\cosh(2c_1 t + c_2)} = \pm\frac{2c_1\cosh(c_2)}{\beta\cosh^2(2c_1 t + c_2)}.$$

Интеграцијом следи

$$w + d_2 = \pm\frac{\cosh(c_2)}{\beta}\tanh(2c_1 t + c_2).$$

Из почетног услова $w(0) = 0$, добијамо вредност константе

$$d_2 = \pm\frac{\cosh(c_2)}{\beta}\tanh(c_2) = \pm\frac{\sinh(c_2)}{\beta},$$

па је решење за w

$$w = \pm(\frac{\cosh(c_2)}{\beta}\tanh(2c_1t + c_2) - \frac{\sinh(c_2)}{\beta}).$$

Пошто важи $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$, уз почетне услове $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, следи

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Дакле, решење у равни σ има облик

$$x = \frac{\cosh(c_2)}{\cosh(2c_1t + c_2)}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = \pm(\frac{\cosh(c_2)}{\beta}\tanh(2c_1t+c_2) - \frac{\sinh(c_2)}{\beta}).$$

У случају када је придружена крива $\gamma = (1, 0, 0, 0)$, одмах следи да је одговарајућа геодезијска полуправа

$$c(t) = (e^t, 0, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Систем у равни $\Pi_\phi = Span\{e_1, e_\phi\}$, где је $e_\phi = \cos\phi e_2 + \sin\phi e_3$, се решава на сличан начин. □

5.3 Тотално геодезијски потпростори $\mathbb{C}H^2$

Подмногострукост N Римановe многострукости M је **тотално геодезијска** ако су геодезијске линије у N са индукованом метриком уједно и геодезијске линије амбијентне многострукости M.

Ако је J (скоро) комплексна структура, онда је подмногострукост N

- **тотално реална** ако је за сваку тачку $p \in N$, $J(T_pN) \subseteq (T_pN)^\perp$, односно ако J тангентно раслојење слика у нормално,
- **(скоро) комплексна** ако је за сваку тачку $p \in N$, $J(T_pN) \subseteq T_pN$, односно ако је тангентно раслојење $J-$инваријантно.

Посматрајмо Келерову метрику $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$. Структура J_K из табеле 3.1 је комплексна, па су J_K-инваријантне подмногострукости комплексне. Прецизније, оне одговарају комплексним правама $\mathbb{C}H^1$.

У случају четвородимензионих Лијевих група, претходне дефиниције имају једноставан облик на нивоу алгебре. Раван π у Лијевој алгебри је тотално реална ако је $JX \perp \pi$ за свако $X \in \pi$, док је (скоро) комплексна ако је $JX \in \pi$ за свако $X \in \pi$.

Размотримо сада инваријантне равни система (5.1) теореме 5.2.

Лема 5.2. *Раван $\Sigma = Span\{e_1, e_4\}$ је комплексни потпростор Лијеве алгебре ch_2. У односу на Келерову метрику $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$ има константну секциону кривину $-\beta$ и одговара комплексној правој $\mathbb{C}H^1$.*

Све равни $\Pi_\phi = Span\{e_1, e_\phi\}$, $e_\phi = \cos\phi\, e_2 + \sin\phi\, e_3$, $\phi \in [0, \pi)$ су тотално реални потпростори алгебре ch_2 константне секционе кривине $-\frac{\beta}{4}$.

Доказ: Секциону кривину рачунамо на основу дефиниције (4.15) и оператора кривине из леме 4.2

$$K(\Sigma) = \frac{g(R(e_1, e_4)e_4, e_1)}{g(e_1, e_1)g(e_4, e_4) - g(e_1, e_4)^2} = \frac{g(-\beta^2 e_1, e_1)}{\frac{1}{\beta}\beta} = -\beta^2 \frac{1}{\beta} = -\beta$$

$$K(\Pi_\phi) = \frac{g(R(e_1, e_\phi)e_\phi, e_1)}{g(e_1, e_1)g(e_\phi, e_\phi) - g(e_1, e_\phi)^2}$$

$$= \frac{g\left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}\beta\cos(\phi) & -\frac{1}{4}\beta\sin(\phi) & 0 \\ \frac{\cos(\phi)}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4}\beta\sin(\phi) \\ \frac{\sin(\phi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\beta\cos(\phi) \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{4} & \frac{\cos(\phi)}{4} & 0 \end{pmatrix} e_\phi, e_1\right)}{\frac{1}{\beta}}$$

$$= g(-\frac{\beta}{4}e_1, e_1)\beta = -\frac{1}{4}\beta = -\frac{\beta}{4}$$

Комплексна структура J_K која са метриком $g\left(\frac{1}{\beta}, 0, \beta\right)$ на простору $\mathcal{CH}^2$ гради Келерову структуру има облик

$$J_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Када пресликамо векторе e_1, e_4 и e_ϕ

$$J_K(e_1) = -\frac{1}{\beta}e_4, \quad J_K(e_4) = \beta e_1, \quad J_K(e_\phi) = -\sin(\phi)\, e_2 + \cos(\phi)\, e_3,$$

видимо да важи $J_K(\Sigma) = \Sigma$, па је раван Σ комплексна, и $J_K(\Pi_\phi) = \Pi_\phi^\perp$, где је $\Pi_\phi^\perp$ ортогонални комплемент у односу на метрику g, па је раван Π_ϕ тотално реална. $\square$

На равнима Σ и Π_ϕ секциона кривина постиже минимум и максимум. Приметимо да раван Σ има један ненула комутатор

$$[e_1, e_4] = e_4,$$

као и све равни Π_ϕ

$$[e_1, e_\phi] = \frac{1}{2}e_\phi,$$

па су ове Лијеве алгебре изоморфне Лијевој алгебри реалне хиперболичке равни. Одговарајуће подмногострукости на групи $\mathcal{CH}^2$, равни σ и π_ϕ, су полуравански модели реалне хиперболичке равни $\mathbb{R}H^2$. Из последице 5.1 видимо да су геодезијске линије полукругови и полуправе нормални на апсолуту

$$a : x = 0.$$

Раван σ је комплексна, а равни π_ϕ су тотално реалне подмногострукости комплексне хиперболичке равни. На основу следеће теореме, доказане у [21, 56], следи да су σ и π_ϕ тотално геодезијске подмногострукости простора $\mathbb{C}H^2$. Штавише, до на изометрију, оне су једине тотално геодезијске подмногострукости комплексне хиперболичке равни, осим геодезијских линија.

