

Универзитет у Београду  
Грађевински факултет  
Одсек за геодезију и геоинформатику

Марко Д. Станковић, дипл. инж. геод.

**ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ  
МОДЕЛИРАНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА  
ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА**

Докторска дисертација

Београд, 2024.

**University of Belgrade  
Faculty of Civil Engineering  
Department of Geodesy and Geoinformatics**

**Marko D. Stanković, M.Sc. in Geodesy**

**DETERMINATION OF QUASIGEOID USING MODELED  
ANOMALY POTENTIAL FUNCTIONAL VALUES**

**Doctoral Dissertation**

**Belgrade, 2024.**

## ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

### **Ментор:**

В. проф. др Олег Р. Одаловић, дипл. инж. геод.  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

### **Чланови комисије:**

Проф. др Драган М. Благојевић, дипл. инж. геод.  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Доц. др Сања М. Грекуловић, дипл. инж. геод.  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Проф. др Владимир Булатовић, дипл. инж. геод.  
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука

Датум одбране: \_\_\_\_\_, Београд.

# ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ МОДЕЛИРАНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

## РЕЗИМЕ

Тема дисертације је одређивање површи квазигеоида високе резолуције и центиметарске тачности у локалном подручју.

За потребе истраживања изабрана су три подручја: Р. Србија, регион Оверња (Француска) и држава Колорадо (САД).

У истраживању су постављени и испуњени кључни услови који су специфични за развијену методологију у дисертацији. Поступак одређивања квазигеоида је базиран искључиво на коришћењу јавно доступних података, помоћу којих су моделиране дуготаласне и краткоталасне карактеристике аномалије висине и елипсоидне корекције, у циљу одређивања укупног сигнала аномалије висине. При томе је остварен још један значајан услов, а то је постизање коначног циља без потребе за терестричким мерењима, као што је детаљни гравиметријски премер. На овај начин, из поступка моделирања укупног сигнала изостављена је средњеталасна компонента аномалије висине, која се иначе одређује терестричким мерењима. Ово је значајно поједноставило поступак моделирања површи квазигеоида.

У поступку је на свакој изабраној тачки која је претходно одређена помоћу геодетских координата  $(B, L, h)$ , моделирана тројка параметара  $(\zeta^{EGM2008}, \zeta^{RTM}, EK)$  чијим сабирањем је одређена укупна вредност сигнала аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$ .

Дуготаласна карактеристика аномалије висине  $\zeta^{EGM2008}$  моделирана је коришћењем глобалног геопотенцијалног модела **EGM2008**. Затим је моделирана краткоталасна карактеристика аномалије висине  $\zeta^{RTM}$  применом резидуалног модела топографије **RTM**, који је одређен из дигиталног модела терена **DTM** развијеног на основу података **SRTM** мисије. Коначно, као последњи параметар је срачуната елипсоидна корекција **EK** у односу на референтни елипсоид **GRS80**.

Прво су одређене дискретне (укупне) вредности аномалија висине на тачкама нивелмана високе тачности (**GPS/dh** тачке), које су затим тестиране у поступку спољашње провере на основу четворопараметарске трансформације резултата и **MHK** оцене параметара трансформације.

Потом је развијен GRID резолуције  $5' \times 5'$  на изабраним подручјима, а избор резолуције грида био је условљен резолуцијом коришћеног глобалног геопотенцијалног модела, односно **EGM2008** чија је резолуција такође  $5' \times 5'$ .

Коначно, на таквом гриду су моделиране дискретне вредности аномалије висине за подручја од интереса и у поступку предикције су одређене површи локалних квазигеоида.



Због различитих конфигурација терена у подручјима од интереса, њихових различитих површина, као и просторних распореда тачака нивелмана високе тачности на тим подручјима, развијена су три различита поступка спољашње провере моделираних дискретних вредности аномалија висина, што је омогућило оцену квалитета добијених резултата и осигурало репродуктивност и транспарентност поступка.

Методологија је развијена у складу са поменутиим условима, чиме је добијена ефикасна, брза и економична метода за одређивање локалне површи квазигеоида за потребе топографског премера, инжењерских пројеката и сличних геодетских радова у којима је центиметарска тачност задовољавајућа.

**Кључне речи:** квазигеоид, геоид, аномалија висине, ундулација, елипсоидна висина, нормална висина, ортометријска висина, глобални геопотенцијални модел, резидуални модел топографије, елипсоидна корекција, функционали аномалијског потенцијала.

# DETERMINATION OF QUASIGEOID USING MODELED ANOMALY POTENTIAL FUNCTIONAL VALUES

## ABSTRACT

The topic of the dissertation is the determination of a high-resolution and centimeter-accuracy quasigeoid surface in a local area.

Three areas were selected for the research: the Republic of Serbia, the Auvergne region (France), and the state of Colorado (USA).

The research established and met the following key conditions specific to the methodology developed in the dissertation. Namely, the quasi-geoid determination process was based exclusively on the use of publicly available data, through which the long-wavelength and short-wavelength characteristics of the height anomaly and ellipsoidal corrections were modeled to determine the total height anomaly signal. Another significant condition was achieved – reaching the final goal without the need for terrestrial measurements, such as detailed gravimetric surveys. In this way, the medium-wavelength component of the height anomaly, which is usually determined by terrestrial measurements, was excluded from the total signal modeling process. This significantly simplified the quasi-geoid surface modeling procedure.

In the procedure, at each selected point previously determined using geodetic coordinates ( $B$ ,  $L$ ,  $h$ ), a set of three parameters ( $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$ ,  $EK$ ) was modeled, whose sum provided the total value of the height anomaly signal  $\zeta^{LMQG}$ .

The long-wavelength characteristic of the height anomaly  $\zeta^{EGM2008}$  was modeled using the global geopotential model **EGM2008**. Then, the short-wavelength characteristic of the height anomaly  $\zeta^{RTM}$  was modeled using the Residual Terrain Model (**RTM**), derived from the Digital Terrain Model (**DTM**) based on **SRTM** mission data. Finally, the ellipsoidal correction  $EK$  was calculated relative to the **GRS80** reference ellipsoid.

First, discrete (total) values of height anomalies at high-accuracy leveling points (**GPS/dh** points) were determined and then tested in an *external checking process* using a four-parameter transformation of the results and a **LSM** estimation of the transformation parameters.

Subsequently, a grid with a resolution of  $5' \times 5'$  was developed for the selected areas. The grid resolution was constrained by the resolution of the global geopotential model used, namely **EGM2008**, which also has a resolution of  $5' \times 5'$ .

Finally, on such a grid, discrete values of height anomalies were modeled for areas of interest, and in the prediction process, the surfaces of local quasi-geoids were determined.

Due to the different terrain configurations in the areas of interest, their varying sizes, as well as the spatial arrangements of high-precision leveling points in those areas, three distinct *external checking procedures* for the modeled discrete values of height anomalies were developed. This enabled the quality assessment of the obtained results and ensured the reproducibility and transparency of the process.

The methodology was developed in accordance with the mentioned conditions, resulting in an efficient, fast, and economical method for determining local quasi-geoid surfaces for topographic surveying, engineering projects, and similar geodetic works where centimeter-level accuracy is satisfactory.

Keywords: quasi-geoid, geoid, height anomaly, undulation, ellipsoidal height, normal height, orthometric height, global geopotential model, residual terrain model, ellipsoidal correction, anomaly potential functional.

## ПРЕДГОВОР

Многе методе су предложене и развијане од стране више аутора које су имале за циљ моделирање површи локалних квазигеоида у оквиру којих су те површи одређиване посредством дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне карактеристике функционала аномалијског потенцијала, тј. аномалије висине.

Разлика између досадашњих метода и методе која је примењена у овој дисертацији је та што се одређивање површи квазигеоида постиже искључиво на основу дуготаласне и краткоталасне карактеристике аномалије висине и елипсоидне корекције.

Циљ ове методе је био да се изоставе терестричка мерења, односно одређивање средњеталасне карактеристике која зависи од њих, и да се на тај начин поступак сведе на коришћење података који су јавно доступни преко јавних сервиса на интернету.

Дакле предмет научног истраживања јесте одређивање површи квазигеоида у локалном подручју под следећим условима:

- одређивање дуготаласне и краткоталасне карактеристике треба постићи коришћењем јавно доступних података,
- поступак моделирања треба извести без терестричких мерења, односно без укључивања дуготаласне карактеристике која се одређује на основу терестричких мерења,
- одређена површ локалног квазигеоида треба да има високу резолуцију и
- тако добијени квазигеоид треба да задовољи високе стандарде тачности (центиметарска тачност).

Дисертација је сачињена из десет поглавља:

1. Увод
2. Теорија потенцијала силе Земљине теже
3. Проблеми граничних вредности теорије потенцијала силе Земљине теже
4. Методологије одређивања квазигеоида и геоида
5. Извори за моделирање параметара аномалијског потенцијала
6. Методологија одређивања квазигеоида применом GGM и DTM
7. Нумеричка истраживања
8. Закључак и препоруке за даља истраживања
9. Литература
10. Прилози

Поглавље „Теорија потенцијала силе Земљине теже“ обухвата основне концепте теорије потенцијала неопходне у истраживању. У овом контексту су детаљно разрађени и објашњени појмови реалног и нормалног потенцијала силе Земљине теже. Поред тога, потенцијал је анализиран кроз проблеме одређивања унутрашњег и спољашњег потенцијала, при чему је акценат стављен на објашњење аномалијског потенцијала и његових функционала. Уведени су појмови сферних хармоника, путем којих су представљени функционали аномалијског потенцијала. Ово поглавље се завршава објашњењем координатних система и референтних висинских (нивоских) површи.

Преко концепта представљеног у претходном поглављу дефинисана је логична основа за даље разрађивање проблематике у наредном поглављу „**Проблеми граничних вредности теорије потенцијала силе Земљине теже**“, у ком су представљена решења првог, другог и трећег проблема граничних вредности теорије потенцијала.

Затим су у поглављу „**Методологије одређивања квазигеоида и геоида**“ представљене неке од методологија које служе за моделирање површи квазигеоида и геоида. Ово поглавље је практично послужило за поређење методологије развијене у истраживању у дисертацији са већ постојећим методологијама.

Поглавље „**Извори за моделирање параметара аномалијског потенцијала**“ садржи детаљно објашњење свих карактеристика аномалије висине коришћених у моделирању. Посебан акценат је стављен на дуготаласну и краткоталасну карактеристику, јер су оне коришћене у истраживању.

Наредно поглавље „**Методологија одређивања квазигеоида применом GGM и DTM**“ има централно место у дисертацији у ком је теоријски објашњена предложена методологија. У овом поглављу је детаљно представљена методологија која је у наредном поглављу разрађена у математичком смислу.

Поглавље „**Нумеричка истраживања**“ садржи детаљно објашњење поступака рачунања и анализу резултата у оквиру предложене методологије. Овде је детаљно разрађен математички апарат који је заснован на теоријским концептима представљеним у претходном поглављу. Такође, овде су наведени извори јавно доступних података који су коришћени у методологији.

Коначно, у поглављу „**Закључак и препоруке за даља истраживања**“ су сумирани коначни резултати и налази истраживања. Овде су дате и препоруке за будућа истраживања, указујући на потенцијалне правце развоја и унапређења методологије и примена у области геодезије.

## ПРИЗНАЊА

Ова дисертација представља коначан резултат вишегодишње сарадње у теоријском, експерименталном и научном погледу, пре свега са уваженим ментором, ванредним професором др Олегом Р. Одаловићем.

Са професором Одаловићем сам имао част и задовољство да сарађујем још од основних студија. Његова стручност и посвећеност науци били су ми инспирација и подршка током целокупног академског развоја. Сарадња је започела на првим предавањима током основних студија, где сам кроз његове смернице и савете стекао прве озбиљне увиде у област геодезије и геофизике.

Током докторских студија, сарадња са професором Одаловићем је добила на интензитету. Заједно смо радили на неколико значајних истраживачких пројеката који су резултирали објављивањем више научних радова у реномираним часописима. Његово вођство било је кључно у развоју методолошких приступа и анализа које су постале основа за моје докторско истраживање.

На докторским студијама, наша сарадња је достигла свој пун замах. Професор Одаловић је био неизоставни део сваке фазе мог истраживања. Његова експертиза у области геоида и квазигеоида, као и његово дубоко разумевање глобалних геопотенцијалних модела, били су од непроцењиве вредности. Заједно смо радили на разради и унапређењу методологије, анализи података и тестирању хипотеза.

Докторска дисертација је производ наше интензивне сарадње и заједничког рада. Професор Одаловић је био више од ментора - био је истински сарадник и водич кроз све изазове које доноси научно истраживање. Његова подршка није била ограничена само на академску област; његови савети и охрабрење били су драгоцени и на личном плану, помажући ми да превазиђем препреке и останем фокусиран на свој циљ.

Желим да изразим своју дубоку захвалност професору Одаловићу за све што је учинио за мене. Његово знање, стрпљење и несебичност у дељењу својих искустава и вештина омогућили су ми да postanем бољи истраживач и научник. Ова дисертација није само мој успех, већ и одраз његове посвећености и труда.

Захваљујући нашем заједничком раду, успели смо да развијемо и применимо ефикасну и економичну методу за одређивање локалних површи квазигеоида високе резолуције и центиметарске тачности. Ова метода ће бити од великог значаја за топографске премере, инжењерске пројекте и друге геодетске радове, пружајући прецизне и поуздане резултате.

Овај рад представља круну наше сарадње и значајан допринос науци у области геодезије. Са великим задовољством и поносом завршавам овај део свог академског пута, захвалан на свим приликама и искуствима које сам стекао сарађујући са професором Одаловићем.

Такође, желим да изразим своју захвалност уваженим рецензентима чија је стручна рецензија била од изузетног значаја за овај рад. Проф. др Драган М. Благојевић, доц. др Сања М. Грекуловић, проф. др Владимир Булатовић и др Драган Марковић, као стручњаци у области геодезије, својом рецензијом допринели су значајном побољшању квалитета целокупне дисертације. Њихове сугестије биле су од велике помоћи у

## Признања

отклањању грешака, стандардизацији табеларног представљања нумеричких резултата, уобличавању графичких приказа и прегледу коришћених формула.

Исто тако, желим да захвалим Јелени Обрадовић на пажљивом раду на изменама и исправкама текста, укључујући синтаксне, типографске и друге сличне грешке, што је допринело јасноћи и прецизности овог рада.

Посебно сам захвалан свом оцу Драгољубу, мајци Анђелки и брату Милошу на безусловној љубави, подршци и посвећености коју су ми пружили током свих ових година.

На крају, свим срцем се захваљујем својој жени Марији на њеној неизмерној љубави, разумевању и подршци која ми је увек била на располагању, као и ћерки Марти на њеној неизмирној радости и топлини која ми је употпунила сваки дан.

**Овај рад посвећујем својим родитељима у знак сећања, дубоког поштовања и захвалности на љубави и жртви коју су поднели зарад мог успеха.**

Београд, 2024.

