УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Јовановић

КОХОМОЛОШКА АЛГЕБРА ГРАСМАНОВИХ МНОГОСТРУКОСТИ ОРИЈЕНТИСАНИХ ТРОДИМЕНЗИОНАЛНИХ РАВНИ У ЕУКЛИДСКОМ ПРОСТОРУ

докторска дисертација

Београд, 2024.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Milica Jovanović

COHOMOLOGY ALGEBRA OF GRASSMANN MANIFOLDS OF ORIENTED THREE-DIMENSIONAL PLANES IN EUCLIDEAN SPACE

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2024.

Ментор:

др Бранислав Првуловић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Владимир Грујић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Баралић, виши научни сарадник
Математички институт САНУ

Датум одбране: ____________________

Слободану и Софији – мојим највећим животним радостима

Захвалница

Да ли је наш животни пут унапред предодређен или само сплет случајних околности, тешко је рећи. Шта год да је у питању, захвална сам на прилици да се бавим топологијом.

У људској је природи да се фокусира на оно лоше, а да узима оно добро здраво за готово. Због тога је лепо повремено осврнути се и размислити на чему смо све у животу захвални. Једна од ствари коју никада нисам узимала здраво за готово и на којој ћу увек бити захвална је моја сарадња са Бането́м. Осим саме математике коју сам од њега научила, видела сам шта значи бити одговоран према себи, науци и настави. Заиста сам уживала у нашем заједничом раду и дубоко сам му на свему захвална.

Пријатна ми је дужност да се захвалим и члановима комисије на читању ове дисертације и давању корисних коментара којима је овај рад додатно побољшан.

Напослетку, највећу захвалност дугујем својој породици и пријатељима јер су веровали у мене и онда када ја нисам.

Београд, децембар 2024. Милица Јовановић

Наслов: Кохомолошка алгебра Грасманових многострукости оријентисаних тродимензионалних равни у еуклидском простору

Сажетак: Испитивање Грасманових многострукости, које се први пут помињу још у 19. веку, је један од класичних проблема алгебарске топологије. Када испитујемо тополошке просторе, увек је корисно одредити њихову кохомолошку алгебру. О кохомологији Грасманових многострукости се већ доста зна, али њихови наткривајући простори, тзв. оријентисане Грасманове многострукости, много су мање испитане.

Оријентисана Грасманова многострукост $\widetilde{G}_{n,k}$ дефинише се као простор оријентисаних k-димензионалних потпростора у $\mathbb{R}^n$. У овој дисертацији се бавимо анализом кохомолошке алгебре оријентисаних Грасманових многострукости $\widetilde{G}_{n,k}$ са целобројним и модуло 2 коефицијентима, претежно за случај $k = 3$. Дисертација се састоји од три поглавља. Прво поглавље је увод где ћемо дати преглед познатих резултата и потребних алата.

У другом поглављу ћемо изучавати кохомологију са модуло 2 коефицијентима. Ту су најпре изложени познати резултати у случају $k = 2$. Након тога се прелази на анализу случаја $k = 3$ где је дат делимичан опис кохомолошке алгебре. Овај одељак се заснива на радовима објављеним у последњих неколико година. У тези ће бити дат преглед тих нових резултата, а биће и изложени оригинални резултати у случајевима када је n близу степена двојке. У последњем делу овог поглавља испитана је и кохомолошка алгебра многострукости $\widetilde{G}_{2^t,4}$, докле се отприлике тренутно и стигло са испитивањем модуло 2 кохомологије.

Треће поглавље је посвећено интегралној кохомологији. Ово поглавље, као и претходна, дели се на неколико делова у зависности од вредности k. Када је $k = 2$, интегрална кохомологија је у потпуности одређена и у тези је изложен доказ у случају непарног n. За $k = 3$ тренутно је одређена интегрална кохомологија од $\widetilde{G}_{n,3}$ само у случају $n \in \{6, 8, 10\}$, док за $k \geqslant 4$ постоје тек понеки парцијални резултати. У овој целини испитујемо и везу између целобројне и модуло 2 кохомологије ових Грасманијана анализом морфизма између њих индукованог редукцијом по модулу 2.

Кључне речи: Грасманова многострукост, Серов спектрални низ, карактеристичне класе, кохомолошка алгебра, Гребнерове базе, Стинродови квадрати

Научна област: Математика

Ужа научна област: Топологија

AMS класификација: 55R40, 55R25, 55T10, 13P10, 55S05

УДК број: 515.14(043.3)

Title: Cohomology algebra of Grassmann manifolds of oriented three-dimensional planes in Euclidean space

Abstract: The analysis of Grassmann manifolds, which were first introduced in the 19th century, is one of the classical problems in the algebraic topology. When analyzing topological spaces, it is always useful to determine their cohomology algebra. The cohomology of Grassmann manifolds is already well known, but their covering spaces, so called oriented Grassmann manifolds, are far less examined.

The oriented Grassmann manifold $\widetilde{G}_{n,k}$ is defined to be the space of oriented k-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^n$. In this dissertation we analyze the cohomology algebra of oriented Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{n,k}$ with integer and modulo 2 coefficients, predominantly the case $k = 3$. The dissertation comprises three chapters. The first chapter is an introduction where an overview of known results and necessary tools is given.

In the second chapter we study the cohomology with the modulo 2 coefficients. First of all, the known results in the case $k = 2$ are presented. Next, we move onto the case $k = 3$ where the partial description of the cohomology algebra is given. This section is based on papers published in the last several years. We give an overview of these results in the thesis, and we also present original results for n close to a power of two. In the last part of this chapter, we investigate the cohomology algebra of the manifold $\widetilde{G}_{2^t,4}$, and that is as far as we have come with the examination of modulo 2 cohomology.

The third chapter is dedicated to the integral cohomology. This chapter, like the previous one, also splits in several sections, depending on the value of k. When $k = 2$, the integral cohomology is completely determined, and we present the proof for n odd. When $k = 3$, only the integral cohomology of $\widetilde{G}_{n,3}$, $n \in \{6, 8, 10\}$, has been determined so far, while for $k \geqslant 4$ only some partial results are known. In this segment we also analyze the connection between the integer and the modulo 2 cohomology algebra of these Grassmannians by analyzing the morphism between them induced by the modulo 2 reduction.

Key words: Grassmann manifold, Serre spectral sequence, characteristic classes, cohomology algebra, Gröbner bases, Steenrod squares

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Topology

AMS Classification: 55R40, 55R25, 55T10, 13P10, 55S05

UDC number: 515.14(043.3)

Садржај

Увод

Једно од битних питања у математици је класификација одређених објеката. Канонска раслојења над Грасмановим многострукостима играју кључну улогу у класификацији векторских раслојења над паракомптактним базним просторима. Наиме, показано је да уколико је B паракомпактан, онда је свако k-димензионално векторско раслојење над B повлачење канонског раслојења γ_k над тзв. бесконачним Грасманијаном G_k. Штавише, ако са $\mathrm{Vect}_k(B)$ означимо скуп свих класа еквивалентних k-димензионалних векторских раслојења над B, имамо бијекцију

$$[B, G_k] \to \mathrm{Vect}_k(B),$$
$$f \mapsto f^*\gamma_k.$$

Слично, канонско раслојење $\widetilde{\gamma}_k$ над оријентисаним бесконачним Грасманијаном $\widetilde{G}_k$ класификује сва *оријентисана* k-димензионална векторска раслојења над паракомпактним простором B.

При том, ако је B компактан CW-комплекс или компактна многострукост, онда је $[B, G_k] \cong [B, G_{n,k}]$ за довољно велико n, па имамо бијекцију $\mathrm{Vect}_k(B) \cong [B, G_{n,k}]$, и слично у оријентисаном случају.

Интегрална и модуло 2 кохомологија бесконачних Грасманијана добро је позната (за интегралну погледати [5], за модуло 2 [24, теорема 7.1]). Такође, Борел је 1953. у [4] одредио модуло 2 кохомологију Грасманове многострукости $G_{n,k}$.

Иако постоји природно дефинисано дволисно наткривање $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$, које једноставно заборавља оријентацију, испоставља се да није тако лако резултате за $G_{n,k}$ пренети на $\widetilde{G}_{n,k}$.

У случају модуло 2 коефицијената, први потпун опис налазимо код Корбаша и Русина у [18], где су они одредили кохомологију оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{n,2}$. Након тога, Басу и Чакраборти су дали у [1] парцијалне резултате у случају $k = 3$. Ти резултати су допуњени најпре радом [7] Џоловића и Првуловића у случају $n = 2^t$, затим радом [15] у случајевима $n \in \{2^t - 3, 2^t - 2, 2^t - 1\}$, а коначно су Мацангос и Вент у [22] заокружили случај $k = 3$ испитавши преостале вредности n. Започета је и анализа за $k = 4$ Русиновим одређивањем адитивних база од $H^*(\widetilde{G}_{n,4};\mathbb{Z}_2)$ за $n \in \{8, 9, 10, 11\}$ у [28], а настављена је делимичним описом кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,4};\mathbb{Z}_2)$ када је n степен двојке у [6].

Интегрална кохомологија оријентисаних Грасманијана је много мање испитана. Кохомологија од $\widetilde{G}_{n,2}$ одређена је у [20] за парне n, док се опис кохомологије у случају непарног n може наћи у [29] и у [14]. Када је $k = 3$, прво су Калафат и Јалчинкаја у [16] одредили интегралну кохомологију од $\widetilde{G}_{6,3}$, након чега је у [14] одређена и кохомологија од $\widetilde{G}_{8,3}$ и $\widetilde{G}_{10,3}$. Осим ових резултата, Мацангос и Вент су у [21] анализирали торзиони део интегралне кохомологије, где су, између осталог, показали да се у $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$ може појавити једино 2-торзија или 4-торзија.

Циљ овог рада је да да преглед до сада познатих резултата о кохомологији оријентисаних Грасманових многострукости, као и да изложи оригиналне резултате из [6], [14] и [15]. Структура рада је следећа.

У **првој глави** су наведени основни појмови и резултати као и преглед техника које се користе у дисертацији. Најпре су дефинисине (оријентисане) Грасманове многострукости као и нека корисна раслојења над њима. Описан је Борелов резултат из [4] о модуло 2 кохомологији Грасманове многострукости, а затим је анализирана и слика хомоморфизма p^* индукованог дволисним наткривањем $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$. Укратко је изложена и теорија кохомолошких операција са фокусом на Стинродовим квадратима. Поред тога, дат је и кратак увод у теорију Гребнерових база. На крају је уведен и Серов спектрални низ који је у раду коришћен као један од главних алата за одређивање кохомолошке алгебре оријентисаних Грасманијана.

Друга глава је посвећена кохомологији оријентисаних Грасманових многострукости са модуло 2 коефицијентима. На почетку је дат преглед познатих резултата о карактеристичном рангу од $\widetilde{G}_{n,k}$. Након тога су анализирани случајеви $k \in \{2, 3, 4\}$. У случају $k = 2$ дат је потпун опис кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ који је првобитно изведен у [18]. Случај $k = 3$ подељен је на неколико целина. Најпре је изложен доказ за $\widetilde{G}_{2^t,3}$ из [7]. Након тога су изложени оригинални резултати из [15] за $n \in \{2^t - 3, 2^t - 2, 2^t - 1\}$. У последњој целини дат је преглед резултата за остале вредности n из [22]. Коначно, у случају $k = 4$ изложени су оригинални резултати из [6] где је испитивана кохомолошка алгебра оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{2^t,4}$.

Трећа глава се бави интегралном кохомологијом. Као и у претходној, и у овој глави анализу делимо на основу димензије k. За $k = 2$ дат је опис кохомологије $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$ и изложен доказ из [14] у случају непарне димензије n. За парне n је наведен резултат из [20] без доказа. После тога је анализиран случај $k = 3$. Након уводних резултата, у потпуности су одређене кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z})$ за $n \in \{6,8,10\}$. Кохомологија од $\widetilde{G}_{6,3}$ је првобитно одређена у [16], а у дисертацији је наведен нешто другачији доказ. Докази за $n=8$ и $n=10$ су оригинални из рада [14]. Такође, у овим случајевима у којима је израчуната целобројна кохомологија, одређен је и хомоморфизам алгебри $\rho_* : H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}) \to H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ индукован модуло 2 редукцијом коефицијената $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$. У последњем одељку треће главе дат је и преглед познатих резултата за $k \geqslant 4$ из [21].

Глава 1

Основни појмови

1.1 Грасманове многострукости

Грасманова многострукост $G_{n,k}$, краће *Грасманијан*, је простор свих k-димензионалних потпростора еуклидског простора $\mathbb{R}^n$. На сличан начин се дефинише и *оријентисана Грасманова многострукост* $\widetilde{G}_{n,k}$. Наиме, $\widetilde{G}_{n,k}$ је простор свих оријентисаних k-димензионалних потпростора еуклидског простора $\mathbb{R}^n$.

Топологију на $G_{n,k}$ можемо дефинисати на следећи начин. Са $V_{n,k}$ означимо *Штифелову многострукост*, простор свих ортонормираних k-торки линеарно независних вектора у $\mathbb{R}^n$, и нека је $q : V_{n,k} \to G_{n,k}$ пресликавање које сваку k-торку слика у k-димензионални потпростор који тих k вектора одређују. На $V_{n,k} \subset \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ имамо топологију наслеђену од топологије производа, а она се помоћу количничког пресликавања q преноси на $G_{n,k}$. Дакле, $U \subseteq G_{n,k}$ је отворен уколико је $q^{-1}(U)$ отворен у $V_{n,k}$. Нека је $\widetilde{q} : V_{n,k} \to \widetilde{G}_{n,k}$ пресликавање које сваку k-торку слика у оријентисани k-димензионални потпростор који она одређује. Топологија на $\widetilde{G}_{n,k}$ је управо топологија добијена помоћу количничког пресликавања $\widetilde{q}$.

Често је корисно посматрати *канонско векторско раслојење* $\gamma_{n,k}$ над $G_{n,k}$ чији се тотални простор $E(\gamma_{n,k})$ састоји од свих парова $(P, v) \in G_{n,k} \times \mathbb{R}^n$ таквих да $v \in P$. Дакле, имамо раслојење $\mathbb{R}^k \hookrightarrow E(\gamma_{n,k}) \xrightarrow{p_1} G_{n,k}$, где је пресликавање p_1 дато са $p_1(P, v) = P$, тј. p_1 је пројекција на прву координату.

У случају оријентисаног Грасманијана имамо *оријентисано канонско векторско раслојење* $\widetilde{\gamma}_{n,k}$ чији се тотални простор $E(\widetilde{\gamma}_{n,k})$ састоји од свих парова $(\widetilde{P}, v) \in \widetilde{G}_{n,k} \times \mathbb{R}^n$ таквих да је $v \in \widetilde{P}$, а пресликавање $p_1 : E(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \to \widetilde{G}_{n,k}$ је поново пројекција на прву координату.

Најједноставнији пример Грасманових многострукости видимо у случају $k = 1$.

Многострукост $G_{n,1}$ је простор правих кроз координатни почетак у $\mathbb{R}^n$, дакле то је управо реални пројективни простор $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Са друге стране, оријентисана Грасманова многострукост $\widetilde{G}_{n,1}$ је сачињена од свих оријентисаних правих у $\mathbb{R}^n$, па је можемо идентификовати са сфером S^{n-1}. Природно се поставља питање да ли се познато дволисно наткривање $p : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ може уопштити и на Грасманијане и одговор је потврдан. Сваки k-димензионални потпростор у $\mathbb{R}^n$ можемо оријентисати на два начина. То значи да сваком k-димензионалном потпростору, елементу $G_{n,k}$, одговарају тачно два оријентисана k-димензионална потпростора, елемента $\widetilde{G}_{n,k}$. Стога има смисла дефинисати пресликавање $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$ које слика оријентисани k-димензионални потпростор од $\mathbb{R}^n$ у исти k-димензионални потпростор, али без оријентације. Ово пресликавање које заборавља оријентацију јесте дволисно наткривање и комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{G}_{n,k} \arrow[d, "p"] \\
V_{n,k} \arrow[ur, "\widetilde{q}"] \arrow[r, "q"'] & G_{n,k}
\end{tikzcd}$$

У леми 5.1 у [24] је показано да је пресликавање $h : G_{n,k} \to G_{n,n-k}$ дато са $h(P) = P^{\perp}$ хомеоморфизам, као и да је $G_{n,k}$ једна компактна тополошка многострукост димензије $k(n-k)$. Исто важи и за оријентисане Грасманијане, па ћемо убудуће увек претпостављати да је $n \geqslant 2k$.

Такође, може се показати да су Грасманове многострукости хомогени простори. Прецизније, постоје хомеоморфизми

$$\begin{aligned}
G_{n,k} &\approx O(n)/\left(O(k) \times O(n-k)\right), \\
\widetilde{G}_{n,k} &\approx SO(n)/\left(SO(k) \times SO(n-k)\right).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.1 Кохомологија Грасманових многострукости

Борел је у [4] одредио кохомологију Грасманових многострукости са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. Доказао је да постоји изоморфизам алгебри

$$H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_k]}{(\overline{w}_{n-k+1}, \overline{w}_{n-k+2}, \ldots, \overline{w}_n)}, \tag{1.2}$$

при коме косет од w_i одговара Штифел–Витнијевој класи канонског векторског раслојења $w_i(\gamma_{n,k})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, (Штифел–Витнијеве класе $w_i(\gamma_{n,k})$ ћемо такође убудуће означавати са w_i), а $\overline{w}_r$, $r \geqslant 0$, су полиноми у $\mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_k]$ задати релацијом

$$(1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_k)(1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots) = 1, \tag{1.3}$$

тј. $1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots$ је инверз полинома $1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ у прстену степених редова $\mathbb{Z}_2[[w_1, w_2, \ldots, w_k]]$.

Из (1.3) може се добити и рекурентна веза

$$\overline{w}_r = w_1\overline{w}_{r-1} + w_2\overline{w}_{r-2} + \cdots + w_k\overline{w}_{r-k}, \quad r \geqslant k, \tag{1.4}$$

а није тешко показати да полиноми $\overline{w}_r$, $r \geqslant 0$, задовољавају следећу једнакост

$$\overline{w}_r = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=r} [a_1, a_2, \ldots, a_k]\, w_1^{a_1} w_2^{a_2} \cdots w_k^{a_k}, \tag{1.5}$$

где је

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = \binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_1}\binom{a_2 + \cdots + a_k}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1} + a_k}{a_{k-1}}.$$

Треба имати у виду да су сви коефицијенти у $\mathbb{Z}_2$, па је сваки од биномних коефицијената у $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ једнак 0 или 1.

1.1.2 Гисинов низ

Нека је R комутативан прстен (за нас ће R бити $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$) и $S^m \to E \xrightarrow{p} B$ једно R-оријентабилно сферно раслојење, тј. нека је дејство фундаменталне групе базног простора B на $H^m(S^m; R)$ тривијално. Тада овом раслојењу можемо придружити наредни дуги тачни низ

$$\cdots \to H^{j-m-1}(B; R) \xrightarrow{e} H^j(B; R) \xrightarrow{p^*} H^j(E; R) \to H^{j-m}(B; R) \to \cdots$$

где је хомоморфизам $H^{j-m-1}(B; R) \xrightarrow{e} H^j(B; R)$ множење Ојлеровом класом $e \in H^{m+1}(B; R)$.

Дволисно наткривање $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$ можемо видети као сферно раслојење са слојем S^0, а свако сферно раслојење је $\mathbb{Z}_2$-оријентабилно, па му можемо придружити Гисинов низ са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима

$$\cdots \to H^{j-1}(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_1} H^j(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^j(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \to H^j(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \to \cdots \tag{1.6}$$

Наредна лема нам даје везу између димензије кохомологије тоталног простора сферног раслојења $S^{n-1} \to E \xrightarrow{p} B$ и димензије слике индукованог хомоморфизма $\operatorname{im} p^*$. Користићемо је у случајевима када имамо адитивну базу једног од ова два векторска простора да добијемо информације о бази другог.

Лема 1.1.1. *Нека је* $n \in \mathbb{N}$ *и* $S^{n-1} \to E \xrightarrow{p} B$ *сферно раслојење такво да је* $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ *коначно димензионалан векторски простор (над* $\mathbb{Z}_2$*). Ако је* $p^* : H^*(B;\mathbb{Z}_2) \to H^*(E;\mathbb{Z}_2)$ *индукован хомоморфизам, онда је*

$$\dim H^*(E;\mathbb{Z}_2) = 2\dim(\operatorname{im} p^*).$$

Доказ. Посматрајмо Гисинов низ придружен сферном раслојењу $S^{n-1} \to E \xrightarrow{p} B$.

$$\cdots \to H^{i+n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^{i+n-1}(E;\mathbb{Z}_2) \to H^i(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{e} H^{i+n}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E;\mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

Приметимо да претходни дуги тачни низ индукује следеће кратке тачне низове:

$$0 \to C_i \to H^i(B;\mathbb{Z}_2) \to K_i \to 0, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где је

$$C_i = \operatorname{coker}\left(p^* : H^{i+n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n-1}(E;\mathbb{Z}_2)\right)$$

и

$$K_i = \ker\left(p^* : H^{i+n}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n}(E;\mathbb{Z}_2)\right).$$

Сумирањем ових кратких тачних низова добијамо кратак тачан низ

$$0 \to \operatorname{coker} p^* \to H^*(B;\mathbb{Z}_2) \to \ker p^* \to 0.$$

Како је $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ коначне димензије, имамо

$$\dim H^*(B;\mathbb{Z}_2) = \dim(\operatorname{coker} p^*) + \dim(\ker p^*) = \dim H^*(E;\mathbb{Z}_2) - \dim(\operatorname{im} p^*) + \dim(\ker p^*).$$

Коначно,

$$\dim H^*(B;\mathbb{Z}_2) = \dim(\ker p^*) + \dim(\operatorname{im} p^*),$$

одакле тврђење директно следи. □

1.1.3 Слика хомоморфизма p^*

Иако су оријентисана и неоријентисана Грасманова многострукост повезане дволисним наткривањем, изоморфизам (1.2) није довољан да у потпуности одредимо и $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$. Ипак, слика индукованог хомоморфизма $p^* : H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_k)$ чини један део кохомологије $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$. Наиме, из леме 1.1.1 видимо да ће $\operatorname{im} p^*$ чинити половину кохомологије од $\widetilde{G}_{n,k}$ у адитивном смислу.

Лема 1.1.2. *Нека је* $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$ *dvolisno natkrivanje. Tada*

$$p^*(w_i(\gamma_{n,k})) = w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k}),\ 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.7}$$

Доказ. Тврђење следи директно из аксиоме природности Штифел–Витнијевих класа и комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}^k \arrow[d, hook] \\
E(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"'] & E(\gamma_{n,k}) \arrow[d, "p_1"] \\
\widetilde{G}_{n,k} \arrow[r, "p"] & G_{n,k}
\end{tikzcd}$$

где је пресликавање $\varphi : E(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \to E(\gamma_{n,k})$ дато са $\varphi(P, v) = (p(P), v)$. □

Штифел–Витнијеве класе оријентисаног канонског векторског раслојења ћемо често краће означавати са $\widetilde{w}_i = w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, па везу (1.7) можемо краће записати и као $p^*(w_i) = \widetilde{w}_i$.

Посматрајмо сада композицију

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2[w_2, \ldots, w_k] \arrow[r, hook] \arrow[rrr, dashed, bend right, "\Phi"'] & \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_k] \arrow[r, "q"] & H^*(G_{n,k}; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p^*"] & H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

где је прво пресликавање инклузија, а друго је количничко пресликавање које потиче од изоморфизма (1.2). Ова композиција слика w_i у Штифел–Витнијеву класу $w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \in H^i(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$, $2 \leqslant i \leqslant k$. Из Гисиновог низа (1.6) имамо да је $\ker p^* = \operatorname{im} w_1$, па специјално $w_1 \in \ker p^*$ и $w_1(\widetilde{\gamma}_{n,k}) = p^*(w_1) = 0$. Ово управо значи да се слика хомоморфизма Φ поклапа са сликом хомоморфизма p^*, па имамо

$$\operatorname{im} p^* = \operatorname{im} \Phi \cong \mathbb{Z}_2[w_2, \ldots, w_k]/\ker \Phi. \tag{1.8}$$

Да бисмо одредили $\operatorname{im} p^*$ остало је још да одредимо $\ker \Phi$.

Нека је $g_r \in \mathbb{Z}_2[w_2, \ldots, w_k]$, $r \geqslant 0$, редукција полинома $\overline{w}_r$ модуло w_1. Редукцијом једнакости (1.4) модуло w_1 добијамо

$$g_r = w_2 g_{r-2} + \cdots + w_k g_{r-k}, \quad r \geqslant k, \tag{1.9}$$

док из (1.5) добијамо

$$g_r = \sum_{2a_2+\cdots+ka_k=r} \binom{a_2+\cdots+a_k}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} w_2^{a_2}\cdots w_k^{a_k}, \quad r \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Уколико дефинишемо $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = g_{-k+1} := 0$, онда се лако провери да (1.9) важи за све $r \geqslant 1$. Индукцијом по i једнакост (1.9) можемо генерализовати до следеће једнакости

$$g_r = w_2^{2^i} g_{r-2\cdot 2^i} + \cdots + w_k^{2^i} g_{r-k\cdot 2^i} = \sum_{j=2}^{k} w_j^{2^i} g_{r-j\cdot 2^i}, \quad r \geqslant 1 + k\cdot(2^i-1),\ i \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Заиста, база индукције следи из (1.9) за $r \geqslant 1$. Ако је $i \geqslant 1$ и ако претпоставимо да је (1.11) тачно за $i-1$, онда за $r \geqslant 1 + k\cdot(2^i-1)$ имамо

$$g_r = \sum_{j=2}^{k} w_j^{2^{i-1}} g_{r-j\cdot 2^{i-1}} = \sum_{j=2}^{k}\sum_{l=2}^{k} w_j^{2^{i-1}} w_l^{2^{i-1}} g_{r-j\cdot 2^{i-1}-l\cdot 2^{i-1}} = \sum_{j=2}^{k} w_j^{2^i} g_{r-j\cdot 2^i},$$

јер се сабирци код којих је $l \neq j$ скрате.

Пропозиција 1.1.1. *Нека је $p : \widetilde{G}_{n,k} \to G_{n,k}$ дволисно наткривање. Тада постоји изоморфизам алгебри*

$$\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,\ldots,w_k]}{(g_{n-k+1},\ldots,g_n)},$$

при коме косет од w_i одговара Штифел–Витнијевој класи $\widetilde{w}_i = w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k})$, $2 \leqslant i \leqslant k$.

Доказ. На основу (1.8) довољно је доказати да је $\ker\Phi = (g_{n-k+1},\ldots,g_n)$. Из (1.2) и како је $\ker p^* = w_1 H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$, имамо да је $\ker(p^*\circ q) = (\overline{w}_{n-k+1},\ldots,\overline{w}_n, w_1)$. Приметимо да је

$$\ker(p^*\circ q) \cap \mathbb{Z}_2[w_2,\ldots,w_k] = (g_{n-k+1},\ldots,g_n).$$

Заиста, ако је $r \in \ker(p^*\circ q)\cap\mathbb{Z}_2[w_2,\ldots,w_k]$, онда r можемо записати у облику

$$r = \sum_{i=n-k+1}^{n} p_i\overline{w}_i + pw_1, \tag{1.12}$$

где су $p_{n-k+1},\ldots,p_n,p \in \mathbb{Z}_2[w_1,w_2,\ldots,w_k]$. Сваки полином можемо на јединствен начин записати као збир полинома у ком нема w_1 и неког умношка од w_1 (први полином у овом запису је заправо редукција модуло w_1 полазног полинома). Запишимо полиноме $\overline{w}_i$ и p_i у том облику, тј. $\overline{w}_i = g_i + w_1 f_i$ и $p_i = \overline{p}_i + w_1 q_i$, за неке

$f_i, q_i \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]$ и $\overline{p}_i \in \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]$, па (1.12) постаје

$$r = \sum_{i=n-k+1}^{n} (\overline{p}_i + w_1 q_i)(g_i + w_1 f_i) + p w_1.$$

Када раздвојимо сабирке који садрже чинилац w_1 од оних који га не садрже, добијамо

$$r = \sum_{i=n-k+1}^{n} \overline{p}_i g_i + w_1 q,$$

где је $q \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]$. Како је $r \in \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]$, то је $w_1 q = 0$, па закључујемо $r \in (g_{n-k+1}, \dots, g_n)$.

Обрнуто, $g_i = \overline{w}_i + w_1 f_i \in (\overline{w}_{n-k+1}, \dots, \overline{w}_n, w_1)$, па $g_i \in \ker(p^* \circ q) \cap \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]$, за све $i \in \{n-k+1, \dots, n\}$.

Коначно,

$$\ker \Phi = \ker(p^* \circ q) \cap \mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k] = (g_{n-k+1}, \dots, g_n).$$

$\square$

Идеал у претходној пропозицији ћемо означавати са $J_{n,k} = (g_{n-k+1}, \dots, g_n)$.

Дакле, кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ се састоји од слике хомоморфизма p^*, тј. елемената који се могу изразити помоћу Штифел–Витнијевих класа, али и од такозваних *аномаличних* класа. Рећи ћемо да је класа аномалична уколико се не може представити као полином над Штифел–Витнијевим класама. Користићемо и појам *нерастављиве* класе. Кохомолошка класа је нерастављива уколико се не може представити као полином над класама строго мање кохомолошке димензије. У складу са овом дефиницијом, све Штифел–Витнијеве класе $\widetilde{w}_2, \dots, \widetilde{w}_k$ су нерастављиве у $H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ јер на основу пропозиције 1.1.1 прва релација је у димензији $n-k+1$, а $n-k+1 > k$ јер подразумевамо да је $n \geqslant 2k$. Такође, у одељку 2.1 ћемо видети да су аномаличне класе у димензијама већим од k, па сигурно нема релација међу Штифел–Витнијевим и аномаличним класама до димензије k.

Одређивање кохомологије $H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ се своди на два проблема. Прво је потребно одредити све аномаличне класе, а затим и мултипликативну структуру алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$.

1.2 Кохомолошке операције

Кохомолошке операције су користан алат за рад са кохомологијом. Теорија кохомолошких операција је доста обрађивана у литератури, па се детаљи могу наћи рецимо у [12].

Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ и G, H Абелове групе, *кохомолошку операцију* типа $(G, n; H, m)$ дефинишемо као природну трансформацију функтора

$$\Theta : H^n(\cdot, \cdot; G) \to H^m(\cdot, \cdot; H),$$

при чему $H^n(\cdot, \cdot; G)$, односно $H^m(\cdot, \cdot; H)$ видимо као функторе из категорије тополошких парова у категорију скупова (тј. заборављамо структуру Абелове групе). Ово значи да за сваки тополошки пар (X, A) имамо пресликавање

$$\Theta_{(X,A)} : H^n(X, A; G) \to H^m(X, A; H),$$

а услов природности значи да уколико је $f : (X, A) \to (Y, B)$ непрекидно, онда комутира наредни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
H^n(Y, B; G) \arrow[r, "\Theta_{(Y,B)}"] \arrow[d, "f^*"'] & H^m(Y, B; H) \arrow[d, "f^*"] \\
H^n(X, A; G) \arrow[r, "\Theta_{(X,A)}"] & H^m(X, A; H)
\end{tikzcd}$$

Приметимо да дефиниција не захтева да је пресликавање $\Theta_{(X,A)}$ хомоморфизам. Уколико пак $\Theta_{(X,A)}$ јесте хомоморфизам за сваки пар (X, A), кажемо да је кохомолошка операција Θ *адитивна.*

Са друге стране, ако је $k \in \mathbb{N}$, *стабилна* кохомолошка операција степена k је низ кохомолошких операција $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, таквих да је Θ_n типа $(G, n; H, n + k)$ и да за сваки тополошки пар (X, A) и свако $n \in \mathbb{N}$ комутира наредни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
H^n(A; G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Theta_n"'] & H^{n+1}(X, A; G) \arrow[d, "\Theta_{n+1}"] \\
H^{n+k}(A; H) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+k+1}(X, A; H)
\end{tikzcd}$$

где је δ повезујући хомоморфизам из дугог тачног низа пара (X, A).