Теорема 5.3. *[56] Једине праве тотално геодезијске подмногострукости $\mathbb{C}H^2$ су комплексне праве и тотално реалне равни.*

5.4 Геодезијске линије Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$

Геодезијске линије реалног хиперболичког простора са лево-инваријантним метрикама проучаване су у раду [76] *Геодезијска комплетност лево-инваријантних метрика на $\mathbb{R}H^n$*. Класификоване су све метрике произвољне сигнатуре и одређене су геодезијске линије сваке метрике, затим је показано да су метрике геодезијски комплетне само у Римановом случају.

У наставку представљамо решење на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$ са лево-инваријантном Римановом метриком $g(\lambda)$ одређеном скаларним производом $S(\lambda)$ из теореме 2.4. На Лијевој алгебри rh_4 криву γ придружену геодезијској c

$$\gamma(t) = dL^{-1}_{c(t)}\dot{c}(t),$$

посматрамо у лево-инваријантној бази $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ са комутаторима облика (1.11):

$$[e_4, e_k] = e_k, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Лема 5.3. *Крива $\gamma(t) = \gamma^i(t)e_i$ на алгебри rh_4, придружена геодезијској на групи $\mathcal{RH}^4$ са метриком $g(\lambda)$, дата је параметризацијом*

$$\begin{aligned} \gamma^k(t) &= \frac{c_k}{\cosh(ct + c_4)}, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \\ \gamma^4(t) &= -c\tanh(ct + c_4), \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$c^2 = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{3} c_k^2, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

или

$$\gamma(t) = (0, 0, 0, 1).$$

Доказ: Једине ненула структурне константе Лијеве алгебре rh_4 су

$$c_{4k}^k = 1 = -c_{k4}^k, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Одатле директно следи да су Ојлер–Арнољдове једначине на Лијевој алгебри rh_4 облика

$$\dot{\gamma}^k = \gamma^4\gamma^k, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \tag{5.22}$$

$$\dot{\gamma}^4 = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{3}\left(\gamma^k\right)^2. \tag{5.23}$$

Диференцирањем једначине (5.23) добија се

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma}^4 &= -\frac{2}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma^k\dot{\gamma}^k\right) = -\frac{2}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma^k\gamma^4\gamma^k\right) = -\frac{2\gamma^4}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\gamma^k\right)^2\right)\\ &= -\frac{2\gamma^4}{\lambda}\left(-\lambda\dot{\gamma}^4\right) = 2\gamma^4\dot{\gamma}^4 = \frac{d}{dt}\left(\gamma^4\right)^2.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Интеграцијом претходне једначине добијамо

$$\dot{\gamma}^4 = \left(\gamma^4\right)^2 + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Из (5.23) знамо да је $\dot{\gamma}^4 < 0$, па је $\tilde{c} < 0$. Ако преозначимо

$$\tilde{c} = -c^2,$$

претходна једначина постаје

$$\dot{\gamma}^4 = \left(\gamma^4\right)^2 - c^2, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5.25}$$

За $\left(\gamma^4\right)^2 = c^2$, следи да је $\dot{\gamma}^4 = 0$, па се из једначине (5.23) добија да је $\gamma^k = 0$ за $k \in \{1, 2, 3\}$. У том случају решење је

$$\gamma(t) = (0, 0, 0, 1).$$

За $\left(\gamma^4\right)^2 \neq c^2$, једначина (5.25) постаје

$$\frac{d\gamma^4}{\left(\gamma^4\right)^2 - c^2} = dt.$$

Интеграцијом се добија

$$-\frac{1}{c}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\gamma^4}{c}\right) = t + \bar{c}$$

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{\gamma^4}{c}\right) = -(ct + c_4)$$

$$\gamma^4 = -c\tanh(ct + c_4). \tag{5.26}$$

Ако заменимо добијено решење (5.26) у једначину (5.22) добијамо

$$\dot{\gamma}^k = \gamma^4\gamma^k = -c\tanh(ct + c_4)\gamma^k, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

За $\gamma^k \neq 0$ претходна једначина постаје једначина са раздвојеним промењљивима

$$\frac{\dot{\gamma}^k}{\gamma^k} = -c\tanh(ct + c_4).$$

Интеграцијом следи

$$\log|\gamma^k| = -\log\cosh(ct + c_4) + \bar{c_k},$$

односно

$$\gamma^k = \pm\frac{1}{\cosh(ct+c_4)}e^{\bar{c}_k} = \frac{c_k}{\cosh(ct+c_4)}, \quad c_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{5.27}$$

За $\gamma^k = 0$ решење упада у претходни случај када је $c_k = 0$.