Марко Д. Станковић

## СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

**.gfc** – *Gravity Field Coefficients (filename extension)*

**.txt** – *Text Only (filename extension)*

**.xlsx** – *Excel Spreadsheet (filename extension)*

**1D FFT** – *One-Dimensional Fast Fourier Transform*

**ASCII** – *American Standard Code for Information Interchange*

**ColFFTWG2020** – *Gravimetric quasigeoid models for Colorado*

**DEM** – *Digital Elevation Model*

**DTM** – *Digital Terrain Model*

**DTU/GRAVSOFТ** – *Danmarks Tekniske Universitet / GRAVSOFТ (echnical University of Denmark / GRAVSOFТ)*

**Earth2014** – *the freely-available suite of global topography (relief), bathymetry, and ice-sheet grids*

**EGGP** – *European Gravity and Geoid Project*

**EGM2008** – *Earth Gravitational Model 2008*

**EGM96** – *Earth Gravitational Model 1996*

**EHA-CT** - *Ellipsoidal Harmonic Analysis and Coefficient Transformation*

**ERTM2160** – *Earth Residual Terrain modelled-gravity field with the spatial scales 46 equivalent to spherical-harmonic coefficients up to degree 2160 removed*

**FR** – *Фундаментални реперу (Fundamental Benchmarks)*

**GGM** – *Global Geopotential Model / Global Gravity Model*

**GGM02S** – *GRACE Gravity Model 02*

**GNSS** – *Global Navigation Satellite System*

**GOCE** – *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*

**GOCO** – *Gravity Observation Combination*

**GOCO02S** – *Gravity Observation Combination (GOCO) model 2002*

**GPS** – *Global Position System*

**GPS/dh** – *Global Positioning System Leveling*

**GRACE** – *Gravity Recovery and Climate Experiment*

**GRAV-D** – *Gravity for the Redefinition of the American Vertical Datum*



## Списак скраћеница

**GRAV-D Data Block MS05** – *GRAV-D Block MS05 is located in the Mountain Time Zone, in the South half (South of 40 ° latitude). This was the fifth (05) block of data completed in that region. Block MS05 of the GRAV-D survey.*

**GRAVSOFТ** – *Geodetic Gravity Field Modelling Programs*

**GRS80** – *Geodetic Reference System 1980*

**GSVS17** – *Geoid Slope Validation Survey 2017*

**IAG** – *International Association of Geodesy*

**ICGEM** – *International Centre for Global Earth Models*

**IGN** – *Institut Géographique National (National Geographic Institute)*

**IGS** – *International GNSS Service (International Global Navigation Satellite System Service)*

**IGS08** – *International GNSS Service realization of ITRF2008 (International Terrestrial Reference Frame 2008)*

**IGSN71** – *International Gravity Standardization Net 1971*

**ISG** – *International Service for the Geoid*

**LSM** – *Least Squares Method*

**LMQG** – *Local Model of the Quasi-Geoid / локални модел квазигеоида, (Ова скраћеница се користи за означавање добијених решења локалних модела квазигеоида у експерименталним подручјима помоћу развијене методологије у оквиру истраживања.)*

**LSC** – *Least-Squares Collocation*

**LSMSA (KTH)** – *Least Squares Modification of Stokes' Formula with Additive Corrections (Kungliga Tekniska Högskolan - Royal Institute of Technology)*

**NAD83/NAVD88** – *The North American Datum of 1983 / North American Vertical Datum of 1988*

**NASA** – *National Aeronautics and Space Administration*

**NAVD88** – *North American Vertical Datum of 1988*

**NGA** – *National Geospatial-Intelligence Agency*

**NGF-IGN69** – *Nivellement Général de la France - Institut Géographique National 1969 (General Leveling of France - National Geographic Institute 1969)*

**NGS** – *National Geodetic Survey*

**NGS IDB** – *National Geodetic Survey Integrated Database*

**NGS OPUS-Share Tool** – *National Geodetic Survey Online Positioning User Service Share Tool*

**NIVAG** – *Nivellement avec assistance GPS (Leveling with GPS assistance)*

**NOAA** – *National Oceanic and Atmospheric Administration*

**ITUGRG2021** – *Gravimetric geoid model that is computed for the Auvergne test area*

**RCR** – *Remove Compute Restore technique*

**RGF93/ETRS89** – *Réseau Géodésique Français 1993 / European Terrestrial Reference System 1989 (French Geodetic Network 1993 / European Terrestrial Reference System 1989)*

**RMQG** – *Reference Model of the Quasi-Geoid / референтни (званични) модел квазигеоида*, (Ова скраћеница се користи као свеобухватни термин који обухвата све званичне моделе квазигеоида: **SQM2011**, **ITUGRG2021** и **CoIFFTWG2020** који су коришћени у истраживању. Ово је урађено ради ефикаснијег објашњења експеримента и избегавања понављања конкретних назива модела у тексту када то није неопходно, чим се избегава сувишно оптерећивање текста.)

**RTC** – *Residual Terrain Correction*

**RTM** – *Residual Terrain Modelling*

**RTM (5'×5')** – *Residual Terrain Model with a grid resolution of 5 arc-minutes*

**SQM2011** – *Serbian Quasigeoid Model 2011*

**SREF** – *Serbian Reference Frame (Serbian spatial reference network)*

**SRTM** – *Shuttle Radar Topography Mission*

**SRTM USGS** – *Shuttle Radar Topography Mission - United States Geological Survey*

**USA** – *United States of America*

**XGM2016** – *Experimental Gravity Field Model 2016*

**YYYYMMDDHHMMSS.SSS** – *date format:*

- **YYYY**: *Year (four digits),*
- **MM**: *Month (two digits, ranging from 01 to 12),*
- **DD**: *Day (two digits, ranging from 01 to 31),*
- **HH**: *Hour (two digits, ranging from 00 to 23 in a 24-hour format),*
- **MM**: *Minute (two digits, ranging from 00 to 59),*
- **SS**: *Second (two digits, ranging from 00 to 59) and*
- **SSS**: *Milliseconds (three digits).*

**МНК** – *Метод најмањих квадрата*

**РГЗ** – *Републички геодетски завод*

**РФ** – *Република Француска*

**РС** – *Република Србија*

**САД** – *Сједињене Америчке Државе*

## СПИСАК СЛИКА

Слика 2.1: Вектори сила у геоцентричном правоуглом координатном систему.....	2
Слика 2.2: Вектор $\vec{s}$ дуж нивоске површи тачке А.....	8
Слика 2.3: Вектор $\vec{s}$ у правцу вертикале која пролази кроз тачку А.....	9
Слика 2.4: Закривљеност вертикале и конвергенција нивоских површи.....	9
Слика 2.5: Површ геоида и ортометријска висина.....	10
Слика 2.6: Тело $\tau$ запремине $\Omega$ унутар тела $S$ и проток вектора кроз затворену површ	11
Слика 2.7: Нормална Земља или нивоски елипсоид.....	14
Слика 2.8: Зонални сферни хармоник 6-ог реда и 0-тог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica).....	21
Слика 2.9: Тесерални сферни хармоник 12-ог реда и 6-ог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica).....	23
Слика 2.10: Секторски сферни хармоник 6-ог реда и 6-ог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica).....	24
Слика 2.11: Геометрија локалног координатног система са јединичном сфером.....	27
Слика 2.12: Природне или сферне или географске координате ( $\Phi$ , $\Lambda$ , $H^0$ ).....	27
Слика 2.13: Елипсоидне или геодетске координате ( $B$ , $L$ , $h^e$ ).....	28
Слика 2.14: Геоид, ундулација геоида и ортометријска висина (Одаловић, 2005).....	31
Слика 2.15: Геоид одређен из глобалног геопотенцијалног модела SGG-UGM-2 представљен псеудобојама, сенчењем рељефа и вертикалним увећањем у размери 1:10 000 (ICGEM, 2024).....	32
Слика 2.16: Телуроид.....	33
Слика 2.17: Однос између квазигеоида, геоида и нивоског елипсоида.....	34
Слика 3.1: Граничне вредности – тело $\tau$ запремине $\Omega$ унутар површи $S$ (Одаловић, 2024).....	36
Слика 4.1: Подела апсолутних гравиметара (Наод, 2021).....	40
Слика 4.2: Вектори убрзања Земљине и нормалне теже (Одаловић, 2005).....	42
Слика 4.3: а) Компоненте одступања вертикале у правцу произвољног азимута, (Одаловић, 2005) и б) одступање вертикале у простору на сфероиду (Heiskanen & Moritz, 1967).....	44
Слика 4.4: Место и улога сателитских метода у геодезији (Благојевић, 2014).....	45
Слика 4.5: Одређивање површи геоида помоћу сателитске алтиметрије (NOAA, 2024).....	47
Слика 4.6: Шематски приказ система за мерење сателитском алтиметријом (Fu, 2014).....	47
Слика 4.7: Шема праћења сателита са другим сателитом у „високо-ниском“ режиму SST-hl (Johannessen, et al., 1999).....	48
Слика 4.8: Шема праћења сателита са другим сателитом у „ниско-ниском“ режиму SST-hl у комбинацији са SST-hl (Johannessen, et al., 1999).....	49
Слика 4.9: Шема сателитске градиометрије у комбинацији са SST-hl (Johannessen, et al., 1999).....	50
Слика 4.10: Шематски приказ основног концепта RCR методе (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010).....	51
Слика 4.11: Методологија RCR одређивања квазигеоида (Одаловић, 2009; Одаловић, 2010).....	53
Слика 4.12: Видљиве топографске масе – утицај топографије, тј. прилагођена Бугеова редукција (укључује утицај Бугеове плоче умањен за теренску корекцију) (Forsberg, 1985).....	57

## Списак слика

Слика 4.13: Утицај ивичних ефеката на аномалију висине у случају примене Ејријевог модела (горња функција) и изглед призме (доња функција).....	57
Слика 4.14: Ејријев изостатички модел (Forsberg, 1985).....	58
Слика 4.15: Референтна или средња нивоска површ и тачка унутар маса након попуњавања долина (Одаловић, 2005).....	59
Слика 4.16: Расподела топографских маса на призме са правоугаоном основом применом дигиталног модела терена (Одаловић, 2005).....	60
Слика 4.17: Призма $\tau$ са правоугаоном основом димензија $\Delta B \times \Delta L$ и константне густина $\rho$ .....	61
Слика 5.1: Део датотеке глобалног геопотенцијалног модела EGM2008, (ICGEM, 2024). .....	66
Слика 5.2: Модел EGM2008 представљен псеудобојама, сенчењем рељефа и вертикалним увећањем у размери 1:10 000 (ICGEM, 2024).....	66
Слика 5.3: Визуелни приказ интернет сајта ICGEM (ICGEM, 2024).....	67
Слика 5.4: Платформа за мерење у SRTM – преглед (what-when-how, 2024).....	69
Слика 5.5: Глобални приказ DTM-а, добијен помоћу SRTM мисије (EARTHDATASEARCH, 2024).....	69
Слика 6.1: Први начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на GPS/dh тачкама.....	75
Слика 6.2: Први начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на гриду резолуције $5' \times 5'$ .....	77
Слика 6.3: Други начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на гриду резолуције $5' \times 5'$ .....	79
Слика 6.4: Трећи начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на GPS/dh тачкама (без коришћења аномалија висина измерених GPS/dh методом).....	81
Слика 6.5: Трећи начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на гриду резолуције $5' \times 5'$ .....	83
Слика 7.1: Илустрација квазигеоида SQM2011, (еквидистанција 0,1 m).....	87
Слика 7.2: Просторни распоред GPS/dh тачака нивелмана високе тачности на територији Р. Србије.....	88
Слика 7.3: DTM за Р. Србију преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024).....	89
Слика 7.4: Илустрација геоида ITUGRG2021, (еквидистанција 0,2 m).....	91
Слика 7.5: Просторни распоред GPS/dh тачака нивелманске мреже високе тачности на територији региона Оверња.....	92
Слика 7.6: Карта разлика аномалија висине и ундулација преко Бугеове аномалије: регион Оверња.....	95
Слика 7.7: DTM за Р. Француску преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024).....	95
Слика 7.8: Илустрација квазигеоида ColFFTWG2020, (еквидистанција 0,5 m).....	98
Слика 7.9: Просторни распоред GPS/dh тачака нивелманске мреже високе тачности на територији Колорада.....	99
Слика 7.10: Карта разлика између аномалија висине и ундулација преко Бугеове аномалије за државу Колорадо са GPS/dh тачкама и границом подручја.....	102
Слика 7.11: DTM за државу Колорадо и околину преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024).....	102

## Списак слика

Слика 7.12: Елипсоидна корекција срачуната на тачкама нивелмана високе тачности за (а) Р. Србију, (б) регион Оверња и (с) државу Колорадо.....	107
Слика 7.13: Моделирана површ LMQG на 1001 тачки нивелмана високе тачности – Р. Србија.....	108
Слика 7.14: Моделирана површ LMQG на 75 тачака нивелмана високе тачности – регион Оверња .....	109
Слика 7.15: Моделирана површ LMQG на 222 тачке нивелмана високе тачности – држава Колорадо .....	110
Слика 7.16: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	115
Слика 7.17: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере.....	115
Слика 7.18: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	116
Слика 7.19: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере.....	116
Слика 7.20: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	117
Слика 7.21: Површ $\hat{t}$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	117
Слика 7.22: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	120
Слика 7.23: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере.....	121
Слика 7.24: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	121
Слика 7.25: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере.....	122
Слика 7.26: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	122
Слика 7.27: Површ R на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере.....	123
Слика 7.28: Површ $\Delta\zeta$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	125
Слика 7.29: Површ $\Delta\zeta$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	125
Слика 7.30: Површ $\Delta\zeta$ на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	126
Слика 7.31: Елипсоидна корекција срачуната на 4295 тачака грида резолуције 5'×5' – Р. Србија.....	128
Слика 7.32: Моделирана површ LMQG на 4295 тачака грида резолуције 5'×5' – Р. Србија .....	129
Слика 7.33: Просторни распоред 4295 тачака грида резолуције 5'×5' – Р. Србија.....	130
Слика 7.34: Елипсоидна корекција срачуната на 1152 тачке грида резолуције 5'×5' – регион Оверња.....	131

Слика 7.35: Моделирана површ LMQG на 1152 тачке грида резолуције 5'×5' – регион Оверња .....	132
Слика 7.36: Просторни распоред 1152 тачке грида резолуције 5'×5' – регион Оверња	132
Слика 7.37: Елипсоидна корекција срачуната на 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо .....	133
Слика 7.38: Моделирана површ LMQG на 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо .....	134
Слика 7.39: Просторни распоред 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо .....	134
Слика 7.40: Рачунање оцењених резидуала $\hat{t}_{5' \times 5'}$ на тачкама грида .....	135
Слика 7.41: Моделирање преосталих резидуала на тачкама грида .....	136
Слика 7.42: Површ $\hat{t}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	137
Слика 7.43: Површ $\hat{t}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – други начин спољашње провере .....	138
Слика 7.44: Површ $\hat{t}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере .....	138
Слика 7.45: Површ $\hat{t}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	139
Слика 7.46: Површ $\hat{t}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере.....	139
Слика 7.47: Површ $\hat{t}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере.....	140
Слика 7.48: Површ $\hat{t}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	140
Слика 7.49: Површ $\hat{t}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере.....	140
Слика 7.50: Површ $\hat{t}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере.....	141
Слика 7.51: Површ $\hat{R}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	141
Слика 7.52: Површ $\hat{R}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – други начин спољашње провере .....	142
Слика 7.53: Површ $\hat{R}$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере .....	142
Слика 7.54: Површ $\hat{R}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	143
Слика 7.55: Површ $\hat{R}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере.....	143
Слика 7.56: Површ $\hat{R}$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере.....	143
Слика 7.57: Површ $\hat{R}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	144
Слика 7.58: Површ $\hat{R}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере.....	144

## Списак слика

Слика 7.59: Површ $\hat{R}$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере.....	144
Слика 7.60: Површ $\Delta\zeta$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере .....	145
Слика 7.61: Површ $\Delta\zeta$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – други начин спољашње провере .....	145
Слика 7.62: Површ $\Delta\zeta$ на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере .....	146
Слика 7.63: Површ $\Delta\zeta$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере .....	146
Слика 7.64: Површ $\Delta\zeta$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере.....	147
Слика 7.65: Површ $\Delta\zeta$ на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере.....	147
Слика 7.66: Површ $\Delta\zeta$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере .....	147
Слика 7.67: Површ $\Delta\zeta$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере.....	148
Слика 7.68: Површ $\Delta\zeta$ на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере.....	148

## СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 7.1: Пример података преузетих од РГЗ-а за прве три од 1001 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности .....	89
Табела 7.2: Моделиране вредности за прве три од 1001 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у Р. Србији .....	90
Табела 7.3: Основни статистички подаци моделираних вредности на 1001 GPS/dh тачки нивелмана високе тачности у Р. Србији .....	90
Табела 7.4: Мрежа нивелманских тачка са GPS/dh мерењима, (ISG пројект „Auvergne Test“).....	93
Табела 7.5: Тачке терестричких гравиметријских мерења, (ISG пројект „Auvergne Test“) .....	93
Табела 7.6: Дигитални модел терена, (ISG пројект „Auvergne Test“).....	93
Табела 7.7: Пример података преузетих од ISG-а за прве три од 75 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у региону Оверња.....	94
Табела 7.8: Пример ITUGRG2021 аномалија висине за прве три од 75 GPS/dh тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња.....	94
Табела 7.9: Моделиране вредности за прве три од 75 GPS/dh тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња .....	96
Табела 7.10: Основни статистички подаци моделираних вредности на 75 GPS/dh тачка нивелмана високе тачности у региону Оверња.....	96
Табела 7.11: Тачке терестрички гравиметријских мерења, (ISG пројект „Colorado Experiment“).....	99
Табела 7.12: GRAV-D вредности убрзања силе Земљине теже одређене из ваздуха, (ISG пројект „Colorado Experiment“) .....	99
Табела 7.13: Дигитални модел терена, (ISG пројект „Colorado Experiment“).....	100
Табела 7.14: Глобални геопотенцијални модел, (ISG пројект „Colorado Experiment“) .....	100
Табела 7.15: Подаци за оцену на територији државе Колорадо – историјски скуп GPS/dh података .....	100
Табела 7.16: Подаци за оцену на територији државе Колорадо – GSVS17 скуп GPS/dh података .....	100
Табела 7.17: Пример података преузетих од ISG-а за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо .....	101
Табела 7.18: Пример GPS/dh аномалија висине за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо .....	101
Табела 7.19: Моделиране вредности за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо .....	103
Табела 7.20: Основни статистички подаци моделираних вредности на 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо .....	103
Табела 7.21: Моделиране вредности LMQG аномалија висине за прве три од 1001 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у Р. Србији .....	109
Табела 7.22: Моделиране вредности LMQG аномалија висине за прве три од 75 GPS/dh тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња.....	109
Табела 7.23: Моделиране вредности LMQG аномалије висине за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо .....	110
Табела 7.24: Основни статистички подаци моделираних вредности LMQG аномалије висине на тачкама нивелмана високе тачности .....	110



