

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Извештај Комисије за оцену докторске дисертације кандидата Катарине Лукић

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на седници 13.09.2024. године именовани смо у Комисију за оцену докторске дисертације „Принципи псеудо-Риманових Осерманових тензора и многострукости“ кандидата Катарине Лукић.

Биографија кандидата

Катарина Лукић је завршила основну школу и Математичку гимназију у Београду као ученик генерације са просечном оценом 5, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике. Њен матурски рад на тему „Вероватноћа и њене примене у пракси“, објављен је у зборнику „Најбољи матурски радови“, Задужбине Андрејевић, 2014. године. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписала је 2013. године и дипломирала 2017. године са просечном оценом 10. Током студија је више пута награђивана као један од најбољих студената у генерацији, а 2015. године је освојила друго место на такмичењу студената математике „MATF CHALLENGE“. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписала је 2017. године и дипломирала 2018. године одбравивши мастер рад „О Хопфовим фибрацијама“, под менторством проф. др Владице Андрејића, са просечном оценом 10. Докторске студије на Катедри за геометрију Математичког факултета у Београду уписала је 2018 године. На докторским студијама је положила све предвиђене испите са просечном оценом 10.

Катарина Лукић је запослена на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2017. године, у звању сарадник у настави до 2019. године, а затим као асистент до данас. Држала је вежбе на курсевима Аналитичка геометрија, Основи геометрије, Геометрија 1, Геометрија 2, Геометрија 5 на основним академским студијама Математичког факултета и Биоматематика на основним академским студијама Биолошког факултета. У Математичкој гимназији у Београду запослена је од 2017. године као спољни сарадник у образовању средњошколаца, а од тада је ангажована и као предавач у оквиру Школе младих математичара за 5. и 6. разред, као и за извођење додатних настава за ученике 7. разреда Математичке гимназије.

Катарина Лукић је учествовала на више међународних конференција. Била је члан Организационог одбора међународне конференције XXI Geometrical seminar, одржане у Београду 2022. године. На научним конференцијама одржала је пет предавања (четири из области дисертације):

- XIII Symposium Mathematics and Applications 2023. године, О постојању алгебарског тензора кривине за дате Јакобијеве операторе,
- The 9th International conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems, Noncommutative integrability in cosymplectic geometry
- XXII Geometrical seminar, The Jacobi-orthogonality and Osserman tensors,
- 15. Српски математички конгрес, О Јакоби-ортогоналности у Римановој и псеудо-Римановој геометрији
- XIV Symposium Mathematics and Applications 2024. године „Квази-Клифордови тензори“.

Била је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије „Геометрија, образовање, визуелизација са применама“ под бројем 174012, од 2018. до 2019. године.

Библиографија кандидата

Катарина Лукић је објавила пет научних радова (од чега су четири из области дисертације)

[A] V. Andrejić, K. Lukić, On quasi-Clifford Osserman curvature tensors, *Filomat* 33 (2019), 1241–1247. (M22, IF2019 0.848)

[B] V. Andrejić, K. Lukić, On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators, *Filomat* 37 (2023), 8465–8471. (M22, IF2021 0.988)

[C] B. Jovanović, K. Lukić, Integrable systems in cosymplectic geometry, *J. Phys. A, Math. Theor.* 56 (2023), 015201. (M21, IF2021: 2.331)

[D] V. Andrejić, K. Lukić, The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds, *Acta Math. Hungar.* 173 (2024), 246–252. (M 22, IF2022: 0.9) arXiv:2308.14851 [math.DG],

[E] K. Lukić, The Jacobi-orthogonality in indefinite scalar product spaces, *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* 115 (2024), 33–44. arXiv:2308.16655 [math.DG].

Предмет дисертације

Кривина је најважнија инваријанта псеудо-Риманове геометрије. По Осерману, појам кривине је један од централних концепата диференцијалне геометрије који раздваја геометријско језгро предмета изучавања од оних аспеката који су аналитички, алгебарски или тополошки. Информација о кривини садржана је у тензору кривине са којим је тешко радити упркос многим симетријама које поседује. Издвајање геометријске информације која се тамо налази је прилично изазован задатак. Уместо да радимо сасамим тензором

кривине, често користимо Јакобијеве операторе или секционе кривине са којима је лакше радити, а имају бољу геометријску интерпретацију.

Космолошки принцип је филозофска претпоставка (која је и експериментално потврђена) по којој наш положај у Васиони ни по чему није специјалан, те да је на довољно великој скали просторна дистрибуција материје у васиони хомогена и изотропна. Најлепше и најједноставније псеудо-Риманове многострукости су управо хомогене и изотропне, што се у Римановој геометрији своди на две-тачке хомогене многострукости, што су простори који имају одлику да се сваки пар тачака може трансформисати, у смислу одговарајуће изометрије, у било који пар тачака са истим растојањем између њих.

Две-тачке хомогене многострукости су својеврсни модел простори, веома добри примери са којима упоређујемо апстрактне многострукости тражећи заједничке особине. Као последица потпуне класификације ових модел простора, познато је да је локално две-тачке хомогена Риманова многострукост или равна или локално изометрична симетричном простору ранга један. Конкретно, модел Риманове многострукости су еуклидски простори, сфере, те реални, комплексни или кватернионски, пројективни или хиперболички простори, као и Кејлијева пројективна или хиперболичка раван.