Када убацимо добијена решења (5.26) и (5.27) у једначину (5.23) добијамо

$$-\frac{c^2}{\cosh^2(ct+c_4)} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{3}\frac{c_k^2}{\cosh^2(ct+c_4)},$$

што даје везу између константи

$$c^2 = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{3} c_k^2.$$

□

Теорема 5.4. *Геодезијске $c(t) = (x_1, x_2, x_3, y)$ кроз неутрал на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$ са метриком $g(\lambda)$ су полукругови*

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \frac{c_k\cosh c_4}{c}\left(\tanh(ct+c_4) - \tanh c_4\right), \quad k \in \{1,2,3\},\\ y(t) &= \frac{\cosh c_4}{\cosh(ct+c_4)}, \end{aligned}$$

$$c^2 = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{3} c_k^2, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

и полуправа

$$c(t) = \left(0,0,0,e^t\right).$$

Доказ: Из поглавља (1.4) знамо да је диференцијал леве транслације (1.4) у полупросторном моделу реалног хиперболичког простора

$$dL_q = yI.$$

Због тога је веза између геодезијске линије на групи $\mathcal{RH}^4$ и одговарајуће криве на алгебри rh_4 у овом случају дата са

$$\gamma = dL_c^{-1}\dot{c} = \frac{1}{y}\dot{c},$$

односно геодезијска задовољава систем једначина

$$\gamma^k = \frac{\dot{x}_k}{y}, \quad k \in \{1,2,3\}, \tag{5.28}$$

$$\gamma^4 = \frac{\dot{y}}{y}. \tag{5.29}$$

У случају када је крива на алгебри $\gamma = (0,0,0,1)$, одговарајућа геодезијска је полуправа

$$c(t) = (0,0,0,e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

У општем случају, када у једначину (5.29) заменимо координате одговарајуће криве (5.21) са алгебре rh_4, добијамо

$$\frac{\dot{y}}{y} = -c\tanh(ct + c_4).$$

Пошто је у полупросторном моделу $y > 0$, интеграцијом претходне једначине добијамо

$$\log y = -\log\cosh(ct + c_4) + d. \tag{5.30}$$

Из почетног услова да крива пролази кроз неутрал $(0,0,0,1)$, тј. $y(0) = 1$, добијамо вредност константе

$$d = \log(\cosh c_4).$$

Сада из једначине (5.30) следи

$$y = \frac{\cosh c_4}{\cosh(ct + c_4)}. \tag{5.31}$$

Када добијено решење (5.31) и параметарску једначину (5.21) криве γ заменимо у једначину (5.28), добијамо

$$\dot{x}_k = y\gamma^k = \frac{\cosh c_4}{\cosh(ct + c_4)}\frac{c_k}{\cosh(ct + c_4)} = \frac{c_k\cosh c_4}{\cosh^2(ct + c_4)}.$$

Интеграцијом претходне једначине добијамо

$$x_k = \tanh(ct + c_4)\frac{c_k\cosh c_4}{c} + d_k.$$

Из почетног услова $x_k(0) = 0$, добијамо вредност константе

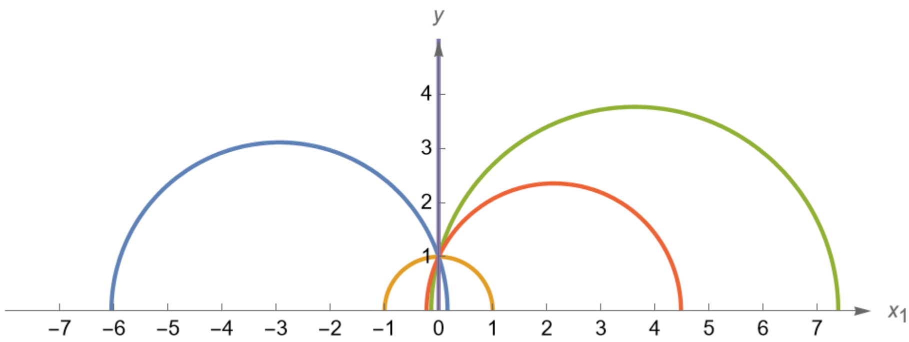
$$d_k = -\tanh c_4\frac{c_k\cosh c_4}{c},$$

па је решење

$$x_k = \tanh(ct+c_4)\frac{c_k\cosh c_4}{c} - \tanh c_4\frac{c_k\cosh c_4}{c} = \frac{c_k\cosh c_4}{c}(\tanh(ct+c_4) - \tanh c_4).$$

$\square$

Приметимо да су једначине геодезијских линија кроз неутрал Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$ инваријантне у односу на ротације око y-осе. Пошто се свака геодезијска која садржи неутрал таквом ротацијом може пресликати у геодезијску равни O_{x_1y}, довољно је да их нацртамо у тој равни.

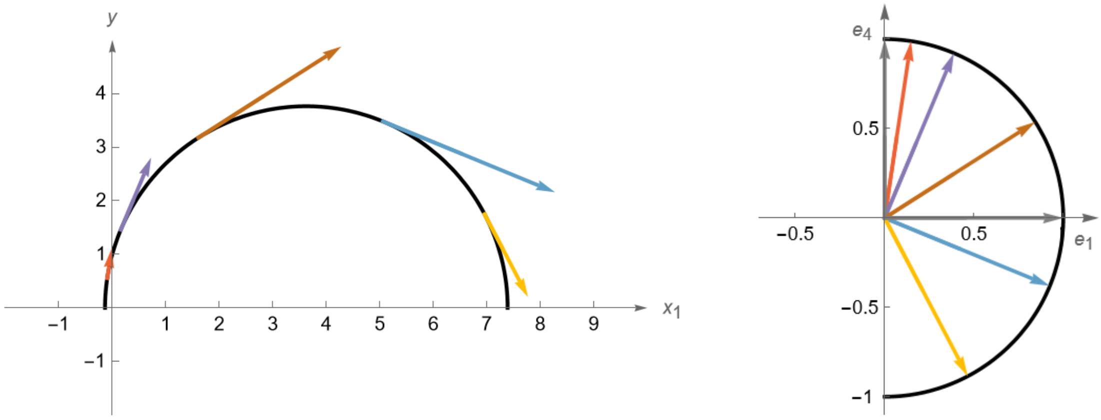


Слика 5.2: Геодезијске на $\mathcal{RH}^4$

Пресликавање које слика тангентни вектор геодезијске $\dot{c}(t)$ у тангентни простор неутрала (односно у Лијеву алгебру rh_4) је у овом случају само скалирање

$$\gamma(t) = \frac{1}{y(t)}\dot{c}(t).$$

Ојлер-Арнољдове једначине које описују криву $\gamma(t)$ на алгебри која одговара геодезијској $c(t)$ су инваријантне у односу на ротације у хиперравни $Span(e_1, e_2, e_3)$, које чувају правац e_4, па их без губитка општости можемо приказати у равни $Span(e_1, e_4)$



Слика 5.3: Геодезијска крива $c(t)$ на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$ и придружена крива $\gamma(t)$ у Лијевој алгебри rh_4

6 Визуализација геодезијских на $\mathcal{CH}^2$

Постоји лепа позитивна повратна спрега између геометрије као гране теоријске математике и визуализације помоћу модерних софтверских алата: добро познавање геометрије омогућава развој програма за приказ геометријских објеката, а добијене визуализације заузврат продубљују интуицију и подстичу даља истраживања.