Табела 7.25: Оцењене вредности параметара транслације – први начин спољашње провере.....	114
Табела 7.26: Оцењене вредности параметара транслације – трећи начин спољашње провере.....	114
Табела 7.27: Основни статистички подаци оцењених резидуала $\hat{t}$ на GPS/dh тачкама.....	114
Табела 7.28: Распони оцењених резидуала $\hat{t}$ на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере.....	117
Табела 7.29: Распони оцењених резидуала $\hat{t}$ на GPS/dh тачкама – трећи начин спољашње провере.....	118
Табела 7.30: Основни статистички подаци за $\zeta^{\text{LMQG-t}}$ на GPS/dh тачкама.....	118
Табела 7.31: Основни статистички подаци преосталих резидуала R на GPS/dh тачкама.....	120
Табела 7.32: Распони преосталих резидуала R на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере.....	123
Табела 7.33: Распони преосталих резидуала R на GPS/dh тачкама – трећи начин спољашње провере.....	123
Табела 7.34: Основни статистички подаци коначних разлика $\Delta\zeta$ на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере.....	124
Табела 7.35: Распони коначних разлика $\Delta\zeta$ на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере.....	124
Табела 7.36: Вредности $h^e$ и $\zeta^{\text{SQM2011}}$ за прве три од 4295 тачака грида у Р. Србији.....	128
Табела 7.37: Моделиране вредности $\zeta^{\text{EGM2008}}$ , $\zeta^{\text{RTM}}$ и ЕК за прве три од 4295 тачака грида у Р. Србији.....	128
Табела 7.38: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у Р. Србији.....	130
Табела 7.39: Вредности $h^e$ и $\zeta^{\text{ITUGRG2021}}$ за прве три од 1152 тачака грида у региону Оверња.....	131
Табела 7.40: Моделиране вредности $\zeta^{\text{EGM2008}}$ , $\zeta^{\text{RTM}}$ и ЕК за прве три од 1152 тачака грида у региону Оверња.....	131
Табела 7.41: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у региону Оверња.....	133
Табела 7.42: Вредности $h^e$ и $\zeta^{\text{ColFFTWG2020}}$ за прве три од 1159 тачака грида у држави Колорадо.....	133
Табела 7.43: Моделиране вредности $\zeta^{\text{EGM2008}}$ , $\zeta^{\text{RTM}}$ и ЕК за прве три од 1159 тачака грида у држави Колорадо.....	133
Табела 7.44: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у држави Колорадо.....	135
Табела 7.45: Оцењене вредности параметара транслације – други начин спољашње провере.....	136
Табела 7.46: Распони оцењених резидуала $\hat{t}$ на тачкама грида – први начин спољашње провере.....	148
Табела 7.47: Распони оцењених резидуала $\hat{t}$ на тачкама грида – други начин спољашње провере.....	149

## Списак табела

Табела 7.48: Распони оцењених резидуала $\hat{t}$ на тачкама грида – трећи начин спољашње провере.....	149
Табела 7.49: Распони оцењених преосталих резидуала $\hat{R}$ на тачкама грида – први начин спољашње провере.....	149
Табела 7.50: Распони оцењених преосталих резидуала $\hat{R}$ на тачкама грида – други начин спољашње провере.....	150
Табела 7.51: Распони оцењених преосталих резидуала $\hat{R}$ на тачкама грида – трећи начин спољашње провере.....	150
Табела 7.52: Распони коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – први начин спољашње провере.....	150
Табела 7.53: Распони коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – други начин спољашње провере.....	151
Табела 7.54: Распони коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – трећи начин спољашње провере.....	151
Табела 7.55: Основни статистички подаци за параметре $\hat{t}$ , $\hat{R}$ и $\Delta\zeta$ на тачкама грида – први начин спољашње провере.....	151
Табела 7.56: Основни статистички подаци за параметре $\hat{t}$ , $\hat{R}$ и $\Delta\zeta$ на тачкама грида – други начин спољашње провере.....	151
Табела 7.57: Основни статистички подаци за параметре $\hat{t}$ , $\hat{R}$ и $\Delta\zeta$ на тачкама грида – трећи начин спољашње провере.....	152
Табела 7.58: Групе распона коначних разлика $\Delta\zeta$ на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере.....	152
Табела 7.59: Групе распона коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – први начин спољашње провере.....	153
Табела 7.60: Групе распона коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – други начин спољашње провере.....	155
Табела 7.61: Групе распона коначних разлика $\Delta\zeta$ на тачкама грида – трећи начин спољашње провере.....	156

## СПИСАК ПРИЛОГА

Прилог 1: Профили референтне површи квазигеоида SQGM2011 и локалног модела квазигеоида LMQG. ....	164
Прилог 2: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида SQGM2011. ....	165
Прилог 3: максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида SQGM2011. ....	166
Прилог 4: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида SQGM2011. ....	167
Прилог 5: максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида SQGM2011. ....	168
Прилог 6: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида SQGM2011. ....	169
Прилог 7: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида SQGM2011. ....	170
Прилог 8: Профили референтне површи геоида ITUGRG2021 и локалног модела квазигеоида LMQG, (први део). ....	171
Прилог 9: Профили референтне површи геоида ITUGRG2021 и локалног модела квазигеоида LMQG, (други део). ....	172
Прилог 10: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (први део). ....	173
Прилог 11: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (други део). ....	174
Прилог 12: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (први део). ....	175
Прилог 13: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (други део). ....	176
Прилог 14: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (први део). ....	177
Прилог 15: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (други део). ....	178
Прилог 16: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (први део). ....	179
Прилог 17: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (други део). ....	180
Прилог 18: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (први део). ....	181
Прилог 19: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи геоида ITUGRG2021, (други део). ....	182

## Списак прилога

Прилог 20: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (први део). .....	183
Прилог 21: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида ITUGRG2021 путем Бугеове аномалије, (други део).....	184
Прилог 22: Профили референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020 и локалног модела квазигеоида LMQG, (први део). .....	185
Прилог 23: Профили референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020 и локалног модела квазигеоида LMQG, (други део).....	186
Прилог 24: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (први део).....	187
Прилог 25: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (други део). .....	188
Прилог 26: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (први део). .....	189
Прилог 27: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (други део).....	190
Прилог 28: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (први део).....	191
Прилог 29: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (други део). .....	192
Прилог 30: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (први део). .....	193
Прилог 31: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (други део).....	194
Прилог 32: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (први део).....	195
Прилог 33: Профили коначних разлика $\Delta\zeta$ између површи локалног модела квазигеоида LMQG и референтне површи квазигеоида ColFFTWG2020, (други део). .....	196
Прилог 34: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (први део). .....	197
Прилог 35: Профили максималне транслације површи LMQG, постигнуте помоћу $\hat{i}$ и $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида ColFFTWG2020, (други део).....	198

## САДРЖАЈ

1.	УВОД .....	1
2.	ТЕОРИЈА ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ .....	2
2.1	ПОТЕНЦИЈАЛ СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ (РЕАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ) .....	2
2.1.1	Сила Земљине теже.....	2
2.1.2	Потенцијал силе Земљине теже.....	4
2.1.3	Потенцијал убрзања силе Земљине теже.....	6
2.1.4	Нивоске површи и вертикале.....	7
2.2	СПОЉАШЊИ И УНУТРАШЊИ ПОТЕНЦИЈАЛ .....	10
2.2.1	Спољашњи и унутрашњи потенцијал тела Земље.....	12
2.3	НОРМАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ .....	13
2.4	АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ.....	15
2.5	ФУНКЦИОНАЛИ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА.....	16
2.6	СФЕРНИ ХАРМОНИЦИ .....	20
2.6.1	Зонални сферни хармоници .....	20
2.6.2	Тесерални сферни хармоници .....	21
2.6.3	Секторски сферни хармоници .....	23
2.6.4	Значај сферних хармоника у геодезији.....	24
2.7	СФЕРНИ ХАРМОНИЦИ У ОДРЕЂИВАЊУ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА И ЊЕГОВИХ ФУНКЦИОНАЛА .....	25
2.7.1	Аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника .....	25
2.7.2	Функционали аномалијског потенцијала у функцији сферних хармоника .....	25
2.8	КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ.....	26
2.8.1	Природне координате .....	26
2.8.2	Геодетске координате.....	28
2.9	РЕФЕРЕНТНЕ ВИСИНСКЕ ПОВРШИ .....	29
2.9.1	Геоид .....	29
2.9.2	Квазигеоид.....	32
3.	ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ .....	35
3.1	ПРВИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – ДИРИХЛЕОВ ПРОБЛЕМ .....	35
3.2	ДРУГИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – НОЛМАНОВ ПРОБЛЕМ .....	35
3.3	ТРЕЋИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА .....	36
3.4	РЕШЕЊА ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.....	36

3.4.1	Приступи у решавању проблема граничних вредности.....	36
3.4.2	Решења проблема граничних вредности .....	37
4.	МЕТОДОЛОГИЈЕ ОДРЕЂИВАЊА КВАЗИГЕОИДА И ГЕОИДА .....	38
4.1	ТЕРЕСТРИЧКЕ МЕТОДЕ.....	40
4.1.1	Терестричка гравиметрија.....	40
4.1.2	Астрогеодетски нивелман.....	43
4.2	САТЕЛИТСКЕ МЕТОДЕ.....	45
4.2.1	Сателитска алтиметрија .....	46
4.2.2	Међусателитско праћење .....	48
4.2.3	Сателитска градиометрија.....	49
4.3	ИНТЕГРАЛНИ МОДЕЛ.....	50
4.3.1	Одређивање локалног квазигеоида високе резолуције применом модела интегралне геодезије.....	50
4.3.2	Remove-Compute-Restore метода.....	51
4.4	СПЕКТРАЛНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ СИГНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА .....	54
4.4.1	Дуготаласна карактеристика.....	54
4.4.2	Средњеталасна карактеристика.....	56
4.4.3	Краткоталасна карактеристика.....	56
5.	ИЗВОРИ ЗА МОДЕЛИРАЊЕ ПАРАМЕТАРА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА .....	63
5.1	ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ - ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА.....	63
5.1.1	Глобални геопотенцијални модел EGM2008 .....	64
5.2	РЕЗИДУАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА - КРАТКОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА.....	68
5.2.1	Свемирска радарска топографска мисија SRTM .....	68
5.3	УКУПНА АНОМАЛИЈА ВИСИНЕ .....	70
6.	МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ GGM И DTM 71	
6.1	КОНЦЕПТ МЕТОДОЛОГИЈЕ.....	71
6.1.1	Дуготаласна карактеристика аномалије висине $\zeta^{EGM2008}$ .....	71
6.1.2	Краткоталасна карактеристика аномалије висине $\zeta^{RTM}$ .....	72
6.1.3	Елипсоидна корекција $EK$ .....	72
6.1.4	Укупна вредност аномалије висине $\zeta^{LMQG}$ .....	73
6.2	ПРВИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА .....	74
6.2.1	Провера резултата LMQG на GPS/dh тачкама .....	74
6.2.2	Провера резултата LMQG на тачкама грида.....	76
6.3	ДРУГИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА.....	78
6.3.1	Провера резултата LMQG на гриду без употребе GPS/dh тачака и $\zeta^{GPS/dh}$ ...	78

6.4	ТРЕЋИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА.....	80
6.4.1	Провера резултата LMQG на GPS/dh тачкама без коришћења $\zeta^{\text{GPS/dh}}$ .....	80
6.4.2	Провера резултата LMQG на гриду без претходног коришћења $\zeta^{\text{GPS/dh}}$ .....	82
7.	НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА .....	84
7.1	ИЗВОРИ И ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА .....	84
7.2	ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА Р. СРБИЈУ .....	86
7.2.1	Квазигеоид SQM2011 .....	86
7.2.2	Нивелманска мрежа високе тачности на територији Р. Србије .....	88
7.3	ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА РЕГИОН ОВЕРЊА (Р. ФРАНЦУСКА) ..	90
7.3.1	Геоид ITUGRG2021 .....	90
7.3.2	Нивелманска мрежа високе тачности на територији региона Оверња.....	92
7.4	ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА ДРЖАВУ КОЛОРАДО (САД).....	96
7.4.1	Квазигеоид CoIFFTWG2020.....	96
7.4.2	Нивелманска мрежа високе тачности на територији државе Колорадо.....	98
7.5	АНАЛИЗА КВАЛИТЕТА ДОСТУПНИХ ПОДАТАКА .....	103
7.5.1	Нивелман високе тачности и GPS/dh метода .....	103
7.5.2	Глобални геопотенцијални модел EGM2008 .....	104
7.5.3	Дигитални модел терена из SRTM.....	105
7.6	ПРИПРЕМА И ОБРАДА ПОДАТАКА .....	106
7.6.1	Моделирање аномалија висине на GPS/dh тачкама.....	106
7.6.2	Спољашња провера резултата на GPS/dh тачкама .....	111
7.6.3	Моделирање аномалије висине на тачкама грида .....	126
7.6.4	Спољашња провера резултата на тачкама грида .....	135
7.7	АНАЛИЗА ЗАВРШНИХ РЕЗУЛТАТА .....	152
7.7.1	Први начин спољашње провере .....	152
7.7.2	Други начин спољашње провере.....	155
7.7.3	Трећи начин спољашње провере .....	156
8.	ЗАКЉУЧАК .....	158
8.1	УСПЕШНОСТ МЕТОДОЛОГИЈЕ .....	158
8.2	ПРЕПОРУКЕ ЗА ДАЉА ИСТРАЖИВАЊА.....	158
8.3	ПОТЕНЦИЈАЛ МЕТОДОЛОГИЈЕ ЗА ПОТРЕБЕ МОДЕЛИРАЊА ЛОКАЛНИХ КВАЗИГЕОИДА.....	159
	ЛИТЕРАТУРА.....	160
9.	ПРИЛОЗИ .....	164
9.1	РЕПУБЛИКА СРБИЈА .....	164
9.1.1	Први начин спољашње провере резултата .....	165
9.1.2	Други начин спољашње провере резултата .....	167
9.1.3	Трећи начин спољашње провере резултата.....	169

## Садржај

9.2	РЕГИОН ОВЕРЊА .....	171
9.2.1	Први начин спољашње провере резултата .....	173
9.2.2	Други начин спољашње провере резултата .....	177
9.2.3	Трећи начин спољашње провере резултата.....	181
9.3	ДРЖАВА КОЛОРАДО.....	185
9.3.1	Први начин спољашње провере резултата .....	187
9.3.2	Други начин спољашње провере резултата .....	191
9.3.3	Трећи начин спољашње провере резултата.....	195
	БИОГРАФИЈА АУТОРА .....	199
	ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ .....	200
	ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА .....	201
	ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ .....	202



## 1. УВОД

Физичке, односно ортометријске висине на Земљи се одређују у односу на геоид, који је немачки научник Гаус (Carl Friedrich Gauss) дефинисао као еквипотенцијалну површ која најбоље апроксимира у глобалном смислу, средњи ниво океана и мора. У континенталним областима, површ геоида је могуће одредити на основу детаљног гравиметријског премера по теорији Стокса. Међутим, у том случају је неопходно поправити податке који описују површ геоида за утицај топографских маса, што захтева прецизно познавање расподеле густине маса у Земљиној кори. Ипак, то није могуће утврдити са неопходном тачношћу, због чега је руски научник Молоденски увео концепт квазигеоида.

Квазигеоид је развијен као практично решење које треба да реши наведени проблем познавања распореда маса у Земљиној кори. Он служи као референтна висинска површ за одређивање нормалних висина, без усвајања хипотеза о распореду топографских густина. Разлике између квазигеоида и геоида на копну обично варирају у распону од неколико центиметара у областима близу мора и океана, до неколико метара у планинским пределима. Насупрот томе, на површи мора и океана, разлике су практично занемарљиве.

Наведени разлози су више него убедљиви у погледу мотивације истраживања које треба да обезбеди савремене методологије које унапређују поступак одређивања површи квазигеоида, поготово у локалним подручјима. Тема дисертације представља једну такву савремену методологију, у којој је разрађен поступак одређивања површи локалних квазигеоида високе резолуције и тачности. Целокупни процес одређивања површи локалног квазигеоида је унапређен и поједностављен тиме што је из поступка моделирања изостављена средњеталасна карактеристика аномалије висине, чиме је превазиђена потреба за терестричким мерењима. Овај приступ је реализован коришћењем искључиво јавно доступних података који су доступни посредством глобалних геопотенцијалних модела (**GGM**) и дигиталних модела терена **DTM** које је могуће одредити из података сателитске мисије **SRTM** (*Shuttle Radar Topography Mission*).

Истраживање у овој дисертацији обухвата три експериментална подручја за која су јавно доступни подаци. Моделирана су три локална квазигеоида, примењујући поменути поступак, за територије Републике Србије, региона Оверња у Француској и државе Колорадо у Сједињеним Америчким Државама.