Из [11, стр. 4] имамо да су компоненте стабилне кохомолошке операције обавезно и адитивне.

Надаље ћемо усмерити пажњу на једну конкретну врсту стабилних кохомолошких операција, такозваних *Стинродових квадрата.* Наредну теорему наводимо без доказа, а доказ се може наћи у [25].

Теорема 1.2.1. *Постоје стабилне кохомолошке операције Sq^k, $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$Sq^k : H^n(\cdot, \cdot; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+k}(\cdot, \cdot; \mathbb{Z}_2),$$

које задовољавају следеће услове:

1. *$Sq^0 = \mathbb{1}$;*

2. *ако је $k > |x|$, онда $Sq^k(x) = 0$;*

3. *ако је $k = |x|$, онда $Sq^k(x) = x^2$;*

4. *$Sq^k(xy) = \sum\limits_{i=0}^{k} Sq^i(x)Sq^{k-i}(y)$;*

5. *Sq^1 је Бокштајнов хомоморфизам придружен кратком тачном низу $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$;*

6. *ако су $a, b \in \mathbb{N}_0$ такви да је $a < 2b$, онда*

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j.$$

Напомена 1.2.1. *Операције Sq^k из претходне теореме називамо Стинродовим квадратима. Формула 4. се зове Картанова формула, док су релације описане у 6. познате као Адемове релације. Неретко се Стинродови квадрати задају аксиоматски помоћу услова 1. – 6., па се накнадно показује да такве операције заиста постоје. Због тога ћемо услове из претходне теореме понекад називати и аксиомама.*

Уколико је M повезана затворена многострукост димензије n, из Поенкареове дуалности следи да за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ постоји јединствена класа $v_k \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ таква да је хомоморфизам $Sq^k : H^{n-k}(M; \mathbb{Z}_2) \to H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ множење са v_k, тј. за свако $x \in H^{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ је $Sq^k(x) = v_k x$ (видети [24]). Класа v_k се назива k-том *Вуовом класом* многострукости M.

Уколико су $\mathrm{w}_k = w_k(\tau_M)$ Штифел–Витнијеве класе тангентног раслојења τ_M многострукости M, онда важи *Вуова формула*

$$\mathrm{w}_k = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j) \tag{1.13}$$

чији се доказ такође може пронаћи у [24, теорема 11.14].

Нека су сада w_j, $j \in \mathbb{N}$, Штифел–Витнијеве класе произвољног раслојења. Тада важи и следећа Вуова формула

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{j+t-i-1}{t} w_{i-t} w_{j+t}. \tag{1.14}$$

Доказ формуле (1.14) може се наћи у [30] или [13]. У [24] се у облику задатка појављује још једна формула под називом *експлицитна Вуова формула*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{i-j}{t} w_{i-t} w_{j+t}. \tag{1.15}$$

Можемо приметити да су формуле (1.14) и (1.15) у ствари једна иста формула јер није тешко показати да за свако $0 \leqslant t \leqslant i$ важи

$$\binom{j+t-i-1}{t} \equiv_2 \binom{i-j}{t}.$$

1.3 Гребнерове базе

У овом одељку ћемо дати кратак преглед теорије Гребнерових база над пољем. За више детаља погледати [3].

Главни резултат који ћемо користити је пропозиција 1.3.1. Наиме, када се кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ може представити као количник полиномијалне алгебре и идеала у њој, можемо одредити Гребнерову базу тог идеала. Након тога, еквиваленција (а)$\Longleftrightarrow$(в) из пропозиције 1.3.1 ће нам дати адитивну базу кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ што умногоме олакшава рачун у њој.

Нека је $\mathbb{K}$ поље (код нас ће увек бити $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$) и $\mathbb{K}[\underline{X}]$ полиномијална алгебра над $\mathbb{K}$ са коначно много промењљивих означених са $\underline{X}$. Означимо са M скуп свих монома у $\mathbb{K}[\underline{X}]$.

Дефиниција 1.3.1. *Мономијални поредак скупа M је линеарно уређење $\preccurlyeq$ које задовољава*

(1) $1 \preccurlyeq m$, за сваки моном $m \in M$;

(2) ако је $m_1 \preccurlyeq m_2$, онда је $mm_1 \preccurlyeq mm_2$, за све $m, m_1, m_2 \in M$.

Није тешко показати да је сваки мономијални поредак једно добро уређење скупа M. Нека је сада $\preccurlyeq$ фиксирано уређење на M. Биће нам потребно неколико нових појмова.

Дефиниција 1.3.2. *Нека је $p = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i \in \mathbb{K}[\underline{X}]$, где је $\alpha_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, сви мономи $m_1, \dots, m_r$ су међусобно различити и $p \neq 0$.*

(1) Скуп монома полинома p дефинишемо као $M(p) = \{m_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$.

(2) *Водећи моном полинома* p *је* $\mathrm{LM}(p) = \max M(p)$ *где је максимум узет у односу на релацију* $\preccurlyeq$.

(3) *Водећи коефицијент полинома* p*, у ознаци* $\mathrm{LC}(p)$*, је коефицијент у* p *уз* $\mathrm{LM}(p)$.

(4) *Водећи члан полинома* p *је* $\mathrm{LT}(p) = \mathrm{LC}(p) \cdot \mathrm{LM}(p)$.

Постоји неколико начина да се дефинише Гребнерова база (видети пропозицију 1.3.1), а овде наводимо један од њих.

Дефиниција 1.3.3. *Нека је* $F \subset \mathbb{K}[\underline{X}]$ *коначан скуп ненула полинома и* I *идеал у* $\mathbb{K}[\underline{X}]$ *генерисан са* F*. Кажемо да је* F *Гребнерова база идеала* I *(у односу на релацију* $\preccurlyeq$*) уколико за сваки полином* $p \in I \setminus \{0\}$ *постоји* $f \in F$ *такав да* $\mathrm{LM}(f)$ *дели* $\mathrm{LM}(p)$.

Дефиниција 1.3.4. *Гребнерова база* F *идеала* I *је редукована уколико су сви полиноми у* F *монични, тј.* $\mathrm{LC}(f) = 1$ *за све* $f \in F$*, и ако не постоје различити полиноми* $g, h \in F$ *такви да* $\mathrm{LM}(g)$ *дели неки моном у* h.

За $f, g \in \mathbb{K}[\underline{X}] \setminus \{0\}$, дефинишемо S-полином као

$$S(f,g) = \frac{\operatorname{lcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LM}(f)} \cdot f - \frac{\operatorname{lcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LM}(g)} \cdot g,$$

где је $\operatorname{lcm}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))$ најмањи заједнички садржалац водећих монома од f и g. Приметимо да је $S(f,f) = 0$ и $S(g,f) = -S(f,g)$.

Нека је $F \subset \mathbb{K}[\underline{X}]$ коначан скуп ненула полинома и нека су $p, q \in \mathbb{K}[\underline{X}]$. Кажемо да се полином p редукује до q модуло F ако постоји $n \geqslant 1$ и полиноми $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ такви да је $p_1 = p$, $p_n = q$ и за све $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ важи

$$p_{i+1} = p_i - \frac{\mathrm{LC}(p_i)}{\mathrm{LC}(f_i)} \cdot m_i \cdot f_i,$$

за неке $f_i \in F$ и $m_i \in M$ такве да је $\mathrm{LM}(p_i) = m_i \cdot \mathrm{LM}(f_i)$. Доказ следеће пропозиције се може наћи у [3, пропозиција 5.38].

Пропозиција 1.3.1. *Нека је* $F \subset \mathbb{K}[\underline{X}]$ *коначан скуп нетривијалних полинома и* I *идеал у* $\mathbb{K}[\underline{X}]$ *генерисан са* F*. Следећи искази су еквивалентни.*

(а) F *је Гребнерова база идеала* I*;*

(б) *сваки полином* $p \in I$ *се може редуковати до нуле модуло* F*;*

(в) скуп класа свих монома који нису дељиви ни са једним од водећих монома $\mathrm{LM}(f)$*, за* $f \in F$*, чини базу количничког векторског простора* $\mathbb{K}[\underline{X}]/I$*.*

Следећа теорема нам даје још један еквивалентан услов да је неки скуп полинома Гребнерова база, за њен доказ видети [3, теорема 5.48].

Теорема 1.3.1. *Нека је* $F \subset \mathbb{K}[\underline{X}]$ *коначан скуп ненула полинома и нека је* I *идеал генерисан са* F*. Тада је* F *Гребнерова база за* I *ако и само ако се* $S(f,g)$ *редукује до нуле модуло* F *за све* $f, g \in F$*.*

1.4 Спектрални низови

Један од главних алата при одређивању кохомолошке алгебре оријентисаних Грасманових многострукости биће Серов спектрални низ који ћемо у овом одељку описати на нивоу на коме је нама потребно, а за више информација погледати [23].

Нека је R комутативан прстен ($\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$) и $F \to E \to B$ фибрација код које је базни простор B просто повезан. Тада овој фибрацији придружујемо Серов спектрални низ $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ који конвергира ка кохомологији тоталног простора E. Прецизније, друга страна спектралног низа је дата са

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F; R)), \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Уколико је кохомологија слоја слободна (а у случају $R = \mathbb{Z}_2$ биће јер је $\mathbb{Z}_2$ поље), онда имамо

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; R) \otimes H^q(F; R), \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

а имамо заправо и изоморфизам бистепенованих алгебри

$$E_2^{*,*} \cong H^*(B; R) \otimes H^*(F; R).$$

Свака наредна страна је одређена помоћу диференцијала d_r на следећи начин

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker\left(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}\right) \Big/ \mathrm{im}\left(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}\right),$$

док је множење у бистепенованој алгебри E_{r+1} индуковано множењем из E_r.

То да овај спектрални низ конвергира ка кохомологији тоталног простора значи да постоји стабилна филтрација

$$0 = \cdots = F_{n+2}^n = F_{n+1}^n \subseteq F_n^n \subseteq F_{n-1}^n \subseteq \cdots \subseteq F_1^n \subseteq F_0^n = H^n(E; R),$$

таква да имамо изоморфизам бистепенованих алгебри

$$\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} F_p^{p+q}/F_{p+1}^{p+q}.$$

Уколико разматрамо R-оријентабилно сферно раслојење $S^k \to E \to B$, знамо и да се једини потенцијално нетривијални диференцијал $d_{k+1} : E_{k+1}^{j,k} \to E_{k+1}^{j+k+1,0}$ своди на множење Ојлеровом класом $e \in H^{k+1}(B;R)$ овог раслојења.

Глава 2

Кохомологија оријентисаних Грасманијана са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима

При одређивању кохомологије оријентисаних Грасманијанима са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима, биће корисно да посматрамо помоћни простор

$$W_{k,1}^n = \left\{(\widetilde{P}, v) \in \widetilde{G}_{n,k} \times S^{n-1} \mid \widetilde{P} \perp v\right\} \tag{2.1}$$

као и два раслојења из наредног дијаграма.

$$\begin{tikzcd} & S^k \arrow[d] & \\ S^{n-k-1} \arrow[r] & W_{k,1}^n \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "sp"] & \widetilde{G}_{n,k} \\ & \widetilde{G}_{n,k+1} & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Пресликавање $p_1 : W_{k,1}^n \to \widetilde{G}_{n,k}$ је пројекција на прву координату док пресликавање $sp : W_{k,1}^n \to \widetilde{G}_{n,k+1}$ слика пар $(\widetilde{P}, v) \in W_{k,1}^n$ у оријентисани $(k+1)$-димензионални простор који $\widetilde{P}$ и v одређују. Прецизније, $sp(\widetilde{P}, v) = \widetilde{P} \oplus \mathcal{L}(v)$, при чему је оријентација таква да се на базу која задаје оријентацију од $\widetilde{P}$ дода вектор v ($\mathcal{L}(v)$ је једнодимензионални потпростор од $\mathbb{R}^n$ генерисан вектором v). Идеја је да уколико знамо $H^*(\widetilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$, хоризонтално раслојење можемо користити да одредимо $H^*(W_{k,1}^n; \mathbb{Z}_2)$, а онда помоћу вертикалног раслојења можемо одредити и $H^*(\widetilde{G}_{n,k+1}; \mathbb{Z}_2)$. Генерално, ова техника нам даје само парцијалне резултате, али за неке мање димензије биће довољна за потпуно одређивање кохомолошке алгебре простора $\widetilde{G}_{n,k+1}$.

Није тешко приметити да је хоризонтално раслојење управо сферно раслојење придружено ортогоналном комплементу оријентисаног канонског векторског раслојења над $\widetilde{G}_{n,k}$, тј. $\widetilde{\gamma}_{n,k}^{\perp}$. Са друге стране, вертикално раслојење је изоморфно сферном раслојењу придруженом канонском векторском раслојењу $\widetilde{\gamma}_{n,k+1}$ над $\widetilde{G}_{n,k+1}$. Наиме, нека је лева вертикала у наредном дијаграму сферно раслојење придружено $\widetilde{\gamma}_{n,k+1}$.

$$\begin{tikzcd}
S^k \arrow[r, equal] \arrow[d] & S^k \arrow[d] \\
E'(\widetilde{\gamma}_{n,k+1}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"'] & W^n_{k,1} \arrow[d, "sp"] \arrow[l, dashed, bend left, "\psi"] \\
\widetilde{G}_{n,k+1} \arrow[r, equal] & \widetilde{G}_{n,k+1}
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Пресликавање φ дефинишемо на следећи начин. Нека је $(\widetilde{P}, v) \in E'(\widetilde{\gamma}_{n,k+1}) \subset \widetilde{G}_{n,k+1} \times S^{n-1}$ и нека је $\widetilde{Q}$ ортокомплемент вектора v унутар $\widetilde{P}$ оријентисан тако да кад на базу која задаје оријентацију од $\widetilde{Q}$ додамо вектор v, добијамо базу која задаје оријентацију од $\widetilde{P}$. Сада је $\widetilde{Q}$ један оријентисани потпростор од $\mathbb{R}^n$ димензије k, тј. $\widetilde{Q} \in \widetilde{G}_{n,k}$, па можемо дефинисати

$$\varphi(\widetilde{P}, v) = (\widetilde{Q}, v).$$

Са друге стране, ако је $(\widetilde{Q}, v) \in W^n_{k,1} \subset \widetilde{G}_{n,k} \times S^{n-1}$, дефинишемо

$$\psi(\widetilde{Q}, v) = \left(sp(\widetilde{Q}, v), v\right).$$

Није тешко уверити се да дијаграм (2.3) комутира и да су пресликавања φ и ψ једно другом инверзна.

2.1 Карактеристични ранг

Модуло 2 кохомологија Грасманијана генерисана је Штифел–Витнијевим класама канонског векторског раслојења $\gamma_{n,k}$, као што смо видели у (1.2). Ово неће бити случај са оријентисаним Грасмановим многострукостима, па је занимљиво дати одговор на питање која је прва кохомолошка димензија у којој постоји класа која се не може представити као полином над Штифел–Витнијевим класама оријентисаног канонског векторског раслојења $\widetilde{\gamma}_{n,k}$.

Дефиниција 2.1.1. *Нека је ξ реално векторско раслојење над CW-комплексом X димензије d. Карактеристични ранг раслојења ξ је највећи цео број $m \in \{0, 1, \ldots, d\}$ такав да се свака кохомолошка класа из $H^i(X; \mathbb{Z}_2)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, може представити као полином над Штифел–Витнијевим класама раслојења ξ. Карактеристични ранг раслојења ξ означавамо са* $\operatorname{charrank}(\xi)$.

У одељку 1.1.3 дефинисали смо појам аномаличне класе. Прва аномална класа у кохомологији оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{n,k}$ (тј. прва нерастављива класа која није Штифел–Витнијева класа раслојења $\widetilde{\gamma}_{n,k}$) налази се управо у димензији $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) + 1$.

Корбаш је у [17, теорема 2.1] одредио доњу границу за $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k})$.

Теорема 2.1.1. *Нека је $k \geqslant 3$ и $t \geqslant 3$ јединствен цео број такав да $2^{t-1} < n \leqslant 2^t$.*

(1) Ако је $k = 3$, онда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t,3}) = 2^t - 2,\\
&\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,3}) = n - 5 + i, \ \text{за } n = 2^t - i,\ i = 1, 2, 3,\\
&\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,3}) \geqslant n - 2, \ \text{иначе.}
\end{aligned}$$

(2) Ако је $k = 4$, онда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,4}) = n - 5 + i, \ \text{за } n = 2^t - i,\ i = 0, 1, 2, 3,\\
&\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,4}) \geqslant n - 3, \ \text{иначе.}
\end{aligned}$$

(3) Ако је $k \geqslant 5$, онда $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \geqslant n - k + 1$.

Након тога, Корбаш и Русин су одредили $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,2})$ у [19].

Теорема 2.1.2. *Нека је $n \geqslant 4$. Тада*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,2}) = \begin{cases} n-2, & n \text{ непарно},\\ n-3, & n \text{ парно}.\end{cases}$$

Резултат из теореме 2.1.1 у случају $k = 3$ су Петровић, Првуловић и Радовановић поправили доказавши у [26] наредну теорему.

Теорема 2.1.3. *Нека је $t \geqslant 3$ јединствен цео број такав да $2^{t-1} \leqslant n < 2^t$. Тада је*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,3}) = \min\{3n - 2^t - 2, 2^t - 5\}.$$

Првуловић и Радовановић су у [27] у потпуности одредили и $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,4})$.

Теорема 2.1.4. *Нека је $t \geqslant 3$ јединствен цео број такав да $2^{t-1} < n \leqslant 2^t$. Тада је*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,4}) = \min\{4n - 3 \cdot 2^{t-1} - 5, 2^t - 5\}.$$

У [27] су доказане и наредне две теореме које побољшавају границу из дела (3) теореме 2.1.1.

Теорема 2.1.5. *Нека је $k \geqslant 2$. Тада*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k-1}) \leqslant \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}).$$

Теорема 2.1.6. *Нека је $k \geqslant 1$.*

(1) Ако је $n - k \geqslant k \geqslant 6$, онда

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \geqslant n - k + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1.$$

(2) Ако је $n - k \geqslant 6 \cdot \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor$, онда

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \geqslant n - k + 2 \cdot \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor - 1.$$

Напомена 2.1.1. *Приметимо да теореме 2.1.4 и 2.1.5 дају још једно доње ограничење за $k \geqslant 5$*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \geqslant \operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,4}) = \min\{4n - 3 \cdot 2^{t-1} - 5, 2^t - 5\}$$

које у неким случајевима може бити боља оцена од оних у теореми 2.1.6.

У литератури се наилази и на неколико горњих ограничења. Наиме, у [19] је дато следеће ограничење.

Теорема 2.1.7. *Нека је $i \leqslant \frac{k(n-k)}{2}$ такво да је $H^i(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2) \neq 0$, онда је*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \leqslant k(n-k) - i - 1.$$

Напомена 2.1.2. *Из пропозиције 1.1.1 можемо закључити да је* $H^{n-k}(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2) \neq 0$, *па из теореме 2.1.7 добијамо*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \leqslant k(n-k) - (n-k) - 1 = (k-1)(n-k) - 1.$$

Мацангос и Вент су у [22] дали наредно горње ограничење.

Теорема 2.1.8. *Нека је* $5 \leqslant k \leqslant 2^t - 5$. *Тада је*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t,k}) \leqslant 2^t - 2.$$

У истом раду су аутори навели и претпоставку о вредности карактеристичног ранга у општем случају. Наиме, они очекују да уколико је $5 \leqslant k \leqslant 2^{t-1} < n \leqslant 2^t$ и $t \geqslant 5$, онда

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) = \min\{2^t - 2, k(n - 2^{t-1}) + 2^{t-1} - 2\}. \tag{2.4}$$

У свом следећем раду [21] су доказали да израз у (2.4) јесте горње ограничење чиме су поправили свој претходни резултат из теореме 2.1.8. Прецизније, доказали су следећу теорему.

Теорема 2.1.9. *Нека је* $5 \leqslant k \leqslant 2^{t-1} < n \leqslant 2^t$ *и* $t \geqslant 5$. *Тада је*

$$\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \leqslant \min\{2^t - 2, k(n - 2^{t-1}) + 2^{t-1} - 2\}.$$

2.2 Случај $k = 2$

Модуло два кохомолошку алгебру оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{n,2}$ одредили су Корбаш и Русин у [18]. У овом одељку ћемо приказати нешто другачији доказ од оригиналног. Пре свега, наводимо лему доказану у [18] која ће нам бити корисна у доказу главне теореме.

Лема 2.2.1. *Нека је* $v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots$ *тотална Вуова класа многострукости* $\widetilde{G}_{n,2}$ *и нека је* $\widetilde{w}_2$ *Штифел–Витнијева класа канонског оријентисаног раслојења* $\widetilde{\gamma}_{n,2}$. *Тада*

$$v = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{n-1-j}{j} \widetilde{w}_2^j.$$

Одредимо најпре кохомологију помоћног простора

$$W_{1,1}^n = \left\{(\widetilde{P}, v) \in \widetilde{G}_{n,1} \times S^{n-1} \mid \widetilde{P} \perp v\right\}$$

користећи раслојење $S^{n-2} \to W^n_{1,1} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{n,1}$. Како је $\widetilde{G}_{n,1} \approx S^{n-1}$, није тешко приметити да је ово раслојење управо сферно раслојење придружено тангентном векторском раслојењу над сфером S^{n-1}. Такође, можемо приметити да је простор $W^n_{1,1}$ заправо Штифелова многострукост $V_{n,2}$.

Теорема 2.2.1. *Нека је $n \geqslant 2$. Тада имамо изоморфизам алгебри*

$$H^*(W^n_{1,1}; \mathbb{Z}_2) \cong \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(c_{n-2}) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(c_{n-1}),$$

где је $c_i \in H^i(W^n_{1,1}; \mathbb{Z}_2)$.

Доказ. Посматрајмо Серов спектрални низ тангентног раслојења $S^{n-2} \to W^n_{1,1} \xrightarrow{p_1} S^{n-1}$. Цео спектрални низ садржан је у две врсте, па једини диференцијал који може бити нетривијалан јесте $d_{n-2} : E^{0,n-2}_{n-2} \to E^{n-1,0}_{n-2}$. Диференцијал d_{n-2} је множење Ојлеровом класом која је на основу [24, особина 9.5] једнака Штифел–Витнијевој класи $w_{n-1}(S^{n-1})$ тангентног раслојења над S^{n-1}, али ова класа је тривијална (видети [24, стр. 41]), па је $d_{n-2} = 0$. Коначно,

$$E^{*,*}_\infty = E^{*,*}_2 \cong H^*(S^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(S^{n-2}; \mathbb{Z}_2),$$

одакле следи да кохомологија тоталног простора има наведену структуру. $\square$

Теорема 2.2.2. *Нека је $n \geqslant 2$.*

(1) Ако је n непарно, тада имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, a_{n-1}]}{\left(w_2^{\frac{n-1}{2}}, a^2_{n-1}\right)} \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2]}{\left(w_2^{\frac{n-1}{2}}\right)} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{n-1}),$$

при чему косет од w_2 одговара Штифел–Витнијевој класи $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2)$, а косет од a_{n-1} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{n-1} \in H^{n-1}(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2)$.

(2) Ако је $n \equiv_4 2$, тада имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, a_{n-2}]}{\left(w_2^{\frac{n}{2}}, a^2_{n-2} + w_2^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2}\right)},$$

при чему косет од w_2 одговара Штифел–Витнијевој класи $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2)$, а косет од a_{n-2} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{n-2} \in H^{n-2}(\widetilde{G}_{n,2}; \mathbb{Z}_2)$.

(3) Ако је $n \equiv_4 0$, тада имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, a_{n-2}]}{\left(w_2^{\frac{n}{2}}, a_{n-2}^2\right)} \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2]}{\left(w_2^{\frac{n}{2}}\right)} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{n-2}),$$

при чему косет од w_2 одговара Штифел–Витнијевој класи $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$, а косет од a_{n-2} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{n-2} \in H^{n-2}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$.

Доказ. Посматрајмо Серов спектрални низ придружен сферном раслојењу $S^1 \to W_{1,1}^n \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,2}$. E_2 страна овог спектралног низа садржана је у нултој и првој врсти, па је d_2 једини диференцијал који може бити нетривијалан. На основу пропозиције 1.1.1 знамо да је $\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2]}{(g_{n-1}, g_n)}$ садржана у $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$. Доказ ћемо поделити на два дела, у зависности од парности n.

Нека је n непарно. Тада на основу теореме 2.1.2 имамо да је $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,2}) = n-2$, па постоји нерастављива класа која није у $\operatorname{im} p^*$ у димензији $n-1$. Означимо је са $\widetilde{a}_{n-1} \in H^{n-1}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$. Даље, из (1.10) имамо $g_{n-1} = w_2^{\frac{n-1}{2}}$ и $g_n = 0$. Знамо да је d_2 множење Штифел–Витнијевом класом $\widetilde{w}_2$, па како су све групе $H^j(W_{1,1}^n;\mathbb{Z}_2)$ тривијалне за $1 \leqslant j \leqslant n-3$, закључујемо да је $d_2 : E_2^{j-2,1} \to E_2^{j,0}$ изоморфизам за $1 \leqslant j \leqslant n-3$. Такође, $E_2^{p,q} = 0$ за $p \leqslant n-2$ непарно, па је и $d_2 : E_2^{n-4,1} \to E_2^{n-2,0}$ изоморфизам. Такође, из теореме 2.2.1 је $H^j(W_{1,1}^n;\mathbb{Z}_2) = 0$ и за $n \leqslant j \leqslant 2n-4$, па ће $d_2 : E_2^{j-2,1} \to E_2^{j,0}$ бити изоморфизам и за $n+1 \leqslant j \leqslant 2n-4$. Генераторе на E_2 страни можемо видети у табели 2.1, а специјално из табеле видимо да је $\widetilde{a}_{n-1}$ једина аномална класа.

1	1	0	$\widetilde{w}_2$	0	$\widetilde{w}_2^2$	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-3}{2}}$	0	$\widetilde{a}_{n-1}$	0	$\widetilde{w}_2\widetilde{a}_{n-1}$	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-3}{2}}\widetilde{a}_{n-1}$
0	1	0	$\widetilde{w}_2$	0	$\widetilde{w}_2^2$	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-3}{2}}$	0	$\widetilde{a}_{n-1}$	0	$\widetilde{w}_2\widetilde{a}_{n-1}$	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-3}{2}}\widetilde{a}_{n-1}$
	0	1	2	3	4	$\cdots$	$n-3$	$\boldsymbol{n-2}$	$\boldsymbol{n-1}$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-4$

Табела 2.1: E_2 страна спектралног низа за раслојење $S^1 \to W_{1,1}^n \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,2}$ за n непарно

Да бисмо у потпуности одредили мултипликативну структуру, остаје само да приметимо да је $\widetilde{a}_{n-1}^2 = 0$ јер је димензија многострукости $\widetilde{G}_{n,2}$ једнака $2n-4$.

Претпоставимо сада да је n парно. Слично као у претходном случају, можемо закључити да су $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_{n-2} \in H^{n-2}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$ једине нерастављиве класе

1	1	0	$\widetilde{w}_2$	0	$\widetilde{w}_2^2$	$\cdots$	0	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}, \widetilde{a}_{n-2}$	0	$\widetilde{w}_2\widetilde{a}_{n-2}$	0	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2}$
0	1	0	$\widetilde{w}_2$	0	$\widetilde{w}_2^2$	$\cdots$	0	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}, \widetilde{a}_{n-2}$	0	$\widetilde{w}_2\widetilde{a}_{n-2}$	0	$\cdots$	$\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2}$
	0	1	2	3	4	$\cdots$	$n-3$	$\boldsymbol{n-2}$	$\boldsymbol{n-1}$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-4$

Табела 2.2: E_2 страна спектралног низа за раслојење $S^1 \to W_{1,1}^n \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,2}$ за n парно

у кохомологији од $\widetilde{G}_{n,2}$ (у овом случају је $\mathrm{charrank}(\widetilde{\gamma}_{n,2}) = n-3$). Такође, на основу (1.10) је $g_{n-1} = 0$ и $g_n = w_2^{\frac{n}{2}}$. Генераторе на E_2 страни можемо видети у табели 2.2.

Поново као и када је n било непарно, закључујемо да је $d_2 : E_2^{j-2,1} \to E_2^{j,0}$ изоморфизам за $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n-2, n, 2n-2\}$, па је $\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2} \neq 0$.

Због повезаности многострукости $\widetilde{G}_{n,2}$, знамо да је $H^{2n-4}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, а како је $\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2} \neq 0$, то имамо две могућности. Или је $\widetilde{a}_{n-2}^2 = \widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2} \neq 0$ или је $\widetilde{a}_{n-2}^2 = 0$. Да бисмо одредили $\widetilde{a}_{n-2}^2$, уочимо пресликавање $Sq^{n-2} : H^{n-2}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2) \to H^{2n-4}(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$. Са једне стране, знамо да је $Sq^{n-2}(\widetilde{a}_{n-2}) = \widetilde{a}_{n-2}^2$. Са друге стране, ово пресликавање је множење Вуовом класом v_{n-2}, а на основу леме 2.2.1, имамо

$$v_{n-2} = \binom{n-1-\frac{n-2}{2}}{\frac{n-2}{2}}\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}} = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}} = \frac{n}{2}\cdot\widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}.$$

Дакле,

$$v_{n-2} = \begin{cases} \widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}, & n \equiv_4 2 \\ 0, & n \equiv_4 0 \end{cases}$$

Коначно,

$$\widetilde{a}_{n-2}^2 = \begin{cases} \widetilde{w}_2^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{a}_{n-2}, & n \equiv_4 2 \\ 0, & n \equiv_4 0 \end{cases}$$

чиме је доказ завршен. $\square$

2.3 Случај $k = 3$

Басу и Чакраборти су у [1] дали скоро потпун опис кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ када је n близу степена двојке као и неке делимичне резултате за остале вредности n. Најпре су одредили нерастављиве елементе у $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$, а затим су истраживали мултипликативну структуру ових алгебри. Главни алат који су користили јесте Серов спектрални низ примењен на раслојења (2.2). У овом одељку ћемо дати преглед њихових резултата.

Теорема 2.3.1. *(а) $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ има по један нерастављив елемент у димензијама $2, 3$ и 2^t-1 и ниједан у осталим димензијама.*

(б) $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ за $n = 2^t-3, 2^t-2, 2^t-1$, има по један нерастављив елемент у димензијама $2, 3$ и 2^t-4 и ниједан у осталим димензијама.

(в) $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ за $2^{t-1} < n \leqslant 2^t-4$, има по један нерастављив елемент у димензијама $2, 3, 3n-2^t-1$ и 2^t-4 и ниједан у осталим димензијама.

Теорема 2.3.2. *(а) Ако је $n = 2^t$, онда имамо изоморфизам алгебри*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-1}]}{\big(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, a_{2^t-1}^2 + Pa_{2^t-1}\big)},$$

при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t,3}$, док косет од a_{2^t-1} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{2^t-1} \in H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$, а P је неки полином над w_2 и w_3.

(б) Ако је $n = 2^t-3, 2^t-2, 2^t-1$, онда имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-4}]}{\big(g_{n-2}, g_{n-1}, g_n, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\big)},$$

при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{n,3}$, док косет од a_{2^t-4} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$, а P и Q су неки полиноми над w_2 и w_3. Притом, уколико је $n = 2^t-3$ или $n = 2^t-2$, онда је $Q = 0$.

Теорема 2.3.3. *Нека је $2^{t-1} < n \leqslant 2^t-4$. Означимо са $\widetilde{a}_{3n-2^t-1} \in H^{3n-2^t-1}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ нерастављиве класе. Тада у $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ важе следеће релације.*

(1) Ако је $3n-2^t-1 < 2^t-4$, онда

$$\widetilde{a}_{3n-2^t-1}^2 = R_1 + \widetilde{a}_{2^t-4}R_2 + \widetilde{a}_{3n-2^t-1}R_3,\ \ \widetilde{a}_{2^t-4}^2 = 0,$$

а ако је $3n-2^t-1 > 2^t-4$, онда

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = Q_1 + \widetilde{a}_{2^t-4}Q_2 + \widetilde{a}_{3n-2^t-1}Q_3,\ \ \widetilde{a}_{3n-2^t-1}^2 = 0,$$

где су R_i и Q_i, $i = 1, 2, 3$, полиноми над Штифел–Витнијевим класама $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$.