На пример, Голдманова књига *Комплексна хиперболичка геометрија* [21], један од најпознатијих уџбеника геометрије простора $\mathbb{C}H^n$, првобитно је настала као „упутство за кориснике једног рачунарског програма" (видети [21], Увод). Реч је о Математика [1] пакету *Хајзенберг* [57], направљеном у Геометријском центру Универзитета у Минесоти [20]. Од краја осамдесетих до краја деведесетих година ту је радио тим истраживача (Голдман, Паркер, Филипс [50], Ган [18], Викс [77], Мицнер [49] и други), чији су радови из геометрије, топологије, рачунарске визуализације и математичке анимације представљали инспирацију за овај рад.

Математика пакет [57] користи геодезијску перспективу (1.7) из бесконачно далеке тачке q_∞ за пројектовање простора $\mathbb{C}H^2$ на апсолуту параболоидног модела, која носи структуру Хајзенбергове групе (видети поглавље 1.2.4). Ова пројекција је посебно занимљива, јер је апсолута изоморфна орисфери, површи која унутар простора $\mathbb{C}H^2$ моделује тродимензиони еуклидски простор.

Сличан приступ, визуализација централним пројектовањем из тачке на орисферу, примењен је на реалном хиперболичком простору $\mathbb{R}H^3$ у радовима [5, 74], као и у Математика пакету [6], развијеном за израду илустрација у тим радовима. Пошто је орисфера у $\mathbb{R}H^3$ изоморфна еуклидској равни, можемо да је замислимо као еуклидску раван екрана утопљену у простор $\mathbb{R}H^3$, па овај приступ омогућава да хиперболички простор посматрамо „еуклидским очима".

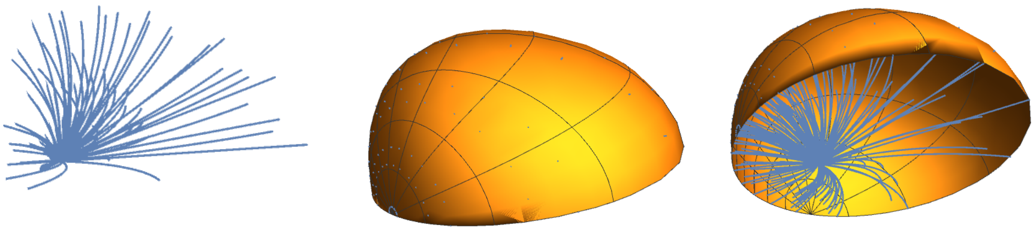
У овом поглављу користимо орисферне координате за приказивање геодезијских линија које пролазе кроз неутрал, као и геодезијских сфера са центром у неутралу Лијеве групе

$$\mathcal{CH}^2 = \mathbb{R}^+ \ltimes H^3 = \mathbb{R}^+ \ltimes (\mathbb{C} \ltimes \mathbb{R}) = \{(x, \zeta, w) \mid x \in \mathbb{R}^+,\ \zeta \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{R}\},$$

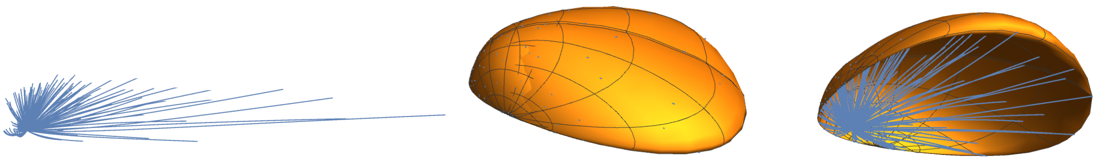
у односу на различите лево-инваријантне Риманове метрике. Пошто се ови објекти природно налазе у реалном простору димензије четири, потребно је изабрати одговарајући начин њиховог приказивања у тродимензионом простору. Због тога комплексну компоненту приказујемо модулом комплексног броја, чиме се димензија ефективно своди на три. Ако са $\|\zeta\|$ означимо модул комплексног броја $\zeta = z + iy$, онда тачке параболоидног модела на сликама представљамо координатама $(x, \|\zeta\|, w)$.

[1] Wolfram Mathematica software package

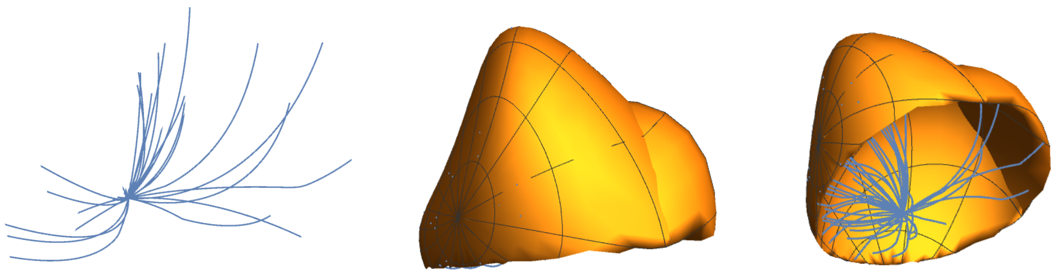
Слике које следе добијене су нумеричким решавањем једначина геодезијских линија из теореме 5.1 за различите параметре метрика $g(p, b, \beta)$ дефинисаних одговарајућим скаларним производима (2.3). На основу леме 5.1 знамо да приказане геодезијске линије имају константну брзину, што нам омогућава визуализацију геодезијских сфера.