Локалне изометрије локалних две-тачке хомогених простора дејствују транзитивно на јединичном сферном раслојењу, те зато тамо фиксирају карактеристични полином Јакобијевог оператора. То нас мотивише да дефинишемо Осерманове многострукости у којима карактеристични полином Јакобијевог оператора не зависи од избора вектора из јединичног тангентног раслојења.

Недостатак других примера усмерило је Осермана да размишља о обратном тврђењу. Питање да ли је свака Осерманова Риманова многострукост локално две-тачке хомогена познато је под именом Осерманова хипотеза, и то је једно од суштинских питања Риманове геометрије. Основна идеја је изучавање једноставних и елегантних особина тензора кривине које нису одмах видљиве, а које су блиске Осермановим тензорима, што би нам омогућило боље разумевање Осерманових многострукости и самим тим нас примакло ближе решењу Осерманове хипотезе.

Принцип дуалности је особина да је Y сопствени вектор Јакобијевог оператора J_X ако и само ако је X сопствени вектор Јакобијевог оператора J_Y . Овај принцип је поставио Ракић, а касније се испоставило да је Риманов тензор Осерманов ако и само ако задовољава принцип дуалности, док је сам принцип омогућио велики продор у решавању Осерманове хипотезе кроз серију радова Николајевског.

Принцип пропорционалности је увео Андрејић као појачање принципа дуалности, а испоставља се да он важи за све познате Осерманове тензоре. Принцип ортогоналности је нов концепт по којем је $J_X Y$ ортогонално на $J_Y X$ ако и само ако је X ортогонално на Y .

Приказ дисертације

Дисертација је написана на xv + 160 стране и састоји се од пет глава и додатка. На крају је списак литературе од 71 библиографских јединица, индекс појмова и индекс имена.

Прва глава „Псеудо-Риманова геометрија“ је уводног карактера и у њој је дат преглед основних појмова из диференцијалне геометрије који су неопходни за разумевање дисертације.

Друга глава „Егзистенција алгебарског тензора кривине“ је посвећена доказивању теореме о егзистенцији алгебарског тензора кривине који је одређен фамилијом Јакобијевих оператора која је објављена у раду [B].

У трећој глави „Јакоби-дуалност и квази-Клифордски тензори“ приказана је Осерманова хипотеза и принцип дуалности у Римановом случају, као и уопштења Осерманових услова и принципа дуалности у псеудо-Римановом случају. У наставку су приказани резултати из рада [A]. Уведени су квази-Клифордски тензори користећи уопштење Клифордове фамилије и доказано је да су они Осерманови. Дати су неки довољни услови под којима важи потпуни принцип дуалности за квази-Клифордове тензоре, а представљен је и пример псеудо-Римановог Осермановог тензора за који не важи принцип дуалности.

Четврта глава „Јакоби пропорционалност“ посвећена је принципу пропорционалности. Испоставља се да он важи за све познате Риманове Осерманове тензоре, представљени су резултати из рада [B] везани за принцип пропорционалности у псеудо-Римановом случају, као и значајне примене принципа пропорционалности у Римановом случају повезани са Осермановом.

Пета глава „Јакоби ортогоналност“ посвећена је резултатима рада [D]. Уведен је принцип ортогоналности као нова потенцијална карактеризација Риманових Осерманових алгебарских тензора кривине. Принцип ортогоналности је нов концепт по којем је $J_X Y$ ортогонално на $J_Y X$ за свака два међусобно ортогонална X и Y . Доказано је да јесваки Риманов Јакоби-ортогоналан тензор Осерманов, док су сви познати Риманови Осерманови тензори Јакоби-ортогонални. У наставку приказани су резултати објављени у самосталном раду [E]. Уопштен је појам Јакоби-ортогоналности псеудо-Риманов случај. Упоредљиви су различити принципи и утврђиване везе између Осерманових, Јакоби-дуалних и Јакоби-ортогоналних алгебарских тензора кривине. Показано је да је сваки квази-Клифордски тензор Јакоби-ортогоналан. Доказано је да је Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан тензор Јакоби-дуалан кадгод J_X нема изотропних сопствених вектора за свако дефинитно X . Показано је да је сваки алгебарски тензор кривине димензије 3 Јакоби-ортогоналан ако и само ако је константне секционе кривине. Доказано је да је сваки 4-димензиони Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине Јакоби-ортогоналан ако и само ако је Осерманов.

У додатку А дат је преглед још неких корисних резултата из линеарне алгебре, топологије, диференцијалне геометрије и тензорског рачуна.

Закључак и предлог комисије

Резултати до којих је Катарина Лукић дошла у свом раду дају значајан допринос диференцијалној и псеудо-Римановој геометрији. Кандидаткиња је објавила четири научна рада из области дисертације (од чега један самосталан) и још један рад који није из области дисертације. Резултати из дисертације је до сада презентовала на две научне конференције.

Теза је написана јасно, са врло детаљним доказима и извођењима и као таква може послужити свим истраживачима који желе да се упознају са овом области истраживања.

Због свега наведеног, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати предложени текст „Принципи псеудо-Риманових Осерманових тензора и многострукости“ као докторску дисертацију докторанда Катарине Лукић и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду 12.12. 2024.

др Зоран Ракић, ред. проф.


др Иван Димитријевић, ванр. проф

др Божидар Јовановић, научни саветник,

Математички институт САНУ