Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 419. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 25. октобра 2024. године, именовани смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације

Кохомолошка алгебра Грасманових многострукости оријентисаних тродимензионалних равни у еуклидском простору

кандидаткиње Милице Јовановић. Ментор ове докторске дисертације је проф. др Бранислав Првуловић, ванредни професор Математичког факултета.

Комисија је прегледала приложени текст и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

1.1 Лични подаци

Име и презиме: Милица Јовановић

Место и датум рођења: Крагујевац, 6. 7. 1993.

Звање: мастер математичар

Електронска адреса: milica.jovanovic@matf.bg.ac.rs

1.2 Образовање

- Основне студије (2012-2017), Математички факултет, Универзитет у Београду, смер Теоријска математика и примене, просек 9,93.
- Мастер студије (2017-2018), Математички факултет, Универзитет у Београду, модул Теоријска математика и примене, просек 10,00.
- Докторске студије (2018-), Математички факултет, Универзитет у Београду, студијски програм Математика, модул Топологија.

1.3 Радно искуство

- Сарадник у настави на Математичком факултету у Београду на Катедри за топологију (2017-2019)
- Асистент на Математичком факултету у Београду на Катедри за топологију (2019-)

1.4 Учешће на пројектима

- Пројекат 174034, Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама, Министарство просвете, науке и технолошког развоја
- Пројекат 7749891, Графички језици - GWORDS, Фонда за науку Републике Србије

1.5 Списак научних радова кандидата

- M. Jovanović, B. I. Prvulović, *On the mod 2 cohomology algebra of oriented Grassmannians*, Journal of Homotopy and Related Structures 19 (2024) 379–396. (IF 0,7; M22)
- M. Jovanović, *On integral cohomology algebra of some oriented Grassmann manifolds*, Indagationes Mathematicae, vol. 35 (2024) 1–15. (IF 0,6; M23)
- M. Jovanović, P. Stojčić, *Finite generativity of homology and cohomology modules*, The Teaching of Mathematics Vol. XXVII, No. 2 (2024) 112–118. (M24)
- S. Agarwal, J. Grbić, M. Intermont, M. Jovanović, E. Lagoda, and S. Whitehouse, *Steenrod operations on polyhedral products*, Topology and its Applications, 2024, прихваћен за штампу.

1.6 Учешће на конференцијама

- **XIV симпозијум "Математика и примене"**, Београд, Србија, 2024.
  Предавање: Кохомолошки прстени оријентисаних Грасманових многострукости $\widetilde{G}_{2^t,4}$
- **Combinatorial Algebraic Topology and Applications II**, Пиза, Италија, 2024.
  Предавање: Steenrod operations on polyhedral products
- **Young Topologists Meeting**, Минстер, Немачка, 2024.
  Предавање: Steenrod operations on polyhedral products
- **Lefschetz Properties in Algebra, Geometry, Topology and Combinatorics, Preparatory School**, Краков, Пољска, 2024.
- **NRW Topology Meeting**, Вупертал, Немачка, 2024.
  Предавање: On the cohomology of oriented Grassmannians
- **Topological and Homological Methods in Group Theory**, Билефелд, Немачка, 2024.
- **European Autumn School in Topology**, Утрехт, Холандија, 2023.
- **Women in Topology IV**, Hausdorff Research Institute for Mathematics, Бон, Немачка, 2023.
- **Young Topologists Meeting**, EPFL, Лозана, Швајцарска, 2023.
  Предавање: On singular cohomology of some oriented Grassmann manifolds
- **Nordic Topology Conference**, NTNU, Трондхајм, Норвешка, 2022.

- **Geometry and Topology**, ICM sectional workshop, University of Copenhagen, Копенхаген, Данска, 2022.

2 Предмет дисертације

Предмет дисертације су кохомолошки прстени Грасманових многострукости. Ове многострукости су класификациони простори за векторска раслојења и сврставају се у централне објекте алгебарске топологије, диференцијалне и алгебарске геометрије, као и других сродних математичких области.