Слика 6.1: Келерова метрика на $\mathbb{C}H^2$: $p = 1, \beta = 1, b = 0$



Слика 6.2: $p = 1, \beta = \frac{1}{2}, b = 2$



Слика 6.3: $p = 1, \beta = 2, b = 1$

7 Прилог

A Хармонијске NA групе

У овом делу дајемо дефиницију NA група, као и закон множења на њима. За више детаља видети књигу: Сундарам Тангавелу, *Увод у принцип неодређености, Хардијева теорема на Лијевим групама* [70]. Хармонијске NA групе чине класу решивих Лијевих група опремљених лево-инваријантним метрикама, која, између осталог, обухвата и некомпактне симетричне просторе ранга један.

Дефиниција 7.1. [70, стр. 162] Нека је Лијева алгебра n нилпотентна у два корака. Означимо са z центар, а са v ортогонални комплемент центра алгебре n:

$$n = v \oplus z.$$

Кажемо да је n **уопштена Хајзенбергова алгебра**, или **алгебра Ха-типа** ако за свако $W \in z$ пресликавање

$$J_W : v \to v$$

дефинисано са

$$\langle J_W X, Y\rangle = \langle [X, Y], W\rangle, \quad X, Y \in v$$

испуњава услов

$$J_W^2 = -|W|^2 Id,$$

где је Id идентитет на векторском простору v. Повезана и просто повезана Лијева група N назива се **уопштена Хајзенбергова група** или **група Ха-типа** ако је њена Лијева алгебра Ха-типа.

Пошто је n нилпотентна алгебра, експоненцијално пресликавање

$$N = \exp n$$

је сурјекција, па се сваки елемент групе N може записати у облику

$$\exp(U + W), \quad U \in v, \quad W \in z.$$

Када елементе групе параметризујемо са (U, W), на основу Кампбел-Бејкер-Хаусдорфове формуле добијамо закон множења на групи N

$$(U, W)(U', W') = (U + U', W + W' + \frac{1}{2}[U, U']).$$

Ако је Ивасава декомпозиција полупросте Лијеве групе G

$$G = KAN,$$

онда симетричан простор G/K може да се реализује као Лијева група $S = NA$. У случају када је Абелов део декомпозиције $A = \mathbb{R}^+$, а нилпотентан део N група Ха-типа, при чему је дејство групе A на N дефинисано са

$$(U, W) \to (\sqrt{x}\, U, xW), \quad x \in A,$$

кажемо да је полудиректан производ

$$S = N \rtimes A$$

хармонијска NA група.

Специјално, за реалан хиперболички простор $\mathbb{R}H^n$ нилпотентан део је Абелова група $\mathbb{R}^n$, док је за комплексни хиперболички простор $\mathbb{C}H^n$ нилпотентан део Хајзенбергова група $\mathcal{H}^n$.

Елемент NA групе $(\exp(U + W), x)$ краће запишимо као (U, W, x). Тада је закон множења на NA групи:

$$(U, W, x)(U', W', x') = (U + \sqrt{x}U',\ W + xW' + \frac{1}{2}\sqrt{x}[U, U'],\ xx').$$

8 Закључак

Основни циљ наших истраживања је проучавање лево-инваријантне Риманове геометрије четвородимензионих хиперболичких простора. Из тог разлога је у тези детаљно и систематски изложено како се на овим просторима уводи структура Лијеве групе. Дефинисани су неки од основних модела реалних и комплексних хиперболичких простора, а затим су на њима дати закони множења и изведени комутатори одговарајућих Лијевих алгебри. Ове алгебре повезане су са постојећим класификацијама четвородимензионих Лијевих алгебри и показано је како оне представљају једнодимензионе екстензије алгебре тродимензионог реалног хиперболичког простора. На примеру реалне и комплексне хиперболичке равни приказана су нека интересантна својства симетричних простора, као и начин одређивања геодезијских линија на њима.

На почетку сваке главе или поглавља дат је преглед досадашњих резултата из одговарајуће области, уз навођење извора у којима су изложени теорија, дефиниције и основна тврђења. Међу цитираним референцама налазе се многи класични уџбеници из диференцијалне геометрије, теорије Лијевих група и симетричних простора, који се већ дуго користе у настави на докторским студијама геометрије. Тиме се, поред излагања оригиналних резултата, настојало да се читаоцу пружи преглед релевантне литературе као полазна тачка за даље проучавање тема обрађених у дисертацији.

Један од главних доприноса ове дисертације јесте класификација хермитских структура на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$, односно одређивање свих неизометричних лево-инваријантних Риманових метрика и са њима сагласних комплексних структура. Овај резултат објављен је у раду [75]. Геодезијске линије добијених метрика први пут су проучаване у самосталном раду ауторке [4].

Пошто се све Риманове лево-инваријантне метрике на Лијевој групи $\mathcal{RH}^4$ разликују само за константу, у реалном случају сви рачуни су знатно једноставнији него у комплексном. Због тога сматрамо да овај пример може бити посебно користан читаоцима који се први пут упознају са класичним методама рада у геометрији Лијевих група. Сви рачуни, посебно у глави 4, изложени су што детаљније како би заинтересовани читалац могао самостално да прати извођења и примени исте методе на другим просторима.