(2) Постоје класе $v_{2^t-8} \in p^*(H^{2^t-8}(G_{n,3};\mathbb{Z}_2))$ и $v_{3n-2^t-5} \in p^*(H^{3n-2^t-5}(G_{n,3};\mathbb{Z}_2))$ које помножене са $\widetilde{a}_{3n-2^t-1}$ и $\widetilde{a}_{2^t-4}$, редом, дају генератор највише кохомолошке групе $H^{3n-9}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$. Штавише,

$$v_{2^t-8}\widetilde{a}_{2^t-4} = 0, \;\; v_{3n-2^t-5}\widetilde{a}_{3n-2^t-1} = 0.$$

2.3.1 Случај $n = 2^t$

Цоловић и Првуловић су у [7] доказали да се полином P из теореме 2.3.2(a) може одабрати тако да буде нула полином, чиме су у потпуности одредили кохомолошку алгебру оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{2^t,3}$. У овом одељку ћемо изложити њихов доказ. Прецизније, приказаћемо примену Гребнерових база при одређивању ове алгебре, док ћемо доказе самих тврђења из теорије Гребнерових база прескоцхити. Докази свих таквих тврђења се могу наћи у [7]. Надаље подразумевамо да је $t \geqslant 3$.

Нека је $\preccurlyeq$ лексикографско уређење на мономима у $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]$ дато са $w_2 \succ w_3$, тј.

$$w_2^{b_1}w_3^{c_1} \preccurlyeq w_2^{b_2}w_3^{c_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_1 < b_2 \quad \vee \quad (b_1 = b_2 \quad \wedge \quad c_1 \leqslant c_2).$$

У одељку 1.1.3 доказали смо да за дволисно наткривање $p : \widetilde{G}_{2^t,3} \to G_{2^t,3}$ важи

$$\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t})}.$$

Из (1.9) имамо

$$g_{2^t} = w_2 g_{2^t-2} + w_3 g_{2^t-3} = w_2 g_{2^t-2}$$

јер је $g_{2^t-3} = 0$ на основу [17, лема 2.3], па је

$$J_{2^t,3} = (g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}) = (g_{2^t-2}, g_{2^t-1}). \tag{2.5}$$

Дефинишимо

$$f_i = g_{2^t-3+2^i},\; 0 \leqslant i \leqslant t-1. \tag{2.6}$$

Теорема 2.3.4. *Скуп $\{f_0, f_1, \ldots, f_{t-1}\}$ је редукована Гребнерова база идеала $J_{2^t,3}$.*

Означимо са J идеал из теореме 2.3.2(a), тј.

$$J = \left(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, a_{2^t-1}^2 + P a_{2^t-1}\right).$$

Проширимо уређење монома из $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]$ на мономе у $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-1}]$ на следећи начин $a_{2^t-1} \succ w_2 \succ w_3$. Јасно је да важи

$$\mathrm{LM}(a_{2^t-1}^2 + P a_{2^t-1}) = a_{2^t-1}^2 \tag{2.7}$$

јер је P полином над w_2 и w_3.

Теорема 2.3.5. *Скуп* $\{f_0, f_1, \dots, f_{t-1}, a_{2^t-1}^2 + Pa_{2^t-1}\}$ *је Гребнерова база идеала* J.

Пропозиција 2.3.1. *Нека је* $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$. *Тада је* $f_i \neq 0$ *и важи*

$$\mathrm{LM}(f_i) = w_2^{2^{t-1}-2^i} w_3^{2^i-1}.$$

Штавише, $f_{t-1} = \mathrm{LM}(f_{t-1}) = w_3^{2^{t-1}-1}$.

На основу теореме 2.3.5, пропозиција 1.3.1 и 2.3.1 и на основу (2.7) добијамо наредну последицу.

Последица 2.3.1. *Скуп кохомолошких класа*

$$B = \left\{ \widetilde{a}_{2^t-1}^r \widetilde{w}_2^b \widetilde{w}_3^c \mid r < 2,\ (\forall i \in \{0, 1, \dots, t-1\})\ b < 2^{t-1} - 2^i \ \vee\ c < 2^i - 1 \right\}$$

је адитивна база кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3}; \mathbb{Z}_2)$.

Пример 2.3.1. *У случају* $t = 3$, *адитивна база од* $H^*(\widetilde{G}_{8,3}; \mathbb{Z}_2)$ *је*

$$B = \{1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_7, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_2, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_2^2, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_7\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\}$$

Пример 2.3.2. *У случају* $t = 4$, *адитивна база од* $H^*(\widetilde{G}_{16,3}; \mathbb{Z}_2)$ *је*

$$\begin{aligned} B = \big\{ & 1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^3, \widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^4, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^5, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^3, \\ & \widetilde{w}_2^6, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_3^4, \widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_3^5, \widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2, \\ & \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^4, \widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^5, \\ & \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^2, \\ & \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3^2, \\ & \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_3^6, \\ & \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{15}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^6 \big\} \end{aligned}$$

Дефиниција 2.3.1. *Висина кохомолошке класе* x, *у ознаци* $\mathrm{ht}(x)$, *је природан број* n *такав да је* $x^n \neq 0$ *и* $x^{n+1} = 0$.

Лема 2.3.1. *Висина кохомолошке класе* $\widetilde{w}_3 \in H^3(\widetilde{G}_{2^t,3}; \mathbb{Z}_2)$ *је* $2^{t-1} - 2$, *тј.* $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \neq 0$ *и* $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-1} = 0$.

Доказ. Како је $f_{t-1} \in J$, имамо да је одговарајућа класа $\widetilde{f}_{t-1} = 0$ у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3}; \mathbb{Z}_2)$, а на основу пропозиције 2.3.1 знамо да је $\widetilde{f}_{t-1} = \widetilde{w}_3^{2^{t-1}-1}$, па је $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-1} = 0$. Са друге стране, видимо да је $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}$ елемент базе B из последице 2.3.1, па је $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \neq 0$, те закључујемо да је $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_3) = 2^{t-1} - 2$. $\square$

Видели смо да је кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ генерисана Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења и још једном нерастављивом класом која није у слици хомоморфизма p^*. У следећој пропозицији ћемо видети да се кохомолошке групе $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ деле на три целине. Отприлике прва трећина кохомолошких група садржаће само елементе који се могу представити преко Штифел–Витнијевих класа, тј. само елементе из $\operatorname{im} p^*$, друга трећина ће садржати елементе и из $\operatorname{im} p^*$ али и оне који нису у тој слици, док ће последња трећина садржати искључиво елементе који нису из $\operatorname{im} p^*$, тј. оне који су умношци класе $\widetilde{a}_{2^t-1}$.

Пропозиција 2.3.2. *(а) Ако је $j < 2^t - 1$, онда је $H^j(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \subset \operatorname{im} p^*$.*

(б) Ако је $j > 2 \cdot 2^t - 8$, онда је $H^j(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^* = 0$.

Доказ. На основу теореме 2.1.3 имамо да је $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t,3}) = 2^t - 2$ одакле тврђење (а) директно следи.

Да бисмо доказали део под (б), претпоставимо супротно: да постоји нетривијална класа $\sigma \in H^j(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^*$ за неко $j > 2 \cdot 2^t - 8$. На основу Поенкареове дуалности онда имамо и нетривијалну класу $\tau \in H^{3\cdot 2^t-9-j}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ такву да је $\sigma\tau \neq 0$. Приметимо да је $3 \cdot 2^t - 9 - j < 3 \cdot 2^t - 9 - (2 \cdot 2^t - 8) = 2^t - 1$, па је на основу дела (а) $\tau \in \operatorname{im} p^*$. Дакле, и σ и τ су у слици хомоморфизма p^*, па је $\sigma\tau \in \operatorname{im} p^*$ и самим тим хомоморфизам $p^* : H^{3\cdot 2^t-9}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{3\cdot 2^t-9}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ није тривијалан. Познато је да је $H^{3\cdot 2^t-9}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\langle w_3^{2^t-3}\rangle$, где је $w_3 = w_3(\gamma_{2^t,3})$, па је $\sigma\tau = \widetilde{w}_3^{2^t-3} \neq 0$ што је у контрадикцији са претходно доказаном лемом 2.3.1. $\square$

Коришћењем Вуове формуле (1.14) и особина Стинродових квадрата из теореме 1.2.1, индукцијом се може доказати наредна лема.

Лема 2.3.2. *Нека су $b, c \in \mathbb{N}_0$. Тада у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ важе следеће једнакости.*

(а) $Sq^1(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c) = b\widetilde{w}_2^{b-1}\widetilde{w}_3^{c+1}$;

(б) $Sq^2(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c) = (b+c)\widetilde{w}_2^{b+1}\widetilde{w}_3^c + \binom{b}{2}\widetilde{w}_2^{b-2}\widetilde{w}_3^{c+2}$.

Лема 2.3.3. *(а) $Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in \operatorname{im} p^*$;*

(б) $Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in \operatorname{im} p^*$.

Доказ. (а) Како је $Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in H^{2^t}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$, а видимо да су елементи базе B из последице 2.3.1 у димензији 2^t сви облика $\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c$, закључујемо да је $Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in \operatorname{im} p^*$.

(б) Представимо класу $Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in H^{2^t+1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ преко елемената базе B из последице 2.3.1.

$$Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}) = \beta\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2 + W, \tag{2.8}$$

за неко $\beta \in \mathbb{Z}_2$ и $W \in \operatorname{im} p^*$. Показаћемо да је $\beta = 0$.

Како је $\dim \widetilde{G}_{2^t,3} = 3\cdot 2^t - 9$, хомоморфизам $Sq^2 : H^{3\cdot 2^t-11}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{3\cdot 2^t-9}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ је множење Вуовом класом $v_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$.

На основу формуле (1.13) имамо да је

$$w_2(\widetilde{G}_{2^t,3}) = Sq^2(v_0) + Sq^1(v_1) + v_2 = v_2, \tag{2.9}$$

где је $w_2(\widetilde{G}_{2^t,3})$ Штифел–Витнијева класа тангентног раслојења многострукости $\widetilde{G}_{2^t,3}$, а $v_1 = 0$ јер је $H^1(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) = 0$.

Из теореме 1.1 у [2] добијамо да је $w_2(G_{2^t,3}) = 0$, па је и

$$w_2(\widetilde{G}_{2^t,3}) = p^*(w_2(G_{2^t,3})) = 0.$$

Сада из (2.9) закључујемо да је $v_2 = 0$, а самим тим је и хомоморфизам Sq^2 : $H^{3\cdot 2^t-11}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{3\cdot 2^t-9}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ тривијалан.

Уколико поново погледамо базу B, видимо да је

$$\begin{aligned} H^{3\cdot 2^t-11}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2\langle \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}\rangle, \\ H^{3\cdot 2^t-9}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2\langle \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}\rangle, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} 0 &= Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}) \\ &= Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1})\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} + Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})Sq^1(\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}) \\ &\quad + \widetilde{a}_{2^t-1}Sq^2(\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Стинродови квадрати су кохомолошке операције, па сликају $\operatorname{im} p^*$ у $\operatorname{im} p^*$. На основу дела (а) и пропозиције 2.3.2(б) је $Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})Sq^1(\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}) = 0$.

Даље, наставимо рачун из (2.10) коришћењем (2.8) и леме 2.3.2(б)

$$\begin{aligned} 0 =& (\beta\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2 + W)\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \\ &+ \widetilde{a}_{2^t-1}\Big((2^{t-2}-2+2^{t-1}-2)\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} + \tbinom{2^{t-2}-2}{2}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-4}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}}\Big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Поново на основу пропозиције 2.3.2(б) је $W \cdot \widetilde{w}_2^{2^{t-2}-2}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} = 0$, док је $\widetilde{w}_3^{2^{t-1}} = 0$ на основу леме 2.3.1. Када наставимо (2.11) коначно добијамо

$$0 = \beta\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \quad \text{у } H^{3\cdot 2^t-9}(\widetilde{G}_{2^t,3}) = \mathbb{Z}_2\langle \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}\rangle,$$

одакле је $\beta = 0$. □

Теорема 2.3.6. *Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2^t,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3,a_{2^t-1}]}{(g_{2^t-2},g_{2^t-1},a_{2^t-1}^2)} \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3]}{(g_{2^t-2},g_{2^t-1})} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-1}),$$

при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t,3}$, док косет од a_{2^t-1} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{2^t-1} \in H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$.

Доказ. На основу теореме 2.3.2(а) довољно је показати да је $\widetilde{a}_{2^t-1}^2 = 0$ у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$.

Представимо класу $\widetilde{a}_{2^t-1}^2 \in H^{2\cdot 2^t-2}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ преко елемената базе B из последице 2.3.1. У димензији $2\cdot 2^t-2$ базни елементи су

$$\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-5}\widetilde{w}_3^3,\ \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-8}\widetilde{w}_3^5,\ldots,\ \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1},\ldots$$

где се ова листа наставља док год је $2^{t-1}-2-3k \geqslant 0$, тј. $k \leqslant \frac{2^{t-1}-2}{3}$. Стога,

$$\widetilde{a}_{2^t-1}^2 = \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \lambda_k \widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1}, \tag{2.12}$$

за неке јединствено одређене коефицијенте $\lambda_k \in \mathbb{Z}_2$. Показаћемо да је $\lambda_k = 0$ за свако k.

Применом Картанове формуле имамо

$$Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) = Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})\widetilde{a}_{2^t-1} + \widetilde{a}_{2^t-1}Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}) = 0.$$

Такође, приметимо да је $Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) \in H^{2\cdot 2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$, а у $H^{2\cdot 2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ нема ненула елемената из $\operatorname{im} p^*$ на основу пропозиције 2.3.2(б). Искористићемо ову чињеницу заједно са лемама 2.3.2 и 2.3.3 у наредном рачуну.

$$\begin{aligned}
0 = Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) &= \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \lambda_k Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1})\\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \lambda_k\Big(Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1} + \widetilde{a}_{2^t-1}Sq^1(\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1})\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \lambda_k(2^{t-1}-2-3k)\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-3-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2}.
\end{aligned}$$

Приметимо да је $\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-3-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2} \in B$ за свако $k \in \left\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3} \rfloor\right\}$, па закључујемо да је

$$\lambda_k(2^{t-1} - 2 - 3k) = 0.$$

Како је

$$2^{t-1} - 2 - 3k \equiv_2 \begin{cases} 1, & k \text{ непарно} \\ 0, & k \text{ парно} \end{cases}$$

то је $\lambda_k = 0$ када је k непарно.

Да бисмо показали да је $\lambda_k = 0$ и за парне k, уведимо смену $k = 2j$. Тада (2.12) постаје

$$\widetilde{a}_{2^t-1}^2 = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor} \lambda_{2j}\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1}.$$

Поновном применом Картанове формуле имамо

$$Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) = Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1})\widetilde{a}_{2^t-1} + \left(Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})\right)^2 + \widetilde{a}_{2^t-1}Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}) = \left(Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})\right)^2,$$

а како је $\left(Sq^1(\widetilde{a}_{2^t-1})\right)^2 \in H^{2\cdot 2^t}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^* = 0$, на основу пропозиције 2.3.2 и леме 2.3.3, то је $Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) = 0$. Сада на основу лема 2.3.2 и 2.3.3 имамо

$$\begin{aligned}
0 = Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor} \lambda_{2j} Sq^2(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor} \lambda_{2j}\widetilde{a}_{2^t-1} Sq^2(\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor} \lambda_{2j}\widetilde{a}_{2^t-1}\left(\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-1-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1} + \binom{2^{t-1}-2-6j}{2}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-4-6j}\widetilde{w}_3^{4j+3}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor} \left(\lambda_{2j}\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-1-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1} + \lambda_{2j}\binom{2^{t-1}-2-6j}{2}\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-4-6j}\widetilde{w}_3^{4j+3}\right).
\end{aligned}$$

Сви мономи $\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-1-6j}\widetilde{w}_3^{4j+1}$ и $\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-4-6j}\widetilde{w}_3^{4j+3}$, за $j \in \left\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor\right\}$, су међусобно различити елементи базе B, па је $\lambda_{2j} = 0$ за $j \in \left\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3} \rfloor\right\}$. $\square$

2.3.2 Случај $n = 2^t - 1$

У овом и наредном одељку ћемо одредити кохомолошку алгебру $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ у случајевима $n = 2^t-3, 2^t-2, 2^t-1$. Изложићемо доказ из [15].

Инклузија еуклидских простора $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ индукује два различита утапања Грасманијана. Означимо са $i : G_{n,k} \hookrightarrow G_{n+1,k}$ утапање које чува димензију потпростора, а са $j : G_{n,k} \hookrightarrow G_{n+1,k+1}$ утапање које чува кодимензију потпростора. Конкретно, ако је $V \subset \mathbb{R}^n$ потпростор димензије k, онда је $i(V) = V \oplus 0 \subseteq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, док је $j(V) = V \oplus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. На исти начин се дефинишу и утапања оријентисаних Грасманијана $\widetilde{i} : \widetilde{G}_{n,k} \hookrightarrow \widetilde{G}_{n+1,k}$ и $\widetilde{j} : \widetilde{G}_{n,k} \hookrightarrow \widetilde{G}_{n+1,k+1}$. Очигледно је да ова пресликавања комутирају са дволисним наткривањем p, тј. имамо следеће комутативне дијаграме.

$$
\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & S^0 \arrow[d, hook] \\
\widetilde{G}_{n,k} \arrow[r, hook, "\widetilde{i}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{G}_{n+1,k} \arrow[d, "p"] \\
G_{n,k} \arrow[r, hook, "i"] & G_{n+1,k}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & S^0 \arrow[d, hook] \\
\widetilde{G}_{n,k} \arrow[r, hook, "\widetilde{j}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{G}_{n+1,k+1} \arrow[d, "p"] \\
G_{n,k} \arrow[r, hook, "j"] & G_{n+1,k+1}
\end{tikzcd}
$$

Из претходних дијаграма и природности Гисиновог низа добијамо да комутирају и наредни дијаграми (све кохомолошке групе су са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима).

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^r(G_{n+1,k}) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "i^*"] & H^r(\widetilde{G}_{n+1,k}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{i}^*"] & H^r(G_{n+1,k}) \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "i^*"] & H^{r+1}(G_{n+1,k}) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^r(G_{n,k}) \arrow[r, "p^*"] & H^r(\widetilde{G}_{n,k}) \arrow[r, "\varphi"] & H^r(G_{n,k}) \arrow[r, "w_1"] & H^{r+1}(G_{n,k}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{2.13}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^r(G_{n+1,k+1}) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "j^*"] & H^r(\widetilde{G}_{n+1,k+1}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{j}^*"] & H^r(G_{n+1,k+1}) \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "j^*"] & H^{r+1}(G_{n+1,k+1}) \arrow[r] \arrow[d, "j^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^r(G_{n,k}) \arrow[r, "p^*"] & H^r(\widetilde{G}_{n,k}) \arrow[r, "\varphi"] & H^r(G_{n,k}) \arrow[r, "w_1"] & H^{r+1}(G_{n,k}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{2.14}
$$

У теореми 2.3.1 смо видели да када су m и n близу, онда $\widetilde{G}_{m,3}$ и $\widetilde{G}_{n,3}$ имају аномаличне класе у истим или блиским димензијама. Да бисмо одредили чему је једнак квадрат класе $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, желимо да га повежемо са класом $\widetilde{a}_{2^t-1} \in H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ за коју знамо да има тривијалан квадрат. Ово ћемо постићи анализом претходних дијаграма. За аномаличне класе знамо да нису у $\operatorname{im} p^*$ па нам следећа лема даје довољне услове да се аномалична класа слика у аномаличну при пресликавањима $\widetilde{i}^*$ и $\widetilde{j}^*$ из дијаграма (2.13) и (2.14).

Лема 2.3.4. *(а) Нека је $r \geqslant 0$ цео број такав да је $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$ у $H^r(G_{n+1,k};\mathbb{Z}_2)$ у дијаграму (2.13). Тада за произвољну класу $x \in H^r(\widetilde{G}_{n+1,k};\mathbb{Z}_2)$ важи*

$$x \notin \operatorname{im} p^* \implies \widetilde{i}^*(x) \notin \operatorname{im} p^*.$$

(б) Нека је $r \geqslant 0$ цео број такав да је $\ker w_1 \cap \ker j^* = 0$ у $H^r(G_{n+1,k+1};\mathbb{Z}_2)$ у дијаграму (2.14). Тада за произвољну класу $x \in H^r(\widetilde{G}_{n+1,k+1};\mathbb{Z}_2)$ важи

$$x \notin \operatorname{im} p^* \implies \widetilde{j}^*(x) \notin \operatorname{im} p^*.$$

Доказ. Доказаћемо тврђење под (а) док се (б) аналогно доказује. Нека је $x \notin \operatorname{im} p^* = \ker \varphi$. Онда је $\varphi(x) \neq 0$, а такође је и $\varphi(x) \in \ker w_1$. Како је $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$, закључујемо да $\varphi(x) \notin \ker i^*$, па је

$$\varphi\left(\widetilde{i}^*(x)\right) = i^*\left(\varphi(x)\right) \neq 0,$$

одакле добијамо $\widetilde{i}^*(x) \notin \ker \varphi = \operatorname{im} p^*$. □

Одређивање квадрата класе $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ за $k = 2^t-3, 2^t-2, 2^t-1$, своди се на примену леме 2.3.4. Из тог разлога ћемо анализирати језгра пресликавања $i^* : H^*(G_{n+1,k};\mathbb{Z}_2) \to H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$, као и $j^* : H^*(G_{n+1,k+1};\mathbb{Z}_2) \to H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$, па ће нам бити корисна и наредна лема.

Лема 2.3.5. *(а) За пресликавање $i^* : H^*(G_{n+1,k};\mathbb{Z}_2) \to H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ важи*

$$i^*\big(w_r(\gamma_{n+1,k})\big) = w_r(\gamma_{n,k}), \quad 1 \leqslant r \leqslant k.$$

(б) За пресликавање $j^* : H^*(G_{n+1,k+1};\mathbb{Z}_2) \to H^*(G_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ важи

$$j^*\big(w_r(\gamma_{n+1,k+1})\big) = w_r(\gamma_{n,k}), \quad 1 \leqslant r \leqslant k,$$
$$j^*\big(w_{k+1}(\gamma_{n+1,k+1})\big) = w_{k+1}(\gamma_{n,k}) = 0.$$

(в) За пресликавање $\widetilde{i}^* : H^*(\widetilde{G}_{n+1,k};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ важи

$$\widetilde{i}^*\big(w_r(\widetilde{\gamma}_{n+1,k})\big) = w_r(\widetilde{\gamma}_{n,k}), \quad 2 \leqslant r \leqslant k.$$

(г) За пресликавање $\widetilde{j}^*: H^*(\widetilde{G}_{n+1,k+1};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z}_2)$ *важи*

$$\widetilde{j}^*\big(w_r(\widetilde{\gamma}_{n+1,k+1})\big) = w_r(\widetilde{\gamma}_{n,k}), \quad 2 \leqslant r \leqslant k,$$
$$\widetilde{j}^*\big(w_{k+1}(\widetilde{\gamma}_{n+1,k+1})\big) = w_{k+1}(\widetilde{\gamma}_{n,k}) = 0.$$

Доказ. Сва четири тврђења се једноставно доказују када приметимо да инклузије $i, j, \widetilde{i}$ и $\widetilde{j}$ индукују пресликавања између канонских раслојења над (оријентисаним) Грасманијанима. Након тога, само применимо особину природности Штифел–Витнијевих класа. $\square$

Најпре ћемо се фокусирати на случај $n = 2^t - 1$. У теореми 2.3.2 смо видели да је кохомологија Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2^t-1,3}$ генерисана Штифел–Витнијевим класама $\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3$ као и једном нерастављивом класом $\widetilde{a}_{2^t-4}$, тј. класом која се не може представити као полином над класама стриктно мање кохомолошке димензије. Ова нерастављива класа је јединствена до на додавање сабирка из $\operatorname{im} p^*$. Наиме, уколико је $\widetilde{a}_{2^t-4}$ једна нерастављива класа, онда је и $\widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{w}$ такође нерастављива за свако $\widetilde{w} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^*$. Ово значи да за нерастављиву класу $\widetilde{a}_{2^t-4}$ из теореме 2.3.2 можемо одабрати било коју класу из $H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*$. Нека је $\widetilde{a}_{2^t-1} \in H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа из теореме 2.3.6 и $\widetilde{i}: \widetilde{G}_{2^t-1,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{2^t,3}$ раније дефинисано утапање. Показаћемо да је $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}) \in H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*$. Како је $2^t - 1$ непаран, све класе у $H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ биће дељиве са $\widetilde{w}_3$, па специјално постојаће неко $\sigma \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ такво да је $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}) = \widetilde{w}_3\sigma$. Када покажемо да $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}) \notin \operatorname{im} p^*$, добићемо и $\sigma \notin \operatorname{im} p^*$, па ћемо коначно моћи да направимо избор аномаличне класе $\widetilde{a}_{2^t-4} := \sigma$ са особином

$$\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}) = \widetilde{w}_3\widetilde{a}_{2^t-4}. \tag{2.15}$$

Остаје још да докажемо да $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}) \notin \operatorname{im} p^*$, а то добијамо применом леме 2.3.4 и наредне пропозиције.

Пропозиција 2.3.3. *Нека је* $H^{2^t-1}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_1} H^{2^t}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ *множење Штифел–Витнијевом класом* w_1 *и* $i^*: H^{2^t-1}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-1}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ *хомоморфизам индукован утапањем* $i: G_{2^t-1,3} \hookrightarrow G_{2^t,3}$. *Тада је* $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$.

Доказ. Нека је $f \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]$ хомоген полином. Са $[f]$ ћемо означити кохомолошку класу која одговара полиному f при изоморфизму (1.2). Нека је $[f] \in \ker w_1 \cap \ker i^*$. Из услова $[f] \in \ker i^*$ и леме 2.3.5(а) имамо да је $[f] = i^*[f] = 0$ у $H^{2^t-1}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, па је

$$f = (\alpha w_1^2 + \beta w_2)\overline{w}_{2^t-3} + \gamma w_1\overline{w}_{2^t-2} + \delta\overline{w}_{2^t-1},$$

за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2$. Како је $\overline{w}_{2^t-2}, \overline{w}_{2^t-1} \in J_{2^t,3}$,

$$[f] = [(\alpha w_1^2 + \beta w_2)\overline{w}_{2^t-3} + \gamma w_1 \overline{w}_{2^t-2} + \delta \overline{w}_{2^t-1}] = [(\alpha w_1^2 + \beta w_2)\overline{w}_{2^t-3}],$$

па можемо одабрати $\gamma = \delta = 0$.

Са друге стране, из услова $[f] \in \ker w_1$ имамо да је $[w_1 f] = 0$ у $H^{2^t}(G_{2^t,3}; \mathbb{Z}_2)$, па је

$$w_1 f = (\lambda w_1^2 + \mu w_2)\overline{w}_{2^t-2} + \nu w_1 \overline{w}_{2^t-1} + \varepsilon \overline{w}_{2^t}, \tag{2.16}$$

за неке $\lambda, \mu, \nu, \varepsilon \in \mathbb{Z}_2$. На основу (1.4),

$$\overline{w}_{2^t} = w_1 \overline{w}_{2^t-1} + w_2 \overline{w}_{2^t-2} + w_3 \overline{w}_{2^t-3},$$

па када заменимо f са $(\alpha w_1^2 + \beta w_2)\overline{w}_{2^t-3}$, једнакост (2.16) постане

$$(\alpha w_1^3 + \beta w_1 w_2 + \varepsilon w_3)\overline{w}_{2^t-3} = (\lambda w_1^2 + (\mu + \varepsilon) w_2)\overline{w}_{2^t-2} + (\nu + \varepsilon) w_1 \overline{w}_{2^{t-1}}. \tag{2.17}$$

Даље, на основу (1.5) у полиному $\overline{w}_{2^t-2}$ се сабирак $w_2^{2^{t-1}-1}$ појављује с коефицијентом 1, а очигледно је да је $(\mu+\varepsilon)w_2\overline{w}_{2^t-2}$ једини сабирак у (2.17) који садржи $w_2^{2^{t-1}}$. Дакле, $\mu + \varepsilon = 0$, тј. $\mu = \varepsilon$. Једнакост (2.17) сада постаје

$$(\alpha w_1^3 + \beta w_1 w_2 + \mu w_3)\overline{w}_{2^t-3} = \lambda w_1^2 \overline{w}_{2^t-2} + (\nu + \mu) w_1 \overline{w}_{2^t-1}. \tag{2.18}$$

На сличан начин можемо показати да је $\alpha = \beta = 0$. Да бисмо одредили α уочимо моном $w_1^4 w_2^{2^{t-1}-2}$ и искористимо (1.5) да одредимо коефицијенте уз овај моном у сваком од сабирака у (2.18). Ови коефицијенти су наведени у табели 2.3. При-

сабирак	a	b	c	$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}$
$\alpha w_1^3 \overline{w}_{2^t-3}$	1	$2^{t-1}-2$	0	1
$\beta w_1 w_2 \overline{w}_{2^t-3}$	3	$2^{t-1}-3$	0	0
$\mu w_3 \overline{w}_{2^t-3}$	-	-	-	-
$\lambda w_1^2 \overline{w}_{2^t-2}$	2	$2^{t-1}-2$	0	0
$(\nu+\mu) w_1 \overline{w}_{2^{t-1}}$	3	$2^{t-1}-2$	0	0

Табела 2.3: Коефицијенти уз $w_1^4 w_2^{2^{t-1}-2}$ у (2.18)

мећујемо да је $\alpha w_1^3 \overline{w}_{2^t-3}$ једини сабирак који садржи $w_1^4 w_2^{2^{t-1}-2}$, па закључујемо да је $\alpha = 0$.

Вредност β можемо одредити истим методом. Посматрајмо моном $w_1^3 w_2^{2^{t-1}-3} w_3$. Коефицијенти уз $w_1^3 w_2^{2^{t-1}-3} w_3$ су наведени у табели 2.4, па можемо закључити да је $\beta = 0$.

сабирак	a	b	c	$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}$
$\alpha w_1^3 \overline{w}_{2^t-3}$	0	$2^{t-1}-3$	1	0
$\beta w_1 w_2 \overline{w}_{2^t-3}$	2	$2^{t-1}-4$	1	1
$\mu w_3 \overline{w}_{2^t-3}$	3	$2^{t-1}-3$	0	0
$\lambda w_1^2 \overline{w}_{2^t-2}$	1	$2^{t-1}-3$	1	0
$(\nu+\mu) w_1 \overline{w}_{2^t-1}$	2	$2^{t-1}-3$	1	0

Табела 2.4: Коефицијенти уз $w_1^3 w_2^{2^{t-1}-3} w_3$ у (2.18)

Коначно, добили смо да је $[f] = [(\alpha w_1^2 + \beta w_2)\overline{w}_{2^t-3}] = 0$ у $H^{2^t-1}(G_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$, а како је $[f]$ био произвољан елемент из $\ker w_1 \cap \ker i^*$, добијамо $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$. $\square$

Дакле, пропозиција 2.3.3 нам омогућава да одаберемо нерастављиву класу $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ са својством (2.15).

На основу пропозиције 1.1.1 је слика од $p^* : H^*(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ изоморфна

$$\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{J_{2^t-1,3}},$$

где је $J_{2^t-1,3} = (g_{2^t-3}, g_{2^t-2}, g_{2^t-1})$. Из [17, теорема 2.1] следи $g_{2^t-3} = 0$, па из (2.5) видимо да је $J_{2^t-1,3} = J_{2^t,3}$. Ово нам омогућава да искористимо Гребнерову базу из теореме 2.3.4. Слично као и у случају $n = 2^t$, и овде можемо Гребнерову базу идеала $J_{2^t-1,3}$ проширити до Гребнерове базе идеала $J = \big(g_{n-2}, g_{n-1}, g_n, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\big)$ из теореме 2.3.2(б). Наиме, важи следећа теорема.

Теорема 2.3.7. *Скуп $\{f_0, f_1, \ldots, f_{t-1}, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\}$ је Гребнерова база идеала J у односу на лексикографски поредак при коме је $a_{2^t-4} \succ w_2 \succ w_3$.*

На исти начин као и у случају $n = 2^t$, на основу теореме 2.3.7 и пропозиције 1.3.1 добијамо наредну последицу.