## 2. ТЕОРИЈА ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

### 2.1 ПОТЕНЦИЈАЛ СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ (РЕАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ)

#### 2.1.1 Сила Земљине теже

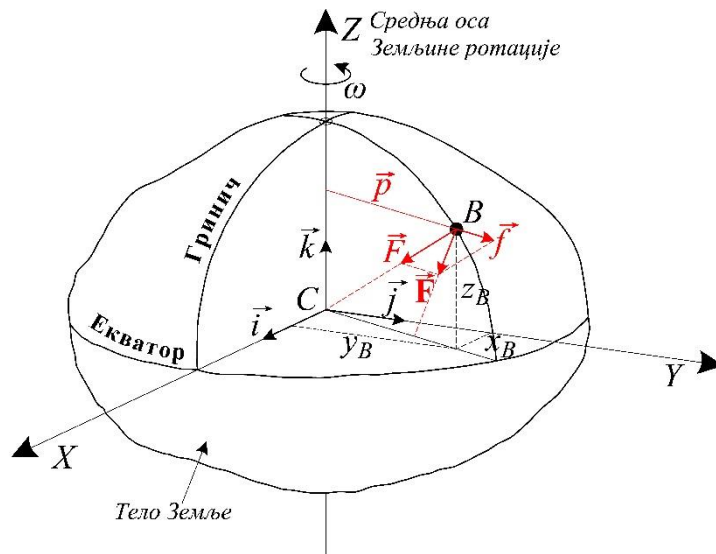
Тело смештено на површи Земље, које заједно са њом ротира, доживљава утицаје две силе:

- гравитационе силе Земље (делује привлачно на то тело) и
- центрифугалне силе, која произилази из ротације Земље и тежи да раздвоји то тело од тела Земље.

Сила Земљине теже  $\vec{F}$  се добија као резултујућа сила гравитационе силе  $\vec{F}$  и центрифугалне силе  $\vec{f}$  (слика 2.1):

$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{f}. \quad (2.1)$$

Вектори из једначине 2.1 су приказани на слици 2.1 у десно оријентисаном геоцентричном правоуглом координатном систему који ротира Земљином угаоном брзином  $\omega$ . Оса ротације тела Земље поклапа се са Z-осом, кроз почетни меридијан пролази X-оса, а Y-оса је управна на XCZ раван која лежи у равни екватора.



Слика 2.1: Вектори сила у геоцентричном правоуглом координатном систему

Вектори гравитационе силе Земље и центрифугалне силе Земљине ротације, који делују на тело  $B$  масе  $m_B$ , рачунају се помоћу следећих једначина, респективно (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\vec{F} = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega, \quad (2.2)$$

$$\vec{f}(\vec{r}_B) = m_B \vec{p} \omega^2, \quad (2.3)$$

где је:

- $G$  – универзална гравитациона константа  $G \cong (6,6743 \pm 0,00015) \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  према експерименту Хенрија Кевендиша (*Henry Cavendish*) 1798. године,
- $\Omega$  – подручје интеграције (тело Земље масе  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ),
- $d\Omega$  – елемент запремине,
- $\vec{r}$  – средњи геоцентрични радијус вектор положаја елемента запремине  $d\Omega$ ,
- $\vec{r}_B$  – радијус вектор тела  $B$ ,
- $|\vec{r} - \vec{r}_B|$  – интензитет разлике  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_B$  који се може одредити из једначине 2.4,
- $\rho(\vec{r})$  – густина елемента запремине  $d\Omega$  тела Земље чији је положај дефинисан радијус вектором  $\vec{r}$ ,
- $\omega$  – угаона брзина ротације тела Земље ( $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{rad s}^{-1}$ ) и
- $\vec{p}$  – вектор (једначина 2.5) чији је правац увек управан на осу Земљине ротације ( $Z$ -оса) чији се интензитет може одредити из једначине 2.6.

$$|\vec{r} - \vec{r}_B| = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 + (z_B - z)^2}, \quad (2.4)$$

$$\vec{p} = (x_B, y_B) = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}, \quad (2.5)$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}, \quad (2.6)$$

где су  $x_B$ ,  $y_B$  и  $z_B$  координате тачке  $B$ .

Правац вектора гравитационе силе  $\vec{F}$  дефинише права која пролази кроз центар масе тела Земље и тачку  $B$  исходиште вектора  $\vec{F}$ , док је правац вектора центрифугалне силе  $\vec{f}(\vec{r}_B)$  дефинисан нормалом на обртну осу ротације тела Земље која пролази кроз тачку  $B$ .

Када се једначине 2.2 и 2.3 уврсте у једначину 2.1 добија се векторска једначина за силу Земљине теже у правоуглом геоцентричном координатном систему:

$$\vec{F} = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz + m_B \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.7)$$

односно

$$\vec{F} = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega + m_B \vec{p} \omega^2, \quad (2.8)$$

или краће

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_B) = m_B \vec{g}(\vec{r}_B), \quad (2.9)$$

где је  $\vec{g}(\vec{r}_B)$  вектор убрзања силе Земљине теже за који важи

$$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}_B) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.10)$$

односно

$$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}_B) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega + \vec{p}\omega^2. \quad (2.11)$$

Правац и смер силе Земљине теже дефинисани су правцем и смером резултанте гравитационе и центрифугалне силе, а интензитет силе у општем случају зависи од положаја тела на физичкој површи Земље.

Придруживањем вектора силе Земљине теже, који је дефинисан једначинама 2.1, односно 2.9, свакој тачки простора дефинише се векторско поље силе Земљине теже.

Основне једначине које се користе при проучавању векторског поља убрзања су једначине 2.10 и 2.11, које имају више теоријски него практични карактер јер су условљени познавањем распореда густина маса тела Земље.

Услови под којима важе претходне једначине су:

- тело Земље је круто тело и
- ван тела Земље не постоји било која дуга маса (масе других тела као ни маса Земљине атмосфере).

Интензитет центрифугалне силе непрекидно се смањује идући од екватора ка половима где је једнак нули, у складу с тиме интензитет Земљине теже има највећи интензитет на самим половима а најмањи на екватору. Међутим, промена положаја на физичкој површи Земље није једини фактор који утиче на промену интензитета вектора убрзања силе Земљине теже. Постоји низ других фактора као што су утицаји плиме водене масе океана и мора, утицаји плиме чврсте Земље, гравитациони утицај небеских тела, тектонски утицај Земљине коре, утицај промена густина атмосферских маса, присуство подземних вода, промене ротације тела Земље, утицаји глечера и великих наслага леда, утицај распореда густина тела Земље итд.

Нехомогеност густина и њихов распоред у оквиру тела Земље познат је само у апроксимативном смислу и дефинише се посредством модела где је густина функција растојања од центра масе Земље или као функција дубине.

Јединица за убрзање у SI систему је  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , а раније се користила јединица за убрзање гал (Gal) која је дефинисана у част Галилеа (*Galileo Galilei*) и има вредност  $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ , односно у јединицама SI система  $1 \text{ Gal} = 0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Најчешће у геодезији се користи милигал (mGal), односно  $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal}$  што је изражено у јединицама SI система  $1 \text{ mGal} = 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010; Одаловић, et al., 2018).

### 2.1.2 Потенцијал силе Земљине теже

За векторско поље силе Земљине теже важи:

$$\text{rot}[\vec{F}] = 0, \quad (2.12)$$

одакле се види да је ротор (или кривуља) резултујућег вектора силе Земљине теже  $\vec{F}$ , који представља производ скаларне величине  $m_B$  и вектора убрзања силе Земљине теже  $\vec{g}(\vec{r}_B)$ , једнак нули а из (2.9 и 2.12) може се закључити да је векторско поље силе Земљине теже безвртложно, тј. да нема ротацију или закривљеност у простору. То указује на постојање скаларног поља које се дефинише одређеном функцијом  $W = W(\vec{r}_B) = W_{\vec{F}}$  где је градијент скаларног поља једнак вектору силе Земљине теже:

$$\vec{F} = \text{grad}[W(\vec{r}_B)] = \nabla W(\vec{r}_B) = \nabla W_{\vec{F}}, \quad (2.13)$$

где  $\nabla$  представља Хамилтонов оператор или набла фактор који означава градијент скаларног поља за који важи:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.14)$$

где су  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  и  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  јединични вектори координатних оса правоуглог геоцентричног координатног система. Из 2.13 и 2.14 следи:

$$\vec{F} = \text{grad}[W_{\vec{F}}] = \nabla W_{\vec{F}} = \left( \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial x}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial y}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial z} \right). \quad (2.15)$$

Дакле, потенцијал силе земљине теже је скаларна функција и може се представити као:

$$W_{\vec{F}} = V + \Phi, \quad (2.16)$$

где је:

- $W_{\vec{F}}$  – потенцијал силе Земљине теже,
- $V$  – потенцијал гравитационе силе тела Земље и
- $\Phi$  – потенцијал центрифугалне силе Земљине ротације.

Уколико се свакој тачки простора придружи скалар дефинисан скаларном функцијом 2.16 добија се скаларно поље силе Земљине теже.

Једначине наведених потенцијала у скаларном облику у геоцентричном координатном систему су:

$$V = V(x, y, z) = V(\vec{r}_B) = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\Omega, \quad (2.17)$$

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(\vec{r}_B) = \Phi(x, y) = m_B \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.18)$$

Посредством потенцијала дефинишу се гравитациона  $\vec{F}$  и центрифугална  $\vec{f}$  сила као градијенти скаларних поља  $V$  и  $\Phi$ , респективно:

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже

$$\vec{F} = \text{grad}[V] = \nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (2.19)$$

$$\vec{f} = \text{grad}[\Phi] = \nabla \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 0 \right), \quad (2.20)$$

где се са симболом  $\nabla$  (набла) означава градијент скаларног поља.

Уврштањем једначина 2.17 и 2.18 у једначину 2.16, такође се добија израз за потенцијал силе Земљине теже у геоцентричном координатном систему:

$$W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}}(x, y, z) = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz + m_B \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.21)$$

односно

$$W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}}(\vec{r}_B) = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\Omega + m_B \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.22)$$

### 2.1.3 Потенцијал убрзања силе Земљине теже

Аналогно једначини 2.12, за векторско поље убрзања силе Земљине теже важи (Vaníček & Krakiwsky, 1982):

$$\text{rot}[\vec{g}(\vec{r}_B)] = 0, \quad (2.23)$$

што значи да је векторско поље убрзања силе Земљине теже  $\vec{g}(\vec{r}_B)$  такође безвртложно као и у случају поља силе Земљине теже  $\vec{F}$ . Ово додатно указује на постојање скаларног поља које се дефинише функцијом  $W = W(\vec{r}_B)$ , где је градијент скаларног поља једнак вектору убрзања:

$$\vec{g}(\vec{r}_B) = \text{grad}[W(\vec{r}_B)] = \nabla W(\vec{r}_B). \quad (2.24)$$

Из једначине 2.9 може се закључити да се векторска поља силе Земљине теже и убрзања силе Земљине теже међусобно разликују само по фактору размере, тј. по маси  $m_B$ . Дакле, изучавање геометријских особина векторског поља силе могуће је базирати у односу на изучавање геометријских особина векторског поља њеног убрзања.

По истом принципу, изучавање скаларног поља силе Земљине теже може се базирати у односу на изучавање скаларног поља његовог убрзања.

Потенцијална функција или реални потенцијал убрзања силе Земљине теже  $W(\vec{r}_B)$  којом је дефинисано скаларно поље утврђена је збиром:

$$W = V + \Phi, \quad (2.25)$$

где је  $V$  потенцијал убрзања гравитационе силе Земље, а  $\Phi$  потенцијал убрзања центрифугалне силе Земљине ротације који су дефинисани у геоцентричном правоуглом систему изразима:

$$V = V(x, y, z) = V(\vec{r}_B) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\Omega, \quad (2.26)$$

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(\vec{r}_B) = \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.27)$$

Када се упореде једначине 2.17 и 2.18 са једначинама 2.26 и 2.27, респективно, јасна је разлика у размери коју дефинише скаларна величина  $m_B$ .

Коначно, из једначина 2.25, 2.26 и 2.27, у векторском облику, у геоцентричном правоуглом координатном систему, потенцијал убрзања силе Земљине теже је изражен као (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$W = W(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.28)$$

односно

$$W = W(\vec{r}_B) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\Omega + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.29)$$

Аналогно случају потенцијала силе Земљине теже важи релација за потенцијал његовог убрзања, где је вектор убрзања силе Земљине теже представљен као градијент скаларног поља убрзања силе Земљине теже

$$\vec{g} = grad[W] = \nabla W = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial(V + \Phi)}{\partial x}, \frac{\partial(V + \Phi)}{\partial y}, \frac{\partial(V + \Phi)}{\partial z} \right), \quad (2.30)$$

где су  $\frac{\partial W}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial y}$  и  $\frac{\partial W}{\partial z}$  компоненте вектора убрзања силе Земљине теже у правцима X,

Y и Z оса респективно, за које важи (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010; Одаловић, et al., 2018):

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = W_x = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (x_B - x) d\Omega + \omega^2 x_B, \quad (2.31)$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = W_y = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (y_B - y) d\Omega + \omega^2 y_B, \quad (2.32)$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = W_z = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (z_B - z) d\Omega + \omega^2 z_B. \quad (2.33)$$

#### 2.1.4 Нивоске површи и вертикале

Потенцијал у геометријском контексту може се проучавати помоћу нивоских површи и вертикала или линија сила.

Нивоске или еквипотенцијалне површи су површи дуж којих нема промене вредности потенцијала:

$$W(x, y, z) = C = \text{const} . \quad (2.34)$$

Вертикале су линије дуж којих се правац тангенте у свакој њиховој тачки поклапа са правцем градијента скаларног поља, што одговара правцу вектора убрзања силе Земљине теже.

Карактеристике нивоских површи и вертикала, као и њихова међусобна геометријска веза, могу се одредити уз помоћ прираштаја потенцијала  $W$  у тачки  $B$  на физичкој површи Земље:

$$dW = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz . \quad (2.35)$$

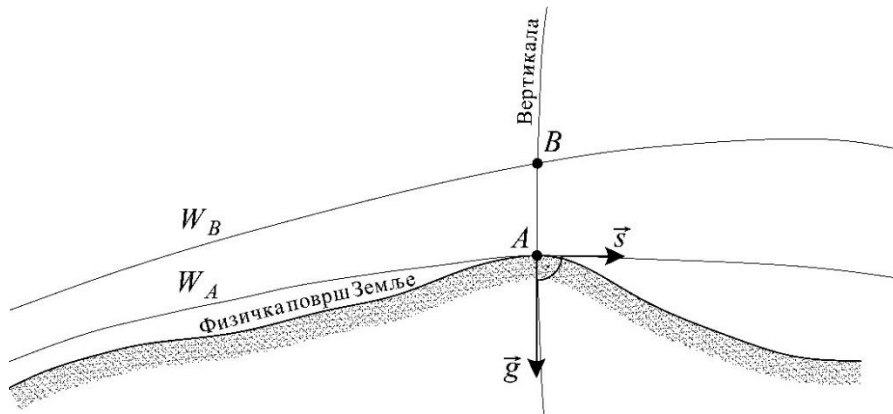
Прираштај потенцијала  $dW$  у векторском облику може се представити скаларним производом вектора убрзања силе Земљине теже  $\vec{g}(\vec{r}_B)$  и вектора  $\vec{s} = (dx, dy, dz)$ :

$$dW = \vec{g}(\vec{r}_B) \cdot \vec{s} = \vec{g} \cdot \vec{s} = g \cdot ds \cdot \cos \angle(\vec{g}, \vec{s}) . \quad (2.36)$$

Ако се узме вектор  $\vec{s}$  дуж нивоске површи  $W_B = \text{const}$  у тачки  $B$ , прираштај потенцијала ће бити једнака нули, тј. нема промене вредности потенцијала (слика 2.2):

$$dW = \vec{g} \cdot \vec{s} = g \cdot ds \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 , \quad (2.37)$$

из чега следи да су вектори  $\vec{g}$  и  $\vec{s}$  међусобно управни, односно да је вектор убрзања силе Земљине теже у тачки  $B$  управан на нивоску површ  $W_B$ . То значи да су вертикале управне на нивоске површи, пошто је правац тангенте вертикале у свакој њеној тачки идентичан правцу вектора убрзања силе Земљине теже.