Визуализација реалног и комплексног хиперболичког простора, као и одговарајућих Лијевих група $\mathcal{CH}^2$ и $\mathcal{RH}^4$, представља природан наставак ранијих радова ауторке [5,74] који су се бавили визуализацијом простора $\mathbb{R}H^3$. За израду слика коришћени су следећи софтверски алати:

- Геогебра[1], за приказ геодезијских линија на симетричним просторима $\mathbb{R}H^2$ и $\mathbb{C}H^2$ у поглављу 1.6,

- GCLC[2], за илустрацију везе између геодезијске линије на Лијевој групи G и одговарајуће криве на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ у глави 5,

- Волфрам Математика[3], за визуализацију геодезијских линија и сфера Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ у глави 6, као и геодезијских линија Лијеве групе $\mathcal{RH}^4$ и придружених кривих алгебре rh_4 у поглављу 5.4.

У овој тези приказане су геодезијске линије и сфере неизометричних Римановых лево-инваријантних метрика на Лијевој групи $\mathcal{CH}^2$. Како се ови објекти налазе у четвородимензионом реалном простору, за њихову визуализацију било је потребно одабрати одговарајући начин представљања у три димензије. Приступ одабран у тези је да се комплексна компонента производа

$$\mathcal{CH}^2 = \mathbb{R}^+ \ltimes H^3 = \mathbb{R}^+ \ltimes (\mathbb{C} \ltimes \mathbb{R})$$

представи модулом комплексног броја, односно да се на тај начин ефективно смањи димензија простора на три.

Даљи рад може бити примена других метода визуализације четвородимензионих хиперболичких простора. Једна од занимљивих могућности је приступ заснован на компјутерској томографији (CT-scan). Фиксирањем једне координате и пресецањем геодезијске сфере тродимензионим хиперравнима које одговарају различитим вредностима те координате добија се низ тродимензионих пресека. Такав низ слика може дати леп увид у структуру геодезијске сфере или било ког другог објекта четвородимензионог простора који се разматра.

Други интересантан приступ је пројекција четвородимензионе Лијеве групе $\mathcal{CH}^2$ на орисферу, по идеји која је реализована у пакету Хајзенберг [57] за комплексну хиперболичку раван са стандардном Келеровом метриком. У орицикличким координатама ово пресликавање има веома једноставан облик (1.7), па би било природно испитати како се геодезијске сфере добијене у овој тези виде у таквој пројекцији.

Овим радом, наравно, није исцрпљена лево-инваријантна геометрија четвородимензионих хиперболичких простора. Добијени резултати отварају више природних праваца за даља истраживања.

Први наредни задатак би могао бити да се одреде пројективна, афина, конформна и Килингова поља на $\mathcal{CH}^2$. Прелиминарни рачуни показују да нема лево-инваријантних поља ових типова ни за једну од Римановых метрика из поглавља 2.2, али општи случај још нисмо разматрали.

Други правац истраживања односи се на проучавање хермитских структура и геодезијских линија у односу на Лоренцове метрике и метрике неутралне сигнатуре. Док је већина резултата у реалном случају позната и у произвољној

[1]GeoGebra, Markus Hohenwarter, https://www.geogebra.org/

[2]Mathematical Tool GCLC (Geometry Constructions → LaTeX Converter) by Predrag Janičić https://poincare.matf.bg.ac.rs/ janicic/gclc/

[3]Wolfram Mathematica, Stephen Wolfram, https://www.wolfram.com/mathematica/

димензији, у комплексном случају остаје отворено питање у којој мери се добијени резултати могу уопштити најпре на простор $\mathbb{C}H^3$, а затим и на комплексни хиперболички простор $\mathbb{C}H^n$ произвољне димензије.

Литература

[1] V. I. Arnold, *Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Annales de l'Institut Fourier, vol. 16, no. 1, pp. 319-361, 1966.

[2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1974.

[3] A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti, G. P. Ovando, *Product structures on four dimensional solvable Lie algebras*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 7, no. 1, pp. 9-37, 2005.

[4] M. Babić, *Geodesics of Riemannian Complex Hyperbolic plane*, Matematički Vesnik, vol. 76, no. 1-2, pp. 105-117, 2024.

[5] M. Babić, *Vizualizacija prostora Lobačevskog centralnim projektovanjem na orisferu*, Master rad, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2010.

[6] M. Babić, S. Vukmirović, *L3toHorosphere - central projection of hyperbolic space onto horosphere*, Mathematica package 8335, Mathsource, 2012. https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/8335/

[7] M. L. Barberis, *Hypercomplex structures on four-dimensional Lie groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 125, no. 4, pp. 1043-1054, 1997.

[8] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata ser. II, vol. 2, pp. 232-255, 1868.

[9] N. Blažić, S. Vukmirović, *Four-dimensional Lie algebras with a para-hypercomplex structure*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 40, no. 5, pp. 1391-1439, 2010.

[10] N. Blažić, S. Vukmirović, *Para-hypercomplex structures on a four-dimensional Lie group*, Contemporary Geometry and Related Topics, Proceedings of the Workshop Hardcover, pp. 41-56, 2004.

[11] N. Bokan, T. Šukilović, S. Vukmirović, *Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, Geometriae Dedicata, vol. 177, no. 1, pp. 83-102, 2015.

[12] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1926.

[13] E. Cartan, *Oeuvres Complétes Vol. 1, 2*, Gauthier-Villars, 1952.

[14] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Differential Geometry and its Applications, vol. 31, no. 4, pp. 496-509, 2013.

[15] T. Christodoulakis, G. O. Papadopoulos, A. Dimakis, *Automorphisms of Real 4 Dimensional Lie Algebras and the Invariant Characterization of Homogeneous 4-Spaces*, Journal of Physics A Mathematical and General, vol. 36, no. 2, pp. 427-442, 2002.

[16] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[17] L. A. Cordero, P. E. Parker, *Left-invariant Lorentz metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, vol. 17, no. 1, pp. 129-155, 1997.

[18] D. Epstein, C. Gunn, *Supplement to Not Knot*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1991.

[19] T. Friedrich, *Self-duality of riemannian manifolds and connections*, Seminarbericht, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, 1980.