Последица 2.3.2. *Скуп кохомолошких класа*

$$B = \left\{ \widetilde{a}_{2^t-4}^{r} \widetilde{w}_2^{b} \widetilde{w}_3^{c} \mid r < 2,\ (\forall i \in \{0,1,\dots,t-1\})\ b < 2^{t-1} - 2^i \ \vee\ c < 2^i - 1 \right\}$$

је адитивна база кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$.

Пример 2.3.3. *У случају* $t = 3$, *адитивна база од* $H^*(\widetilde{G}_{7,3};\mathbb{Z}_2)$ *је*

$$B = \{1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2, \widetilde{a}_4, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\}.$$

Пример 2.3.4. *У случају* $t = 4$, *адитивна база од* $H^*(\widetilde{G}_{15,3};\mathbb{Z}_2)$ *је*

$$\begin{aligned} B = \big\{ & 1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^4, \widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^5, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^4, \widetilde{w}_2^3 \\ & \widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^6, \widetilde{a}_{12}, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3^5, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^5, \\ & \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3^6, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^4, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3^3, \\ & \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^3, \\ & \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^3, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^4, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^5\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^4, \\ & \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^5, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^6, \widetilde{a}_{12}\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3^6 \big\}. \end{aligned}$$

На исти начин као пропозиција 2.3.2, доказује се и следећа пропозиција.

Пропозиција 2.3.4. *(а) Ако је* $j < 2^t - 4$, *онда је* $H^j(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \subset \operatorname{im} p^*$.

(б) Ако је $j > 2 \cdot 2^t - 8$, *онда је* $H^j(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^* = 0$.

Приметимо да је $\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}$ једини елемент у $B \cap \operatorname{im} p^*$ степена $2 \cdot 2^t - 8$ (видети [15, стр. 387]). Такође, на основу [9, последица 4.12] знамо да је $\widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$, па је

$$\widetilde{w}_2^{2^t-4} = \widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \neq 0 \quad \text{у } H^{2^{t+1}-8}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2). \tag{2.19}$$

Слично, једини базни елемент у највишој кохомолошкој групи $H^{3\cdot 2^t-12}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ је $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2}$, па добијамо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} = \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2} \neq 0 \quad \text{у } H^{3\cdot 2^t-12}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2. \tag{2.20}$$

Сада желимо да одредимо чему је једнак $\widetilde{a}_{2^t-4}^2$. Запишимо ову класу преко елемената адитивне базе B из последице 2.3.2. Како је $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 \in H^{2\cdot 2^t-8}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, потребни су нам базни елементи у димензији $2\cdot 2^t - 8$. Из (2.19) имамо да је $\widetilde{w}_2^{2^t-4}$ једини базни елемент из $\operatorname{im} p^*$. Поред њега, у бази су и сви елементи $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k}$ за свако

$k \geqslant 0$ такво да је $2^{t-1} - 2 - 3k \geqslant 0$, тј. $k \leqslant (2^{t-1} - 2)/3$. Заиста, $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k} \in B$ за свако такво k јер ако би било $2^{t-1} - 2 - 3k \geqslant 2^{t-1} - 2^i$ и $2k \geqslant 2^i - 1$ за неко $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$, онда бисмо добили $2^i \geqslant 3k + 2$ и $2^i \leqslant 2k + 1$, тј. $k \leqslant -1$, што је немогуће. Коначно,

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \gamma\widetilde{w}_2^{2^t-4} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3} \right\rfloor} \lambda_k \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k}, \tag{2.21}$$

за неке једнозначно одређене коефицијенте $\gamma, \lambda_0, \lambda_1, \ldots \in \mathbb{Z}_2$. Прво ћемо у наредној пропозицији изразити све коефицијенте λ_k, $k \geqslant 1$, преко коефицијента λ_0.

Пропозиција 2.3.5. *Ако су λ_k, $0 \leqslant k \leqslant \lfloor (2^{t-1} - 2)/3 \rfloor$, коефицијенти из једначине (2.21), онда*

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3} \right\rfloor} \lambda_k \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k} = \lambda_0 \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4},$$

где је $\widetilde{g}_{2^t-4}$ кохомолошка класа која одговара косету полинома g_{2^t-4} при изоморфизму из пропозиције 1.1.1.

Доказ. На основу теореме 2.3.6 имамо да је $\widetilde{a}_{2^t-1}^2 = 0$ у $H^{2\cdot 2^t-2}(\widetilde{G}_{2^t,3}; \mathbb{Z}_2)$, а аномаличну класу $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ смо одабрали управо тако да важи (2.15). Дакле, имамо

$$\widetilde{w}_3^2\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = (\widetilde{w}_3\widetilde{a}_{2^t-4})^2 = \left(\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1})\right)^2 = \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) = 0,$$

па кад помножимо (2.21) са $\widetilde{w}_3^2$, добијамо

$$0 = \widetilde{w}_3^2\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3} \right\rfloor} \lambda_k \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2} \tag{2.22}$$

(сабирак $\gamma\widetilde{w}_2^{2^t-4}\widetilde{w}_3^2 = 0$ је нестао на основу пропозиције 2.3.4(б)). Примећујемо да су у (2.22) све класе $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2}$ за $k \geqslant 1$ елементи базе B јер не постоји $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ такво да је $2^{t-1}-2-3k \geqslant 2^{t-1}-2^i$ и $2k+2 \geqslant 2^i-1$. Са друге стране, за $k = 0$, класа $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}\widetilde{w}_3^2$ није елемент базе, па желимо ову класу да представимо помоћу базних елемената. Приметимо да је моном $a_{2^t-4}w_2^{2^{t-1}-2}w_3^2$ дељив са $\mathrm{LM}(f_1) = w_2^{2^{t-1}-2}w_3$ (видети пропозицију 2.3.1), па по дефиницији полинома f_1 добијамо

$$f_1 = g_{2^t-1} = \sum_{2b+3c=2^t-1} \binom{b+c}{b} w_2^b w_3^c = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3} \right\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} w_2^{2^{t-1}-2-3k} w_3^{2k+1}. \tag{2.23}$$

Да бисмо добили последњу једнакост, приметимо да је c непарно, јер је $2b+3c = 2^t-1$, и онда заменимо c са $2k+1$. Како је одговарајућа кохомолошка класа $\widetilde{f}_1 = 0$ у $H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$,

$$0 = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1}$$
$$= \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}\widetilde{w}_3 + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+1}.$$

Множењем претходне једнакости са $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_3$ имамо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}\widetilde{w}_3^2 = \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2} \tag{2.24}$$

Заменом сабирка за $k=0$ у (2.22) са (2.24) добијамо

$$0 = \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \left(\lambda_k + \lambda_0\binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1}\right) \widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k+2}.$$

Све кохомолошке класе са десне стране једнакости (2.22) сада јесу базни елементи, па закључујемо да сви коефицијенти морају да буду једнаки 0. Дакле, $\lambda_k = \lambda_0\binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1}$ за свако k такво да је $0 \leqslant k \leqslant \lfloor(2^{t-1}-2)/3\rfloor$. Коначно, закључујемо да је

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \lambda_k\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k} = \lambda_0\widetilde{a}_{2^t-4} \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k}.$$

Остало је још да докажемо да је сума са десне стране једнакости изнад једнака управо $\widetilde{g}_{2^t-4}$.

Ако означимо

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1} w_2^{2^{t-1}-2-3k}w_3^{2k},$$

онда из (2.23) и (1.9) добијамо да у $\mathbb{Z}_2[w_2,w_3]$ важи следећа једнакост

$$w_3S = g_{2^t-1} = w_2g_{2^t-3} + w_3g_{2^t-4} = w_3g_{2^t-4}$$

(јер је $g_{2^t-3} = 0$). Када скратимо w_3, добијамо $S = g_{2^t-4}$. □

На основу претходне пропозиције, једнакост (2.21) сада постаје

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \lambda_0 \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \tag{2.25}$$

(за неко $\lambda_0, \gamma \in \mathbb{Z}_2$). Следећи корак ће бити одређивање коефицијента λ_0.

Пропозиција 2.3.6. *Нека је* $H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_1} H^{2^t-3}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ *множење Штифел–Витнијевом класом* w_1 *и* $j^* : H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-4}(G_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2)$ *хомоморфизам индукован утапањем* $j : G_{2^t-2,2} \hookrightarrow G_{2^t-1,3}$*. Тада* $\ker w_1 \cap \ker j^* = 0$.

Доказ. Као и у доказу пропозиције 2.3.3, нека је $f \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]$ полином такав да је одговарајућа кохомолошка класа $[f] \in H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ унутар $\ker w_1 \cap \ker j^*$. Желимо да покажемо да је $[f] = 0$ у $H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$.

На основу леме 2.3.5(б), $j^*[f] = [\rho(f)]$, где је $\rho : \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3] \to \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]$ редукција модуло w_3. Како је $j^*[f] = 0$, добијамо $[\rho(f)] = 0$, али у ствари ће важити и више. Наиме, $\rho(f) = 0$, јер је степен од $\rho(f)$ у $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2]$ једнак $2^t - 4$, а $H^*(G_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/(\overline{w}_{2^t-3}, \overline{w}_{2^t-2})$, па нема релација у димензији $2^t - 4$. Дакле, $f = w_3 h$, за неко $h \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]$.

Са друге стране, из услова $[f] \in \ker w_1$ имамо да је $[w_1 f] = 0$ у $H^{2^t-3}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, па како је $H^*(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]/(\overline{w}_{2^t-3}, \overline{w}_{2^t-2}, \overline{w}_{2^t-1})$, то је $w_1 f = \alpha \overline{w}_{2^t-3}$ за неко $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Дакле, добили смо

$$w_1 w_3 h = \alpha \overline{w}_{2^t-3}.$$

Ако би било $\alpha \neq 0$, онда би полином $\overline{w}_{2^t-3}$ био дељив са w_3. Из (1.5) видимо да се у $\overline{w}_{2^t-3}$ појављује сабирак $w_1^{2^t-3}$. Стога, $\alpha = 0$ и коначно $w_1 f = \alpha \overline{w}_{2^t-3} = 0$, па је и $f = 0$. $\square$

Слично као и раније, пропозицију 2.3.6 желимо да применимо у комбинацији са лемом 2.3.4(б). Наиме, како је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*$, то је

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*. \tag{2.26}$$

На основу теореме 2.2.2, имамо да је

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, a_{2^t-4}]}{\big(w_2^{2^{t-1}-1}, a_{2^t-4}^2 + w_2^{2^{t-1}-2} a_{2^t-4}\big)}. \tag{2.27}$$

Нека је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2)$ класа која одговара косету од a_{2^t-4} при изоморфизму (2.27). Тада из (2.26) добијамо

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) = \widetilde{a}_{2^t-4} + \mu \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}, \tag{2.28}$$

за неко $\mu \in \mathbb{Z}_2$.

Како је $\widetilde{w}_2^{2^t-4} = 0$ у $H^*(\widetilde{G}_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2)$, квадрирањем једнакости (2.26) добијамо

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}^2) = \widetilde{a}_{2^t-4}^2 \neq 0 \quad \text{ у } H^{2^{t+1}-8}(\widetilde{G}_{2^t-2,2};\mathbb{Z}_2). \tag{2.29}$$

Са друге стране, на основу (2.25) и леме 2.3.5(г) имамо

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}^2) = \lambda_0 \widetilde{j}^*(\widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4}) + \gamma \widetilde{w}_2^{2^t-4} = \lambda_0 \widetilde{j}^*(\widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4}),$$

па закључујемо да је $\lambda_0 = 1$ и самим тим

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma \widetilde{w}_2^{2^t-4}. \tag{2.30}$$

Овиме смо доказали наредну теорему.

Теорема 2.3.8. *Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2^t-1,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-4}]}{\left(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, a_{2^t-4}^2 + g_{2^t-4}a_{2^t-4} + \gamma w_2^{2^t-4}\right)},$$

за неко $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t-1,3}$, док косет од a_{2^t-4} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$.

Приметимо да из (2.29) следи да класа $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 \in H^{2\cdot 2^t-8}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ није тривијална. Са друге стране, још увек није познато да ли је класа $\widetilde{a}_{2^t-4}^3 \in H^{3\cdot 2^t-12}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ тривијална или не, као ни чему је једнак коефицијент $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, али може се показати да су ова два питања еквивалентна што ћемо и видети у пропозицији 2.3.7.

Најпре ћемо показати да је $\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}$ једини базни елемент у $\operatorname{im} p^* \cap H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ чији је квадрат различит од 0. Већ је из (2.19) познато да је $(\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2})^2 = \widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$, па је само потребно да се уверимо да је квадрат класе $\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k}$ тривијалан за свако $k > 0$.

Лема 2.3.6. *Нека је $k > 0$ и $2^t - 4 - 6k \geqslant 0$. Тада*

$$\widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k} = 0 \quad \text{ у } H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2).$$

Доказ. Тврђење ћемо доказати инверзном индукцијом по k. Ако је $k \geqslant 2^{t-3}$, тј. $4k \geqslant 2^{t-1}$, онда

$$\widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k} = \widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k-2^{t-1}+1}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-1} = \widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k-2^{t-1}+1}\widetilde{f}_{t-1} = 0$$

јер на основу пропозиције 2.3.1 $f_{t-1} \in J_{2^t,3} = J_{2^t-1,3}$, па је одговарајућа кохомолошка класа $\widetilde{f}_{t-1}$ тривијална.

Нека је сада $0 < k < 2^{t-3}$ и претпоставимо да је $\widetilde{w}_2^{2^t-4-6j}\widetilde{w}_3^{4j} = 0$ за свако целобројно $j > k$ (такво да је $2^t-4-6j \geqslant 0$). Тада постоји јединствен цео број $i \in \{2,\dots,t-2\}$ са својством $2^i \leqslant 4k \leqslant 2^{i+1}-4$. Приметимо да је тада

$$12k \leqslant 3\cdot 2^{i+1} - 12 = 2^{i+2} + 2^{i+1} - 12 \leqslant 2^t + 2^{i+1} - 12,$$

тј. $6k \leqslant 2^{t-1} + 2^i - 6$, одакле добијамо $2^t - 4 - 6k > 2^{t-1} - 2^i$. Дакле,

$$\widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k} = \widetilde{w}_2^{2^t-4-6k-2^{t-1}+2^i}\widetilde{w}_3^{4k-2^i+1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2^i}\widetilde{w}_3^{2^i-1}. \tag{2.31}$$

Са друге стране, на основу пропозиције 2.3.1 имамо

$$w_2^{2^{t-1}-2^i}w_3^{2^i-1} = \mathrm{LM}(f_i) = f_i + \sum_{\substack{2b+3c=2^t-3+2^i\\(b,c)\neq(2^{t-1}-2^i,2^i-1)}}\binom{b+c}{b}w_2^b w_3^c.$$

На основу теореме 2.3.7, за кохомолошку класу $\widetilde{f}_i$, која одговара полиному f_i важи $\widetilde{f}_i = 0$, па из (2.31) добијамо

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k} &= \widetilde{w}_2^{2^{t-1}+2^i-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k-2^i+1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2^i}\widetilde{w}_3^{2^i-1}\\
&= \widetilde{w}_2^{2^{t-1}+2^i-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k-2^i+1}\sum_{\substack{2b+3c=2^t-3+2^i\\(b,c)\neq(2^{t-1}-2^i,2^i-1)}}\binom{b+c}{b}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c\\
&= \sum_{\substack{2b+3c=2^t-3+2^i\\(b,c)\neq(2^{t-1}-2^i,2^i-1)}}\binom{b+c}{b}\widetilde{w}_2^{b+2^{t-1}+2^i-4-6k}\widetilde{w}_3^{c+4k-2^i+1}.
\end{aligned}$$

Да бисмо завршили индуктивни корак, довољно је да докажемо да за сабирак такав да је $\binom{b+c}{b} \equiv_2 1$ важи $c + 4k - 2^i + 1 = 4j$ за неко $j > k$.

Како је $\mathrm{LM}(f_i) = w_2^{2^{t-1}-2^i}w_3^{2^i-1}$, за нетривијалан сабирак у овој суми мора да важи $b < 2^{t-1} - 2^i$, па је $c > 2^i - 1$ (јер је $2b + 3c$ исто за све мономе у f_i). Одавде добијамо $c + 4k - 2^i + 1 > 4k$, па једино преостаје да докажемо да је $c + 4k - 2^i + 1$ дељиво са 4.

Како је $i \geqslant 2$ и $2b + 3c = 2^t - 3 + 2^i$, најпре можемо закључити да је c непарно, па је $c + 4k - 2^i + 1$ парно, што значи да још остаје да искључимо могућност да је $c + 4k - 2^i + 1 \equiv_4 2$, тј. $c \equiv_4 1$. Ако би било $c \equiv_4 1$ и $2b + 3c = 2^t - 3 + 2^i$, онда бисмо добили $2b \equiv_4 2$, па би b морало бити непарно, што је у контрадикцији са чињеницом да је $\binom{b+c}{b} \equiv_2 1$. □

Из (1.10) видимо да се у g_{2^t-4} као сабирак појављује $w_2^{2^{t-1}-2}$, а поред њега сви остали сабирци су облика $w_2^{2^{t-1}-2-3k}w_3^{2k}$ за неко $k>0$. Стога, када применимо претходну лему добијамо да је

$$\widetilde{g}_{2^t-4}^2 = \widetilde{w}_2^{2^t-4}. \tag{2.32}$$

Нерастављив елемент $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ смо одабрали тако да важи (2.15), али сетимо се да је овај нерастављив елемент јединствен до на додавање класе из $\operatorname{im} p^*$. Уколико је $\widetilde{a}_{2^t-4}$ нерастављив, онда је и $\widetilde{a}_{2^t-4}+\widetilde{w}$ такође нерастављив за било које $\widetilde{w} \in \operatorname{im} p^* \cap H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$. Приметимо да без обзира који нерастављив елемент одабрали, једнакост (2.30) и даље важи

$$(\widetilde{a}_{2^t-4}+\widetilde{w})^2 = \widetilde{a}_{2^t-4}^2+\widetilde{w}^2 = \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4}+\gamma\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-4}+\widetilde{w}^2 = \widetilde{g}_{2^t-4}(\widetilde{a}_{2^t-4}+\widetilde{w})+\gamma\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-4},$$

где смо у последњој једнакости искористили чињеницу да је $\widetilde{w}^2=\widetilde{w}\widetilde{g}_{2^t-4}$. Заиста, ако представимо $\widetilde{w}$ преко елемената базе B из последице 2.3.2, имамо

$$\widetilde{w} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3}\right\rfloor} \alpha_k \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k},$$

за неке $\alpha_k \in \mathbb{Z}_2$. Са једне стране је

$$\widetilde{w}^2 = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3}\right\rfloor} \alpha_k \widetilde{w}_2^{2^t-4-6k}\widetilde{w}_3^{4k} = \alpha_0\widetilde{w}_2^{2^t-4} \tag{2.33}$$

јер су сви сем нултог сабирка тривијални на основу леме 2.3.6. Са друге стране, у доказу пропозиције 2.3.5 смо имали

$$\widetilde{g}_{2^t-4} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-1}-2}{3}\right\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{2^{t-2}-1}{3}\right\rfloor} \binom{2^{t-1}-1-2j}{4j+1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-6j}\widetilde{w}_3^{4j},$$

јер је $\binom{2^{t-1}-1-k}{2k+1}=0$ за непарне вредности k. Како је $\widetilde{w}_3\widetilde{g}_{2^t-4}=\widetilde{g}_{2^t-1}=0$, то је

$$
\begin{aligned}
\widetilde{w}\widetilde{g}_{2^t-4} &= \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{2^{t-1}-2}{3}\right\rfloor} \alpha_k \widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-3k}\widetilde{w}_3^{2k}\right)\widetilde{g}_{2^t-4} \\
&= \alpha_0\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}\widetilde{g}_{2^t-4} \\
&= \alpha_0\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{2^{t-2}-1}{3}\right\rfloor}\binom{2^{t-1}-1-2j}{4j+1}\widetilde{w}_2^{2^{t-1}-2-6j}\widetilde{w}_3^{4j} \\
&= \alpha_0\widetilde{w}_2^{2^t-4},
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

где смо у последњој једнакости још једном искористили лему 2.3.6. Коначно, из (2.33) и (2.34) видимо да је $\widetilde{w}^2 = \widetilde{w}\widetilde{g}_{2^t-4}$.

Пропозиција 2.3.7. *Нека је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа и коефицијент $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ из теореме 2.3.8. Тада*

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^3 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = 0.$$

Доказ. Из (2.30) и (2.32) имамо

$$
\begin{aligned}
\widetilde{a}_{2^t-4}^3 &= \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4}^2 + \gamma\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} \\
&= \widetilde{g}_{2^t-4}^2\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma\widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} + \gamma\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} \\
&= \widetilde{g}_{2^t-4}^2\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} \\
&= (1+\gamma)\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4},
\end{aligned}
$$

јер је $\widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} \in H^{3\cdot 2^t-12}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)\cap \operatorname{im} p^* = 0$ на основу пропозиције 2.3.4. Са друге стране, из (2.20) знамо да је $\widetilde{a}_{2^t-4}\widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$ у $H^{3\cdot 2^t-12}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, чиме је твр ђење доказано. □

2.3.3 Случајеви $n = 2^t-2, 2^t-3$

У циљу одређивања квадрата нерастављиве класе $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}_2)$ за $n = 2^t-2, 2^t-3$, користићемо сличан метод као и у случају $n = 2^t-1$. Наиме, показаћемо да се нерастављиве класе могу одабрати тако да се сликају једна у другу при хомоморфизму индукованом утапањем $\widetilde{i} : \widetilde{G}_{2^t-2,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{2^t-1,3}$, односно $\widetilde{i} : \widetilde{G}_{2^t-3,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{2^t-2,3}$. Прецизније, уколико је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)\setminus \operatorname{im} p^*$ нерастављива класа, показаћемо да је $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*$, тј. и $\widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4})$ је нерастављива, па ћемо направити одабир нерастављиве класе

$$\widetilde{a}_{2^t-4} := \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2). \tag{2.35}$$

Да бисмо доказали да је $\widetilde{i}(\widetilde{a}_{2^t-4}) \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^*$, на основу леме 2.3.4(а) довољно је да докажемо следећу пропозицију.

Пропозиција 2.3.8. *Нека је* $H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_1} H^{2^t-3}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$ *множење Штифел–Витнијевом класом* w_1 *и* $i^* : H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-4}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ *хомоморфизам индукован утапањем* $i : G_{2^t-2,3} \hookrightarrow G_{2^t-1,3}$. *Тада* $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$.

Доказ. Идеја доказа је иста као и у пропозицијама 2.3.3 и 2.3.6. Нека је $f \in \mathbb{Z}_2[w_1,w_2,w_3]$ полином такав да је $[f] \in \ker w_1 \cap \ker i^*$. На основу леме 2.3.5(а), имамо да је $[f] = i^*[f] = 0$ у $H^{2^t-4}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$, па је $f = \alpha \overline{w}_{2^t-4}$ за неко $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Са друге стране, како је $[w_1 f] = 0$ у $H^{2^t-3}(G_{2^t-1,3};\mathbb{Z}_2)$, имамо $w_1 f = \beta \overline{w}_{2^t-3}$ за неко $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Сада добијамо

$$\alpha w_1 \overline{w}_{2^t-4} = \beta \overline{w}_{2^t-3}. \tag{2.36}$$

Ако би било $\alpha \neq 0$, онда би се на основу (1.5) са леве стране једнакости (2.36) појавио сабирак $w_1^3 w_2^{2^{t-1}-3}$, али поново из (1.5) можемо видети да је коефицијент уз сабирак $w_1^3 w_2^{2^{t-1}-3}$ у $\overline{w}_{2^t-3}$ једнак $\binom{2^{t-1}}{3} = 0$. Стога, $\alpha = 0$, па је $f = \alpha \overline{w}_{2^t-4} = 0$. □

За одређивање квадрата класе $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ биће нам потребна и следећа лема.

Лема 2.3.7. *За* $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ *важи* $\widetilde{w}_2^{2^t-4} = 0$.

Доказ. Претпоставимо супротно да је $\widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$. Како је $\dim \widetilde{G}_{2^t-2,3} = 3\cdot 2^t - 15$, то на основу Поенкареове дуалности постоји класа $\sigma \in H^{2^t-7}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ таква да је $\sigma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$ у $H^{3\cdot 2^t-15}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$. Приметимо да је $2^t-7 < 2^t-4$, па је $\sigma \in \operatorname{im} p^*$ (јер је прва аномална класа у $H^*(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ у димензији 2^t-4). Како је $\sigma \in \operatorname{im} p^*$, то је и $\sigma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \in \operatorname{im} p^*$. На исти начин као у претходна два случаја може се показати да је ово у контрадикцији са $\sigma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$. Докажимо ипак то сад на мало другачији начин.

Посматрајмо Гисинов низ придружен дволисном наткривању $p : \widetilde{G}_{2^t-2} \to G_{2^t-2}$.

$$\cdots \longrightarrow H^{3\cdot 2^t-15}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^{3\cdot 2^t-15}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\varphi} H^{3\cdot 2^t-15}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Како је $H^{3\cdot 2^t-15}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \cong H^{3\cdot 2^t-15}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, то је пресликавање φ изоморфизам, па је $p^* = 0$ што је у контрадикцији са чињеницом да је $\sigma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \in \operatorname{im} p^*$ и $\sigma \widetilde{w}_2^{2^t-4} \neq 0$. □

Коначно можемо да одредимо квадрат нерастављиве класе. Нека је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа таква да важи (2.35) (овакав одабир можемо направити на основу леме 2.3.4(а) и пропозиције 2.3.8). Сада на основу теореме (2.3.8) имамо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}^2) = \widetilde{i}^*(\widetilde{g}_{2^t-4}) \cdot \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) + \gamma\widetilde{i}^*(\widetilde{w}_2^{2^t-4}) = \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma\widetilde{w}_2^{2^t-4} = 0. \tag{2.37}$$

У последњој једнакости $\widetilde{w}_2^{2^t-4} = 0$ на основу леме 2.3.7, док је $\widetilde{g}_{2^t-4} = 0$ на основу пропозиције 1.1.1. Сада из релације (2.37) и теореме 2.3.2(б) добијамо следећу теорему.

Теорема 2.3.9. *Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2^t-2,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3,a_{2^t-4}]}{\left(g_{2^t-4}, g_{2^t-2}, a_{2^t-4}^2\right)} \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2,w_3]}{(g_{2^t-4}, g_{2^t-2})} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-4}),$$

при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t-2,3}$, док косет од a_{2^t-4} одговара нерастављивој класи $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$.

Квадрат класе $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2)$ одређујемо на сличан начин. Нерастављиву класу $\widetilde{a}_{2^t-4}$ бирамо на следећи начин:

$$\widetilde{a}_{2^t-4} := \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2), \tag{2.38}$$

где је $\widetilde{i} : \widetilde{G}_{2^t-3,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{2^t-2,3}$ утапање. Ово смемо урадити на основу леме 2.3.4 и следеће пропозиције.

Пропозиција 2.3.9. *Нека је $H^{2^t-4}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w_1} H^{2^t-3}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ множење Штифел–Витнијевом класом w_1 и хомоморфизам $i^* : H^{2^t-4}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-4}(G_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2)$ индукован утапањем $i : G_{2^t-3,3} \hookrightarrow G_{2^t-2,3}$. Тада $\ker w_1 \cap \ker i^* = 0$.*

Доказ. Идеја доказа је иста као и у претходним тврђењима овог типа.

Нека је $f \in \mathbb{Z}_2[w_1,w_2,w_3]$ полином такав да важи $[f] \in \ker w_1 \cap \ker i^*$. Са једне стране имамо $[f] = i^*[f] = 0$ у $H^{2^t-4}(G_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2)$, па је $f = \alpha w_1\overline{w}_{2^t-5} + \beta\overline{w}_{2^t-4}$ за неко $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_2$. Како је $\overline{w}_{2^t-4} \in J_{2^t-2,3}$, закључујемо да у $H^{2^t-4}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$ онда важи

$$[f] = [\alpha w_1\overline{w}_{2^t-5} + \beta\overline{w}_{2^t-4}] = [\alpha w_1\overline{w}_{2^t-5}],$$

па можемо одабрати $\beta = 0$. Желимо да докажемо да је и $\alpha = 0$.

Из $[f] \in \ker w_1$ имамо да је $[w_1 f] = 0$ у $H^{2^t-3}(G_{2^t-2,3};\mathbb{Z}_2)$, па је $w_1 f = \lambda w_1 \overline{w}_{2^t-4} + \mu \overline{w}_{2^t-3}$, за неко $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$. Одавде добијамо

$$\alpha w_1^2 \overline{w}_{2^t-5} = \lambda w_1 \overline{w}_{2^t-4} + \mu \overline{w}_{2^t-3}. \tag{2.39}$$

Уочимо моном $w_1^{2^t-5} w_2$. Желимо да видимо шта су коефицијенти уз овај моном са леве и десне стране знака једнакости у (2.39). Коефицијенте уз $w_1^{2^t-5} w_2$ у $\overline{w}_j$ рачунамо помоћу формуле (1.5) и у табели 2.5 можемо видети ове коефицијенте у сваком сабирку једначине (2.39).

сабирак	a	b	c	$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}$
$\alpha w_1^2 \overline{w}_{2^t-5}$	2^t-7	1	0	0
$\lambda w_1 \overline{w}_{2^t-4}$	2^t-6	1	0	1
$\mu \overline{w}_{2^t-3}$	2^t-5	1	0	0

Табела 2.5: Коефицијенти уз $w_1^{2^t-5} w_2$ у (2.39)

Анализом табеле закључујемо да је $\lambda = 0$. Једначина (2.39) сада постаје

$$\alpha w_1^2 \overline{w}_{2^t-5} = \mu \overline{w}_{2^t-3}. \tag{2.40}$$

Коефицијент уз $w_1 w_2^{2^{t-1}-2}$ са десне стране једнакости (2.40) је једнак

$$\mu \binom{2^{t-1}-1}{1} \binom{2^{t-1}-2}{0} = \mu,$$

док је са леве стране једнак 0, па мора бити $\mu = 0$, одакле је и $\alpha = 0$, а самим тим и $f = 0$. $\square$

Коначно, из релације (2.38) и теореме 2.3.9 имамо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{i}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}^2) = 0 \in H^*(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2),$$

чиме смо (имајући у виду теорему 2.3.2(б)) доказали наредну теорему.

Теорема 2.3.10. *Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2^t-3,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-4}]}{\left(g_{2^t-5}, g_{2^t-4}, a_{2^t-4}^2\right)} \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-5}, g_{2^t-4})} \otimes_{\mathbb{Z}_2} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-4}),$$

при чему косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t-3,3}$, док косет од a_{2^t-4} одговара нераставља̂ивој класи $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-3,3};\mathbb{Z}_2)$.

2.3.4 Случај $2^{t-1} < n \leqslant 2^t - 4$

Када је $2^{t-1} < n \leqslant 2^t - 4$ ситуација је нешто другачија у односу на претходне случајеве. У овом случају поред Штифел–Витнијевих класа раслојења $\widetilde{\gamma}_{n,3}$, у кохомологији оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{n,3}$ имаћемо две аномаличне класе, за разлику од једне аномаличне коју смо имали за $n \in \{2^t-3, 2^t-2, 2^t-1, 2^t\}$, што видимо у теореми 2.3.1. Мултипликативну структуру за $2^{t-1} < n \leqslant 2^t - 4$ су одредили Мацангос и Вент у [22] користећи Козулове комплексе.

За $k = 3$, рекурентна формула (1.9) је облика

$$g_j = w_2 g_{j-2} + w_3 g_{j-3}, \quad j \geqslant 1,$$

док је (1.10) облика

$$g_j = \sum_{2b+3c=j} \binom{b+c}{b} w_2^b w_3^c, \quad j \geqslant 0.$$

Дефинишимо још један скуп полинома. Нека је $r_j \in \mathbb{Z}_2[w_2, w_3]$ полином степена $2j$ задат следећом рекурентном формулом

$$r_j = w_2 r_{j-1} + w_3^2 r_{j-3}, \quad j \geqslant 1,$$

$r_0 = 1$ и $r_j = 0$ за $j < 0$. Из рекурентне формуле, полиноми r_j могу се и експлицитно изразити

$$r_j = \sum_{2b+6c=2j} \binom{b+c}{b} w_2^b w_3^{2c}, \quad j \geqslant 0.$$

Главни резултат доказан у [22] је наредна теорема.