Слика 2.2: Вектор  $\vec{s}$  дуж нивоске површи тачке  $A$

Анализом прираштаја потенцијала између две бесконачно блиске нивоске површи  $W_A$  и  $W_B$  (слика 2.3), могуће је утврдити особине и међусобне односе нивоских површи и вертикала. Разлика потенцијала између овакве две површи може се приказати у облику:

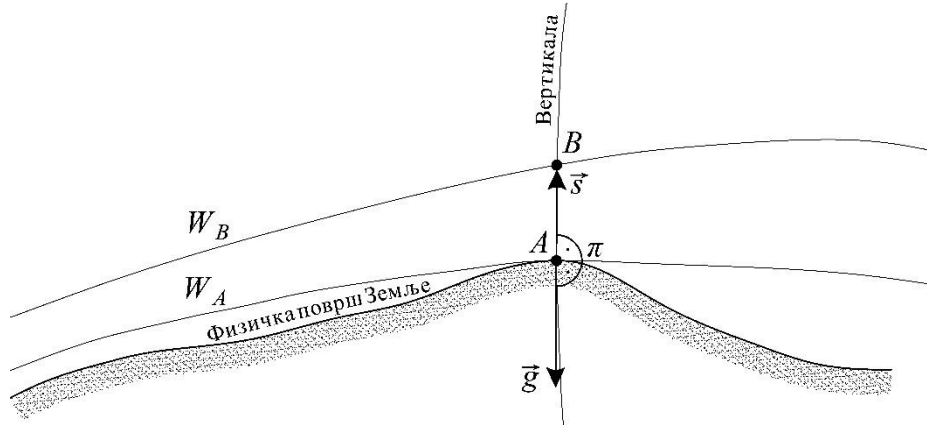
$$W_A - W_B = dW_{AB} = \vec{g}_A \cdot \vec{s}_{AB} , \quad (2.38)$$



## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже

где је вектор  $\vec{s}_{AB}$  узет дуж вертикале која пролази кроз тачке  $A$  и  $B$ , тако да вектори  $\vec{g}_A$  и  $\vec{s}_{AB}$  граде угао  $\pi$  па је разлика потенцијала једнака производу њихових интензитета:

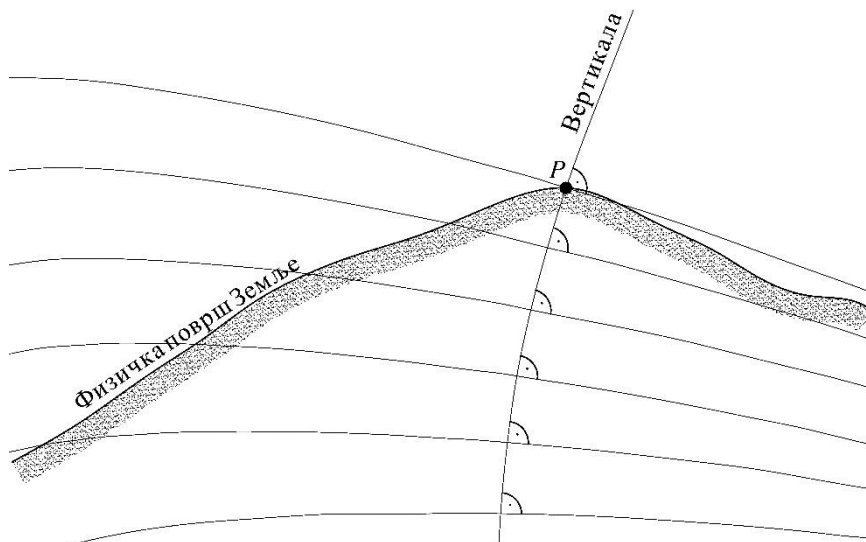
$$dW_{AB} = g_A \cdot ds \cdot \cos(\pi) = -g_A \cdot ds = const . \quad (2.39)$$



Слика 2.3: Вектор  $\vec{s}$  у правцу вертикале која пролази кроз тачку  $A$

Најважнији закључци о нивоским површима и вертикалама до којих се дошло на основу 2.39 су (Vaniček & Krakiwsky, 1982):

1. због непрекидне промене силе Земљине теже следи непрекидна промена растојања између нивоских површи, односно нивоске површи међусобно конвергирају од екватора ка половима (слика 2.4);
2. најкраће растојање између две произвољно блиске нивоске површи представља одсечак вертикале који је истовремено управан на обе нивоске површи, одакле се, с обзиром на непаралелност нивоских површи, може закључити да је вертикала закривљена просторна крива (слика 2.4);
3. нивоске површи никада се не пресецају нити додирују и
4. кроз сваку тачку вертикале пролази по једна нивоска површ.

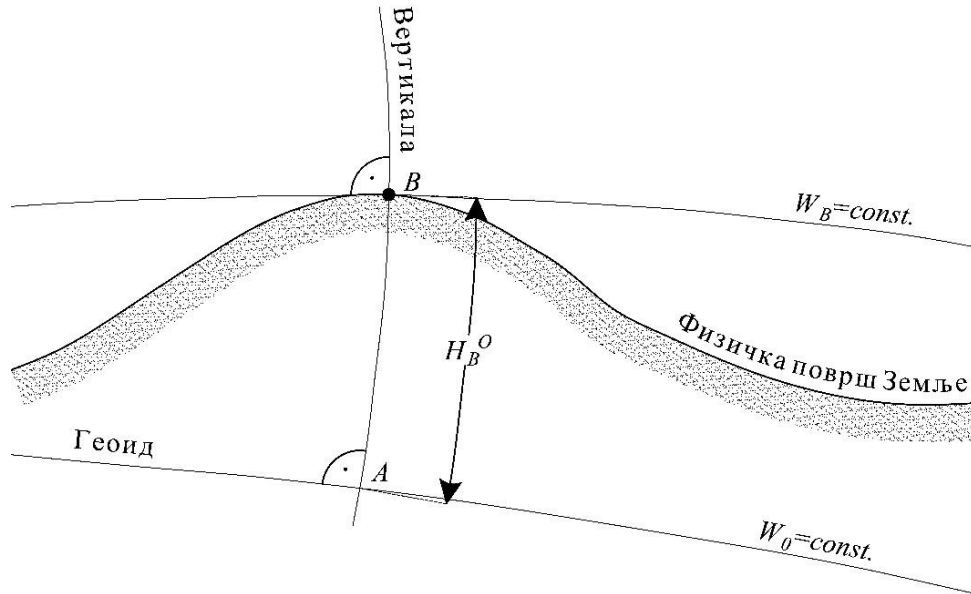


Слика 2.4: Закривљеност вертикале и конвергенција нивоских површи

Нивоске површи и вертикале су кључни концепти у геодезији који играју битну улогу у дефинисању и одређивању висина. Посебан значај има нивоска површ позната као геоид, која се подудара са средњом идеално мирном површи океана и мора (слика 2.5):

$$W(x, y, z) = W_0 = const. \quad (2.40)$$

Геоид је првобитно предложен од стране Гауса као површ која описује облик Земље, а касније је, према Листингу, добио име геоид. Будући да је ова површ идеална као основа за физички дефинисан систем висина, геоид је прихваћен као референтна површ ортометријских висина (слика 2.5).



Слика 2.5: Површ геоида и ортометријска висина

## 2.2 СПОЉАШЊИ И УНУТРАШЊИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Функције потенцијала и њихови први парцијални изводи представљају глатке и непрекидне функције у целом простору. При чему, у тачкама на физичкој површи тела  $\tau$ , други парцијални изводи имају прекиде.

Тачке које се налазе у простору ван тела  $\tau$ , где се претпоставља да нема маса, други изводи задовољавају Лапласову једначину, док унутар тела  $\tau$  утврђују Поасонову једначину. Ове једначине се добијају употребом основних концепата теорије потенцијала и теорије поља, као што су проток вектора и Гаусова интегрална формула.

Ако површ  $S$  у потпуности обухвата тело  $\tau$  (слика 2.6) проток вектора убрзања кроз ту површ је дефинисан следећим изразом (Webster, 1927):

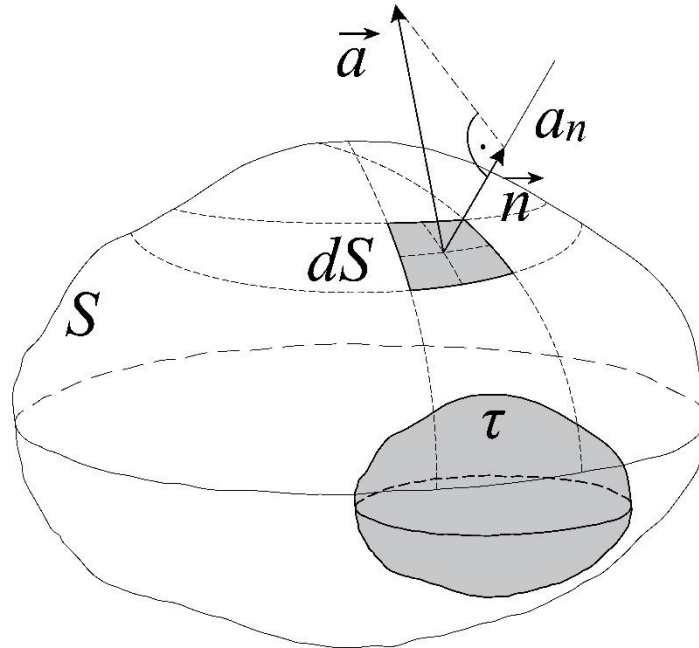
$$\iint_S a_n dS = -4\pi GM, \quad (2.41)$$

где је:

- $\vec{a}$  вектор убрзања,
- $a_n$  пројекција вектора убрзања  $\vec{a}$  на спољашњу нормалу  $\vec{n}$  површи  $S$ ,

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже

- $M$  маса тела  $\tau$  и
- $dS$  диференцијални прираштај или елемент површи  $S$ .



Слика 2.6: Тело  $\tau$  запремине  $\Omega$  унутар тела  $S$  и проток вектора кроз затворену површ

Маса тела  $\tau$  се може приказати као троструки интеграл густине  $\rho$  по запремини  $\Omega$  тела  $\tau$ .

$$M = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega, \quad (2.42)$$

где је  $d\Omega$  диференцијални прираштај или елемент запремине.

Тада проток вектора убрзања дефинисан једначином 2.41 добија облик:

$$\iint_S a_n dS = -4\pi G \iiint_{\Omega} \rho d\Omega. \quad (2.43)$$

Применом Гаусовог интеграла (Webster, 1927):

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} d\tau = \iint_S a_n dS, \quad (2.44)$$

при чему је дивергенција вектора убрзања  $\vec{a}$  дефинисана као:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (2.45)$$

следи

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} d\tau = -4\pi G \iiint_{\Omega} \rho d\tau, \quad (2.46)$$

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{a} + 4\pi G \rho) d\tau = 0. \quad (2.47)$$

Једнакост у једначини 2.47 важи само ако је подинтегрална функција једнака нули:

$$\operatorname{div} \vec{a} + 4\pi G \rho = 0. \quad (2.48)$$

Уврштањем једначине 2.45 у 2.48 добија се:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi G \rho = 0. \quad (2.49)$$

Једначина 2.49 се најчешће записује у облику:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G \rho, \quad (2.50)$$

односно

$$\Delta V = -4\pi G \rho, \quad (2.51)$$

где  $\Delta$  представља Лапласов оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.52)$$

Једначина Пуасона је дефинисана изразом 2.51 уз претпоставку да се  $\Delta V$  и  $\rho$  односе на исту тачку унутар тела  $\tau$ .

Такође, у било којој тачки ван тела  $\tau$ , уз претпоставку да ван тела нема маса важи једначина Лапласа:

$$\Delta V = 0. \quad (2.53)$$

Коначно, на основу једначина 2.51 и 2.53 потенцијал гравитационе силе тела  $\tau$  може се поделити на:

- унутрашњи потенцијал  $\Delta V = -4\pi G \rho$ , односно функцију потенцијала  $V$  која задовољава једначину Пуасона и
- спољашњи потенцијал  $\Delta V = 0$ , односно функцију потенцијала  $V$  која задовољава једначину Лапласа.

### 2.2.1 Спољашњи и унутрашњи потенцијал тела Земље

Када је у питању тело Земље и када се користе једначине 2.28 и 2.29 у теоријским и практичним прорачунима, главни ограничавајући фактор представља фигурисање густине тела Земље у тим једначинама. Ипак, може се доказати за друге парцијалне изводне функције потенцијала убрзања гравитационе силе Земље да важи:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G \rho, \quad (2.54)$$

као и за друге парцијалне изводне функције потенцијала центрифугалне силе Земљине ротације да важи:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (2.55)$$

Онда за потенцијал убрзања силе Земљине теже  $W$  мора да важи:

$$\Delta W = \Delta V + \Delta\Phi = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (2.56)$$

Ако се занемари присуство маса око тела Земље (маса Земљине атмосфере и друге масе), кад је потенцијал убрзања гравитационе силе Земље хармонијска функција ван тела Земље  $\Delta V=0$ , једначина 2.56 добија облик:

$$\Delta W = \Delta V + \Delta\Phi = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 + 2\omega^2 = 2\omega^2. \quad (2.57)$$

Као и у случају површи  $S$  и тела  $\tau$ , на основу претпоставке да се занемари присуство маса око тела Земље, теоријска и практична разматрања потенцијала убрзања силе Земљине теже  $W$  могуће је поделити на:

- унутрашњи потенцијал  $\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$ , односно функцију потенцијала  $W$  која задовољава једначину Пуасона и
- спољашњи потенцијал  $\Delta W = 2\omega^2$ , односно функцију потенцијала  $W$  која задовољава једначину Лапласа.

Већина анализа у физичкој геодезији, односи се на истраживања и одређивања спољашњег потенцијала. С обзиром да је потенцијал убрзања центрифугалне силе аналитичка функција у једноставном облику која је потпуно дефинисана након усвајања вредности угаоне брзине Земљине ротације, може се закључити да се одређивање спољашњег потенцијала убрзања силе Земљине теже даље своди на утврђивање спољашњег потенцијала убрзања гравитационе силе Земље.

### 2.3 НОРМАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ

У сврху истраживања и анализе реалног потенцијала  $W$  у теорију потенцијала убрзања силе Земљине теже, уводи се концепт строго математички дефинисаног нормалног потенцијала  $U$  који се дефинише као скаларна функција:

$$U = U(\vec{r}_B) = U(x_B, y_B, z_B). \quad (2.58)$$

Нормални потенцијал  $U$  представља потенцијал убрзања теже тела које има масу идентичну Земљиној, комплетно обухватајући облик обртног елипсоида и слажући се са његовом површином. Истовремено, ово тело ротира око своје мале осе истом угаоном брзином као и Земља. Центар масе овог тела тачно се поклапа са центром масе Земље, док се мала оса елипсоида подудара са средњом осом Земљине ротације.

Тело које задовољава ове услове и за које је уведен нормални потенцијал назива се нормалном Земљом. Његова тежа је позната као нормална тежа, а убрзање теже као убрзање нормалне теже или само нормално убрзање, које се дефинише као градијент нормалног потенцијала:

$$\vec{\gamma} = \text{grad}(U) = \nabla U(\vec{r}_B) = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (2.59)$$

Као и код реалног потенцијала, нивоске површи нормалног потенцијала су површи дуж којих не долази до промене потенцијала, док се линије сила нормалног поља, које су закривљене само у равни меридијана, називају нормалним вертикалама.

У случају нормалне Земље, уочава се феномен обртне симетрије нормалног поља, који настаје због специфичног распореда маса и густина унутар нормалне Земље  $\rho_E$ . Као резултат, нивоска површ нормалног поља, тј. нормалног потенцијала (једначина 2.61) представља обртни елипсоид, познат као нивоски елипсоид (слика 2.7).

Аналогно једначи 2.25 за реални потенцијал  $W(\vec{r}_B)$  за нормални потенцијал важи:

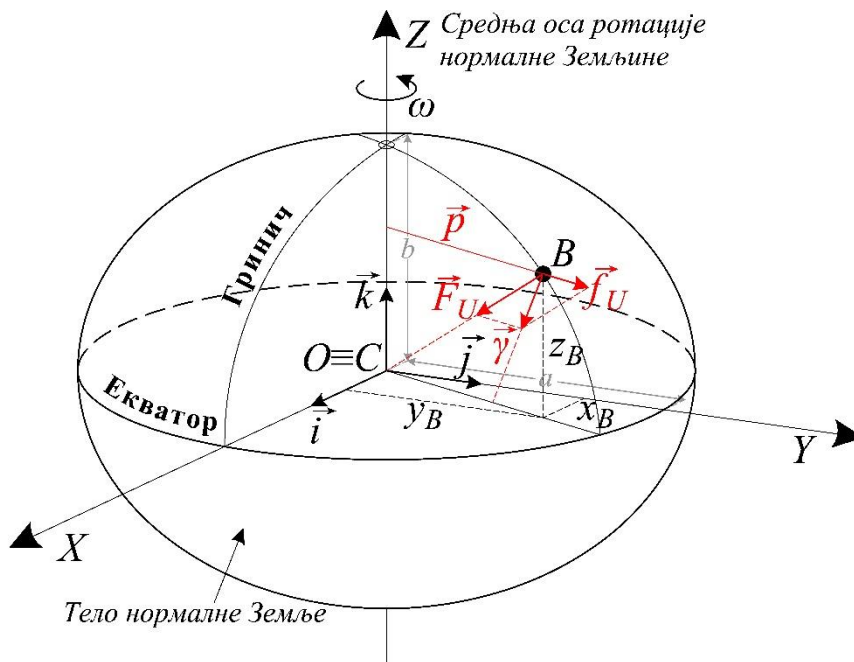
$$U = U(\vec{r}_B) = V_U + \Phi_U, \quad (2.60)$$

где је:

- $V_U$  потенцијал убрзања гравитационе силе нормалне Земље и
- $\Phi_U$  потенцијал убрзања центрифугалне силе која настаје као последица ротације нормалне Земље.

Као и у случају функције потенцијала убрзања силе Земљине теже, на основу претпоставке да ван Нормалне Земље нема маса и с обзиром да и за потенцијал убрзања гравитационе силе Нормалне Земље важи  $\Delta V_U = 0$ , потенцијал се дели на:

- унутрашњи потенцијал за који важи  $\Delta U = -4\pi G\rho_E + 2\omega^2$ , односно функцију потенцијала  $U$  која задовољава једначину Пуасона и
- спољашњи потенцијал за који важи  $\Delta U = 2\omega^2$ , односно функцију потенцијала  $U$  која задовољава једначину Лапласа.