[20] The Geometry Center, University of Minnesota
http://www.geom.uiuc.edu/
https://www.cs.ubc.ca/ tmm/gc/

[21] W. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[22] W. Goldman, J. Parker, *Dirichlet Polyhedra for Dihedral Groups Acting on Complex Hyperbolic Space*, The Journal of Geometric Analysis, vol. 2, no. 6, pp. 517-554, 1992.

[23] C. S. Gordon, E. N. Wilson, *Isometry groups of Riemannian solvmanifolds*, Transaction of the American Mathematical Society, vol. 307, no. 1, pp. 245-269, 1988.

[24] M. Goze, E. Remm, *Non Existence of Complex Structures on Filiform Lie Algebras*, Communications in Algebra, vol. 30, no. 8, pp. 3777-3788, 2002.

[25] A. Gray, *Lie groups*, Preprint, 1993.

[26] T. Hashinaga, H. Tamaru, K. Terada, *Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups*, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 68, no. 2, pp. 669-684, 2016.

[27] E. Heintze, *On Homogeneous Manifolds of Negative Curvature*, Mathematische Annalen, vol. 211, pp. 23-34, 1974.

[28] E. Heintze, *Riemannsche Solvmannigfaltigkeiten*, Geometriae Dedicata, vol. 1, pp. 141-147, 1973.

[29] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[30] J. Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Inventiones mathematicae, vol. 133, pp. 279-352, 1998.

[31] G. R. Jensen, *Homogeneous Einstein spaces of dimension four*, Journal of Differential Geometry, vol. 3, no. 3-4, pp. 309 - 349, 1969.

[32] M. B. Karki, G. Thompson, *Four-dimensional Einstein Lie groups*, Differential Geometry - Dynamical Systems, vol. 18, pp. 43-57, 2016.

[33] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Digital Second Edition, Published by the Author, East Setauket, New York, 2023.

[34] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton University Press, New Jersey, 2001.

[35] H. Kodama, A. Takahara, H. Tamaru, *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Mathematica, vol. 135, no. 1, pp. 229-243, 2011.

[36] A. Kubo, K. Onda, Y. Taketomi, H. Tamaru, *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Mathematical Journal, vol. 46, no. 3, pp. 357-374, 2016.

[37] J. Lauret, *Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4*, Geometriae Dedicata, vol. 68, pp. 145-155, 1997.

[38] J. Lauret, *Einstein solvmanifolds and nilsolitons*, arXiv:0806.0035, 2008.

[39] J. Lauret, *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds*, Mathematische Annalen, vol. 319, no. 4, pp. 715-733, 2001.

[40] J. Lauret, *Ricci soliton solvmanifolds*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 650, pp. 1-21, 2011.

[41] Н. И. Лобачевский, *О началах геометрии*, Казанский вестник, 1829 - 1830.

[42] Н. И. Лобачевский, *Воображаемая геометрия*, Учёные записки Казанского университета, 1835.

[43] Н. И. Лобачевский, *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных*, Учёные записки Казанского университета, 1835 - 1838.

[44] Н. И. Лобачевский, *Пангеометрия*, Учёные записки Казанского университета, 1855.

[45] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics, vol. 21, no. 3, pp. 293-329, 1976.

[46] H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, 1908.

[47] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, 1909.

[48] G. M. Mubarakazyanov, *On solvable Lie algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat, vol. 32, no. 1, pp. 114-123, 1963.

[49] T. M. Munzner, *Visualization videos* https://www.youtube.com/@TamaraMunzner

[50] T. M. Munzner, M. B. Phillips *Visualization in Geometry Research and Education*, Position Statement for Scientific Visualization Environments: A Workshop at Visualization 1991.

[51] A. Nijenhuis, *On the Holonomy Groups of Linear Connections: General Properties of Affine Connections*, Indagationes Mathematicae (Proceedings), vol. 56, pp. 233-249, 1953.

[52] M. Okumura, M. Djorić, *CR Submanifolds of Complex Projective Space*, Springer, Developments in Mathematics, 2010.

[53] G. Ovando, *Complex structures on* $\mathbb{R}H^4$ *and* $\mathbb{C}H^2$, Matematica Contemporanea, vol. 17, pp. 237-250, 1999.

[54] G. Ovando, *Invariant complex structures on solvable real Lie groups*, Manuscripta Mathematica, vol. 103, no. 1, pp. 19-30, 2000.

[55] G. Ovando, *Four Dimensional Symplectic Lie Algebras*, Contributions to Algebra and Geometry, vol. 47, no. 2, pp. 419-434, 2006.

[56] J. Parker, *Notes on Complex Hyperbolic Geometry*, Preprint, University of Durham, 2003.

[57] M. Phillips, W. Goldman, R. Miner, *Heisenberg*, Mathematica package 1352, Mathsource, 1995. https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/1352/

[58] H. Poincaré, *Sur les applications de la géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques.* Association française pour l'avancement des sciences, vol. 10, pp. 132-138, 1881.

[59] H. Poincaré, *Les géométries non euclidiennes*, Revue générale des sciences pures et appliquées 1890.

[60] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, 1902.

[61] H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, vol. 21, pp. 129–176, 1905.

[62] S. Rahmani, *Métriques de lorentz sur les groupes de lie unimodulaires, de dimension trois*, Journal of Geometry and Physics, vol. 9, no. 3, pp. 295-302, 1992.

[63] S. Rahmani, N. Rahmani, *Lorentzian homogeneous structures on the Heisenberg group*, Journal of Geometry and Physics, vol. 13, no. 3, pp. 254-258, 1994.

[64] J. E. Snow, *Invariant Complex Structures on Four Dimensional Solvable Real Lie Groups*, Manuscripta Mathematica, vol. 66, pp. 397-412, 1990.

[65] T. Šukilović, *Classification of left invariant metrics on 4-dimensional solvable Lie groups*, Theoretical and Applied Mechanics, vol. 47, pp. 181-204, 2020.