Теорема 2.3.11. *Нека је $2^{t-1} < n \leqslant 2^t - 4$. Тада имамо изоморфизам алгебри*

$$H^*(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{3n-2^t-1}, a_{2^t-4}]}{\mathcal{I}},$$

где је идеал $\mathcal{I}$ генерисан полиномима

$$g_{n-2}, \quad g_{n-1}, \quad g_n, \quad g_{2^t-3-n} a_{3n-2^t-1} + r_{n-2^{t-1}} a_{2^t-4}, \quad g_{2^t-2-n} a_{3n-2^t-1} + w_3 r_{n-2^{t-1}-1} a_{2^t-4},$$
$$w_3 g_{2^t-4-n} a_{3n-2^t-1} + r_{n-2^{t-1}+1} a_{2^t-4}, \quad a_{3n-2^t-1}^2, \quad a_{3n-2^t-1} a_{2^t-4}, \quad a_{2^t-4}^2.$$

При горњем изоморфизму, косети од w_2 и w_3 одговарају Штифел–Витнијевим класама $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$ раслојења $\widetilde{\gamma}_{n,3}$, док косети од a_{3n-2^t-1} и a_{2^t-4} одговарају аномаличним класама $\widetilde{a}_{3n-2^t-1} \in H^{3n-2^t-1}(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$, редом.

2.4 Случај $k = 4$

Ако је $p : \widetilde{G}_{2^t,2} \to G_{2^t,2}$ дволисно наткривање, на основу теореме 2.2.2 имамо да је

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,2};\mathbb{Z}_2) \cong \operatorname{im} p^* \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-2}).$$

Слично, ако је $p : \widetilde{G}_{2^t,3} \to G_{2^t,3}$ дволисно наткривање, онда је на основу теореме 2.3.6

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \cong \operatorname{im} p^* \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}_2}(a_{2^t-1}).$$

Очекивало би се да ће и за $k = 4$ кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ моћи да се представи као тензорски производ слике од p^* (где је $p : \widetilde{G}_{2^t,4} \to G_{2^t,4}$ дволисно наткривање) и спољне алгебре над једном аномаличном класом, али у теореми 2.4.3 и пропозицији 2.4.4 показаћемо да то није случај. Наиме, поред Штифел–Витнијевих класа заиста ћемо имати само још једну нерастављиву класу у димензији $2^t - 4$, али квадрат ове класе неће бити тривијалан. Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости се доста усложњава како k расте, што нам случај $k = 4$ илуструје. Такође, у до сада анализираним Грасманијанима појављивале су се по највише две аномаличне класе, али изгледа да то генерално неће бити случхај. У [22, одељак 9.1] аутори су одредили димензије аномаличних класа за $k = 5$ и $n \in \{10, \dots, 33\}$, као и за $k = 6$ и $n \in \{12, \dots, 21\}$. Испоставља се да број аномаличних класа расте и то, на први поглед, без неке правилности. Штавише, чак и у случају када је n степен двојке ситуација се усложњава иако би се на основу досадашњих резултата могло очекивати да ћемо бар у тој димензији имати само једну аномаличну класу. То ипак није случај, јер већ $\widetilde{G}_{16,6}$ има две аномаличне класе. Овај резултат можда и није толико изненађујућ, јер структура кохомолошке алгебре оријентисаног Грасманијана $\widetilde{G}_{n,k}$ свакако зависи и од k (могуће је да ће се ситуација мењати у зависности од тога колико је и k близу неког степена двојке), али како је до сад анализирано тек првих неколико вредности k, неке генералне правилности можемо само да нагађамо.

У теореми 2.4.3 успели смо да дамо опис кохомологије само за $n = 2^t$, мада и тај опис је делимичан. Сви докази које излажемо у овом одељку су из [6]. Слично као теорема 2.4.1, могла се доказати и теорема 2.3.1 (у доказу ове теореме у [1], Басу и Чакраборти су такође испитивали филтрацију коју нам Серов спектрални низ даје). Са друге стране, докази теорема 2.3.2 и 2.3.3 (дати у [1]) разликују се од доказа теореме 2.4.3. У [1], аутори су се бавили анализом Серовог спектралног низа за раслојења (2.2), док ће докази изложени у овом одељку бити нешто другачији и краћи, што нам омогућује примена теореме Лере–Хирша и теорије

Гребнерових база. Међутим, методи које смо применили за одређивање кохомологије од $\widetilde{G}_{2^t,4}$ не би прошли у случају $k = 3$. Наиме, доказ пропозиције 2.4.2 заснива се на примени теореме Лере–Хирша, а услови те теореме неће бити испуњени за све n када је $k = 3$. Надаље подразумевамо да је $t \geqslant 3$.

У уводу поглавља 2 видели смо два корисна раслојења, па погледајмо дијаграм (2.2) у случају $k = 3$ и $n = 2^t$.

$$\begin{tikzcd}
 & S^3 \arrow[d] & \\
S^{2^t-4} \arrow[r] & W_{3,1}^{2^t} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "sp"] & \widetilde{G}_{2^t,3} \\
 & \widetilde{G}_{2^t,4} &
\end{tikzcd}$$

Приметили смо да је хоризонтално раслојење из претходоног дијаграма управо сферно раслојење које одговара $\widetilde{\gamma}_{2^t,3}^{\perp}$, док је вертикално изоморфно сферном раслојењу придруженом $\widetilde{\gamma}_{2^t,4}$.

Да бисмо одредили кохомолошку алгебру $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, најпре ћемо помоћу раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t,3}^{\perp}$ одредити генераторе алгебре $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$, а затим и генераторе алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$. Након тога ћемо дати и опис мултипликативне структуре ове алгебре.

2.4.1 Генератори кохомолошке алгебре $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$

Друга страна Серовог спектралног низа придруженог раслојењу $S^{2^t-4} \xrightarrow{i} W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{2^t,3}$ садржана је у два реда, па је једини диференцијал који може бити нетривијалан d_{2^t-3}. Знамо да је овај диференцијал множење модуло 2 Ојлеровом класом раслојења $\widetilde{\gamma}_{2^t,3}^{\perp}$, тј. Штифел–Витнијевом класом $w_{2^t-3}(\widetilde{\gamma}_{2^t,3}^{\perp}) \in H^{2^t-3}(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$. Са друге стране, ова класа одговара косету класе g_{2^t-3} при изоморфизму из пропозиције 1.1.1, а на основу [17, лема 2.3] је $g_{2^t-3} = 0$. Дакле, диференцијал d_{2^t-3} је тривијалан, па је

$$E_\infty = E_2 \cong H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \otimes H^*(S^{2^t-4};\mathbb{Z}_2). \tag{2.41}$$

Како спектрални низ конвергира ка кохомологији тоталног простора $W_{3,1}^{2^t}$, можемо одабрати класу $c_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ са својством $i^*(c_{2^t-4}) = s$, где је $s \in H^{2^t-4}(S^{2^t-4};\mathbb{Z}_2)$ генератор.

Даље, на основу теореме 2.3.6 и (2.41) видимо да је E_∞ као бистепенована алгебра генерисана са $\widetilde{w}_2 \otimes 1$, $\widetilde{w}_3 \otimes 1$, $\widetilde{a}_{2^t-1} \otimes 1$ и $1 \otimes s$. Дефинишимо

$$\mathrm{w}_2 := p_1^*(\widetilde{w}_2),\ \mathrm{w}_3 := p_1^*(\widetilde{w}_3) \ \text{ и } \ \mathrm{a}_{2^t-1} := p_1^*(\widetilde{a}_{2^t-1}). \tag{2.42}$$

Пропозиција 2.4.1. *Претходно дефинисане класе* $\mathrm{w}_2 \in H^2(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{w}_3 \in H^3(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$, $c_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ *и* $\mathrm{a}_{2^t-1} \in H^{2^t-1}(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ *генеришу алгебру* $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$.

Доказ. За произвољно $r \geqslant 0$ желимо да докажемо да су све класе у $H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ полиноми над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}$ и a_{2^t-1}. Како горе поменути спектрални низ конвергира ка $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$, то имамо филтрацију

$$H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) = F_0^r \supseteq F_1^r \supseteq \cdots \supseteq F_{r-1}^r \supseteq F_r^r \supseteq F_{r+1}^r = F_{r+2}^r = \cdots = 0,$$

такву да је $E_\infty^{p,r-p} \cong F_p^r/F_{p+1}^r$ за све $p \geqslant 0$.

Обрнутом индукцијом по $p \geqslant 0$ доказујемо да су све класе из F_p^r полиноми над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}$ и a_{2^t-1}. Тврђење је тривијално тачно за $p > r$. Претпоставимо да је $0 \leqslant p \leqslant r$, да су све класе из F_{p+1}^r полиноми над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}$ и a_{2^t-1} и докажимо да исто важи и за F_p^r.

Нека је $x \in F_p^r \setminus F_{p+1}^r$. Ако је $\overline{x} \in E_\infty^{p,r-p}$ елемент који одговара косету $x + F_{p+1}^r$ у количнику F_p^r/F_{p+1}^r, онда је, на основу дискусије која је претходила пропозицији, $\overline{x}$ полином над $\widetilde{w}_2 \otimes 1$, $\widetilde{w}_3 \otimes 1$, $\widetilde{a}_{2^t-1} \otimes 1$ и $1 \otimes s$, тј.

$$\overline{x} = f(\widetilde{w}_2 \otimes 1, \widetilde{w}_3 \otimes 1, 1 \otimes s, \widetilde{a}_{2^t-1} \otimes 1),$$

где је f неки полином четири неодређене над пољем $\mathbb{Z}_2$. Ово је једнакост у $E_\infty^{p,r-p}$, а при изоморфизму $E_\infty^{p,r-p} \cong F_p^r/F_{p+1}^r$ она одговара једнакости

$$x + F_{p+1}^r = f(\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}, \mathrm{a}_{2^t-1}) + F_{p+1}^r.$$

Сада је очигледно $x - f(\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}, \mathrm{a}_{2^t-1}) \in F_{p+1}^r$, па је на основу индукцијске хипотезе $x - f(\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}, \mathrm{a}_{2^t-1})$ полином над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}$ и a_{2^t-1}, одакле коначно закључујемо да је и x полином над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, c_{2^t-4}$ и a_{2^t-1}. □

Како је $\mathrm{a}_{2^t-1} = p_1^*(\widetilde{a}_{2^t-1})$, то је на основу теореме 2.3.6

$$\mathrm{a}_{2^t-1}^2 = p_1^*(\widetilde{a}_{2^t-1}^2) = 0. \tag{2.43}$$

2.4.2 Генератори кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$

Посматрајмо сферно раслојење $S^3 \to W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2^t,4}$.

Како су $\widetilde{G}_{2^t,4}$ и S^3 затворене повезане многострукости димензије $4\cdot 2^t-16$, односно 3, то је и $W_{3,1}^{2^t}$ затворена повезана многострукост димензије $2^{t+2}-13$, па можемо применити Поенкареову дуалност на $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$.

Серов спектрални низ раслојења $S^3 \to W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2^t,4}$ конвергира ка степенованој алгебри $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$. Прецизније, постоји стабилна филтрација $\{F_s^r\}_{r,s\geqslant 0}$ од $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$, тј.

$$H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) = F_0^r \supseteq F_1^r \supseteq \cdots \supseteq F_{r-1}^r \supseteq F_r^r \supseteq F_{r+1}^r = F_{r+2}^r = \cdots = 0 \text{ за свако } r,$$

тако да су индукована бистепенована алгебра $\bigoplus_{p,q\geqslant 0} F_p^{p+q}/F_{p+1}^{p+q}$ и бистепенована алгебра $E_\infty = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} E_\infty^{p,q}$ придружена овом спектралном низу изоморфне.

Како је спектрални низ садржан у нултој и трећој врсти, једини диференцијал који може бити нетривијалан је d_4, а знамо да се он своди на множење Ојлеровом класом раслојења $S^3 \to W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2^t,4}$. Приметили смо раније да је ово раслојење изоморфно сферном раслојењу придруженом $\widetilde{\gamma}_{2^t,4}$, па је d_4 множење са $w_4(\widetilde{\gamma}_{2^t,4}) = \widetilde{w}_4$.

На основу [23, теорема 5.9], композиција

$$H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \cong E_2^{r,0} \twoheadrightarrow E_3^{r,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{r+1}^{r,0} = E_\infty^{r,0} \cong F_r^r \subseteq H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) \tag{2.44}$$

јесте управо пресликавање $sp^* : H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \to H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$. Пошто је једини нетривијалан диференцијал d_4 множење са $\widetilde{w}_4$, можемо закључити да је

$$\ker sp^* = \widetilde{w}_4 H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2). \tag{2.45}$$

Ово значи да ће класа у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \cong H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)\otimes H^0(S^3;\mathbb{Z}_2) \cong E_2^{r,0}$ „преживети” до $E_\infty^{r,0}$ ако и само ако није дељива са $\widetilde{w}_4$. Имамо и да је $E_\infty^{r,3}=0$ за $r<2^t-4$ (видети слику 2.1 на стр. 55), што ће директно следити из наредне леме, па је

$$H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) = F_0^r = F_r^r \text{ за } r < 2^t-1. \tag{2.46}$$

Лема 2.4.1. *Множење са $\widetilde{w}_4$, $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\widetilde{w}_4} H^{r+4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, јесте мономорфизам за $r<2^t-4$.*

Доказ. У теореми 2.1.3 видели смо да је $\mathrm{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t,4}) = 2^t - 5$, па су све класе у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, за $r \leqslant 2^t - 5$, полиноми над Штифел–Витнијевим класама $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$ и $\widetilde{w}_4$. Са друге стране, на основу пропозиције 1.1.1 и чињенице да је $g_{2^t-3} = 0$ [17, лема 2.3] имамо

$$\operatorname{im} p^* \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t})}.$$

Да бисмо показали да је множење са $\widetilde{w}_4$ мономорфизам за $r < 2^t - 4$, одаберимо произвољно $x \in H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \setminus \{0\}$ и покажимо да је $\widetilde{w}_4 x \neq 0$. Довољно је да се уверимо да ниједан полином степена (кохомолошке димензије) мањег од 2^t из идеала $(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t})$ није дељив са w_4. Ово директно следи из чињенице да g_{2^t-2} и g_{2^t-1} нису дељиви са w_4. Заиста, из (1.10) видимо да се у g_{2^t-2} појављује сабирак $w_2^{2^{t-1}-1}$, док у g_{2^t-1} имамо сабирак $w_2^{2^{t-1}-2} w_3$. $\square$

Како је композиција (2.44) заправо пресликавање sp^*, за фиксирано $r \geqslant 0$ имамо да је слика од $sp^* : H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \to H^r(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ једнака F_r^r. Ако је класа $x \in H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ растављива, тј. ако се може представити као полином над класама строго мање димензије, онда се $sp^*(x)$ може представити као полином над класама из F_i^i, за $0 < i < r$. Стога, sp^* индукује епиморфизам

$$H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \Big/ D(H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)) \longrightarrow F_r^r \Big/ D(F_r^r), \tag{2.47}$$

где је $D(H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$ слика пресликавања

$$\bigoplus_{i=1}^{r-1} H^i(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \otimes H^{r-i}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile} H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$$

датог помоћу кохомолошког производа, док је $D(F_r^r)$ слика од

$$\bigoplus_{i=1}^{r-1} F_i^i \otimes F_{r-i}^{r-i} \xrightarrow{\smile} F_r^r.$$

Другим речима, косети у домену пресликавања (2.47) одговарају нерастављивим класама у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, а наредна лема нам омогућава да нерастављиве класе у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ детектујемо анализирајући филтрацију кохомолошке алгебре простора $W_{3,1}^{2^t}$.

Лема 2.4.2. *Епиморфизам (2.47) је изоморфизам за $r > 4$.*

Доказ. Нека је $x \in H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ такав да је $sp^*(x) \in D(F_r^r)$. Желимо да покажемо да је $x \in D(H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$, тј. да је x растављив. Из услова $sp^*(x) \in D(F_r^r)$ следи да $sp^*(x)$ можемо представити као $sp^*(x) = \sum_j a_j b_j$, где $a_j \in F_{i_j}^{i_j}$ и $b_j \in F_{r-i_j}^{r-i_j}$, за неко $0 < i_j < r$. Како је $sp^* : H^k(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \to F_k^k$ епиморфизам, то постоје класе $\alpha_j \in H^{i_j}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ и $\beta_j \in H^{r-i_j}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ такве да је $a_j = sp^*(\alpha_j)$ и $b_j = sp^*(\beta_j)$. Сада је

$$sp^*(x) = \sum_j sp^*(\alpha_j)sp^*(\beta_j) = sp^*\Bigg(\sum_j \alpha_j\beta_j\Bigg).$$

Другим речима, $sp^*(x) = sp^*(y)$ за неко $y \in D(H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$. Даље имамо $x - y \in \ker sp^* = \widetilde{w}_4 H^{r-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ (видети (2.45)). Коначно, постоји класа $z \in H^{r-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ таква да је $x = y + \widetilde{w}_4 z$ и $y + \widetilde{w}_4 z \in D(H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$ јер је $r - 4 > 0$. $\square$

На основу теореме 2.1.4 је $\operatorname{charrank}(\widetilde{\gamma}_{2^t,4}) = 2^t - 5$, па је најмање r такво да је $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^* \neq \emptyset$ једнако $2^t - 4$. Нека је

$$\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \setminus \operatorname{im} p^* \tag{2.48}$$

произвољна класа. Тада је $\widetilde{a}_{2^t-4}$ нерастављива, па је њен косет у

$$H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \Big/ D(H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$$

нетривијалан.

Теорема 2.4.1. *Штифел–Витнијеве класе $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$, $\widetilde{w}_4$, заједно са класом $\widetilde{a}_{2^t-4}$, генеришу алгебру $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$.*

Доказ. У случају $t = 3$, тврђење важи на основу [28, теорема 3.3].

Нека је сада $t \geqslant 4$. Показаћемо да су за $r \geqslant 0$ све класе у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ полиноми над $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$, $\widetilde{w}_4$ и $\widetilde{a}_{2^t-4}$.

Ако је $r < 2^t - 4$, онда је $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \subseteq \operatorname{im} p^*$, а на основу пропозиције 1.1.1 знамо да $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$ и $\widetilde{w}_4$ генеришу $\operatorname{im} p^*$.

Нека је $r = 2^t - 4$. Косет од $\widetilde{a}_{2^t-4}$ у $H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)/D(H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2))$ је нетривијалан и $D(H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)) \subseteq \operatorname{im} p^*$, па је довољно да покажемо да ће ово бити једини нетривијалан косет. Другим речима, показаћемо да је

$$H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2) \Big/ D(H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Како је $t \geqslant 4$, то је $2^t - 4 > 4$, па је на основу леме 2.4.2 довољно да покажемо да је

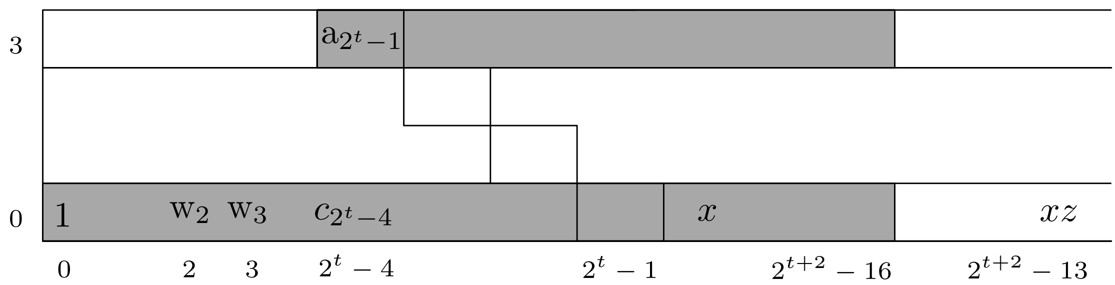
$$F_{2^t-4}^{2^t-4} \Big/ D(F_{2^t-4}^{2^t-4}) \cong \mathbb{Z}_2. \tag{2.49}$$

На основу пропозиције 2.4.1 и (2.46) имамо

$$\mathrm{w}_2 \in F_2^2,\ \mathrm{w}_3 \in F_3^3 \ \text{ и } \ c_{2^t-4} \in F_{2^t-4}^{2^t-4}, \tag{2.50}$$

и елементи у $D(F_{2^t-4}^{2^t-4})$ су полиноми над w_2 и w_3. Како је количник $F_{2^t-4}^{2^t-4}/D(F_{2^t-4}^{2^t-4})$ нетривијалан, на основу пропозиције 2.4.1 закључујемо да је косет од c_{2^t-4} нетривијалан, а то је и једини нетривијални косет, чиме смо доказали (2.49).

За $r > 2^t - 4$ желимо да покажемо да су све класе у $H^r(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ растављиве, што је на основу леме 2.4.2 еквивалентно услову да је $F_r^r = D(F_r^r)$. Нека је $x \in F_r^r$, $x \neq 0$. Довољно је да докажемо да је x полином над w_2, w_3 и c_{2^t-4}, па ће тврђење следити из (2.50) и чињенице да је филтрација стабилна (погледати и коментар након доказа).



Слика 2.1: E_∞ страна спектралног низа за $S^3 \to W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2^t,4}$

Претпоставимо супротно, да x не можемо да представимо као полином над w_2, w_3 и c_{2^t-4}. Тада на основу пропозиције 2.4.1 и (2.43) имамо $x = \mathrm{a}_{2^t-1}y$, где је y полином над w_2, w_3 и c_{2^t-4} (у запису класе x можемо да изоставимо мономе који не садрже a_{2^t-1} јер ће они припадати $D(F_r^r)$). На основу Поенкареове дуалности постоји класа $z \in H^{2^{t+2}-13-r}(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$ таква да је $xz \neq 0$. Како је $x = \mathrm{a}_{2^t-1}y$ и $\mathrm{a}_{2^t-1}^2 = 0$ на основу (2.43), класу z можемо одабрати тако да се у њеном запису не појављује a_{2^t-1}, тј. z је полином над $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3$ и c_{2^t-4}. Сада на основу (2.50) и стабилности филтрације имамо $z \in F_{2^{t+2}-13-r}^{2^{t+2}-13-r}$, па како је $x \in F_r^r$, добијамо

$$xz \in F_{2^{t+2}-13}^{2^{t+2}-13} \cong E_\infty^{2^{t+2}-13,0} = 0, \tag{2.51}$$

јер је димензија базног простора $\widetilde{G}_{2^t,4}$ једнака $2^{t+2}-16$ (видети слику 2.1). Коначно, (2.51) је у контрадикцији са чињеницом да је $xz \neq 0$. $\square$

У (2.45) смо видели да је $\ker sp^* = \widetilde{w}_4 H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, па из теореме 2.4.1 и пропозиције 2.4.1 добијамо

$$sp^*(\widetilde{w}_2) = \mathrm{w}_2 \ \text{ и } \ sp^*(\widetilde{w}_3) = \mathrm{w}_3. \tag{2.52}$$

Такође, $sp^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) = c_{2^t-4} + f(\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3)$ за неки полином f. Заиста, у супротном бисмо на основу пропозиције 2.4.1 и (2.52) добили $sp^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) = g(\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3) = sp^*(g(\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3))$ за неки полином g, одакле би следило да је $\widetilde{a}_{2^t-4} - g(\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3) \in \ker sp^* = \widetilde{w}_4 H^{2^t-8}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, што је немогуће јер $\widetilde{a}_{2^t-4} \notin \operatorname{im} p^*$.

Ако модификујемо $\widetilde{a}_{2^t-4}$ додавањем $f(\widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3)$, и даље имамо нерастављиву класу за коју сада важи

$$sp^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) = c_{2^t-4}, \tag{2.53}$$

као и (2.48) и теорема 2.4.1.

Напомена 2.4.1. *Класа $\widetilde{a}_{2^t-4}$ је нерастављива, тј. не може се представити као полином над класама строго мање кохомолошке димензије. Такође, из пропозиције 1.1.1 видимо да су и $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$ и $\widetilde{w}_4$ такође нерастављиве. Теорема 2.4.1 заправо каже да су ово једине четири нерастављиве класе у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ (до на додавање растављивих).*

2.4.3 Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$

Пропозиција 2.4.2. *Ако је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа (одабрана тако да важи (2.53)), онда у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ имамо једнакост*

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{P}\widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{Q},$$

за неке полиноме $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ над $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$ и $\widetilde{w}_4$.

Доказ. Посматрајмо сферно раслојење $S^{2^t-4} \xrightarrow{i} W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{2^t,3}$. Како $1 = i^*(1)$ и $s = i^*(c_{2^t-4})$ чине адитивну базу од $H^*(S^{2^t-4};\mathbb{Z}_2)$, то на основу теореме Лере–Хирша (видети [12, теорема 4D.1.]) имамо адитивни изоморфизам

$$\Phi : H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2) \otimes H^*(S^{2^t-4};\mathbb{Z}_2) \to H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$$

дат са $\Phi(x \otimes 1) = p_1^*(x)$ и $\Phi(x \otimes s) = p_1^*(x) \cdot c_{2^t-4}$.

У последици 2.3.1 видели смо да $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ има адитивну базу састављену од елемената $\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c$ и $\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c$, за $(b,c) \in T$, где је T скуп свих парова ненегативних целих бројева (b,c) са својством да за свако $i \in \{0,1,\ldots,t-1\}$ важи $b < 2^{t-1} - 2^i$ или $c < 2^i - 1$. Нека је N број елемената скупа T, тј. база од $H^*(\widetilde{G}_{2^t,3};\mathbb{Z}_2)$ састоји се од $2N$ елемената. Изоморфизам Φ нам онда даје адитивну базу од $H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2)$. Елементи ове базе су

- $\Phi(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c \otimes 1) = p_1^*(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c) = \mathrm{w}_2^b\mathrm{w}_3^c$;
- $\Phi(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c \otimes 1) = p_1^*(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c) = \mathrm{w}_2^b\mathrm{w}_3^c\mathrm{a}_{2^t-1}$;
- $\Phi(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c \otimes s) = p_1^*(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c)\cdot c_{2^t-4} = \mathrm{w}_2^b\mathrm{w}_3^c c_{2^t-4}$;
- $\Phi(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c \otimes s) = p_1^*(\widetilde{a}_{2^t-1}\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c)\cdot c_{2^t-4} = \mathrm{w}_2^b\mathrm{w}_3^c c_{2^t-4}\mathrm{a}_{2^t-1}$;

за $(b,c)\in T$. Приметимо да је $\dim H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) = 4N$.

Посматрајмо сада сферно раслојење $S^3 \to W_{3,1}^{2^t} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2^t,4}$. На основу леме 1.1.1 имамо

$$\dim(\operatorname{im} sp^*) = \frac{1}{2}\dim H^*(W_{3,1}^{2^t};\mathbb{Z}_2) = 2N.$$

Са друге стране, на основу (2.52) и (2.53) знамо да $2N$ линеарно независних елемената прве и треће врсте припада $\operatorname{im} sp^*$, па ће они у ствари чинити целу базу од $\operatorname{im} sp^*$. Стога, како је и $c_{2^t-4}^2 \in \operatorname{im} sp^*$, можемо га представити преко базних елемената

$$c_{2^t-4}^2 = c_{2^t-4}\overline{P} + \overline{Q},$$

где су $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ неки полиноми над w_2 и w_3. На основу (2.52) и (2.53) имамо

$$sp^*\Big(\widetilde{a}_{2^t-4}^2 - \big(\widetilde{a}_{2^t-4}\overline{P}(\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3) + \overline{Q}(\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3)\big)\Big) = c_{2^t-4}^2 - (c_{2^t-4}\overline{P} + \overline{Q}) = 0,$$

па из (2.45) закључујемо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{a}_{2^t-4}\overline{P}(\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3) + \overline{Q}(\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3) + \widetilde{w}_4\overline{R},$$

за неку класу $\overline{R}\in H^{2^{t+1}-12}(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$ која је на основу теореме 2.4.1 полином над $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$, $\widetilde{w}_4$ и $\widetilde{a}_{2^t-4}$. Коначно, када препакујемо сабирке, добијамо

$$\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{P}\widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{Q},$$

за неке полиноме $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ над $\widetilde{w}_2$, $\widetilde{w}_3$ и $\widetilde{w}_4$. □

Да бисмо одредили кохомолошку алгебру $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4};\mathbb{Z}_2)$, биће нам потребна теорија Гребнерових база.

За $k=4$, једнакост (1.9) постаје

$$g_r = w_2 g_{r-2} + w_3 g_{r-3} + w_4 g_{r-4}, \quad r \geqslant 1, \tag{2.54}$$

(сетимо се да смо дефинисали $g_{-1} = g_{-2} = g_{-3} = 0$), а једнакост (1.11) постаје

$$g_r = w_2^{2^i} g_{r-2^{i+1}} + w_3^{2^i} g_{r-3\cdot 2^i} + w_4^{2^i} g_{r-2^{i+2}}, \quad r \geqslant 2^{i+2}-3,\ i \geqslant 0. \tag{2.55}$$

Уочимо идеал

$$I = (g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q),$$

где су полиноми P и Q добијени од полинома $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ из пропозиције 2.4.2 заменом Штифел–Витнијевих класа $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$ променљивама w_2 и w_3, редом.

Како је $g_{2^t-3} = 0$, имамо да је $g_r \in I$ за све $r \geqslant 2^t - 2$. Специјално, важиће $I = (G)$, где је

$$G = \{g_{2^t-3+2^i} \mid 0 \leqslant i \leqslant t-1\} \cup \{g_{2^t}, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\}. \tag{2.56}$$

Доказаћемо да је база G идеала $I \trianglelefteq \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]$ заправо Гребнерова база. У ту сврху докажимо најпре две помоћне леме.

Лема 2.4.3. *За све целе бројеве $r \geqslant -3$ и $i \geqslant 0$ важи*

$$w_3^{2^i-1} g_r^{2^i} = g_{2^i(r+3)-3}.$$

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по i. За $i = 0$ једнакост се своди на $g_r = g_r$. За $i = 1$ треба да проверимо да ли је

$$w_3 g_r^2 = g_{2r+3} \quad \text{за све } r \geqslant -3, \tag{2.57}$$

што ћемо доказати индукцијом по r. Ако је $r \in \{-3, -2, -1\}$, обе стране ове једнакости су једнаке нули, а ако је $r = 0$ (2.57) своди се на $w_3 = g_3$, што јесте тачно на основу (1.10). Уколико је сада $r \geqslant 1$ и ако претпоставимо да је $w_3 g_j^2 = g_{2j+3}$ за $-3 \leqslant j < r$, онда на основу (2.54) и (2.55) добијамо

$$\begin{aligned} w_3 g_r^2 &= w_3(w_2 g_{r-2} + w_3 g_{r-3} + w_4 g_{r-4})^2 \\ &= w_2^2 w_3 g_{r-2}^2 + w_3^2 w_3 g_{r-3}^2 + w_4^2 w_3 g_{r-4}^2 \\ &= w_2^2 g_{2r-1} + w_3^2 g_{2r-3} + w_4^2 g_{2r-5} = g_{2r+3}, \end{aligned}$$

чиме смо доказали (2.57).