Слика 2.7: Нормална Земља или нивоски елипсоид

Вредност нормалног потенцијала на површи нивоског елипсоида  $U_0$  једнака је вредности стварног потенцијала убрзања теже на површи геоида, према једначини 2.61. Мала и велика полуоса елипсоида се дефинишу тако да нивоски елипсоид најбоље апроксимира површ геоида у геометријском смислу (Moritz, 1980; Одаловић, 2005):

$$U(x, y, z) = U_0 = W_0 = \text{const}. \quad (2.61)$$

Нормални потенцијал  $U$  је дефинисан кроз четири параметра који описују нивоски елипсоид. Ти параметри су:

- $b$  – мала полуоса нивоског елипсоида,
- $a$  – велика полуоса нивоског елипсоида,
- $\omega$  – угаона брзина ротације Земље и
- $U_0$  – вредност потенцијала на површи нивоског елипсоида.

Ови параметри су неопходни да би се потпуно одредила геометрија нивоског елипсоида и његов однос са гравитационим пољем Земље. На пример, параметри  $a$  и  $b$  одређују облик и величину елипсоида, док  $\omega$  описује његову ротацију. Величина  $U_0$  представља вредност потенцијала на површи нивоског елипсоида, што је важно за израчунавање разлике у потенцијалу између различитих тачака на површи Земље. Овај комплет параметара доприноси потпуном разумевању нормалног потенцијала  $U$  и његове улоге у сврху истраживања и анализе реалног потенцијала  $W$ .

Коначно, нормални потенцијал  $U$  може се описати у складу са следећим условима:

- $U$  се може разложити на два потенцијала: први,  $V_U$  представља хармонијску функцију изван нивоског елипсоида, док је други,  $\Phi_U$  центрифугални потенцијал који је идентичан оном (једначина 2.27) који се користи за реални потенцијал  $W$ , што значи да важи  $\Phi = \Phi_U$ ,
- обртни елипсоид мора бити површ еквипотенцијална за  $U$ , као што је геоид површ еквипотенцијална за  $W$ , тако да важи  $U_0 = W_0$  и
- једнакост  $U_0 = W_0$  је условљена геометријским параметрима обртног елипсоида и физичким параметрима геоида, према следећем односу (Sansò & Sampietro, 2022):

$$U_0 = \frac{1}{3} \omega^2 a^2 + \frac{GM}{ae} \arctg \left( \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right). \quad (2.62)$$

## 2.4 АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

За адекватно решавање проблема повезивања различитих система висина (нпр. ундулације  $N$  и аномалије висине  $\zeta$ ), потребно је више од самих информација о нормалном потенцијалу  $U$  и параметрима елипсоида који карактеришу облик Земље.

Неопходно је имати значајно прецизније информације о геоиду, односно о реалном потенцијалу  $W$ , него што то пружа елипсоид, који оставља „последњих 100 m“ варијација ундулације геоида необјашњеним. „Последњих 100 метара“ се односи на варијације у ундулацији у преосталих 100 m ундулације на одређеном подручју.

Да би се то постигло, неопходно је моделирати разлику између реалног  $W$  и нормалног  $U$  потенцијала у истој тачки  $P$  која се налази на површи или у простору изнад Земље. Та разлика је позната као резидуални потенцијал или аномалијски потенцијал  $T$ .

За потребе одређивања аномалијског потенцијала, користе се различити извори података, укључујући:

- мерење убрзања силе Земљине теже,
- праћење путање и међусобног растојања сателита,
- рачунање резидуалног утицаја топографије из дигиталних модела терена и
- мерења океанске средње динамичке висине.

Одређивање вредности  $T$  представља један од главних задатака физичке геодезије, за који је неопходно добро познавање више различитих математичких дисциплина и приступа (нпр. колокација). При томе за све приступе важи да морају проћи кроз два основна корака:

- линеаризација односа који изражавају, тј. одређују посматране (мерене) величине као функционале аномалијског потенцијала  $T$  и
- уклањање делова аномалијског потенцијала  $T$  који су узроковани утицајем топографије (*topographic signal*), а који апроксимирају дуготаласну и краткоталасну карактеристику функционала аномалијског потенцијала (Sansò, et al., 2019).

Дакле, аномалијски потенцијал  $T$  се дефинише као разлика реалног  $W$  и нормалног потенцијала  $U$ , по формули:

$$T = W - U, \quad (2.63)$$

у коју када се уврсте једначине 2.25 и 2.60, и узимајући у обзир дефиниције за потенцијале  $\Phi$  и  $\Phi_U$  из којих важи  $\Phi = \Phi_U$ , долази се до следеће релације:

$$T = W - U = V + \Phi - V_U - \Phi_U = V - V_U, \quad (2.64)$$

одакле следи да је аномалијски потенцијал хармонијска функција ван маса тела Земље

$$\Delta T = 0, \quad (2.65)$$

док је у тачкама које су истовремено унутар тела Земље и нивоског елипсоида, функција која представља збир других извода функција разлика густина (Одаловић, 2005):

$$\Delta T = -4\pi G\rho + -4\pi G\rho_E = -4\pi G(\rho - \rho_E). \quad (2.66)$$

## 2.5 ФУНКЦИОНАЛИ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

Концепт линеарних функционала у контексту аномалијског потенцијала  $T$  односи се на примену математичких метода у физичкој геодезији и геофизици, конкретно у одређивању варијација у гравитационом пољу Земље. Аномалијски потенцијал  $T$ , често представљен потенцијалном функцијом  $V$ , описује одступање гравитационог поља Земље од једноставног, симетричног модела, као што је модел савршене сфере или елипсоида. Ова одступања настају услед варијација у распореду маса и густина Земљине



коре и мантла, које могу бити изазване различитим геолошким феноменима као што су планине, долине или аномалије густина у дубљим слојевима.

Линеарни функционал у овом контексту представља функцију која пресликава потенцијалну функцију  $V$  у реалан број (скалар) на начин који је линеаран. Математички, ако је  $L$  линеарни функционал који делује на потенцијалну функцију  $V$ , он задовољава следеће особине:

- **линеарност:** за било које две потенцијалне функције  $V_1$  и  $V_2$ , и било која два реална броја  $a$  и  $b$ , линеарни функционал задовољава:

$$L(aV_1 + bV_2) = aL(V_1) + bL(V_2), \quad (2.67)$$

- **адитивност:** за било које две потенцијалне функције  $V_1$  и  $V_2$ , функционал задовољава:

$$L(V_1 + V_2) = L(V_1) + L(V_2), \quad (2.68)$$

- **хомогеност:** за било који скалар  $a$  и било коју потенцијалну функцију  $V$ , функционал задовољава:

$$L(aV) = aL(V). \quad (2.69)$$

У проучавању аномалија убрзања силе Змине теже, линеарни функционали могу се користити за извођење конкретних информација из потенцијалне функције, као што је аномалија убрзања на тачки, градијент гравитационог поља (који даје убрзање силе Земљине теже) или друге изведене величине. Ови функционали су кључни у геодетским и геофизичким истраживањима, омогућавајући закључке о подземним структурама на основу мерења убрзања силе Земине теже са површи или са сателита.

На пример, један једноставан линеарни функционал може бити оцена реалног потенцијала  $W$  на одређеној тачки како би се добила аномалија убрзања на тој тачки. Сложенији линеарни функционали могу укључивати изводе потенцијала како би се проучавале промене у правцу поља или да би се срачунало убрзање.

Примена линеарних функционала у анализи аномалијског потенцијала  $T$  је фундаментални аспект анализе података о гравитационом пољу у физичкој геодезији и геофизици, што омогућава детаљно проучавање унутрашњости Земље и доприноси бољем разумевању геолошких и геодинамичких процеса. Линеарни функционали  $T$  се могу уопштено представити једначином:

$$t = t\left(T, \frac{\partial T}{\partial n}\right), \quad (2.70)$$

где је  $\frac{\partial T}{\partial n}$  парцијални извод аномалијског потенцијала у правцу нормале. Заменом елипсоида терестричком сфером олакшава се рачунање, поједностављујући изразе. Један од услова је да се правац нормале  $n$  на сферу и правац радијус вектора  $r$  међусобно поклапају. Тада једначина 2.70 постаје:

$$t = t\left(T, \frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad (2.71)$$

а најбитнији линеарни функционали аномалијског потенцијала  $T$  добијају облик:

1. ундулације геоида  $N$  (на основу Брунсове теореме),

$$N = \frac{T}{\gamma_0}, \quad (2.72)$$

2. аномалија висине  $\zeta$  (на основу Брунсове теореме),

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad (2.73)$$

3. аномалије убрзања силе теже  $\Delta g$ ,

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{a}T, \quad (2.74)$$

4. поремећајног убрзања силе теже  $\delta g$ ,

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2.75)$$

5. компоненте одступања вертикала у правцу меридијана  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{1}{r\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{a\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (2.76)$$

6. компоненте одступања вертикала у правцу првог вертикала  $\eta$ ,

$$\eta = -\frac{1}{r\gamma_0 \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = -\frac{1}{a\gamma_0 \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \quad (2.77)$$

где су:

- $r$  – радијус вектор сфере,
- $\theta$  – сферна колатитуда,
- $\lambda$  – сферна лонгитуда и
- $\gamma_0$  – вредност нормалног потенцијала у одговарајућој тачки на нивоском елипсоиду, при чему се аномалијски потенцијал односи на одговарајућу тачку на геоиду.

У физичкој геодезији, термин „линеарни функционал“ односи се на било коју математичку операцију која трансформише функцију (као што су реални  $W$ , односно аномалијски  $T$  потенцијали) у скалар (један реалан број) путем линеаризације (Одаловић, et al., 2018).

Ови функционали су од суштинског значаја за тумачење и апроксимацију гравитационог поља и могу се применити истовремено на реални и аномалијски потенцијал. Односно,

иако су набројани линеарни функционали уобичајено изражени као функционали аномалијског потенцијала  $T$ , они су такође линеарни функционали реалног потенцијала  $W$ . Ово је могуће зато што су ове величине директно повезане са аномалијским потенцијалом, који представља део реалног потенцијала Земљиног гравитационог поља. Дакле, ове величине могу се истовремено изразити као функционали реалног и аномалијског потенцијала, што омогућава праћење њихове везе са гравитационим пољем Земље и извођење различитих анализа и закључка у области физичке геодезије и геофизике.

У том контексту, линеарни функционали се користе за описивање односа мерења и потенцијала (реалног  $W$  и аномалијског  $T$ ) и њихових изведених величина. На пример, аномалија убрзања и ундулација геоида могу се користити за анализу структуре гравитационог поља и проучавање нехомогености и распореда земљишних маса. С друге стране, реални потенцијал може пружити информације о особинама гравитационог поља на површи Земље.

Ови линеарни функционали, примењени кроз теорију потенцијала, представљају средство за издвајање и анализу специфичних геофизичких информација из потенцијалног поља, што значајно олакшава процес изучавања и моделирања гравитационог поља Земље. У овом контексту, линеарни функционали играју важну улогу у интерпретацији и апроксимацији гравитационог поља Земље, при чему њихова примена није ограничена на један извор.

Коначно, примена линеарних функционала у анализи Земљиног гравитационог поља је суштина геодезије. Геодезија, као научна дисциплина, фокусира се на мерење, одређивање и дефинисање геометријског облика Земље, њене оријентације у простору и њеног гравитационог поља. Примена линеарних функционала у овом контексту је фундаментална за интерпретацију гравитационих података, моделирање геоида/квазигеоида и разумевање различитих геофизичких процеса.

Употреба линеарних функционала у геодезији омогућава превођење комплексних података о пољима потенцијала у смислене, разумљиве величине као што су аномалије убрзања, ундулације геоида и одступања вертикала. Ове величине су битне за различите примене, укључујући одређивање орбита сателита, геопросторно картирање, па чак и у истраживању природних ресурса.

Прецизност и методологије развијене у геодезији за анализу и истраживање гравитационог поља Земље имају широке импликације, не само у спознаји физичких феномена Земље, већ и за практичне примене у навигацији, геоинформатици, грађевинарству и мониторингу животне средине. То је област која успешно спаја теоријске аспекте математике и физике са практичним применама у реалном свету, показујући значај основних научних принципа у свакодневним технологијама и истраживањима Земљиног система (Vaníček & Krakiwsky, 1982; Hofmann-Wellenhof & Moritz, January 2006).

## 2.6 СФЕРНИ ХАРМОНИЦИ

### 2.6.1 Зонални сферни хармоници

У математичком изучавању ротационе симетрије, **зонални сферни хармоници** (*Zonal Spherical Harmonics*) представљају посебну групу сферних хармоника који су инваријантни при ротацији око одређене фиксне осе. Зоналне сферне функције представљају широко проширење концепта зоналних сферних хармоника како би се омогућило узимање у обзир општије симетрије групе. Ови хармоници су од суштинског значаја у различитим областима, укључујући геодезију, физику и астрономију.

На сфери, универзални зонални сферни хармоник степена  $\ell$  који је инваријантан при ротацији која фиксира северни пол, представљен је у сферним координатама са:

$$Z^{(\ell)}(\theta, \phi) = P_{\ell}(\cos(\theta)), \quad (2.78)$$

где су:

- $P_{\ell}$  – Лежандров полином степена  $\ell$ .
- $\theta$  – колатитуда и
- $\phi$  – поларни угао.

При чему је општи зонални сферни хармоник степена  $\ell$  означен са:

$$Z_x^{(\ell)}(y), \quad (2.79)$$

где је:

- $x$  тачка на сфери која представља фиксну осу, а
- $y$  променљива функције.

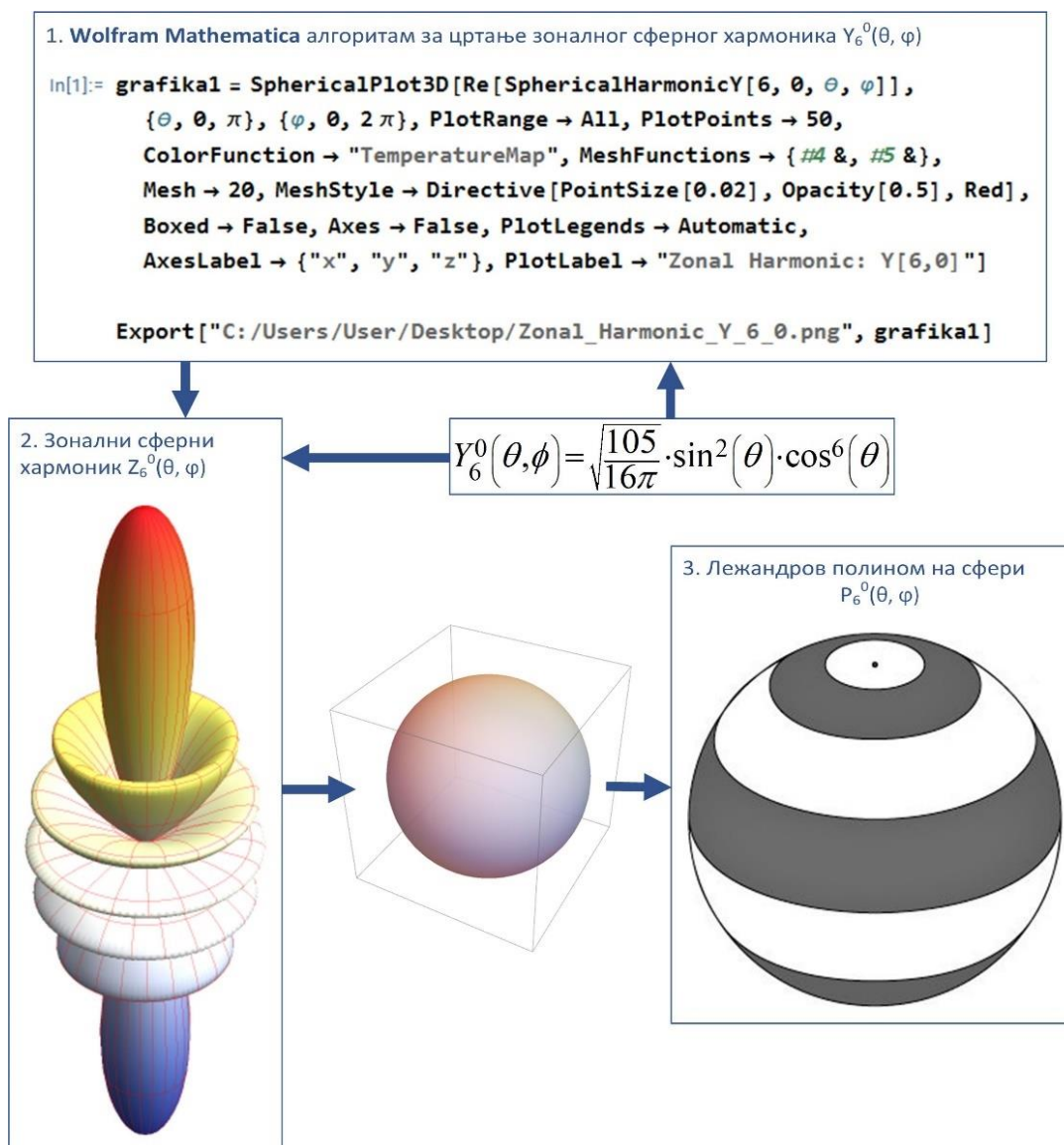
Овај хармоник се може добити ротацијом основног зоналног сферног хармоника,

$$Z^{(\ell)}(\theta, \phi). \quad (2.80)$$

У  $n$ -димензионалном Еуклидском простору, зонални сферни хармоници су дефинисани као дуална репрезентација одговарајућег линеарног функционала у Хилбертовом простору сферних хармоника.