[66] T. Šukilović, *Geometric properties of neutral signature metrics on 4-dimensional nilpotent Lie groups*, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 57, pp. 23-47, 2016.

[67] T. Šukilović, *Geometrija četvorodimenzionih nilpotentnih Lijevih grupa*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 2015.

[68] T. Šukilović, S. Vukmirović, N. Bokan, *On the moduli space of left-invariant metrics on the cotangent bundle of the Heisenberg group*, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 68, no. 2, pp. 485-518, 2025.

[69] R. C. Stursberg, G. Ovando, *Complex structures on tangent and cotangent Lie algebras of dimension six*, arXiv:0805.2520v2, 2009.

[70] S. Thangavelu, *An Introduction to the Uncertainty Principle, Hardy's Theorem on Lie Groups*, Springer Science+Business Media, 2004.

[71] T. Tao, *Compactness and contradiction*, American Mathematical Society, 2013.

[72] S. Vukmirović, *Classification of left-invariant metrics on the Heisenberg group*, Journal of Geometry and Physics, vol. 94, pp. 72-80, 2015.

[73] S. Vukmirović, *Auto-dualne povezanosti*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 2003.

[74] S. Vukmirović, M. Babić, *Central Projection of Hyperbolic Space onto a Horosphere*, KoG, vol. 16, pp. 27-35, 2012.

[75] S. Vukmirović, M. Babić, A. Dekić, *Classification of left-invariant Hermitian structures on 4-dimensional non-compact rank one symmetric spaces*, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 60, no. 2, pp. 343-358, 2019.

[76] S. Vukmirović, T. Šukilović, *Geodesic completeness of the left-invariant metrics on $\mathbb{R}H^n$*, Ukrainian Mathematical Journal, vol. 72, no. 5, pp. 702-711, 2020.

[77] J. R. Weeks, *The Shape of Space*, 3rd Edition, CRC Press, 2020.

[78] J. Williamson, *On the Algebraic Problem Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems*, American Journal of Mathematics, vol. 58, pp. 141-163, 1936.

[79] J. A. Wolf, *Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature*, Illinois Journal of Mathematics, vol. 8, no. 1, pp. 14-18, 1964.

Биографија

Маријана Бабић је рођена 6. априла 1984. године у Београду, где је завршила основну школу и Математичку гимназију. Током школовања успешно је учествовала на такмичењима из математике, физике и шаха. Више пута је представљала земљу на шаховским првенствима Европе и света, појединачно и као члан омладинске репрезентације. Носилац је титуле женски интернационални мајстор шаха.

Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, на смеру Теоријска математика и примене, завршила је 2009. године са просечном оценом 9,19. Током студија обавила је стручну праксу на MIRCE Академији у Ексетеру, Енглеска, која је трајала шест недеља, као и петомесечну стручну праксу у Центру за развој софтвера Универзитета Магдалена у Колумбији. Похађала је и летњу школу математике у Перуђи, Италија, у трајању од пет недеља.

Мастер академске студије завршила је 2010. одбранивши мастер рад ,,Визуализација простора Лобачевског", под менторством проф. др Срђана Вукмировића, са оценом 10.

Десет година је радила на Математичком факултету Универзитета у Београду, најпре као сарадник у настави, а затим као асистент. Држала је вежбе на предметима: Нацртна, Аналитичка, Еуклидска и хиперболичка геометрија, Програмски пакети у математици, Примена пројективне геометрије у рачунарству, Геометрије 1, 2, 3, 4 и Геометрија за информатичаре. У периоду од 2017. до 2020. године била је члан Савета Математичког факултета. Била је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије ,,Геометрија, образовање, визуелизација са применама"(бр. 174012) од 2011. до 2019. године.

Од 2020. године запослена је на Математичком институту САНУ као истраживач приправник, а од 2025. као истраживач сарадник. Функцију секретара Одељења за механику Математичког инситута САНУ обављала је од 2021. до 2023. године, а тренутно обавља функцију секретара Сектора за механику.

Била је члан организационог одбора две међународне конференције: XXI Геометријског семинара у Београду 2022. године и Осме интернационалне конференције Геометрија, Динамика, Интеграбилни системи (ГДИС) одржане на Златибору исте године. Имала је саопштења и постере на седам међународних конференција.

Удата је и мајка троје деце.

Списак објављених научних радова везаних за тему дисертације:

1. Geodesics of Riemannian Complex Hyperbolic plane, Marijana Babić, Matematički Vesnik, 105-117, 76, 1-2, (2024). https://doi.org//10.57016/MV-MsnU3893

2. Classification of left invariant Hermitian structures on 4-dimensional non-compact rank one symmetric spaces,
Srdjan Vukmirović, Marijana Babić, Andrijana Dekić
Revista de la Unión Matemática Argentina, 60, 343-358 (2019).
https://doi.org/10.33044/revuma.v60n2a04.

3. Central projection of hyperbolic space onto a horosphere
Srdjan Vukmirović, Marijana Babić
KoG (Scientific-Professional Journal of Croatian Society for Geometry and Graphics)
No. 15. ISSN 1331-1611, (2012).

4. Programski paket L3toHorosphere
Srdjan Vukmirović, Marijana Babić
Налази се у бази Wolfram Library Archive
http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/8335/ 2012.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Маријана Бабић

број уписа 2017/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Хермитске структуре и геодезијске линије на четвородимензионим хиперболичким просторима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 27.05.2026.

Маријана Бабић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора __________Маријана Бабић___________________________

Број уписа ______2017/2018____

Студијски програм ______Математика______________________________

Наслов рада ________Хермитске структуре и геодезијске линије на четвородимензионим хиперболичким просторима_____

Ментор ______проф. др. Срђан Вукмировић_________________________________

Потписани _______Маријана Бабић______________________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 27.05.2026.

Маријана Бабић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Хермитске структуре и геодезијске линије на четвородимензионим хиперболичким просторима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 27.05.2026.

Маријана Бабић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.