Нека је сада $i \geqslant 2$ и

$$w_3^{2^{i-1}-1} g_r^{2^{i-1}} = g_{2^{i-1}(r+3)-3} \quad \text{за све } r \geqslant -3.$$

Квадрирањем претходне једнакости и множењем са w_3 добијамо

$$w_3^{2^i-1} g_r^{2^i} = w_3 g_{2^{i-1}(r+3)-3}^2 = g_{2^i(r+3)-3}$$

на основу (2.57), чиме је доказ завршен. $\square$

Лема 2.4.4. *Нека је $0 \leqslant i \leqslant t-1$. Тада ниједан од монома у $g_{2^t-3+2^i}$ не садржи променљиву w_4.*

Доказ. На основу леме 2.4.3 имамо

$$g_{2^t-3+2^i} = g_{2^i(2^{t-i}-2+3)-3} = w_3^{2^i-1} g_{2^{t-i}-2}^{2^i},$$

па је довољно доказати да ниједан од полинома g_{2^m-2} $(m \geqslant 0)$ не садржи мономе дељиве са w_4. Ово ћемо показати индукцијом по m. За $m \in \{0,1\}$ тврђење очигледно важи. Нека је сада $m \geqslant 2$ и нека ниједан од монома у g_{2^j-2} не садржи w_4 за $0 \leqslant j < m$. На основу (2.55) имамо

$$\begin{aligned} g_{2^m-2} &= w_2^{2^{m-2}} g_{2^{m-1}-2} + w_3^{2^{m-2}} g_{2^{m-2}-2} + w_4^{2^{m-2}} g_{-2} \\ &= w_2^{2^{m-2}} g_{2^{m-1}-2} + w_3^{2^{m-2}} g_{2^{m-2}-2}, \end{aligned}$$

па се w_4 не појављује ни у g_{2^m-2}. □

Теорема 2.4.2. *Скуп G (дефинисан у (2.56)) је Гребнерова база за $I \lhd \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]$ у односу на лексикографско уређење монома $\preccurlyeq$ дато са $w_3 \prec w_2 \prec w_4 \prec a_{2^t-4}$.*

Доказ. На основу дефиниције идеала I имамо да G генерише овај идеал, па је на основу теореме 1.3.1 довољно да покажемо да се S-полиноми било која два елемента редукују до нуле модуло G. Како је $S(f,f) = 0$, посматраћемо само S-полиноме различитих елемената из G.

Полиноми P и Q не садрже a_{2^t-4}, па је $\mathrm{LM}(a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q) = a_{2^t-4}^2$, а из (1.10) видимо да је $\mathrm{LM}(g_{2^t}) = w_4^{2^{t-2}}$. Такође, за $0 \leqslant i \leqslant t-1$, на основу леме 2.4.4 моном $\mathrm{LM}(g_{2^t-3+2^i})$ не садржи ни a_{2^t-4} ни w_4.

Дакле, уколико је бар један од полинома у S-полиному из $\{g_{2^t}, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\}$, онда су водећи мономи та два полинома узајамно прости, па на основу [3, теорема 5.66] закључујемо да се овај S-полином редукује до нуле модуло G. Остаје још да размотримо случај S-полинома $S(g_{2^t-3+2^i}, g_{2^t-3+2^j})$ за нека два различита броја $i, j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$.

Из једнакости (1.10) видимо да је редукција модуло w_4 полинома g_r, $r \geqslant 0$, управо полином g_r у случају $k = 3$. На основу леме 2.4.4 онда имамо да је полином $g_{2^t-3+2^i} \in \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4]$ за $k = 4$ једнак полиному $g_{2^t-3+2^i} \in \mathbb{Z}_2[w_2, w_3]$ за $k = 3$. Са друге стране, из теореме 2.3.4 имамо да полиноми $g_{2^t-3+2^i}$, $0 \leqslant i \leqslant t-1$, чине Гребнерову базу идеала $(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}) \trianglelefteq \mathbb{Z}_2[w_2, w_3]$ у односу на лексикографско уређење $w_3 \prec w_2$. Дакле, $S(g_{2^t-3+2^i}, g_{2^t-3+2^j})$ редукује се до нуле за све $i, j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$. □

На основу пропозиције 2.3.1 имамо да је

$$\mathrm{LM}(g_{2^t-3+2^i}) = w_2^{2^{t-1}-2^i} w_3^{2^i-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant t-1.$$

Дакле, моном $w_2^b w_3^c$ није дељив ни са једним од ових водећих монома ако и само ако за свако $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ важи $b < 2^{t-1} - 2^i$ или $c < 2^i - 1$, тј. ако и само ако $(b, c) \in T$ (где је T скуп дефинисан у доказу пропозиције 2.4.2). Заједно са чињеницом да је $\mathrm{LM}(g_{2^t}) = w_4^{2^{t-2}}$ и $\mathrm{LM}(a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q) = a_{2^t-4}^2$, пропозиција 1.3.1 даје следећу последицу.

Последица 2.4.1. *Ако је* $B = \Big\{ a_{2^t-4}^r w_4^d w_2^b w_3^c \mid r < 2, d < 2^{t-2}, (b, c) \in T \Big\}$*, онда косети елемената из* B *чине адитивну базу количника* $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/I$.

Додатно, ако је N *број елемената скупа* T *(као у доказу пропозиције 2.4.2), онда је*

$$\dim \Big(\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/I \Big) = 2^{t-1} \cdot N.$$

На потпуно исти начин се може показати да је $\{g_{2^t-3+2^i} \mid 0 \leqslant i \leqslant t-1\} \cup \{g_{2^t}\}$ Гребнерова база идеала $(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}) \lhd \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4]$ (у односу на лексикографско уређење $w_3 \prec w_2 \prec w_4$), одакле добијамо да косети монома $w_4^d w_2^b w_3^c$ таквих да је $d < 2^{t-2}$ и $(b, c) \in T$, чине базу количника $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4]/(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t})$. Са друге стране, знамо да је овај количник управо изоморфан $\operatorname{im} p^*$, где је $p : \widetilde{G}_{2^t,4} \to G_{2^t,4}$. Дакле, $\dim(\operatorname{im} p^*) = 2^{t-2} \cdot N$ па из леме 1.1.1 добијамо

$$\dim H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) = 2^{t-1} \cdot N. \tag{2.58}$$

Теорема 2.4.3. *Кохомолошка алгебра оријентисане Грасманове многострукости* $\widetilde{G}_{2^t,4}$ *је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]}{\big(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}, a_{2^t-1}^2 + Pa_{2^t-4} + Q\big)},$$

при чему косети од w_2, w_3 *и* w_4 *одговарају Штифел–Витнијевим класама канонског раслојења* $\widetilde{\gamma}_{2^t,4}$*, док косет од* a_{2^t-4} *одговара нерастављивој класи* $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$*, а* P *и* Q *су неки полиноми над* w_2, w_3 *и* w_4.

Доказ. Одаберимо полиноме P и Q над w_2, w_3 и w_4 у $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]$ који одговарају полиномима $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ из пропозиције 2.4.2, редом. На основу теореме 2.4.1, хомоморфизам алгебри

$$\Psi : \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}] \to H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2),$$

дат са $\Psi(w_2) = \widetilde{w}_2$, $\Psi(w_3) = \widetilde{w}_3$, $\Psi(w_4) = \widetilde{w}_4$ и $\Psi(a_{2^t-4}) = \widetilde{a}_{2^t-4}$ јесте епиморфизам, па ће индуковано пресликавање

$$\overline{\Psi} : \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/\ker\Psi \to H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \tag{2.59}$$

бити изоморфизам. Стога, да бисмо доказали тврђење довољно је да покажемо да је

$$\ker\Psi = I = (g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}, a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q).$$

На основу пропозиције 2.4.2 знамо да је $a_{2^t-4}^2 + Pa_{2^t-4} + Q \in \ker\Psi$. Такође, из пропозиције 1.1.1 имамо

$$\operatorname{im} p^* \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4] \Big/ (g_{2^t-3}, g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}) = \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4] \Big/ (g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}),$$

јер је $g_{2^t-3} = 0$ на основу [17, лема 2.3]. Одавде добијамо да је и $g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t} \in \ker\Psi$, па је

$$I \subseteq \ker\Psi. \tag{2.60}$$

Остаје још да докажемо обрнуту инклузију.

Из (2.60) имамо кратак тачан низ векторских простора

$$0 \to \ker\Psi/I \to \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/I \to \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/\ker\Psi \to 0.$$

Даље, на основу последице 2.4.1 је

$$\dim\Big(\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/I\Big) = 2^{t-1}\cdot N,$$

а из (2.59) и (2.58) имамо

$$\dim\Big(\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]/\ker\Psi\Big) = \dim H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) = 2^{t-1}\cdot N.$$

Коначно, закључујемо да је $\dim(\ker\Psi/I) = 0$, тј. $I = \ker\Psi$. □

2.4.4 Додатни резултати о $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$

Како је I управо идеал који се појављује у опису кохомологије од $\widetilde{G}_{2^t,4}$ из теореме 2.4.3 и последице 2.4.1 добијамо и наредну последицу.

Последица 2.4.2. *Скуп кохомолошких класа*

$$B = \Big\{\widetilde{a}_{2^t-4}^r \widetilde{w}_4^d \widetilde{w}_2^b \widetilde{w}_3^c \,|\, r < 2, d < 2^{t-2}, \big(\forall i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}\big)\ b < 2^{t-1} - 2^i \ \vee\ c < 2^i - 1\Big\}$$

је једна адитивна база кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$.

Напомена 2.4.2. *Приметимо да све класе из претходне последице код којих је* $r = 0$ *припадају* $\operatorname{im} p^*$. *Како је* $\dim H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) = 2\dim(\operatorname{im} p^*)$, *закључујемо да класе код којих је* $r = 1$ *неће припадати* $\operatorname{im} p^*$.

Главни резултат који желимо да истакнемо у овом одељку је чињеница да је $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 \neq 0$ у $H^{2^{t+1}-8}(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$.

То ћемо доказати коришћењем леме 2.3.4 на сличан начин као и у случају $k = 3$, $n \in \{2^t-3, 2^t-2, 2^t-1\}$. Наиме, ако је $\widetilde{j} : \widetilde{G}_{2^t-1,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{2^t,4}$ пресликавање индуковано инклузијом $\mathbb{R}^{2^t-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2^t}$ показаћемо да се при хомоморфизму $\widetilde{j}^* : H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа слика у нерастављиву, што ће нам омогућити да за нерастављиву класу из $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ узмемо баш $\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4})$. Дакле,

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4}) = \widetilde{a}_{2^t-4}, \tag{2.61}$$

а у одељку 2.3.2 смо показали да ће једнакост (2.30) важити за сваку нерастављиву класу димензије $2^t - 4$, па ће важити и за овако одабрано $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$.

Са овим циљем доказујемо наредну пропозицију.

Пропозиција 2.4.3. *Нека је* $w_1 : H^{2^t-4}(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-3}(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ *множење Штифел –Витнијевом класом* $w_1 \in H^1(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ *и нека је* $j^* : H^{2^t-4}(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \to H^{2^t-4}(G_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ *хомоморфизам индукован инклузијом* $j : G_{2^t-1,3} \hookrightarrow G_{2^t,4}$. *Тада* $\ker w_1 \cap \ker j^* = 0$.

Доказ. Из (1.2), имамо

$$H^*(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4]}{(\overline{w}_{2^t-3}, \overline{w}_{2^t-2}, \overline{w}_{2^t-1}, \overline{w}_{2^t})}.$$

Нека је $f \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4]$ хомоген полином кохомолошке димензије $2^t - 4$ такав да је одговарајућа класа $[f] \in H^{2^t-4}(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ унутар $\ker w_1 \cap \ker j^*$. Из услова $[f] \in \ker w_1$ у $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4]$ имамо

$$w_1 f = \alpha \overline{w}_{2^t-3}, \tag{2.62}$$

за неко $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Са друге стране, на основу леме 2.3.5(б), пресликавање $j^* : H^*(G_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(G_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ је редукција модуло w_4. Због тога нам услов $[f] \in \ker j^*$ даје $0 = j^*[f] = [\rho(f)]$, где је $\rho : \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4] \to \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]$ редукција модуло w_4. Приметимо да у $H^*(G_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ нема релација степена $2^t - 4$. Заиста, поново из (1.2) имамо

$$H^*(G_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3]}{(\overline{w}_{2^t-3}, \overline{w}_{2^t-2}, \overline{w}_{2^t-1})},$$

па закључујемо да је $\rho(f) = 0$, одакле је

$$f = w_4 h, \tag{2.63}$$

за неко $h \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4]$.

Сада из (2.62) и (2.63) добијамо

$$w_1 w_4 h = \alpha \overline{w}_{2^t-3} \quad \text{у } \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, w_4]. \tag{2.64}$$

Из (1.5), видимо да $\overline{w}_{2^t-3}$ има сабирак $w_1^{2^t-3}$, док такав сабирак не постоји на левој страни једнакости (2.64). Стога закључујемо да је $\alpha = 0$ па је и $f = 0$. $\square$

Сада из леме 2.3.4 и пропозиције 2.4.3, а на основу дискусије која је претходила пропозицији, можемо одабрати нерастављиву класу $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$ тако да важи (2.61). Тада је $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{g}_{2^t-4}\widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma \widetilde{w}_2^{2^t-4}$ у $H^{2^{t+1}-8}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$, па је

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4})^2 = \widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{g}_{2^t-4} \cdot \widetilde{a}_{2^t-4} + \gamma \widetilde{w}_2^{2^t-4}. \tag{2.65}$$

Такође, приметимо да је $\widetilde{g}_{2^t-4} \neq 0$ у $H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2)$. Заиста, ово следи из пропозиције 1.1.1 (јер у димензији $2^t - 4$ нема релација) и чињенице да је $g_{2^t-4} \neq 0$ на основу (1.10).

Са друге стране, из теореме 2.4.3 имамо да је $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 = \widetilde{P}\widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{Q}$ у $H^{2^{t+1}-8}(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$, па је

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_{2^t-4})^2 = \widetilde{j}^*\big(\widetilde{P}\widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{Q}\big) = \widetilde{j}^*(\widetilde{P}) \cdot \widetilde{a}_{2^t-4} + \widetilde{j}^*(\widetilde{Q}). \tag{2.66}$$

Сада из (2.65) и (2.66) закључујемо да $\widetilde{P} \neq 0$. Овиме смо доказали следећу пропозицију.

Пропозиција 2.4.4. *Ако је $\widetilde{a}_{2^t-4} \in H^{2^t-4}(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ нерастављива класа, онда $\widetilde{a}_{2^t-4}^2 \neq 0$. Штавише, у опису алгебре $H^*(\widetilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ из теореме 2.4.3, полином P не може бити нула.*

2.4.5 Додатна анализа кохомологије $H^*(\widetilde{G}_{8,4}; \mathbb{Z}_2)$

У овом одељку ћемо детаљније анализирати кохомологију Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{8,4}$ са циљем да одредимо полиноме P и Q из теореме 2.4.3. Главни резултат је садржан у наредној пропозицији.

Пропозиција 2.4.5. *Имамо изоморфизам степенованих алгебри*

$$H^*(\widetilde{G}_{8,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_4]}{(g_6, g_7, g_8, a_4^2 + a_4 w_2^2 + \gamma w_2 w_3^2)},$$

за неко $\gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Доказ. Довољно је да покажемо да у $H^*(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$ важи једнакост

$$\widetilde{a}_4^2 = \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \tag{2.67}$$

за неко $\gamma \in \mathbb{Z}_2$. На основу последице 2.4.2 знамо адитивну базу B за $H^*(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$ и она је дата у табели 2.6.

димензија	елементи базе
0	1
1	-
2	$\widetilde{w}_2$
3	$\widetilde{w}_3$
4	$\widetilde{w}_4, \widetilde{w}_2^2, \widetilde{a}_4$
5	$\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3$
6	$\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2$
7	$\widetilde{w}_3\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3$
8	$\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2$
9	$\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3$
10	$\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_4$
11	$\widetilde{a}_4\widetilde{w}_3\widetilde{w}_4$
12	$\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2, \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4$
13	$\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3\widetilde{w}_4$
14	$\widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4$
15	-
16	$\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4$

Табела 2.6: Елементи адитивне базе

Из формуле (1.10) добијамо да је

$$g_6 = w_2^3 + w_3^2 \quad \text{и} \quad g_7 = w_2^2 w_3. \tag{2.68}$$

Како су одговарајуће класе $\widetilde{g}_6$ и $\widetilde{g}_7$ тривијалне у $H^*(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$, из (2.68) добијамо

$$\widetilde{w}_2^3 = \widetilde{w}_3^2,\ \widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3 = 0,\ \text{одакле је и } \widetilde{w}_3^3 = \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3 = 0,\ \widetilde{w}_2^4 = \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2. \tag{2.69}$$

Запишимо класу $\widetilde{a}_4^2 \in H^8(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$ преко базних елемената

$$\widetilde{a}_4^2 = \alpha\widetilde{a}_4\widetilde{w}_4 + \beta\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4, \tag{2.70}$$

где су $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{Z}_2$. Ако је $\widetilde{j} : \widetilde{G}_{7,3} \hookrightarrow \widetilde{G}_{8,4}$ утапање, онда је на основу леме 2.3.5(г) пресликавање $\widetilde{j}^* : H^*(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2) \to H^*(\widetilde{G}_{7,3};\mathbb{Z}_2)$ редукција модуло $\widetilde{w}_4$. Применом хомоморфизма $\widetilde{j}^*$ на (2.70) добијамо

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)^2 = \widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4^2) = \beta\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2.$$

Са друге стране, знамо да је $\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)$ нерастављива класа у $H^4(\widetilde{G}_{7,3};\mathbb{Z}_2)$, па на основу теореме 2.3.8 и (2.19) имамо

$$\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)^2 = \widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)\widetilde{g}_4 + \overline{\gamma}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 = \widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2^2 + \overline{\gamma}\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2,$$

за неко $\overline{\gamma} \in \mathbb{Z}_2$ (из (1.10) видимо да је $g_4 = w_2^2$ за $k = 3$). Како су $\widetilde{j}^*(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2^2, \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 \in H^8(\widetilde{G}_{7,3};\mathbb{Z}_2)$ линеарно независни елементи адитивне базе из последице 2.3.2, из претходне две једнакости закључујемо да је $\beta = 1$ и $\gamma = \overline{\gamma}$. Сада једнакост (2.70) постаје

$$\widetilde{a}_4^2 = \alpha\widetilde{a}_4\widetilde{w}_4 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4. \tag{2.71}$$

Дакле, да бисмо доказали релацију (2.67) остало је још да покажемо да је $\alpha = \delta = 0$. То ћемо урадити коришћењем Стинродових квадрата.

На основу Вуове формуле (1.14) имамо

$$Sq^1(\widetilde{w}_2) = \widetilde{w}_3,\ Sq^1(\widetilde{w}_3) = 0,\ Sq^1(\widetilde{w}_4) = 0,$$

$$Sq^2(\widetilde{w}_2) = \widetilde{w}_2^2,\ Sq^2(\widetilde{w}_3) = \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3,\ Sq^2(\widetilde{w}_4) = \widetilde{w}_2\widetilde{w}_4.$$

Како је димензија многострукости $\widetilde{G}_{8,4}$ једнака 16, хомоморфизам

$$Sq^4 : H^{12}(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2) \to H^{16}(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$$

је множење Вуовом класом $v_4 \in H^4(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$.

Из [2, теорема 1.1] добијамо да је $w_i(G_{8,4}) = 0$ за $i \in \{1,3,4\}$ и $w_2(G_{8,4}) = w_1^2$, где је w_1 прва Штифел–Витнијева класа канонског раслојења $\gamma_{8,4}$, а $w_i(G_{8,4})$ i-та Штифел–Витнијева класа тангентног раслојења над $G_{8,4}$. Ако је $p : \widetilde{G}_{8,4} \to G_{8,4}$

двописно наткривање, онда је и $w_i(\widetilde{G}_{8,4}) = p^*(w_i(G_{8,4})) = 0$, за $1 \leqslant i \leqslant 4$, па применом Вуове формуле (1.13) закључујемо да је и $v_i = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant 4$. Одавде је $Sq^4 : H^{12}(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2) \to H^{16}(\widetilde{G}_{8,4};\mathbb{Z}_2)$ тривијално пресликавање, па је $Sq^4(\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2) = 0$. Са друге стране, коришћењем Картанове формуле и (2.69), добија се да је $Sq^i(\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2) = 0$ за $1 \leqslant i \leqslant 4$, па из (2.71) и (2.69) добијамо

$$\begin{aligned} 0 = Sq^4(\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2) &= \sum_{i=0}^{4} Sq^{4-i}(\widetilde{a}_4)Sq^i(\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2) \\ &= Sq^4(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 \\ &= \widetilde{a}_4^2\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 \\ &= (\alpha\widetilde{a}_4\widetilde{w}_4 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4)\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 \\ &= \alpha\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4. \end{aligned} \tag{2.72}$$

У табели 2.6 видимо да је $\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4$ базни елемент, па из (2.72) закључујемо да је $\alpha = 0$. Једнакост (2.71) сада постаје

$$\widetilde{a}_4^2 = \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4. \tag{2.73}$$

Приметимо да је $Sq^1(\widetilde{a}_4) = 0$. Заиста, како је једини базни елемент у димензији 5 класа $\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3$, уколико би било $Sq^1(\widetilde{a}_4) \neq 0$, имали бисмо $Sq^1(\widetilde{a}_4) = \widetilde{w}_2\widetilde{w}_3$. Из идентитета $Sq^1Sq^1 = 0$ онда имамо

$$0 = Sq^1(Sq^1(\widetilde{a}_4)) = Sq^1(\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3) = \widetilde{w}_3^2,$$

али у табели 2.6 видимо да је $\widetilde{w}_3^2$ базни елемент па $\widetilde{w}_3^2 \neq 0$.

Сада применом Картанове формуле добијамо $Sq^2(\widetilde{a}_4^2) = (Sq^1(\widetilde{a}_4))^2 = 0$. Са друге стране, из (2.73) је

$$\begin{aligned} 0 = Sq^2(\widetilde{a}_4^2) &= Sq^2(\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4) \\ &= Sq^2(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2^2 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2 + \gamma\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_3^2 + \delta\big(\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4 + \widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_4\big) \\ &= Sq^2(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2^2 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2, \end{aligned}$$

где смо употребили (2.69) у последњем реду. Како је $\widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2$ елемент базе, из напомене 2.4.2 имамо да $\widetilde{a}_4\widetilde{w}_3^2 \notin \operatorname{im} p^*$, па и $Sq^2(\widetilde{a}_4) \notin \operatorname{im} p^*$. Одатле, када изразимо овај елемент преко базних, он мора бити облика $Sq^2(\widetilde{a}_4) = \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2 + \lambda\widetilde{w}_2\widetilde{w}_4 + \mu\widetilde{w}_3^2$, где су $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$.

Показаћемо да је $\lambda = \mu = 0$. Из Адемове релације $Sq^2Sq^2 = Sq^3Sq^1$ најпре имамо $Sq^2(Sq^2(\widetilde{a}_4)) = Sq^3(Sq^1(\widetilde{a}_4)) = 0$. Са друге стране,

$$\begin{aligned}
0 = Sq^2(Sq^2(\widetilde{a}_4)) &= Sq^2(\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2 + \lambda\widetilde{w}_2\widetilde{w}_4 + \mu\widetilde{w}_3^2)\\
&= Sq^2(\widetilde{a}_4)\widetilde{w}_2 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2\\
&= (\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2 + \lambda\widetilde{w}_2\widetilde{w}_4 + \mu\widetilde{w}_3^2)\widetilde{w}_2 + \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2\\
&= \lambda\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4 + \mu\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2,
\end{aligned}$$

а како су и $\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4$ и $\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2$ елементи базе, закључујемо $\lambda = \mu = 0$. Дакле, доказали смо да је

$$Sq^2(\widetilde{a}_4) = \widetilde{a}_4\widetilde{w}_2. \tag{2.74}$$

Коначно, $Sq^4(\widetilde{a}_4^3) = v_4\widetilde{a}_4^3 = 0$, па коришћењем (2.73), (2.74) и (2.69) добијамо

$$\begin{aligned}
0 = Sq^4(\widetilde{a}_4^3) &= Sq^4(\widetilde{a}_4 \cdot \widetilde{a}_4^2)\\
&= Sq^4(\widetilde{a}_4)\widetilde{a}_4^2 + \widetilde{a}_4 Sq^4(\widetilde{a}_4^2)\\
&= \widetilde{a}_4^4 + \widetilde{a}_4\big(Sq^2(\widetilde{a}_4)\big)^2\\
&= (\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4)^2 + \widetilde{a}_4^3\widetilde{w}_2^2\\
&= \widetilde{a}_4^2\widetilde{w}_2^4 + \delta\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_4^2 + \widetilde{a}_4^2\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2\\
&= \widetilde{a}_4^2\widetilde{w}_2^4 + (\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2 + \gamma\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2 + \delta\widetilde{w}_2^2\widetilde{w}_4)\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^2\\
&= \delta\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_4\\
&= \delta\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4
\end{aligned}$$

(чињеница да је $\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_4^2 = 0$ следи из $\widetilde{w}_2^4\widetilde{w}_4^2 \in H^{16}(\widetilde{G}_{2^t,4}\mathbb{Z}_2) \cap \operatorname{im} p^* = 0$ јер имамо само један базни елемент у димензији 16 и то је $\widetilde{a}_4\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3^2\widetilde{w}_4$, а знамо да он није у $\operatorname{im} p^*$ на основу напомене 2.4.2). Коначно, закључујемо да је $\delta = 0$ и (2.73) сада постаје (2.67). $\square$

Глава 3

Кохомологија оријентисаних Грасманијана са $\mathbb{Z}$ коефицијентима

3.1 Случај $k = 2$

Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$ зависи од парности n. У случају када је n парно, кохомолошка алгебра је у потпуности одређена у [20], док је за n непарно одређена у [29]. У наредној теореми ћемо видети какву структуру има алгебра $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$ и изложићемо доказ из [14] у случају непарног n.

3.1.1 Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$

Теорема 3.1.1. *Нека је $n \geqslant 2$.*

(a) Интегралне кохомолошке групе Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2n,2}$ за $0 \leqslant k \leqslant 4n-4$ су

$$H^k(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{за } k \text{ парно и } k \neq 2n-2, \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \text{за } k = 2n-2, \\ 0, & \text{за } k \text{ непарно.} \end{cases}$$

док је $H^k(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z}) = 0$, за $k > 4n-4$. Као алгебра, $H^*(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ је генерисана Ојлеровом класом $x_2 = e(\widetilde{\gamma}_{2n,2}) \in H^2(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ и $x_{2n-2} \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ са релацијом $x_2^n = 2x_2x_{2n-2}$. Штавише, уколико је $e = e(\widetilde{\gamma}_{2n,2}^{\perp}) \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ Ојлерова класа *и* $\mu \in H^{4n-4}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ *фундаментална класа, онда важе следеће релације*

$$e + x_2^{n-1} = 2x_{2n-2},\ x_{2n-2}x_2^{n-1} = (-1)^n\mu,\ x_{2n-2}e = \mu,$$
$$x_{2n-2}^2 = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\mu,\ x_2^{2n-2} = 2(-1)^n\mu,\ e^2 = 2\mu.$$

(б) Интегрална кохомолошка алгебра Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{2n+1,2}$ *је*

$$H^*(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[x_2, x_{2n}]}{(x_2^n - 2x_{2n}, x_{2n}^2)},$$

где је $x_2 = e(\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}) \in H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$ *Ојлерова класа и* $x_{2n} \in H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$.

Доказ. Комплетан доказ дела (а) се може наћи у [20]. Доказаћемо део (б). Посматрајмо сферно раслојење $S^1 \to V_{2n+1,2} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2n+1,2}$. Пресликавање sp слика пар ортогоналних вектора у оријентисану раван одређену њима. Целобројна кохомологија Штифелове многострукости $V_{2n+1,2}$ је добро позната (видети [23, стр. 153] или [8, теорема 2.3]). Адитивна структура је дата са

$$H^k(V_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{за } k = 0, 4n-1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{за } k = 2n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

док је множење тривијално. Посматрајмо сада Серов спектрални низ придружен овом раслојењу. Цео спектрални низ је садржан у нултом и првом реду, па једино диференцијал d_2 може бити нетривијалан. Како је кохомологија тоталног простора $V_{2n+1,2}$ доста једноставна (нетривијална је једино у три димензије $0, 2n$ и $4n-1$), скоро сви диференцијали на E_2 страни спектралног низа ће бити изоморфизми. Наиме, сваки диференцијал $d_2 : E_2^{k,1} \to E_2^{k+2,0}$ је изоморфизам за све $k \in \mathbb{N}_0$ сем евентуално за $k \in \{2n-2, 2n-1, 4n-2\}$.

Како је многострукост $\widetilde{G}_{2n+1,2}$ повезана, то је $H^0(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, па је $E_2^{0,0} \cong E_2^{0,1} \cong \mathbb{Z}$. Пошто је $d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$ изоморфизам, закључујемо да је $E_2^{2,0} \cong \mathbb{Z}$. Индуктивно настављамо надесно и добијамо да је $E_2^{k,0} \cong E_2^{k,1} \cong \mathbb{Z}$ за све парне бројеве k између 0 и $2n-2$. Уколико сада кренемо са друге стране, најпре имамо да је $H^{4n-2}(\widetilde{G}_{2n+1,2},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ јер је $\widetilde{G}_{2n+1,2}$ затворена оријентабилна повезана многострукост димензије $4n-2$. Затим, користећи изоморфизме d_2, добијамо да је $E_2^{k,0} \cong E_2^{k,1} \cong \mathbb{Z}$ и за све парне k између $2n$ и $4n-2$. Овиме смо покрили све парне димензије.

Што се тиче непарних димензија, из услова $H^1(V_{2n+1,2};\mathbb{Z}) = 0$, имамо да је $E_2^{1,0} = E_2^{1,1} = 0$, па поново користећи изоморфизме d_2 добијамо да је $E_2^{k,0} = E_2^{k,1} = 0$ за све непарне k између 1 и $2n-1$. Са друге стране, $H^{4n-2}(V_{2n+1,2};\mathbb{Z}) = 0$, па је и $E_2^{4n-3,1} = 0$ и крећући се налево дуж спектралног низа, добијамо да је $E_2^{k,0} = E_2^{k,1} = 0$ и за све непарне k између $2n+1$ и $4n-3$. Све групе $E_2^{k,0} = E_2^{k,1}$ су наравно тривијалне за $k \geqslant 4n-1$ јер је $\widetilde{G}_{2n+1,2}$ многострукост димензије $4n-2$.

Дакле, засад смо одредили све групе на другој страни спектралног низа као и све диференцијале $d_2 : E_2^{k,1} \to E_2^{k+2,0}$ сем за $k \in \{2n-2, 2n-1, 4n-2\}$. Када је $k = 2n-1$, диференцијал $d_2 : E_2^{2n-1,1} \to E_2^{2n+1,0}$ је тривијалан јер су и домен и кодомен тривијални. Како је $H^{2n}(V_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, закључујемо да је хомоморфизам $d_2 : E_2^{2n-2,1} \to E_2^{2n,0}$ множење са 2, док је хомоморфизам $d_2 : E_2^{4n-2,1} \to E_2^{4n,0}$ тривијалан јер је $E_2^{4n,0} = 0$.

Друга страна спектралног низа приказана је у табели 3.1. Кохомолошке групе Грасманове многострукости можемо прочитати из нултог реда, па остаје још да одредимо мултипликативну структуру.

1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	$\cdot 2$ 0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$
0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$
	0	1	2	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$	$\boldsymbol{2n}$	$2n+1$	$2n+2$	$\cdots$	$4n-2$

Табела 3.1: E_2 страна Серовог спектралног низа

Означимо са $s \in H^1(S^1;\mathbb{Z})$ генератор и нека је $x_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$ елемент такав да је $d_2(1 \otimes s) = x_2 \otimes 1$. Знамо да је d_2 множење Ојлеровом класом, па је x_2 управо Ојлерова класа раслојења $S^1 \to V_{2n+1,2} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2n+1,2}$. Како је $d_2 : E_2^{2k,1} \to E_2^{2k+2,0}$ изоморфизам за све k између 0 и $n-2$, имамо да је група $E_2^{2k+2,0}$ генерисана елементом $x_2^{k+1} \otimes 1$. Заиста, ово се лако показује индукцијом. Уколико знамо да је $E_2^{2k,0}$ генерисана са $x_2^k \otimes 1$, онда када применимо изоморфизам d_2 на генератор $x_2^k \otimes s$ у $E_2^{2k,1}$, добијамо генератор од $E_2^{2k+2,0}$

$$d_2(x_2^k \otimes s) = d_2(x_2^k \otimes 1)(1 \otimes s) + (-1)^{2k}(x_2^k \otimes 1)d_2(1 \otimes s) = (x_2^k \otimes 1)(x_2 \otimes 1) = x_2^{k+1} \otimes 1.$$

Дакле, група $H^{2k}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$ генерисана је са x_2^k, за $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Како је $d_2 : E_2^{2n-2,1} \to E_2^{2n,0}$ множење са 2, можемо одабрати генератор $x_{2n} \in H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$ тако да је $d_2(x_2^{n-1} \otimes s) = 2x_{2n} \otimes 1$. Са друге стране,

$$d_2(x_2^{n-1} \otimes s) = d_2(x_2^{n-1} \otimes 1)(1 \otimes s) + (-1)^{2n-2}(x_2^{n-1} \otimes 1)d_2(1 \otimes s) = x_2^n \otimes 1,$$

па закључујемо $x_2^n = 2x_{2n}$ у $H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$. Применом изоморфизама $d_2 : E_2^{2k,1} \to E_2^{2k+2,0}$, за $n \leqslant k \leqslant 2n-2$, добијамо да је $E_2^{2k+2,0}$ генерисано са $x_2^{k+1-n}x_{2n} \otimes 1$. Због димензије многострукости $\widetilde{G}_{2n+1,2}$ имамо и да је $x_{2n}^2 = 0$.