Грасманова многострукост $G_{n,k}$ јесте простор свих k-димензионалних потпростора еуклидског простора $\mathbb{R}^n$, док је „оријентисана" Грасманова многострукост $\widetilde{G}_{n,k}$ простор свих оријентисаних k-димензионалних потпростора еуклидског простора $\mathbb{R}^n$. Стандардна утапања $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, дају низове инклузија ових Грасманијана

$$G_{k,k} \hookrightarrow G_{k+1,k} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_{n,k} \hookrightarrow G_{n+1,k} \hookrightarrow \cdots$$

$$\widetilde{G}_{k,k} \hookrightarrow \widetilde{G}_{k+1,k} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \widetilde{G}_{n,k} \hookrightarrow \widetilde{G}_{n+1,k} \hookrightarrow \cdots$$

помоћу којих се уводе и „бесконачни" Грасманијани

$$G_k = \varinjlim_n G_{n,k}, \quad \widetilde{G}_k = \varinjlim_n \widetilde{G}_{n,k}.$$

Канонско векторско раслојење $\gamma_{n,k}$ над $G_{n,k}$ је раслојење са тоталним простором

$$E(\gamma_{n,k}) = \{(X, v) \in G_{n,k} \times \mathbb{R}^n \mid v \in X\},$$

при чему је пресликавање $E(\gamma_{n,k}) \to G_{n,k}$ пројекција на прву координату. Аналогно дефинишемо и канонско оријентисано векторско раслојење $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ над оријентисаним Грасманијаном $\widetilde{G}_{n,k}$, као и векторска раслојења γ_k и $\widetilde{\gamma}_k$ над G_k и $\widetilde{G}_k$, редом.

Уколико је B паракомпактан тополошки простор, онда је свако k-димензионално векторско раслојење над B повлачење канонског раслојења γ_k. Штавише, ако је $[B, G_k]$ скуп свих класа хомотопних пресликавања из B у G_k, а $\mathrm{Vect}_k(B)$ скуп свих класа еквивалентних k-димензионалних векторских раслојења над B, онда имамо бијекцију

$$\begin{aligned} [B, G_k] &\to \mathrm{Vect}_k(B), \\ f &\mapsto f^*\gamma_k. \end{aligned}$$

Слично, канонско раслојење $\widetilde{\gamma}_k$ класификује сва *оријентисана* k-димензионална векторска раслојења над паракомпактним простором B.

При том, ако је B компактан CW-комплекс или компактна многострукост, онда је $[B, G_k] \cong [B, G_{n,k}]$ за довољно велико n, па имамо бијекцију $\mathrm{Vect}_k(B) \cong [B, G_{n,k}]$, и слично у оријентисаном случају. Дакле, свака карактеристична класа датог раслојења над B јесте „пул-бек" одговарајуће (кохомолошке) класе канонског раслојења над Грасманијаном.

Због свега овога, јасно је да кохомологија Грасманових многострукости представља важно поље истраживања. Борел је 1953. „де факто" доказао да постоји изоморфизам градираних алгебри

$$H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]}{(\overline{w}_{n-k+1}, \overline{w}_{n-k+2}, \dots, \overline{w}_n)},$$

где су $w_i = w_i(\gamma_{n,k})$ Штифел–Витнијеве класе раслојења $\gamma_{n,k}$, а $\overline{w}_j$ хомогени полиноми задати формулом

$$(1 + w_1 + \cdots + w_k)(1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots) = 1.$$

Испоставља се да је одређивање кохомологије „оријентисаних" Грасманијана далеко тежи посао. Добро је познато да је пресликавање $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$, које заборавља оријентацију k-димензионалног потпростора, једно дволисно наткривање, као и да за слику морфизма $p^* : H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ важи

$$\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]}{(g_{n-k+1}, g_{n-k+2}, \dots, g_n)},$$

где су $g_j \in \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]$ модуло w_1 редукције полинома $\overline{w}_j \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]$. Међутим, $\operatorname{im} p^*$ је прави подскуп од $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$, па постоје и кохомолошке класе изван ове подалгебре.

У дисертацији се разматра управо овај проблем: шта све има у $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ што није у $\operatorname{im} p^*$, и какву мултипликативну структуру на $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ све то производи?

Такође, разматра се и (знатно тежи) проблем описивања и адитивне и мултипликативне структуре целобројне кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$.

3 Приказ дисертације

Докторска дисертација Милице Јовановић има 93 странице текста, подељена је у три главе, а на крају је наведена литература од 30 библиографских јединица.

Прва глава носи назив *Основни појмови* и у њој је дат неопходан увод у проблематику, као и припрема за главне резултате изложене у другој и трећој глави. Најпре су дефинисане саме Грасманове многострукости, дата је општа слика о њиховој кохомологији, а онда је дат и кратак преглед основних метода и алата који се користе у раду. То су пре свега спектрални низови, Гребнерове базе и кохомолошке операције.