Пример примене функције зоналног сферног хармоника (слика 2.8), у контексту решавања проблема Лежандровог полинома на сфери је  $P_6$ . Овај пример се односи на сферну хармонијску функцију шестог реда. Користећи је, могу се анализирати својства или облик објеката на сфери, као што су географске или космичке структуре, као и динамички процеси који се одвијају на њој.

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже



Слика 2.8: Зонални сферни хармоник 6-ог реда и 0-тог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica)

У контексту решавања проблема на сфери,  $Y_6^0(\theta, \phi)$  је примењен да би се анализирала сферна хармонијска функција шестог реда. Ово је од значаја за моделирање функционала аномалијског потенцијала у физичкој геодезији, где се користе сферни хармоници како би се представили различити аспекти гравитационог или магнетног поља Земље.

### 2.6.2 Тесерални сферни хармоници

У математичком изучавању ротационе симетрије, **тесерални сферни хармоници** (*Tesseral Spherical Harmonics*) су посебни сферни хармоници који су инваријантни при тесералној ротацији. Ове хармоници се користе у различитим областима, укључујући геодезију.

На сфери, тесерални сферни хармоник степена  $\ell$ , који је инваријантан у односу на тесералне ротације, може се представити у сферним координатама као:

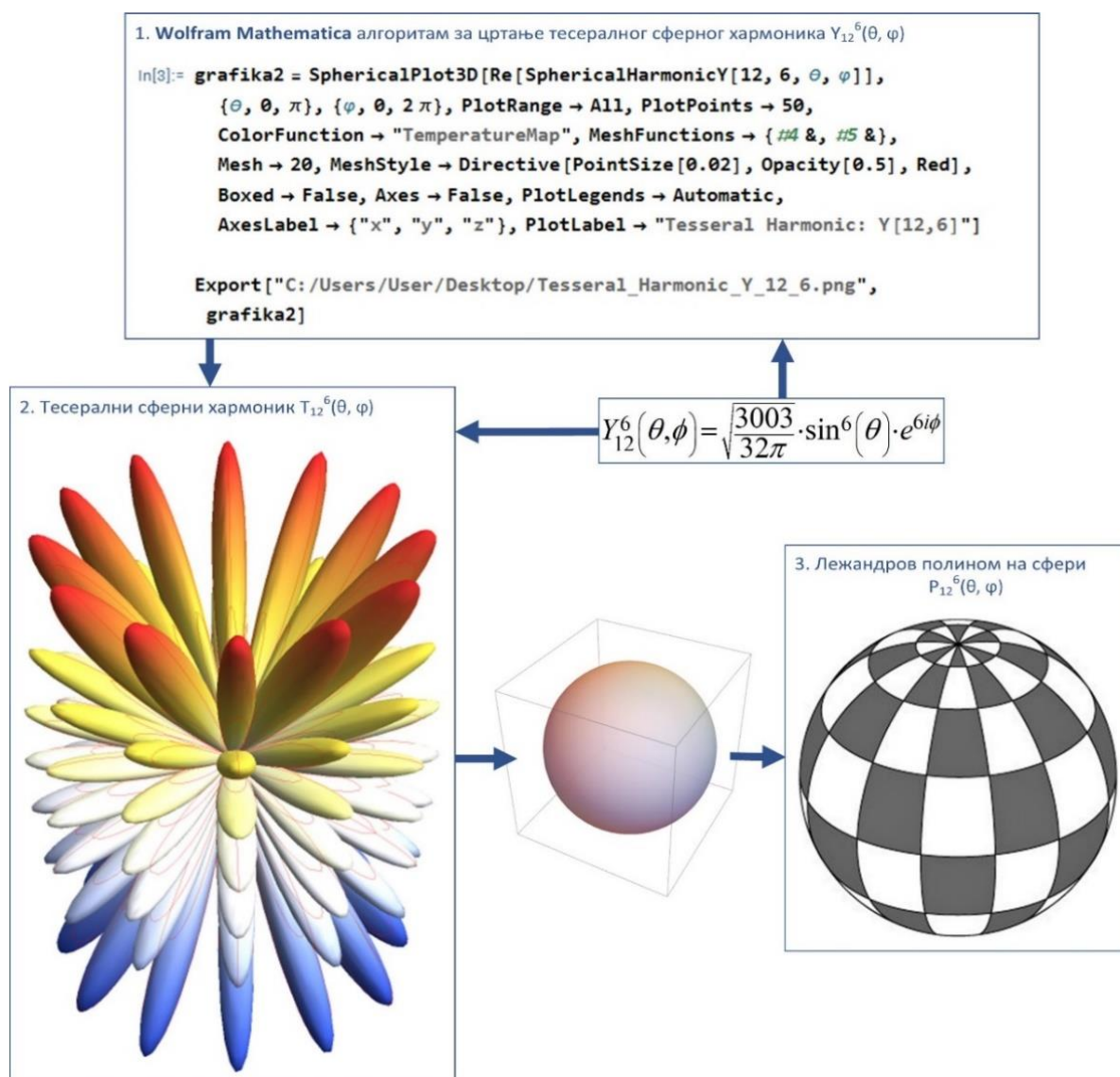
$$T_\ell(\theta, \phi) = P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad (2.81)$$

где су:

- $P_\ell^m$  – придружени Лежандрови полиноми,
- $\theta$  – колатитуда,
- $\phi$  – поларни угао и
- $m$  – амплитуда (или магнитуда).

У  $n$ -димензионалном Еуклидском простору, тесерални сферни хармоници су дефинисани као дуална репрезентација одговарајућег линеарног функционала у Хилбертовом простору сферних хармоника.

Пример примене функције тесералног сферног хармоника (слика 2.9), у контексту решавања проблема Лежандровог полинома на сфери је  $P_{12,6}$ . Ово се односи на компоненту тесералне хармонијске функције, конкретно 12-ог реда и 6-ог степена. Овај пример може бити користан у анализи гравитационих или магнетних поља на сфери и у проучавању флукуација у космосу.



Слика 2.9: Тесерални сферни хармоник 12-ог реда и 6-ог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica)

У контексту решавања проблема на сфери,  $Y_{12}^6(\theta, \phi)$  је примењен на компоненту тесералне хармонијске функције, конкретно 12-ог реда и 6-ог степена. Овај приступ је битан у моделирању функционала аномалијског потенцијала у физичкој геодезији, где тесерални сферни хармоници омогућавају детаљну анализу и предикцију различитих феномена који утичу на гравитационно или магнетно поље Земље.

### 2.6.3 Секторски сферни хармоници

У математичком изучавању ротационе симетрије, **секторски сферни хармоници** (*Sectoral Spherical Harmonics*) представљају посебну класу сферних хармоника који су инваријантни под ротацијама сектора или одсечака од сфере.

На сфери, секторски сферни хармоник степена  $\ell$ , који је инваријантан у односу на ротације које фиксирају одређени сектор, може се представити у сферним координатама као:

$$S_{\ell}^m(\theta, \phi) = P_{\ell}^m(\cos(\theta))e^{im\phi} \quad (2.82)$$

где су:

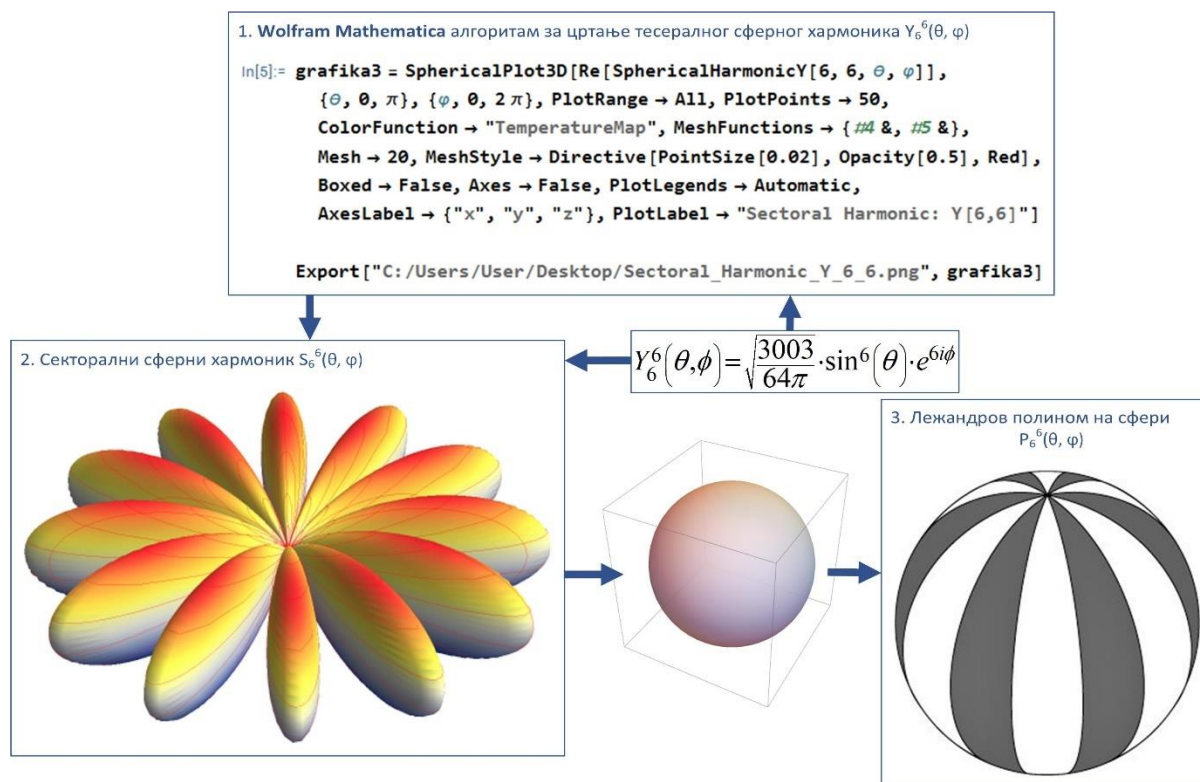
- $P_{\ell}^m$  – придружени Лежандрови полиноми,
- $\theta$  – колатитуда,
- $\phi$  – поларни угао и
- $m$  – амплитуда (или магнитуда).

У  $n$ -димензионалном Еуклидском простору, секторски сферни хармоници се дефинишу као дуална репрезентација одговарајућег линеарног функционала у Хилбертовом простору сферних хармоника.

Пример примене функције секторског сферног хармоника (слика 2.10), у контексту решавања проблема Лежандровог полинома на сфери је  $P_{6,6}$ . Ова сферна функција представља секторску компоненту 6-ог реда и 6-ог степена. Може се користити за анализу секторских својстава на сфери, као што су угловне зависности физичких појава.

У контексту решавања проблема на сфери, представља секторску компоненту 6-ог реда и 6-ог степена. У физичкој геодезији, моделирање функционала аномалијског потенцијала захтева прецизно представљање угловних зависности гравитационног или магнетног поља, а секторски сферни хармоници играју битну улогу у овом процесу.

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже



Слика 2.10: Секторски сферни хармоник 6-ог реда и 6-ог степена, (цртано помоћу Free Trial верзије Wolfram Mathematica)

### 2.6.4 Значај сферних хармоника у геодезији

Зонални, тесерални и секторски сферни хармоници имају својство репродукције и користе се за анализу и моделирање сферних феномена због чега су веома корисни у геодезији. Играју важну улогу у одређивању аномалијског потенцијала и његових функционала у геодезији. Улоге ових класа хармоника су значајне и разноврсне:

- зонални сферни хармоници су инваријантни под ротацијама и представљају симетричне делове гравитационог поља. У контексту одређивања аномалијског потенцијала, они су од суштинског значаја за моделирање и представљање главних компоненти гравитационог поља Земље. Користе се за анализу и моделирање геодетских аномалија и за одређивање параметара геоида,
- тесерални сферни хармоници су класа хармоника који су инваријантни под тесералним ротацијама и користе се за представљање асиметричних делова гравитационог поља. У геодезији, они су од значаја за анализу и моделирање асиметричних гравитационих аномалија на површи Земље. Примена тесералних сферних хармоника омогућава прецизније одређивање локалних гравитационих аномалија и флукуација и
- секторски сферни хармоници су инваријантни под ротацијама сектора или одсецака од сфере. У геодезији, они су корисни за анализу и моделирање регионалних гравитационих аномалија, као и за представљање специфичних делова геодетског поља у различитим регионима. Примена секторских сферних хармоника омогућава анализу локалних гравитационих варијација и регионалних ефеката.



Комбинација ових различитих класа сферних хармоника у геодезији омогућава прецизно одређивање аномалијског потенцијала и његових функционала, што је од кључног значаја за различите аспекте геодезије, укључујући картографију, геоинформатику, геофизику и астрономију.

## 2.7 СФЕРНИ ХАРМОНИЦИ У ОДРЕЂИВАЊУ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА И ЊЕГОВИХ ФУНКЦИОНАЛА

### 2.7.1 Аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника

Аномалијски потенцијал  $T$ , изражен сфернохармонијским развојем, представља се као хармонијска функција ван терестричке сфере за  $r=R$ , помоћу следеће једначине:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n T_n(\theta, \lambda), \quad (2.83)$$

где је:

$$T_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)). \quad (2.84)$$

У геоцентричном координатном систему, где не постоје хармоници нултог и првог степена развоја, једначина 2.83 се модификује у следећи облик:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n T_n(\theta, \lambda). \quad (2.85)$$

Коначно аномалијски потенцијал изражен у функцији сферних хармоника добија следећи облик:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)). \quad (2.86)$$

### 2.7.2 Функционали аномалијског потенцијала у функцији сферних хармоника

Заменом једначине 2.86 у једначине (од 2.72 до 2.77), линеарни функционали аномалијског потенцијала  $T$  се изражавају на следећи начин у функцији сферних хармоника:

1. ундулација геоида  $N$ :

$$N = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (2.87)$$

2. аномалија висине  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (2.88)$$

3. аномалија убрзања силе теже  $\Delta g$ :

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (2.89)$$

4. поремећајно убрзање силе теже  $\delta g$ :

$$\delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (2.90)$$

5. компоненте одступања вертикала у правцу меридијана  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{GM}{Rr\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda)] \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos(\theta))}{\partial \theta}, \quad (2.91)$$

6. компоненте одступања вертикала у правцу првог вертикала  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{GM}{Rr\gamma \sin(\theta)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [m(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \sin(m\lambda) - \bar{K}_{nm} \cos(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)). \quad (2.92)$$

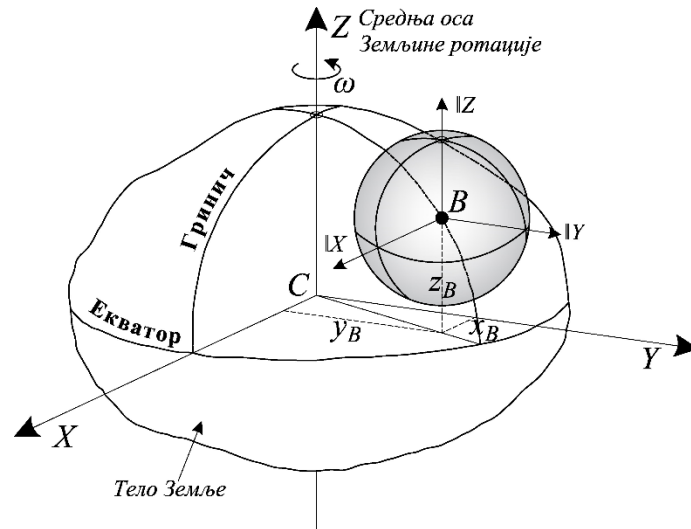
## 2.8 КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ

Моделирање Земљиног гравитационог поља зависи од избора координатног система. Обично, због општег облика Земље, сферни координатни систем служи за већину примена, и скоро сви глобални модели користе ове (поларне) координате. Начелно, анализа аномалијског потенцијала започиње одређивањем природних ( $\Phi$ ,  $L$ ,  $H^0$ ) и геодетских ( $B$ ,  $L$ ,  $h^e$ ) координата.

### 2.8.1 Природне координате

За дефинисање природних (географских или астрономских) координата тачке  $B$ , која се налази на физичкој површи Земље и која представља центар јединичне сфере ( $R=1$ ), користи се локални правоугли координатни систем. Овај координатни систем има свој координатни почетак у тачки  $B$  и осе паралелне са осама геоцентричног координатног система (слика 2.11).