Коначно, добијамо мултипликативни изоморфизам

$$H^*(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[x_2, x_{2n}]}{(x_2^n - 2x_{2n}, x_{2n}^2)}.$$

Остаје још да се уверимо да је x_2 Ојлерова класа оријентисаног канонског векторског раслојења $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$. Приметили смо већ да је x_2 Ојлерова класа раслојења $S^1 \to V_{2n+1,2} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{2n+1,2}$, а у одељку 2.2 видели смо да се $V_{2n+1,2}$ може идентификовати са простором $W_{1,1}^{2n+1}$, па из комутативног дијаграма (2.3) закључујемо да је x_2 заиста Ојлерова класа раслојења $\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}$. □

Напомена 3.1.1. *За разлику од парне димензије где је Ојлерова класа $e(\widetilde{\gamma}_{2n,2}^{\perp})$ била нетривијална, у случају непарне димензије то неће важити. Наиме, $e(\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}^{\perp}) = 0$ јер $e(\widetilde{\gamma}_{2n+1,2}^{\perp}) \in H^{2n-1}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) = 0$.*

Пропозиција 3.1.1. *Уколико је $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ редукција по модулу 2, имамо индукован хомоморфизам $\rho_* : H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}) \to H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$. При овом хомоморфизму генератори од $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$ сликају се у генераторе од $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z}_2)$. Конкретно,*

(а) Ако је $x_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ и $x_{2n-2} \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$, онда је

$$\rho_*(x_2) = \widetilde{w}_2,\ \rho_*(x_{2n-2}) = \widetilde{a}_{2n-2},$$

где су $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_{2n-2} \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z}_2)$ из теореме 2.2.2 (прецизније, генератори $x_{2n-2} \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ и $\widetilde{a}_{2n-2} \in H^{2n-2}(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z}_2)$ могу се одабрати тако да важи $\rho_*(x_{2n-2}) = \widetilde{a}_{2n-2}$).

(б) Ако је $x_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$ и $x_{2n} \in H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z})$, онда је

$$\rho_*(x_2) = \widetilde{w}_2,\ \rho_*(x_{2n}) = \widetilde{a}_{2n},$$

где су $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_{2n} \in H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2)$ из теореме 2.2.2.

Доказ. Доказаћемо део (б), док се део (а) показује на сличан начин.

На основу теореме 2.2.2,

$$H^*(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[w_2]}{(w_2^n)} \otimes \textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}_2}(a_{2n}).$$

Теорема о универзалним коефицијентима нам даје наредни комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & H^k(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & \mathrm{Hom}(H_k(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^k(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_k(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Када је $k = 2$, $H_{k-1}(\widetilde{G}_{2n+1,2}) = 0$, па се претходни дијаграм своди на

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \arrow[r, tail, two heads] \arrow[d, "\rho_*"] & \mathrm{Hom}(H_2(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2) \arrow[r, tail, two heads] & \mathrm{Hom}(H_2(\widetilde{G}_{2n+1,2}),\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Из Поенкареове дуалности имамо да је $H_2(\widetilde{G}_{2n+1,2}) \cong \mathbb{Z}$, па је десни хомоморфизам ρ_* епиморфизам, а како су хоризонтале изоморфизми, $\rho_* : H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \to H^2(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2)$ је такође епиморфизам. Дакле, $\rho_*(x_2) = \widetilde{w}_2$.

Сличну ситуацију имамо и за $k = 2n$. Како је $H_{2n-1}(\widetilde{G}_{2n+1,2}) = 0$, добијамо сличан дијаграм као претходни па је $\rho_* : H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}) \to H^{2n}(\widetilde{G}_{2n+1,2};\mathbb{Z}_2)$ такође епиморфизам и коначно $\rho_*(x_{2n}) = \widetilde{a}_{2n}$. □

3.2 Случај $k = 3$

У овом одељку ћемо у потпуности одредити интегралну кохомолошку алгебру оријентисане Грасманове многострукости $\widetilde{G}_{n,3}$ у случајевима $n = 6, 8, 10$. Кохомологија од $\widetilde{G}_{6,3}$ је одређена у [16], а у наставку ћемо видети нешто другачији доказ од тог у [16]. Кохомологије од $\widetilde{G}_{8,3}$ и $\widetilde{G}_{10,3}$ су одређене у [14] и овде ћемо те доказе изложити. Сва три доказа се базирају на примени Серовог спектралног низа на раслојење $S^2 \to W^n_{2,1} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,3}$ (видети (2.2)). Најпре је потребно одредити кохомологију тоталног простора овог раслојења.

3.2.1 Кохомологија помоћног простора $W^n_{2,1}$

Посматрајмо помоћни простор $W^n_{2,1}$ дат са

$$W^n_{2,1} = \{(\widetilde{P}, v) \in \widetilde{G}_{n,2} \times S^{n-1} \mid \widetilde{P} \perp v\}$$

и сферно раслојење $S^{n-3} \to W_{2,1}^{n} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{n,2}$, где је p_1 пројекција на прву координату. У уводу поглавља 2 видели смо да је ово раслојење управо сферно раслојење придружено векторском раслојењу $\widetilde{\gamma}_{n,2}^{\perp}$.

Теорема 3.2.1. *Нека је $n \geqslant 3$. Интегрална кохомолошка алгебра од $W_{2,1}^{2n}$ је*

$$H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\overline{x}_2, \overline{x}_{2n-2}, \overline{x}_{2n-1}]}{(\overline{x}_2^{n-1} - 2\overline{x}_{2n-2}, \overline{x}_{2n-2}^2, \overline{x}_{2n-1}^2)},$$

где је $\overline{x}_2 \in H^2(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$, $\overline{x}_{2n-2} \in H^{2n-2}(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$ и $\overline{x}_{2n-1} \in H^{2n-1}(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$.

Доказ. Посматрајмо Серов спектрални низ придружен раслојењу $S^{2n-3} \to W_{2,1}^{2n} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{2n,2}$. На основу теореме 3.1.1(а) имамо у потпуности одређену E_2 страну овог спектралног низа. У табели 3.2 представљени су генератори на E_2 страни.

$2n-3$	1		x_2		x_2^2	$\cdots$	x_2^{n-2}		$x_2^{n-1},\ x_{2n-2}$		$x_{2n-2}x_2$	$\cdots$	$x_{2n-2}x_2^{n-2}$		$x_{2n-2}x_2^{n-1}$
$\vdots$															
0	1		x_2		x_2^2	$\cdots$	x_2^{n-2}		$x_2^{n-1},\ x_{2n-2}$		$x_{2n-2}x_2$	$\cdots$	$x_{2n-2}x_2^{n-2}$		$x_{2n-2}x_2^{n-1}$
	0		2		4	$\cdots$	$2n-4$		$2n-2$		$2n$	$\cdots$	$4n-6$		$4n-4$

Табела 3.2: E_2 страна спектралног низа за раслојење $S^{2n-3} \to W_{2,1}^{2n} \to \widetilde{G}_{2n,2}$

Сваки генератор x у нултој врсти је заправо облика $x \otimes 1$, $1 \in H^0(S^{2n-3};\mathbb{Z})$, док је сваки генератор x у врсти $2n-3$ облика $x \otimes s$, где је $s \in H^{2n-3}(S^{2n-3};\mathbb{Z})$ генератор.

Како је цела друга страна спектралног низа сконцентрисана у две врсте, једини диференцијал који може бити нетривијалан је d_{2n-2}. Дакле, имамо $E_2 = E_3 = \cdots = E_{2n-2}$ и $E_{2n-1} = E_{2n} = \cdots = E_\infty$. Приметили смо да је $S^{2n-3} \to W_{2,1}^{2n} \xrightarrow{p_1} \widetilde{G}_{2n,2}$ управо сферно раслојење придружено $\widetilde{\gamma}_{2n,2}^{\perp}$, па је диференцијал d_{2n-2} множење Ојлеровом класом овог раслојења, тј. уколико користимо нотацију из теореме 3.1.1(а), имамо да је диференцијал $d_{2n-2} : E_{2n-2}^{k,2n-3} \to E_{2n-2}^{k+2n-2,0}$ дат са

$$d_{2n-2}(x \otimes s) = xe \otimes 1.$$

Како је $x_2 = e(\widetilde{\gamma}_{2n,2})$ и $e = e(\widetilde{\gamma}_{2n,2}^{\perp})$, то је $x_2 e = e(\widetilde{\gamma}_{2n,2} \oplus \widetilde{\gamma}_{2n,2}^{\perp}) = e(\varepsilon^{2n}) = 0$ (ε^{2n} означава тривијално $2n$-димензионално векторско раслојење над $\widetilde{G}_{2n,2}$), па закључујемо да је $d_{2n-2} : E_{2n-2}^{k,2n-3} \to E_{2n-2}^{k+2n-2,0}$ тривијалан сем евентуално у димензијама $k = 0, 2n-2$.

На основу теореме 3.1.1(а) имамо да је $e = 2x_{2n-2} - x_2^{n-1}$, па је

$$\operatorname{im}\left(d_{2n-2} : E_{2n-2}^{0,2n-3} \to E_{2n-2}^{2n-2,0}\right) = \mathbb{Z}\langle 2x_{2n-2} - x_2^{n-1}\rangle,$$

одакле добијамо

$$E_\infty^{2n-2,0} = E_{2n-2}^{2n-2,0} \Big/ \operatorname{im}\, d_{2n-2} = \frac{\mathbb{Z}\langle x_{2n-2}\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle x_2^{n-1}\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2x_{2n-2} - x_2^{n-1}\rangle} \cong \mathbb{Z}\langle x_{2n-2}\rangle$$

и $E_\infty^{0,2n-3} = 0$. Даље, из претходно запажене чињенице да је $x_2 e = 0$ и теореме 3.1.1(а) закључујемо да је $d_{2n-2} : E_{2n-2}^{2n-2,2n-3} \to E_{2n-2}^{4n-4,0}$ дато на генераторима са

$$d_{2n-2}(x_2^{n-1} \otimes s) = 0,\, d_{2n-2}(x_{2n-2} \otimes s) = (-1)^n x_{2n-2} x_2^{n-1} \otimes 1,$$

одакле добијамо $E_\infty^{2n-2,2n-3} \cong \mathbb{Z}\langle x_2^{n-1}\rangle$ и $E_\infty^{4n-4,0} = 0$.

Осим на ова четири места, E_∞ страна у потпуности се поклапа са E_2 страном.

Сада можемо одредити алгебарску структуру од $H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$. Имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z}) \cong \operatorname{total}(E_\infty^{*,*}), \tag{3.1}$$

где је $\operatorname{total}(E_\infty^{*,*})$ тотални комплекс (видети [23, стр. 24]), тј. имамо изоморфизам група

$$H^k(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q},$$

а множење у $H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$ је индуковано множењем у $E_\infty^{*,*}$.

Из E_∞ стране видимо да ће $H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$ имати генераторе $\bar{x}_2$, $\bar{x}_{2n-2}$ и $\bar{x}_{2n-1}$ који одговарају $x_2 \otimes 1$, $x_{2n-2} \otimes 1$ и $x_2 \otimes s$, редом, а из релација у $H^*(\widetilde{G}_{2n,2};\mathbb{Z})$ добијамо релације у $H^*(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$. На пример, генератор у $H^{4n-3}(W_{2,1}^{2n};\mathbb{Z})$ одговара генератору $x_{2n-2}x_2 \otimes s = (x_{2n-2} \otimes 1)(x_2 \otimes s)$, па мора бити једнак $\bar{x}_{2n-1}\bar{x}_{2n-2}$. $\square$

3.2.2 Основне особине кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z})$

Лема 3.2.1. *Нека је $n \geqslant 7$. Тада су прве и последње четири кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{n,3}$ дате са*

$$\begin{aligned}
&H^0(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, && H^{3(n-3)-3}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) = 0,\\
&H^1(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) = 0, && H^{3(n-3)-2}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2,\\
&H^2(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) = 0, && H^{3(n-3)-1}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) = 0,\\
&H^3(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2, && H^{3(n-3)}(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Такође, група $H^4(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z})$ је слободна.

Доказ. Посматрајмо дуги тачан низ у хомотопији за раслојење $SO(3) \to V_{n,3} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,3}$, где sp слика уређену тројку линеарно независних вектора из $\mathbb{R}^n$ у оријентисану тродимензионалну раван коју одређују. Део овог дугог тачног низа дат је у наредном дијаграму.

$$\begin{aligned} \cdots \to \pi_3(V_{n,3}) \to \pi_3(\widetilde{G}_{n,3}) \to \pi_2(SO(3)) \to \pi_2(V_{n,3}) \to \pi_2(\widetilde{G}_{n,3}) \\ \to \pi_1(SO(3)) \to \pi_1(V_{n,3}) \to \pi_1(\widetilde{G}_{n,3}) \to 0 \end{aligned}$$

Штифелова многострукост $V_{n,3}$ је $(n-4)$-повезана, па како је $n \geqslant 7$, то је $\pi_1(V_{n,3}) = \pi_2(V_{n,3}) = \pi_3(V_{n,3}) = 0$. Такође, $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ и $\pi_2(SO(3)) = 0$, па претходни дуги тачни низ постаје

$$\cdots \to 0 \to \pi_3(\widetilde{G}_{n,3}) \to 0 \to 0 \to \pi_2(\widetilde{G}_{n,3}) \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \to \pi_1(\widetilde{G}_{n,3}) \to 0.$$

Сада је очигледно $\pi_1(\widetilde{G}_{n,3}) = \pi_3(\widetilde{G}_{n,3}) = 0$ и $\pi_2(\widetilde{G}_{n,3}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Како је $\widetilde{G}_{n,3}$ 1-повезана многострукост, то ће Хуревићев хомоморфизам $h : \pi_i(\widetilde{G}_{n,3}) \to H_i(\widetilde{G}_{n,3})$ бити изоморфизам за $i = 1, 2$, а епиморфизам за $i = 3$. Коришћењем овог изоморфизма закључујемо да су прва, друга и трећа хомолошка група од $\widetilde{G}_{n,3}$ изоморфне $0, \mathbb{Z}_2$ и 0, редом. Даље, теорема о универзалним коефицијентима нам даје изоморфизам

$$H^i(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ext}(H_{i-1}(\widetilde{G}_{n,3}), \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Hom}(H_i(\widetilde{G}_{n,3}), \mathbb{Z}),$$

одакле добијамо прве четири кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{n,3}$, као и чињеницу да је $H^4(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z})$ слободна. Коначно, применом Поенкареове дуалности

$$H^{3(n-3)-i}(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}) \cong H_i(\widetilde{G}_{n,3})$$

добијамо и последње четири кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{n,3}$. □

Напомена 3.2.1. *У [16] је доказано да лема 3.2.1 важи и за $n = 6$. Наш доказ леме 3.2.1 не би прошао у случају $n = 6$ јер је $V_{6,3}$ само 2-повезана, па не бисмо могли на исти начин да закључимо да је $\pi_3(V_{6,3}) = 0$. Штавише, то није ни тачно јер се испоставља да је $\pi_3(V_{6,3}) \cong \pi_3(\widetilde{G}_{6,3}) \cong \mathbb{Z}_2$ (до овог резултата се може доћи анализом раслојења $SO(3) \times SO(3) \to SO(6) \to \widetilde{G}_{6,3}$). Међутим, и у овом случају се добије да је $H_3(\widetilde{G}_{6,3}) = 0$, па би се остатак тврђења могао доказати на исти начин као у претходној леми.*

Уколико означимо слободни део хомолошке групе $H_i(\widetilde{G}_{n,3})$ са F_i, а торзиони са T_i, тј. $H_i(\widetilde{G}_{n,3}) \cong F_i \oplus T_i$, на основу теореме о универзалним коефицијентима имамо

$$H^i(\widetilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}) \cong F_i \oplus T_{i-1}.$$

Како је $\widetilde{G}_{n,3} \approx SO(n)/(SO(3) \times SO(n-3))$ из (1.1), то знамо Поенкареов полином за $\widetilde{G}_{n,3}$ на основу [10, стр. 494-496]. Поенкареов полином нам управо открива слободне групе F_i, а како је на основу Поенкареове дуалности

$$T_i \cong T_{3(n-3)-i-1},$$

то се одређивање кохомолошких група од $\widetilde{G}_{n,3}$ своди на одређивање торзионих делова T_i за $4 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{3(n-3)}{2} \right\rfloor$.

Напомена 3.2.2. *У теореми 3.1.1 видели смо да је један од генератора кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,2};\mathbb{Z})$ управо Ојлерова класа $e(\widetilde{\gamma}_{n,2})$. Исто ће важити и у случају $k=3$. Наиме, Ојлерова класа $y_3 = e(\widetilde{\gamma}_{n,3})$ је нерастављива у $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z})$. У доказима теорема 3.2.2, 3.2.3 и 3.2.4 видећемо да је један од генератора кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{n,3};\mathbb{Z})$, за $n = 6, 8, 10$, Ојлерова класа раслојења $S^2 \to W^n_{2,1} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{n,3}$ где sp слика $(\widetilde{P}, v) \in W^n_{2,1}$ у оријентисану тродимензионалну раван коју $\widetilde{P}$ и v одређују. У уводу поглавља 2 видели смо да је ово раслојење изоморфно сферном раслојењу придруженом оријентисаном канонском векторском раслојењу $\widetilde{\gamma}_{n,3}$, па је заиста $y_3 = e(\widetilde{\gamma}_{n,3})$.*

3.2.3 Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$

Теорема 3.2.2. *Интегрална кохомолошка алгебра од $\widetilde{G}_{6,3}$ је дата са*

$$H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[y_3, x_4, x_5]}{(2y_3, y_3x_5, y_3^2, x_4^2, x_5^2)},$$

где су $y_3 \in H^3(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$, $x_4 \in H^4(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$ и $x_5 \in H^5(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$.

Доказ. Кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{6,3}$ одређене су у [16] и дате су у табели 3.3. Мултипликативну структуру ћемо одредити на други начин у односу на онај изложен у раду [16]. Знамо да је $1 \in H^0(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$ генератор. Означимо генераторе осталих

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H^k(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

Табела 3.3: Интегралне кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{6,3}$

нетривијалних група са y_3, x_4, x_5, y_7 и x_9, редом. Циљ нам је да покажемо да се y_7

и x_9 могу представити преко осталих генератора, као и да одредимо све релације у овој алгебри. Посматрајмо сада Серов спектрални низ придружен раслојењу $S^2 \to W_{2,1}^6 \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{6,3}$. У табели 3.4 видимо E_2 страну овог спектралног низа. Такође, на основу теореме 3.2.1 имамо

$$H^*(W_{2,1}^6;\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\overline{x}_2,\overline{x}_4,\overline{x}_5]}{(\overline{x}_2^2-2\overline{x}_4,\overline{x}_4^2,\overline{x}_5^2)}. \tag{3.2}$$

2	1			y_3	x_4	x_5		y_7		x_9
1										
0	1			y_3	x_4	x_5		y_7		x_9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Табела 3.4: Генератори на E_2 страни спектралног низа за сферно раслојење $S^2 \to W_{2,1}^6 \to \widetilde{G}_{6,3}$

Неке релације међу наведених пет генератора следе из тривијалности одређених група. На пример, $y_3^2=0$ јер је $y_3^2 \in H^6(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})=0$. Слично $x_4^2=0$, $x_5^2=0$ и $y_3x_5=0$. Такође, имамо и да је $2y_3=0$ јер је $H^3(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$.

Како је $H^3(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})=0$, то диференцијал $d_3: E_3^{0,2}\to E_3^{3,0}$ мора бити „на”, па је d_3 множење са y_3. Прецизније, овај диференцијал је на генератору дат са $d_3(1\otimes s) = y_3\otimes 1$, где је $s\in H^2(S^2;\mathbb{Z})$ генератор. Слично, ако је $x\in E_3^{k,2}$, онда је $d_3(x\otimes s)=xy_3\otimes 1$.

Група $E_\infty^{7,0}$ изоморфна је подгрупи слободне групе $H^7(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, те је и она сама слободна, па закључујемо да је тривијална (јер је количник од $E_2^{7,0}\cong\mathbb{Z}_2$). Самим тим, диференцијал $d_3: E_3^{4,2}\to E_3^{7,0}$ мора бити епиморфизам, стога $d_3(x_4\otimes s) = y_7\otimes 1$, тј. $y_7=x_4y_3$.

Остаје још да покажемо да је $x_9=x_4x_5$. На основу [23, теорема 5.9] имамо да је композиција

$$H^k(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})\cong E_2^{k,0}\twoheadrightarrow E_3^{k,0}\twoheadrightarrow\cdots\twoheadrightarrow E_{k+1}^{k,0}\twoheadrightarrow E_\infty^{k,0}\cong F_k^k\subseteq H^k(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})$$

управо пресликавање $sp^*: H^k(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})\to H^k(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})$. Приметимо да како је $E_2^{9,0} = E_\infty^{9,0}$, то је $sp^*: H^9(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})\to H^9(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})$ мономорфизам.

Страна E_∞ приказана је у табели 3.5.

За $k=4$ имамо да је $E_\infty^{4,0}\cong F_4^4=F_0^4=H^4(W_{2,1}^6;\mathbb{Z})$, па је у овом случају пресликавање sp^* изоморфизам, те генератор x_4 може бити одабран тако да је $sp^*(x_4)=\overline{x}_4$.

2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
1										
0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Табела 3.5: E_∞ страна спектралног низа за раслојење $S^2 \to W^6_{2,1} \to \widetilde{G}_{6,3}$

Са друге стране, за $k \in \{5, 9\}$ имамо

$$E^{k,0}_\infty = F^k_k = F^k_{k-1} = 2F^k_{k-2} = 2F^k_0 = 2H^k(W^6_{2,1}; \mathbb{Z}),$$

јер је $E^{k-2,2}_\infty \cong F^k_{k-2}/F^k_{k-1} \cong \mathbb{Z}_2$. Из овог разлога генераторе x_5 и x_9 можемо одабрати тако да је

$$sp^*(x_5) = 2\overline{x}_5,\ sp^*(x_9) = 2\overline{x}_4\overline{x}_5.$$

Коначно, имамо

$$sp^*(x_4x_5) = 2\overline{x}_4\overline{x}_5 = sp^*(x_9)$$

и sp^* је мономорфизам у димензији 9, па закључујемо да је $x_9 = x_4x_5$.

Остаје још да се уверимо да је $H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z})$ заиста изоморфна количнику из формулације теореме. Како је кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z})$ генерисана са y_3, x_4 и x_5, постоји епиморфизам

$$\Phi : \mathbb{Z}[y_3, x_4, x_5] \to H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z}).$$

На основу прве теореме о изоморфизму је

$$H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_3, x_4, x_5]/\ker\Phi,$$

па ако означимо $I := (2y_3, y_3x_5, y_3^2, x_4^2, x_5^2)$, остаје да докажемо да је $\ker\Phi = I$. Из претходног дела доказа је очигледно $I \subseteq \ker\Phi$, па имамо кратки тачни низ Абелових група

$$0 \to \ker\Phi/I \to \mathbb{Z}[y_3, x_4, x_5]/I \xrightarrow{\overline{\Phi}} H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z}) \to 0.$$

Користећи табелу 3.3, уз мало рачуна, може се проверити да су $\mathbb{Z}[y_3, x_4, x_5]/I$ и $H^*(\widetilde{G}_{6,3}; \mathbb{Z})$ изоморфне Аблеове групе. Како су ове групе коначно генерисане, епиморфизам $\overline{\Phi}$ из горњег кратког тачног низа мора бити изоморфизам. Дакле, $\ker\Phi = I$. $\square$

Слично као у пропозицији 3.1.1, коришћењем теореме о универзалним коефицијентима могу се одредити слике генератора од $H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$ при хомоморфизму ρ_*.

Напомена 3.2.3. *Нека је $\rho:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$ редукција по модулу 2 и уочимо индукован хомоморфизам $\rho_*:H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})\to H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}_2)$. Тада имамо $\rho_*(y_3)=\widetilde{w}_3$, $\rho_*(x_4)=\widetilde{a}_4$ и $\rho_*(x_5)=\widetilde{w}_2\widetilde{w}_3$, где су $\widetilde{w}_2\in H^2(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}_2)$, $\widetilde{w}_3\in H^3(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_4\in H^4(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z}_2)$ из теореме 2.3.9.*

3.2.4 Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$

Теорема 3.2.3. *Интегрална кохомолошка алгебра од $\widetilde{G}_{8,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})\cong\frac{\mathbb{Z}[y_3,x_4,x_7]}{(2y_3,y_3x_4,y_3^3,x_4^3,x_7^2)},$$

где су $y_3\in H^3(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$, $x_4\in H^4(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$ и $x_7\in H^7(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$.

Доказ. Поенкареов полином за $\widetilde{G}_{8,3}$ може се наћи у [10, стр. 496] и једнак је

$$p(\widetilde{G}_{8,3})=1+x^4+x^7+x^8+x^{11}+x^{15},$$

па знамо све слободне делове кохомолошких група. Стога, на основу дискусије из одељка 3.2.2, остаје да одредимо торзионе делове T_4,T_5,T_6 и T_7. Кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{8,3}$ дате су у табели 3.6.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	T_4	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_6$	$\mathbb{Z}\oplus T_7$	T_6	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_4$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

Табела 3.6: Интегралне кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{8,3}$

У теореми 3.2.1 доказали смо да је

$$H^*(W^8_{2,1};\mathbb{Z})\cong\frac{\mathbb{Z}[\bar{x}_2,\bar{x}_6,\bar{x}_7]}{(\bar{x}_2^3-2\bar{x}_6,\bar{x}_6^2,\bar{x}_7^2)}. \tag{3.3}$$

Посматрајмо Серов спектрални низ придружен сферном раслојењу $S^2\to W^8_{2,1}\xrightarrow{sp}\widetilde{G}_{8,3}$. Страна E_2 овог спектралног низа дата је у табели 3.7.

2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	T_4	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_6$	$\mathbb{Z}\oplus T_7$	T_6	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_4$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
1																
0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	T_4	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_6$	$\mathbb{Z}\oplus T_7$	T_6	T_5	$\mathbb{Z}\oplus T_4$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Табела 3.7: E_2 страна спектралног низа за раслојење $S^2 \to W^8_{2,1} \to \widetilde{G}_{8,3}$

Како је цео спектрални низ садржан у две врсте, једини диференцијал који може бити нетривијалан је d_3. Дакле, $E_2 = E_3$ и $E_4 = E_5 = \cdots = E_\infty$. Знамо да је $H^5(W^8_{2,1};\mathbb{Z}) = 0$, па диференцијал $d_3 : E_3^{2,2} \to E_3^{5,0}$ мора бити „на" и због тога је $T_4 = 0$. Такође, из истог разлога и $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$ мора бити „1-1", па T_5 садржи елемент реда два. Са друге стране, $H^{12}(W^8_{2,1};\mathbb{Z}) = 0$ па је и диференцијал $d_3 : E_3^{10,2} \to E_3^{13,0}$ „1-1", стога T_5 мора бити изоморфна подгрупи од $\mathbb{Z}_2$. Како T_5 садржи елемент реда два, $T_5 \cong \mathbb{Z}_2$. Пошто је $E_3^{5,2} = T_4 = 0$, диференцијал $d_3 : E_3^{5,2} \to E_3^{8,0}$ је тривијалан, па је $E_\infty^{8,0} \cong \mathbb{Z}\oplus T_7$. Из (3.3) видимо да је $H^8(W^8_{2,1};\mathbb{Z})$ слободна, па њена подгрупа $E_\infty^{8,0}$ мора такође бити слободна, тј. $T_7 = 0$. Сличан аргумент можемо применити и на $H^9(W^8_{2,1};\mathbb{Z})$. Група $H^9(W^8_{2,1};\mathbb{Z})$ је слободна, па и њена подгрупа $E_\infty^{9,0}$ мора бити слободна, а како је $E_\infty^{9,0}$ изоморфна подгрупи од T_6, закључујемо да је $E_\infty^{9,0} = 0$. Да би било $E_\infty^{9,0} = 0$, диференцијал $d_3 : E_3^{6,2} \to E_3^{9,0}$ треба бити „на", а како је $T_5 \cong \mathbb{Z}_2$, то је T_6 изоморфна подгрупи од $\mathbb{Z}_2$, па остаје још да одредимо да ли је $T_6 = 0$ или $T_6 \cong \mathbb{Z}_2$.

У табели 3.8 дате су кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{8,3}$ са $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. Врсту са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима добијамо коришћењем интегралне кохомологије и теореме о универзалним коефицијентима

$$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2) \cong \Big(H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}_2\Big) \oplus \mathrm{Tor}(H^{k+1}(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2).$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus T_6$	$\mathbb{Z}$	T_6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus T_6$	$\mathbb{Z}_2\oplus T_6$	$\mathbb{Z}_2\oplus T_6$	$\mathbb{Z}_2\oplus T_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$

Табела 3.8: Кохомологија од $\widetilde{G}_{8,3}$ са $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима

На основу примера 2.3.1, $H^6(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Из табеле 3.8 видимо да је $H^6(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus T_6$, па је $T_6 = 0$.

Дакле, одредили смо све интегралне кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{8,3}$ и оне су представљене у табели 3.9.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

Табела 3.9: Интегралне кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{8,3}$

Сада ћемо одредити мултипликативну структуру кохомолошке алгебре $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$ на сличан начин као у доказу теореме 3.2.2. Означимо најпре генераторе кохомолошких група $H^i(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$, $i \in \{3,4,6,7,8,10,11,13,15\}$, са $y_3, x_4, y_6, x_7, x_8, y_{10}, x_{11}, y_{13}, x_{15}$, редом. Ови генератори су представљени у табели 3.10.

2	1			y_3	x_4		y_6	x_7	x_8		y_{10}	x_{11}		y_{13}		x_{15}
1																
0	1			y_3	x_4		y_6	x_7	x_8		y_{10}	x_{11}		y_{13}		x_{15}
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Табела 3.10: Генератори E_2 стране спектралног низа за раслојење $S^2 \to W^8_{2,1} \to \widetilde{G}_{8,3}$

Као и код одређивања $H^*(\widetilde{G}_{6,3};\mathbb{Z})$, циљ нам је да покажемо да се генератори y_6, $x_8, y_{10}, x_{11}, y_{13}, x_{15}$ могу представити преко генератора y_3, x_4 и x_7, као и да важе релације наведене у формулацији теореме.

Из тривијалности неких кохомолошких група, одмах добијамо поједине релације. Конкретно,

$$y_3^3 = 0,\ x_4^3 = 0,\ x_7^2 = 0$$

јер ови елементи припадају тривијалним групама.