Друга глава се односи на модуло 2 кохомологију многострукости $\widetilde{G}_{n,k}$ и названа је *Кохомологија оријентисаних Грасманијана са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима.* У њој су изложени резултати који представљају значајан допринос у одређивању и описивању кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$. Наиме, случај $k = 1$ је тривијалан ($\widetilde{G}_{n,1}$ је сфера димензије $n-1$), одраније је познат опис ове кохомологије за $k = 2$, случај $k = 3$ и $n = 2^t$ је недавно комплетиран, док су оригинални резултати кандидаткиње (који су изложени у овој глави) следећи:

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-5}, g_{2^t-4})} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-4});$$

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3]}{(g_{2^t-4},g_{2^t-2})} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-4});$$

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3,a_{2^t-4}]}{\left(g_{2^t-2},g_{2^t-1},a_{2^t-4}^2+g_{2^t-4}a_{2^t-4}+\gamma w_2^{2^t-4}\right)},$$

за неко (још увек непознато) $\gamma \in \mathbb{Z}_2$. Ту је такође и делимичан опис у случају $k=4, n=2^t$:

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3,w_4,a_{2^t-4}]}{\left(g_{2^t-2},g_{2^t-1},g_{2^t},a_{2^t-1}^2+Pa_{2^t-4}+Q\right)},$$

за неке (непознате) полиноме P и Q над w_2, w_3 и w_4, при чему је доказано да P не може бити нула.

Кад је у питању целобројна кохомологија, ствар је неупоредиво тежа. Њом се бави трећа глава *Кохомологија оријентисаних Грасманијана са $\mathbb{Z}$ коефицијентима.* Целобројна кохомологија није позната ни за „неоријентисане” Грасманове многострукости. У „оријентисаном” случају, пре свега захваљујући чињеници да су $\widetilde{G}_{n,k}$ просто повезане многострукости, она је ипак приступачнија. Крајем прошлог века у потпуности је одређена за $k=2$, тек пре неколико година је урађен случај $k=3$ и $n=6$, док кандидаткиња у овој глави даје опис кохомологије $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$ за $k=3$ и $n\in\{8,10\}$:

$$H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[y_3,x_4,x_7]}{(2y_3,y_3x_4,y_3^3,x_4^3,x_7^2)};$$

$$H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[y_3,x_4,x_9,x_{12},x_{13}]}{\mathcal{I}+\mathcal{J}},$$

где је идеал $\mathcal{I}$ генерисан полиномима

$$2y_3,\ y_3^3,\ y_3^2x_4,\ y_3x_4^2,\ x_4^3-2x_{12},\ y_3x_9,\ x_4x_9-2x_{13},$$
$$y_3x_{13}-x_4x_{12},\ x_9^2,\ y_3^2x_{12},\ x_4^2x_{12},\ x_9x_{12}-x_4^2x_{13},$$

док је идеал $\mathcal{J}$ генерисан мономима

$$y_3^ax_4^bx_9^cx_{12}^dx_{13}^e \text{ таквим да је } 3a+4b+9c+12d+13e>21.$$

4 Закључак

Кандидаткиња се у овој тези бави описом кохомологије оријентисаних Грасманијана са $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}$ коефицијентима у до сада неистраженим случајевима. У тези је дат комплетан опис $\mathbb{Z}_2$-кохомологије за случај тродимензионалних равни у простору чија је димензија близу степена двојке, као и делимичан опис у случају четвородимензионалних равни у простору чија је димензија једнака степену двојке. Осим ових, приказани су и неки конкретни резултати, у димензијама 8 и 10, за целобројну кохомологију тродимензионалних равни. Резултати су нови и занимљиви и настављају се на скорашње резултате других математичара. Из тезе су, за сада, објављена два рада на sci листи, од којих је један самостални, а други коауторски са ментором дисертације.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Милице Јовановић и одреди комисију за њену одбрану.

У Београду,
9. 1. 2025.

Чланови комисије:

____

проф. др Зоран Петровић,
редовни професор,
Математички факултет,
Универзитет у Београду

____

проф. др Владимир Грујић,
редовни професор,
Математички факултет,
Универзитет у Београду

____

проф. др Марко Радовановић,
ванредни професор,
Математички факултет,
Универзитет у Београду

____

др Ђорђе Баралић,
виши научни сарадник,
Математички институт,
САНУ