Сада ћемо одредити диференцијал d_3. Из (3.3) видимо да је $H^3(W^8_{2,1};\mathbb{Z}) = 0$, па је диференцијал $d_3 : E_3^{0,2} \to E_3^{3,0}$ епиморфизам, тј. d_3 је управо множење са y_3. Наиме, уколико означимо са $s \in H^2(S^2;\mathbb{Z})$ генератор, онда је $d_3(1 \otimes s) = y_3 \otimes 1$, па и за све $x \in E_3^{k,2}$ је $d_3(x \otimes s) = xy_3 \otimes 1$. Приметили смо да је $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$ „1-1”, а како је $E_3^{3,2} \cong E_3^{6,0} \cong \mathbb{Z}_2$, то је овај диференцијал изоморфизам, па закључујемо да је

$$y_6 = y_3^2.$$

Слично добијамо и релације

$$y_{10} = y_3 x_7,\ y_{13} = y_3 y_{10} = y_3^2 x_7.$$

Даље, диференцијал $d_3 : E_3^{4,2} \to E_3^{7,0}$ слика $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{Z}$, па је d_3 множење неким целим бројем, али како је $H^6(W_{2,1}^8;\mathbb{Z}) \cong H^7(W_{2,1}^8;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, то овај диференцијал мора бити тривијалан. Стога,

$$y_3 x_4 = 0.$$

Да бисмо показали да се и преостала три генератора x_8, x_{11} и x_{15} могу изразити преко осталих, потребно је да као и у доказу теореме 3.2.2 искористимо [23, теорема 5.9] која каже да је композиција

$$H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}) \cong E_2^{k,0} \twoheadrightarrow E_3^{k,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{k+1}^{k,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{k,0} \cong F_k^k \subseteq H^k(W_{2,1}^8;\mathbb{Z})$$

заправо пресликавање $sp^* : H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}) \to H^k(W_{2,1}^8;\mathbb{Z})$. Ако је $k \in \{4,7,8,11,15\}$, онда $E_2^{k,0} = E_\infty^{k,0}$, па је sp^* у овим димензијама инјекција. Серовом спектралном низу раслојења $S^2 \to W_{2,1}^8 \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{8,3}$ придружена је филтрација

$$0 \subseteq F_r^r \subseteq F_{r-1}^r \subseteq \cdots \subseteq F_1^r \subseteq F_0^r = H^r(W_{2,1}^8;\mathbb{Z}),$$

и при томе је $E_\infty^{p,r-p} \cong F_p^r / F_{p+1}^r$.

Када је $k \in \{4,7,11\}$ имамо $E_\infty^{k,0} \cong F_k^k = F_0^k = H^k(W_{2,1}^8;\mathbb{Z})$, па је $sp^* : H^k(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}) \to H^k(W_{2,1}^8;\mathbb{Z})$ изоморфизам. То значи да генераторе x_4, x_7 и x_{11} можемо одабрати тако да важи

$$sp^*(x_4) = \bar{x}_2^2,\ sp^*(x_7) = \bar{x}_7,\ sp^*(x_{11}) = \bar{x}_2^2\bar{x}_7. \tag{3.4}$$

Са друге стране, за $k \in \{8,15\}$ је $E_\infty^{k-2,2} \cong F_{k-2}^k / F_{k-1}^k \cong \mathbb{Z}_2$, па имамо

$$E_\infty^{k,0} \cong F_k^k = F_{k-1}^k = 2F_{k-2}^k = 2F_0^k = 2H^k(W_{2,1}^8;\mathbb{Z}).$$

Стога генераторе x_8 и x_{15} можемо одабрати тако да важи

$$sp^*(x_8) = 2\bar{x}_2\bar{x}_6,\ sp^*(x_{15}) = 2\bar{x}_2\bar{x}_6\bar{x}_7. \tag{3.5}$$

Сада на основу (3.3), (3.4) и (3.5) имамо

$$\begin{aligned} sp^*(x_8) &= 2\bar{x}_2\bar{x}_6 = \bar{x}_2^4 = sp^*(x_4^2),\\ sp^*(x_{11}) &= \bar{x}_2^2\bar{x}_7 = sp^*(x_4x_7),\\ sp^*(x_{15}) &= 2\bar{x}_2\bar{x}_6\bar{x}_7 = \bar{x}_2^4\bar{x}_7 = sp^*(x_4^2x_7). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Коначно, приметили смо да је sp^* мономорфизам у димензијама $8, 11$ и 15, па из (3.6) добијамо да важе релације

$$x_8 = x_4^2,\ x_{11} = x_4x_7,\ x_{15} = x_4^2x_7$$

у $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$.

Сада се на исти начин као у доказу теореме 3.2.2 покаже да је кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$ заиста изоморфна количнику из формулације теореме. $\square$

На сличан начин као и у пропозицији 3.1.1, може се одредити у шта се сликају генератори од $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$ у $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$ при пресликавању ρ_*.

Напомена 3.2.4. *Нека је $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ редукција по модулу 2 и уочимо индукован хомоморфизам $\rho_* : H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}) \to H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$. При овом хомоморфизму генератори од $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z})$ сликају се у генераторе од $H^*(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$. Конкретно, $\rho_*(y_3) = \widetilde{w}_3$, $\rho_*(x_4) = \widetilde{w}_2^2$ и $\rho_*(x_7) = \widetilde{a}_7$, где су $\widetilde{w}_2 \in H^2(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$, $\widetilde{w}_3 \in H^3(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$ и $\widetilde{a}_7 \in H^7(\widetilde{G}_{8,3};\mathbb{Z}_2)$ из теореме 2.3.6.*

3.2.5 Кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$

У наредној теореми доказаћемо да је кохомолошка алгебра од $\widetilde{G}_{10,3}$ изоморфна количнику полиномијалне алгебре над пет неодређених и суме идеала $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$. Како је многострукост $\widetilde{G}_{10,3}$ димензије 21, знамо да је $H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) = 0$ за $k > 21$, те ћемо за идеал $\mathcal{J}$ узети идеал генерисан свим мономима кохомолошке димензије веће од 21. Са друге стране, идеал $\mathcal{I}$ ће бити генерисан свим полиномима који одговарају релацијама у кохомолошким групама до димензије 21.

Теорема 3.2.4. *Интегрална кохомолошка алгебра од $\widetilde{G}_{10,3}$ је*

$$H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[y_3, x_4, x_9, x_{12}, x_{13}]}{\mathcal{I} + \mathcal{J}},$$

где су $y_3 \in H^3(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$, $x_i \in H^i(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$, $i = 4, 9, 12, 13$, идеал $\mathcal{I}$ је генерисан полиномима

$$2y_3,\ y_3^3,\ y_3^2x_4,\ y_3x_4^2,\ x_4^3 - 2x_{12},\ y_3x_9,\ x_4x_9 - 2x_{13},$$
$$y_3x_{13} - x_4x_{12},\ x_9^2,\ y_3^2x_{12},\ x_4^2x_{12},\ x_9x_{12} - x_4^2x_{13},$$

док је идеал $\mathcal{J}$ генерисан мономима

$$y_3^a x_4^b x_9^c x_{12}^d x_{13}^e \text{ таквим да је } 3a + 4b + 9c + 12d + 13e > 21.$$

Доказ. Поенкареов полином за $\widetilde{G}_{10,3}$ познат је из [10, стр. 496] и једнак је

$$p(\widetilde{G}_{10,3}) = 1 + x^4 + x^8 + x^9 + x^{12} + x^{13} + x^{17} + x^{21},$$

па су њиме одређени слободни делови кохомолошких група од $\widetilde{G}_{10,3}$. Из овог полинома и леме 3.2.1 добијамо да су кохомолошке групе од $\widetilde{G}_{10,3}$ са целобројним коефицијентима управо

$$H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, T_4, T_5, T_6, \mathbb{Z}\oplus T_7, \mathbb{Z}\oplus T_8, T_9, T_{10}, \mathbb{Z}\oplus T_9,$$
$$\mathbb{Z}\oplus T_8, T_7, T_6, T_5, \mathbb{Z}\oplus T_4, 0, \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}).$$

Следећи корак је да одредимо седам непознатих торзионих група.

На основу теореме 3.2.1, имамо да је

$$H^*(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\bar{x}_2, \bar{x}_8, \bar{x}_9]}{(\bar{x}_2^4 - 2\bar{x}_8, \bar{x}_8^2, \bar{x}_9^2)}. \tag{3.7}$$

Посматрајмо, као и у ранијим доказима, Серов спектрални низ придружен сферном раслојењу $S^2 \to W_{2,1}^{10} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{10,3}$, као и раслојење $SO(3) \to V_{10,3} \xrightarrow{q} \widetilde{G}_{10,3}$ где q слика тројку линеарно независних вектора у оријентисану тродимензионалну раван коју ти вектори одређују. Из [8, теорема 2.3] имамо изоморфизам алгебри

$$H^*(V_{10,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[v_8, v_9, v_{15}]}{(2v_8, v_8^2, v_9^2, v_{15}^2, v_8v_{15})}, \tag{3.8}$$

где је $v_i \in H^i(V_{10,3};\mathbb{Z})$, за $v = 8, 9, 15$.

За спектрални низ који одговара раслојењу $S^2 \to W_{2,1}^{10} \xrightarrow{sp} \widetilde{G}_{10,3}$ користићемо ознаку E, док ћемо за спектрални низ који одговара раслојењу $SO(3) \to V_{10,3} \xrightarrow{q} \widetilde{G}_{10,3}$ користити ознаку $\bar{E}$.

Једини нетривијалан диференцијал у првом спектралном низу је d_3. Како је $H^5(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z}) = 0$, то је $d_3 : E_3^{2,2} \to E_3^{5,0}$ „на”, па је $T_4 = 0$. Слично, како је $H^8(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, то слика диференцијала $d_3 : E_3^{5,2} \to E_3^{8,0}$ мора бити T_7, а како је $E_3^{5,2} = T_4 = 0$, то је и $T_7 = 0$. Даље, група $H^6(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z})$ је слободна, па је и њена подгрупа $E_\infty^{6,0}$ такође слободна, те $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$ мора бити епиморфизам. Са друге стране, $H^5(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z}) = 0$, па $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$ мора бити и мономорфизам, тј. закључујемо да је овај диференцијал изоморфизам, па је $T_5 \cong \mathbb{Z}_2$.

У табели 3.11 видимо другу страну спектралног низа E.
Како је $H^9(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, то њена подгрупа $E_\infty^{9,0}$ мора бити слободна, па $d_3 : E_3^{6,2} \to E_3^{9,0}$ слика $\mathbb{Z}_2$ на T_8, тј. група T_8 изоморфна је количнику од $\mathbb{Z}_2$. Из теореме о

2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	T_6	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus T_8$	T_9	T_{10}	$\mathbb{Z}\oplus T_9$	$\mathbb{Z}\oplus T_8$	0	T_6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
1																						
0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	T_6	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus T_8$	T_9	T_{10}	$\mathbb{Z}\oplus T_9$	$\mathbb{Z}\oplus T_8$	0	T_6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Табела 3.11: E_2 страна спектралног низа за раслојење $S^2 \to W_{2,1}^{10} \to \widetilde{G}_{10,3}$

универзалним коефицијентима имамо да је $H^8(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus T_8$, а у [18] показано је да је $H^8(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, па закључујемо $T_8 = 0$.

У табели 3.12 видимо део спектралног низа придруженог другом раслојењу. Група $H^{18}(V_{10,3};\mathbb{Z})$ је тривијална из (3.8), па је $d_3 : \bar{E}_3^{16,2} \to \bar{E}_3^{19,0}$ изоморфизам и $\bar{E}_4^{19,0} = 0$. Одавде закључујемо да је $d_2 : \bar{E}_2^{15,3} \to \bar{E}_2^{17,2}$ мономорфизам јер је ово

3	0	T_6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0
2	$\mathrm{Tor}(T_6,\mathbb{Z}_2)$	$T_6\otimes\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
1							
0	0	T_6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0
	14	15	16	17	18	19	20

Табела 3.12: Део $\bar{E}_2$ стране спектралног низа за раслојење $SO(3) \to V_{10,3} \to \widetilde{G}_{10,3}$

једини диференцијал са доменом $\bar{E}_k^{15,3}$. Са друге стране, како је $H^{19}(V_{10,3};\mathbb{Z}) = 0$ из (3.8), то овај диференцијал мора бити и епиморфизам па закључујемо да је $T_6 \cong \mathbb{Z}_2$.

Вратимо се сада на први спектрални низ и табелу 3.11. Диференцијал $d_3 : E_3^{7,2} \to E_3^{10,0}$ мора бити епиморфизам јер је $E_\infty^{10,0}$ слободна као подгрупа слободне групе $H^{10}(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z})$. Пошто је $E_3^{7,2} \cong T_6 \cong \mathbb{Z}_2$, група T_9 је или тривијална или изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Применом теореме о универзалним коефицијентима имамо да је $H^9(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus T_9$, а у [18] је показано да је ова група изоморфна групи $\mathbb{Z}_2$, па је $T_9 = 0$.

Преостаје нам да одредимо још T_{10}. У табели 3.13 приказан је други део спектралног низа за раслојење $SO(3) \to V_{10,3} \to \widetilde{G}_{10,3}$.

Из (3.8) видимо да је $H^{14}(V_{10,3};\mathbb{Z}) = 0$, па је $d_3 : \bar{E}_3^{12,2} \to \bar{E}_3^{15,0}$ изоморфизам. Стога једини диференцијал са доменом $\bar{E}_k^{11,3}$ који може бити нетривијалан је $d_2 : \bar{E}_2^{11,3} \to \bar{E}_2^{13,2}$ и он мора бити мономорфизам, јер је група $H^{14}(V_{10,3};\mathbb{Z})$ тривијална. Дакле, група T_{10} изоморфна је подгрупи од $\mathbb{Z}_2$. Из [18] имамо да је $H^{10}(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) = 0$, па

3	0	T_{10}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathrm{Tor}(T_{10}, \mathbb{Z}_2)$	$T_{10} \otimes \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
1						
0	0	T_{10}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
	10	11	12	13	14	15

Табела 3.13: Део $\bar{E}_2$ стране спектралног низа за раслојење $SO(3) \to V_{10,3} \to \widetilde{G}_{10,3}$

закључујемо да је и $T_{10} = 0$.

Коначно, интегралне кохомолошке групе дате су у табели 3.14.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

Табела 3.14: Интегрална кохомологија од $\widetilde{G}_{10,3}$

Означимо одговарајуће генераторе са $y_3, x_4, y_6, y_7, x_8, x_9, x_{12}, x_{13}, y_{15}, y_{16}, x_{17}, y_{19}, x_{21}$. Желимо да покажемо да се сви генератори могу изразити преко y_3, x_4, x_9, x_{12} и x_{13}, као и да важе релације наведене у формулацији теореме.

Једини нетривијални диференцијал у првом спектралном низу је d_3 и слично као у претходним доказима можемо закључити да је d_3 управо множење са y_3. Прецизније, уколико је $s \in H^2(S^2;\mathbb{Z})$, онда је $d_3 : E_3^{k,2} \to E_3^{k+3,0}$ дат са $d_3(x \otimes s) = xy_3 \otimes 1$.

Из (3.7) видимо да су све кохомолошке групе $H^k(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z})$ слободне. Зато су и $E_\infty^{k,0}$ све слободне, па је $d_3 : E_3^{k,2} \to E_3^{k+3,0}$ епиморфизам за $k \in \{0, 3, 4, 12, 13, 16\}$ (в. табелу 3.15), одакле добијамо да важе следеће релације

$$y_6 = y_3^2,\ y_7 = y_3x_4,\ y_{15} = y_3x_{12},\ y_{16} = y_3x_{13},\ y_{19} = y_3^2x_{13},$$

па смо генераторе y_6, y_7, y_{15}, y_{16} и y_{19} „елиминисали”, тј. изразили смо их помоћу осталих.

Поново користимо [23, теорема 5.9] која каже да је композиција

$$H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \cong E_2^{k,0} \twoheadrightarrow E_3^{k,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{k+1}^{k,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{k,0} \cong F_k^k \subseteq H^k(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z})$$

пресликавање $sp^* : H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \to H^k(W_{2,1}^{10};\mathbb{Z})$.

У табели 3.15 видимо E_3 страну спектралног низа и у њој истакнуте нетривијалне диференцијале. Такође, димензије у којима је кохомологија од $W_{2,1}^{10}$ нетривијална су подебљане.

2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
1																						
0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
	0	1	**2**	3	**4**	5	**6**	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	16	**17**	18	**19**	20	**21**

Табела 3.15: E_3 страна спектралног низа за раслојење $S^2 \to W_{2,1}^{10} \to \widetilde{G}_{10,3}$

Из табеле 3.15 видимо да за $k \in \{4, 8, 9, 12, 13, 17, 21\}$ важи $E_2^{k,0} = E_\infty^{k,0}$, па је у овим димензијама пресликавање sp^* мономорфизам.

Нека је
$$0 \subseteq F_p^p \subseteq F_{p-1}^p \subseteq \cdots \subseteq F_1^p \subseteq F_0^p = H^p(W_{2,1}^{10}; \mathbb{Z})$$
филтрација придружена првом спектралном низу. Ако $k \in \{4, 12, 13\}$ имамо да је $E_\infty^{k,0} \cong F_k^k = F_0^k = H^k(W_{2,1}^{10}; \mathbb{Z})$, па sp^* слика генератор од $H^k(\widetilde{G}_{10,3}; \mathbb{Z})$ у одговарајући генератор од $H^k(W_{2,1}^{10}; \mathbb{Z})$, тј. x_4, x_{12} и x_{13} можемо одабрати тако да важи
$$sp^*(x_4) = \bar{x}_2^2, \ sp^*(x_{12}) = \bar{x}_2^2 \bar{x}_8, \ sp^*(x_{13}) = \bar{x}_2^2 \bar{x}_9. \tag{3.9}$$

Са друге стране, за $k \in \{8, 9, 17, 21\}$ имамо
$$E_\infty^{k,0} \cong F_k^k = F_{k-1}^k = 2F_{k-2}^k = 2F_0^k = 2H^k(W_{2,1}^{10}; \mathbb{Z}),$$
јер је $E_\infty^{k-2,2} \cong F_{k-2}^k / F_{k-1}^k \cong \mathbb{Z}_2$, па можемо одабрати x_8, x_9, x_{17} и x_{21} тако да важи
$$sp^*(x_8) = 2\bar{x}_8, \ sp^*(x_9) = 2\bar{x}_9, \ sp^*(x_{17}) = 2\bar{x}_8 \bar{x}_9, \ sp^*(x_{21}) = 2\bar{x}_2^2 \bar{x}_8 \bar{x}_9. \tag{3.10}$$

Сада из (3.7), (3.9) и (3.10) добијамо
$$\begin{aligned}
sp^*(x_8) &= 2\bar{x}_8 = \bar{x}_2^4 = sp^*(x_4^2),\\
sp^*(2x_{12}) &= 2\bar{x}_2^2 \bar{x}_8 = \bar{x}_2^6 = sp^*(x_4^3),\\
sp^*(2x_{13}) &= 2\bar{x}_2^2 \bar{x}_9 = sp^*(x_4 x_9),\\
sp^*(x_{17}) &= 2\bar{x}_8 \bar{x}_9 = \bar{x}_2^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_9 = sp^*(x_4 x_{13}),\\
sp^*(x_{21}) &= 2\bar{x}_2^2 \bar{x}_8 \bar{x}_9 = \bar{x}_2^4 \bar{x}_2^2 \bar{x}_9 = sp^*(x_4^2 x_{13}) = sp^*(x_9 x_{12}),
\end{aligned}$$

а како је sp^* мономорфизам у овим димензијама, добијамо да у $H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$ важе релације

$$x_8 = x_4^2,\ 2x_{12} = x_4^3,\ 2x_{13} = x_4x_9,\ x_{17} = x_4x_{13},\ x_{21} = x_4^2x_{13} = x_9x_{12}.$$

Дакле, закључујемо да је цела алгебра $H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$ генерисана са пет генератора y_3, x_4, x_9, x_{12} и x_{13}.

Неке релације следе из тривијалности одређених кохомолошких група. Тако је рецимо $y_3^2x_4 = 0$, $y_3x_4^2 = 0$, $x_9^2 = 0$, $y_3^2x_{12} = 0$, $x_4^2x_{12} = y_3x_4x_{13} = 0$ јер се сви ови елементи налазе у тривијалним кохомолошким групама. Такође, производ y_3 и било ког другог елемента мора бити тривијалан уколико припада торзионо слободној групи, па је тако $y_3^3 = 0$ и $y_3x_9 = 0$. Даље, $y_3^ax_4^bx_9^cx_{12}^dx_{13}^e = 0$ кад год је $3a + 4b + 9c + 12d + 13e > 21$ јер је $\widetilde{G}_{10,3}$ многострукост димензије 21.

Остало је још да се уверимо да важи $y_3x_{13} = x_4x_{12}$.

Из [18, пропозиција 3.1] имамо

$$H^4(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle\widetilde{w}_2^2\rangle,\ H^{12}(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle\widetilde{a}_{12}\rangle,\ H^{16}(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle\widetilde{w}_2^2\widetilde{a}_{12}\rangle,$$

а природност у теореми о универзалним коефицијентима даје следећи комутативни дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & \mathrm{Hom}(H_k(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^k(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_k(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

За $k = 4$ је

$$\mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(H_{k-1}(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}_2) = 0$$

и хомоморфизам $\rho_* : \mathrm{Hom}(H_4(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_4(\widetilde{G}_{10,3}),\mathbb{Z}_2)$ је „на", па је и $\rho_* : H^4(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \to H^4(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}_2)$ „на". Дакле, $\rho_*(x_4) = \widetilde{w}_2^2$. Слично важи и за $k = 12$, па је $\rho_*(x_{12}) = \widetilde{a}_{12}$. Коначно, $\rho_*(x_4x_{12}) = \widetilde{w}_2^2\widetilde{a}_{12} \neq 0$, па је $x_4x_{12} \neq 0$, тј. $x_4x_{12} = y_3x_{13}$.

Слично као у доказу теореме 3.2.2 показује да је кохомолошка алгебра $H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z})$ изоморфна количнику из формулације теореме. $\square$

Напомена 3.2.5. *Како је $\mathbb{Z}[y_3, x_4, x_9, x_{12}, x_{13}]$ Нетерин прстен, могуће је наћи коначан скуп генератора за идеал $\mathcal{I}+\mathcal{J}$ из теореме 3.2.4. Један начин да се добије овај коначан скуп генератора је да кренемо од генератора идеала $\mathcal{I}$ и онда да проверавамо редом мономе $y_3^ax_4^bx_9^cx_{12}^dx_{13}^e$ где је $3a + 4b + 9c + 12d + 13e = k$ за $k = 22, 23, 24, \ldots$ и уколико* *неки $y_3^a x_4^b x_9^c x_{12}^d x_{13}^e$ није у $\mathcal{I}$, додамо га на листу генератора идеала $\mathcal{I}+\mathcal{J}$. Ову проверу довољно је урадити до димензије 34 јер је сваки моном $y_3^a x_4^b x_9^c x_{12}^d x_{13}^e$ степена већег од 34 дељив неким мономом степена између 22 и 34.*

Када обавимо описану процедуру видимо да је на генераторе од $\mathcal{I}$ потребно додати још само четири нова генератора. Наиме, $\mathcal{I}+\mathcal{J}$ је генерисан генераторима од $\mathcal{I}$ и додатно мономима $x_9x_{13}, x_{12}^2, x_{12}x_{13}$ и x_{13}^2.

Коначно, кохомолошка алгебра од $\widetilde{G}_{10,3}$ је

$$H^*(\widetilde{G}_{10,3};\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[y_3,x_4,x_9,x_{12},x_{13}]}{\mathcal{K}},$$

где је идеал $\mathcal{K}$ генерисан полиномима

$$\begin{aligned}
&2y_3,\ y_3^3,\ y_3^2x_4,\ y_3x_4^2,\ x_4^3-2x_{12},\ y_3x_9,\ x_4x_9-2x_{13},\\
&y_3x_{13}-x_4x_{12},\ x_9^2,\ y_3^2x_{12},\ x_4^2x_{12},\ x_9x_{12}-x_4^2x_{13},\\
&x_9x_{13},\ x_{12}^2,\ x_{12}x_{13},\ x_{13}^2.
\end{aligned}$$

Напомена 3.2.6. *Слично као и у напоменама 3.2.3 и 3.2.4, ако је $\rho:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$ редукција по модулу 2, онда се испоставља да је*

$$\rho_*(y_3)=\widetilde{w}_3,\ \rho_*(x_4)=\widetilde{w}_2^2,\ \rho_*(x_9)=\widetilde{w}_2^3\widetilde{w}_3,\ \rho_*(x_{12})=\widetilde{a}_{12},\ \rho_*(x_{13})=\widetilde{a}_{13},$$

где су $\widetilde{w}_2,\widetilde{w}_3,\widetilde{a}_{12}$ и $\widetilde{a}_{13}$ генератори из теореме 2.3.2.

3.3 Преглед познатих резултата за $k\geqslant 4$

Интегрална кохомологија оријентисаних Грасманијана је засада слабо испитана. Видели смо већ у случају $k=3$ да тренутно имамо потпун опис интегралне кохомологије само за $n\in\{6,8,10\}$. Осим Поенкареових полинома (који се рецимо могу прочитати из [10, стр. 494–496]), мало тога се зна о кохомологији од $\widetilde{G}_{n,k}$, $k\geqslant 4$. У скорије време, напредак у испитивању $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$ за $k\geqslant 4$ остварили су Мацангос и Вент у [21], а у овом одељку ћемо навести пар главних резултата из тог рада, као и нека очекивања аутора.

Познато је да у интегралној кохомологији Грасманових многострукости $G_{n,k}$ може бити само 2-торзије, па се природно поставља питање да ли то важи и код оријентисаних Грасманових многострукости $\widetilde{G}_{n,k}$. У теоремама 3.2.2, 3.2.3 и 3.2.4 се јесте појавила само 2-торзија, али ово неће важити за произвољно n. Наиме, у [21, теорема 8.8] је доказана следећа теорема.

Теорема 3.3.1. *Нека је $t\geqslant 4$.*

(а) *Постоји класа реда 4 у* $H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t-1,5};\mathbb{Z})$.

(б) *Постоји класа реда 4 у* $H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{2^t,6};\mathbb{Z})$.

Са друге стране, испоставља се да ништа осим 4-торзије не може да се појави у $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$, о чему говори наредна теорема (в. [21, последица 3.2]).

Теорема 3.3.2. *У интегралној кохомологији оријентисане Грасманове многострукости може се појавити само 2-торзија или 4-торзија, тј.*

$$4\,\mathrm{Tor}\left(H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})\right) = 0.$$

У [21, претпоставка 8.6] су наведене и неке претпоставке, које су мотивисане компјутерском провером мањих димензија. Конкретно, аутори очекују да ће важити следећа четири тврђења.

(1) Ако је $k \leqslant 4$, онда у $H^*(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$ нема 4-торзије.

(2) Ако је $1 < k < 2^t - 1$ и k непаран, онда у $H^*(\widetilde{G}_{2^t,k};\mathbb{Z})$ нема 4-торзије.

(3) Ако је $k \geqslant 6$ паран, и ако означимо

$$c = \min\left\{k(n - 2^{t-1}) + 2^{t-1} - 2, 2^t - 2\right\},$$

онда постоји класа реда 4 у $H^{c+1}(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$.

(4) Нека је $k \geqslant 5$ непарно, $t \geqslant 5$ и $2^{t-1} < n < 2^t$. Ако је $n > \frac{k+1}{k}2^{t-1}$, онда постоји класа реда 4 у $H^{2^t-1}(\widetilde{G}_{n,k};\mathbb{Z})$.

Литература

[1] S. Basu, P. Chakraborty, *On the cohomology algebra and upper characteristic rank of Grassmannian of oriented 3-planes*, J. Homotopy Relat. Struct. 15 (2020), 27–60.

[2] V. Bartík, J. Korbaš, *Stiefel-Whitney characteristic classes and parallelizability of Grassmann manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 33 (1984), 19–29.

[3] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1993).

[4] A. Borel, *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes*, Comm. Math. Helv. 27 (1953), 165–197.

[5] E. H. Brown, *The Cohomology of BSO_n and BO_n with Integer Coefficients*, Proc. Am. Math. Soc. 85(2) (1982), 283–288.

[6] U. A. Colović, M. Jovanović and B. I. Prvulović, *Cohomology rings of oriented Grassmann manifold $\widetilde{G}_{2^t,4}$*, arXiv:2410.09323

[7] U. A. Colović, B. I. Prvulović, *Gröbner bases in the mod 2 cohomology of oriented Grassmann manifolds $\widetilde{G}_{2^t,3}$*, Math. Slovaca 74(1) (2024), 195–208.

[8] M. Čadek, M. Mimura, J. Vanžura, *The cohomology rings of real Stiefel manifolds with integer coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. 43-2 (2003), 411–428.

[9] T. Fukaya, *Gröbner bases of oriented Grassmann manifolds*, Homol. Homotopy Appl. 10:2 (2008), 195–209.

[10] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology, Volume III: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, (1976).

[11] J. R. Harper, *Secondary Cohomology Operations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc. (2002).

[12] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[13] W.-C. Hsiang, *On Wu's formula of Steenrod squares on Stiefel-Whitney classes*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 8 (1963), 20–25.

[14] M. Jovanović, *On integral cohomology algebra of some oriented Grassmann manifolds*, Indag. Math. 35 (2024), 1–15.

[15] M. Jovanović, B. I. Prvulović, *On the mod 2 cohomology algebra of oriented Grassmannians*, J. Homotopy Relat. Struct. 19 (2024), 379–396.

[16] M. Kalafat, E. Yalçinkaya, *Algebraic topology of special Lagrangian manifolds*, Indag. Math. 32 (2021), 579–597.

[17] J. Korbaš, *The characteristic rank and cup-length in oriented Grassmann manifolds*, Osaka J. Math. 52 (2015), 1163–1172.

[18] J. Korbaš, T. Rusin, *A note on the $\mathbb{Z}_2$-cohomology algebra of oriented Grassmann manifolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo 2(65) (2016), 507–517.

[19] J. Korbaš, T. Rusin, *On the cohomology of oriented Grassmann manifolds*, Homol. Homot. Appl. 18 (2016), 71–84.

[20] H.-F. Lai, *On the topology of the even-dimensional complex quadrics*, Proc. Am. Math. Soc. 46-3 (1974), 419–425.

[21] Á. Matszangosz, M. Wendt, *4-torsion classes in the integral cohomology of oriented Grassmannians*, arXiv:2403.06897.

[22] Á. Matszangosz, M. Wendt, *The mod 2 cohomology rings of oriented Grassmannians via Koszul complexes*, Math. Z. 308 (2024), 2.

[23] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Second Edition, Cambridge University Press, (1976).

[24] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Ann. of Math. Studies 76, Princeton University Press, New Jersey (1974).

[25] R. E. Mosher, M. C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory*, Harper & Row, New York (1968).

[26] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Characteristic rank of canonical vector bundles over oriented Grassmann manifolds* $\widetilde{G}_{3,n}$, Topology Appl. 230 (2017), 114–121.

[27] B. I. Prvulović, M. Radovanović, *On the characteristic rank of vector bundles over oriented Grassmannians*, Fund. Math. 244 (2019), 167–190.

[28] T. Rusin, *A note on the cohomology ring of the oriented Grassmann manifolds* $\widetilde{G}_{n,4}$, Arch. Math. (Brno), 55(5) (2019), 319–331.

[29] J. Vanžura, *The cohomology of* $\widetilde{G}_{m,2}$ *with integer coefficients*, The 18th Winter School "Geometry and Physics"(Srní, 1998). Rend. Circ. Mat. Palermo 2(Suppl. 59) (1999), 201–208.

[30] W. T. Wu, *Les i-carrés dans une variété grassmannienne*, C.R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 918–920.

Биографија

Милица Јовановић је рођена 6. јула 1993. у Крагујевцу. Завршила је Прву крагујевачку гимназију 2012. године као матурант генерације. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, завршила је 2017. године са просеком 9,93. Мастер студије на Математичком факултету завршила је 2018. године са просеком 10,00, одбраном мастер рада *Стинродови квадрати* под менторством проф. др Синише Врећице, након чега је уписала докторске студије на Катедри за топологију.

Од 2017. године је запослена на Математичком факултету као сарадник у настави, док је у звање асистента изабрана 2019. године.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милица Јовановић

број уписа 2015/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Кохомолошка алгебра Грасманових многострукости оријентисаних тродимензионалних равни у еуклидском простору

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 27.12.2024.

Милица Јовановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милица Јовановић

Број уписа 2015/2018

Студијски програм Математика

Наслов рада Кохомолошка алгебра Грасманових многострукости оријентисаних тродимензионалних равни у еуклидском простору

Ментор проф. др Бранислав Првуловић

Потписани Милица Јовановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 27. 12. 2024.

Милица Јовановић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Кохомолошка алгебра Грасманових многострукости оријентисаних тродимензионалних равни у еуклидском простору

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 27. 12. 2024.

Милица Јовановић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.