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже

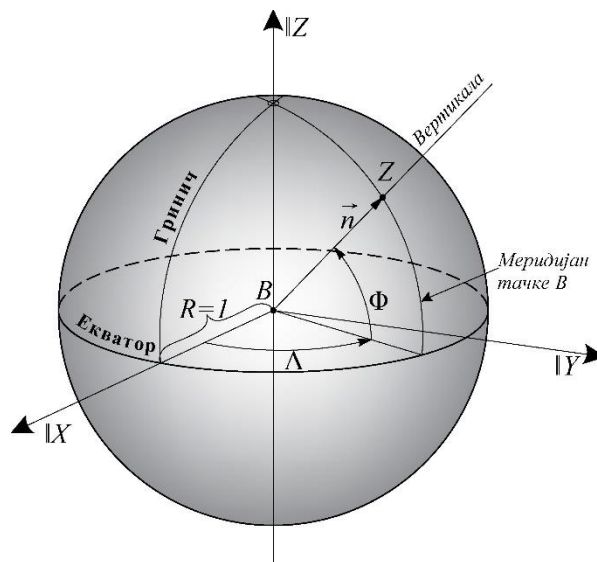


Слика 2.11: Геометрија локалног координатног система са јединичном сфером

На површ јединичне сфере пресликавају се усвојени почетни меридијан (Гринич), екватор и месни меридијан тачке  $B$ . Ово омогућава одређивање положаја тачке помоћу географских координата (слика 2.12):

- **географска латитуда  $\Phi$**  је угао који се налази у равни месног меридијана тачке  $B$  а одређују га раван екватора и правац вертикале у тачки  $B$  и
- **географска лонгитуда  $\Lambda$**  је угао који се налази у равни екватора а одређују га равани почетног меридијана (Гринича) и месног меридијана тачке  $B$ .

Једнозначно одређивање положаја тачке  $B$  у простору се постиже помоћу уређене тројке бројева  $(\Phi, \Lambda, H^0)$ , где су географска латитуда  $\Phi$  и лонгитуда  $\Lambda$  две природне координате, а трећа координата јесте вредност потенцијала у тачки  $B$  односно њена ортометријска висина  $H^0$ .



Слика 2.12: Природне или сферне или географске координате  $(\Phi, \Lambda, H^0)$

Веза између правоуглих геоцентричних и природних координата је дата у једначинама 2.93:

$$\begin{aligned} X &= R \cos(\Phi) \cos(\Lambda) \\ Y &= R \cos(\Phi) \sin(\Lambda) . \\ Z &= R \sin(\Phi) \end{aligned} \quad (2.93)$$

### 2.8.2 Геодетске координате

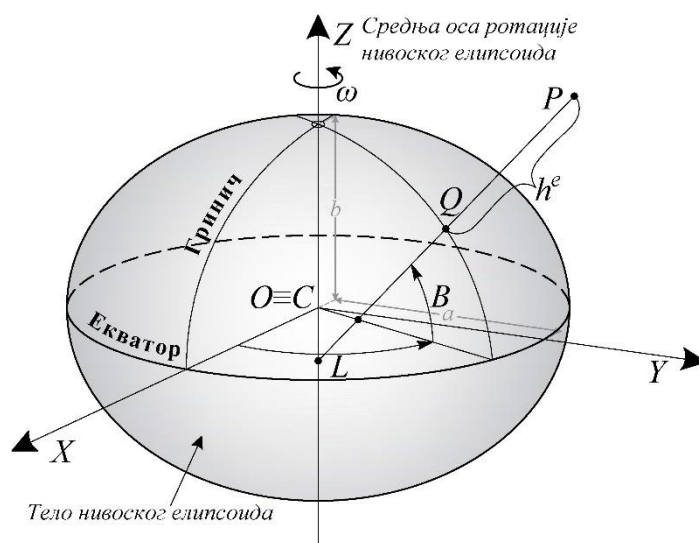
Ипак, ако се узме у обзир да је облик тела Земље благо спљоштен на половима, за неке потребе се препоручује коришћење елипсоидних или геодетских координата. Треба нагласити да се геодетске координате које се односе на геодетски датум (елипсоид) не користе у начелном смислу за моделирање гравитационог поља, јер не допуштају решење Лапласове диференцијалне једначине (Jekeli, 2007).

Дакле, при одређивању уређене тројке геодетских координата  $(B, L, h^e)$ , користи се површ обртног елипсоида, са својим центром позиционираним у координатни почетак геоцентричног координатног система (слика 2.13).

Нормала елипсоида која пролази кроз тачку  $P$  на физичкој површи Земље сече површ елипсоида у тачки  $Q$ . Одсечак нормале од тачке  $P$  до тачке  $Q$ , означена са  $h^e$ , назива се геодетском или елипсоидном висином. За потпуно одређивање положаја тачке помоћу геодетских координата у простору, потребно је одредити још две основне величине:

- **геодетска латитуда  $B$** , представља угао у равни месног меридијана тачке  $P$ . Овај угао одређују раван екватора и правац нормале у тачки  $P$  и
- **геодетска лонгитуда  $L$** , представља угао у равни екватора. Ова величина одређује се помоћу равни почетног меридијана (Гринича) и месног меридијана тачке  $P$ .

Познавањем све три геодетске координате, тачка  $P$  је једнозначно одређена у простору. Важно је истаћи да геодетска латитуда може да заузима вредности у распону од  $0^\circ$  до  $90^\circ$  северно ( $N$ ) или јужно ( $S$ ) у односу на екватор, док геодетска лонгитуда може да заузима вредности од  $0^\circ$  до  $180^\circ$  источно ( $E$ ) или западно ( $W$ ) у односу на почетни меридијан (Гринич).



Слика 2.13: Елипсоидне или геодетске координате  $(B, L, h^e)$

Коначно, анализом односа између геодетских и природних координата откривају се значајне информације о карактеристикама аномалијског потенцијала, што представља кључни аспект у истраживањима и моделирању гравитационог поља Земље, (Одаловић, 2005).

## 2.9 РЕФЕРЕНТНЕ ВИСИНСКЕ ПОВРШИ

Постоје различита мишљења о избору референтне висинске површи - геоид или квазигеоид. У случају коришћења геоида, неопходно је познавати ортометријске висине  $H^O$ , док се у случају квазигеоида користе нормалне висине  $H^N$ .

Главни изазов при коришћењу геоида, који представља физички дефинисану површ, јесте његова осетљивост на неравномерно распоређене масе и густине у површинским слојевима Земље. Стога је потребно тачно познавати распоред маса и густина за правилно одређивање геоида.

Супротно томе, квазигеоид, који нема физички дефинисану површ, захтева интеграцију преко површи Земље, што представља изазован математички поступак. Данас постоје различите методе које решавају овај проблем са различитим степеном успеха, што је стимулисало развој бројних студија у циљу унапређења ових метода и провере њихове тачности у моделирању квазигеоида, (Vaníček, et al., 2012).

### 2.9.1 Геоид

Да би висине имале практичну вредност и смисао морају бити одређене у односу на средњи ниво мора. Ово налаже потребу за познавањем средњег нивоа мора на глобалном нивоу. Важно је истаћи да средњи ниво мора није потпуно идентичан екипотенцијалној површи константног (реалног) потенцијала убрзања силе Земљине теже на површи геоида  $W_0$  (слика 2.14).

У исто време, вертикална оријентација геодетских инструмента у процесу мерења на некој тачки одговара локалном вектору убрзања силе Земљине теже који је нормалан на екипотенцијалну површину која представља хоризонталну нивоску површ. Због тога гравитационо поље има кључну улогу у практичном дефинисању висина.

Међутим, због тога што је средњи ниво мора веома блиска површ екипотенцијалној површи, у распону од  $\pm 2$  m, могуће је користити екипотенцијалну површ као референтну за висине. Таква површ, која најбоље апроксимира средњи ниво мора, назива се геоид. Пример геоида, одређеног на основу новог глобалног геопотенцијалног модела високе резолуције **SGG-UGM-2**, приказан је на слици 2.15.

Дакле, геоид је тродимензионална екипотенцијална површ на којој је вредност потенцијала  $W_0$ . То је идеална површ која приказује како би тело Земље изгледало када би сви њени делови били подједнако изложени гравитационом пољу, а ниво мора био би константа. Међутим, због неправилног распореда и густина маса тела Земље, геоид одступа од математички дефинисане површи обртног сфероида или елипсоида. Уместо тога, он је обликован да прати потенцијал убрзања силе Земине теже.

Када је реч о геоиду неопходно је разматрати ортометријске висине  $H^O$  али ако се посматра геоид у односу на нивоски елипсоид онда је неопходно увести појам ундулације геоида  $N$ , тј. висине геоида у односу на површ нивоског елипсоида (слика 2.14).

Ортометријске висине  $H^O$  представљају основне висине изнад средњег нивоа мора, које се најтачније могу одредити посредством класичне методе нивелања. Постоје и друге висине које се односе на средњи ниво мора, али су мање уобичајене, као што је нормална висина  $H^N$ , о којој ће бити више речи у контексту квазигеоида.

Ортометријска висина тачке  $P$  мери се дуж вертикале, која је увек тангентна на вектор убрзања силе Земље теже, и представља растојање од површи геоида до тачке  $P$  на физичкој површи Земље.

Такође битна висина јесте геодетска или елипсоидна висина  $h$  која је одређена у односу на геоцентрични референтни (нивоски) елипсоид, а мерена је дуж нормале на елипсоид. Оне се могу одредити помоћу **GNSS** мерења, али саме по себи имају веома малу практичну употребу. Међутим, ако се ундулација геоида  $N$  одузме од геодетске висине  $h$  (слика 2.14), добија се ортометријска висина  $H^O$ , која има практичну вредност (из једначине 2.94).

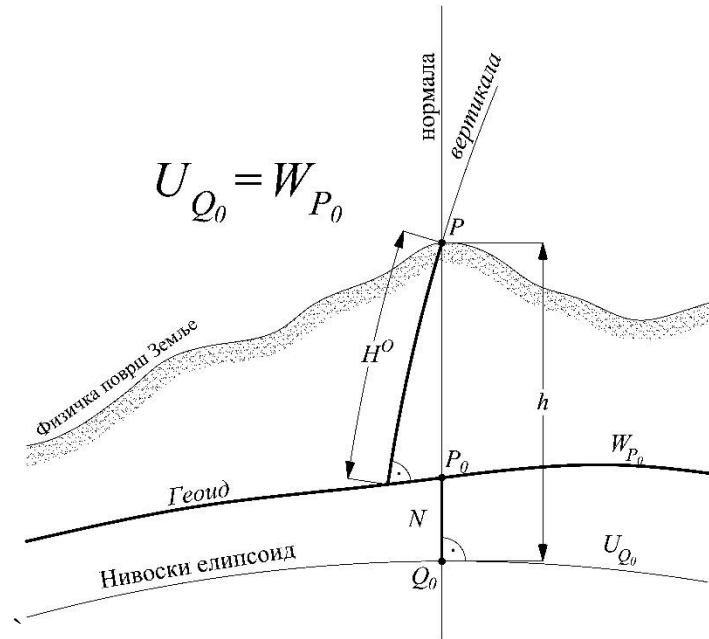
Може се рећи да су геоид и ундулација геоида, основни концепти у геодезији помоћу којих се истражује облик Земље и различите варијације у гравитационом пољу. Због своје комплексности и значаја у области геодезије, ови концепти су често тема истраживања.

Дакле, ундулација геоида  $N$  је висина геоида у односу на нивоски елипсоид. Ова разлика се јавља због неправилног распореда густина и маса Земље и нерегуларности у гравитационом пољу. Када се рачуна ундулација геоида, одређује се висина геоида изнад или испод референтне површи нивоског елипсоида. Математичка веза између наведених појмова је представљена једначином:

$$N = h - H^O, \quad (2.94)$$

где је:

- $N$  – ундулација геоида (висина геоида у односу на референтни нивоски елипсоид),
- $h$  – елипсоидна или геодетска висина тачке на површи Земље и
- $H^O$  – ортометријска висина тачке на физичкој површи Земље.



Слика 2.14: Геоид, ундулација геоида и ортометријска висина (Одаловић, 2005)

У исто време, ундулација геоида се може одредити преко теореме Брунса (по 2.72), односно једначини 2.95, што је веома корисна једначина за потребе овог истраживања:

$$N = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}}, \quad (2.95)$$

где је:

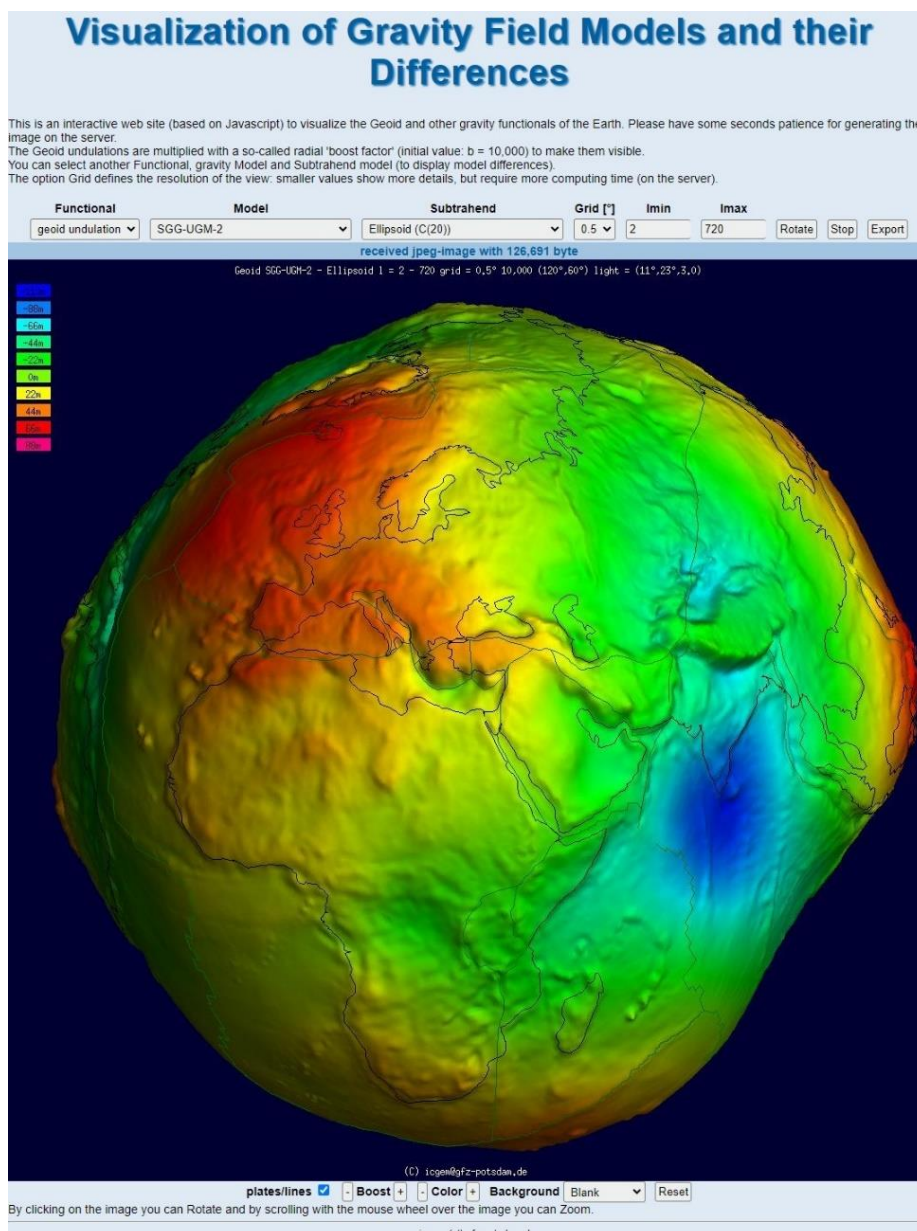
- $T_{P_0}$  – вредност аномалијског потенцијала који се односи на тачку  $P_0$  на површи геоида и
- $\gamma_{Q_0}$  – вредност нормалног потенцијала у тачки  $Q_0$  на нивоском елипсоиду.

С тим у вези, геометријски дефинисане величине могу се представити као линеарна комбинација аномалијског потенцијала  $T$  и његових првих парцијалних извода. Другим речима, ундулација геоида  $N$  може се анализирати као функционал аномалијског потенцијала, у сагласности са једначинама 2.67, 2.68 и 2.69, преко једначине:

$$t = L'[T], \quad (2.96)$$

где је  $L'$  линеарни функционал или оператор линеарног функционала који делује на потенцијалну функцију  $T$  (Одаловић, 2005).

## 2. Теорија потенцијала силе Земљине теже



Слика 2.15: Геоид одређен из глобалног геопотенцијалног модела SGG-UGM-2 представљен псеудобојама, сенчењем рељефа и вертикалним увећањем у размери 1:10 000 (ICGEM, 2024)

Познавање геоида и ундулације геоида од суштинског је значаја у многим геодетским и геофизичким применама. На пример, у геодезији се користи за прецизно дефинисање висина док у геофизици помаже у проучавању унутрашње структуре Земље и кретања тектонских плоча.

Ундулација геоида се често одређује комбинацијом сателитских гравиметријских мерења и моделирања гравитационог поља Земље. Ове методе омогућавају стварање детаљних модела геоида и ундулације геоида.

### 2.9.2 Квазигеоид

Најбитнији и највећи проблем у тачном дефинисању геоида јесте непотпуно познавање тачног распореда густина и маса тела Земље. Тај проблем је у жижи интересовања код свих оних који се баве пробеламтиком одређивања геоида. Револуционарну идеју 60-их

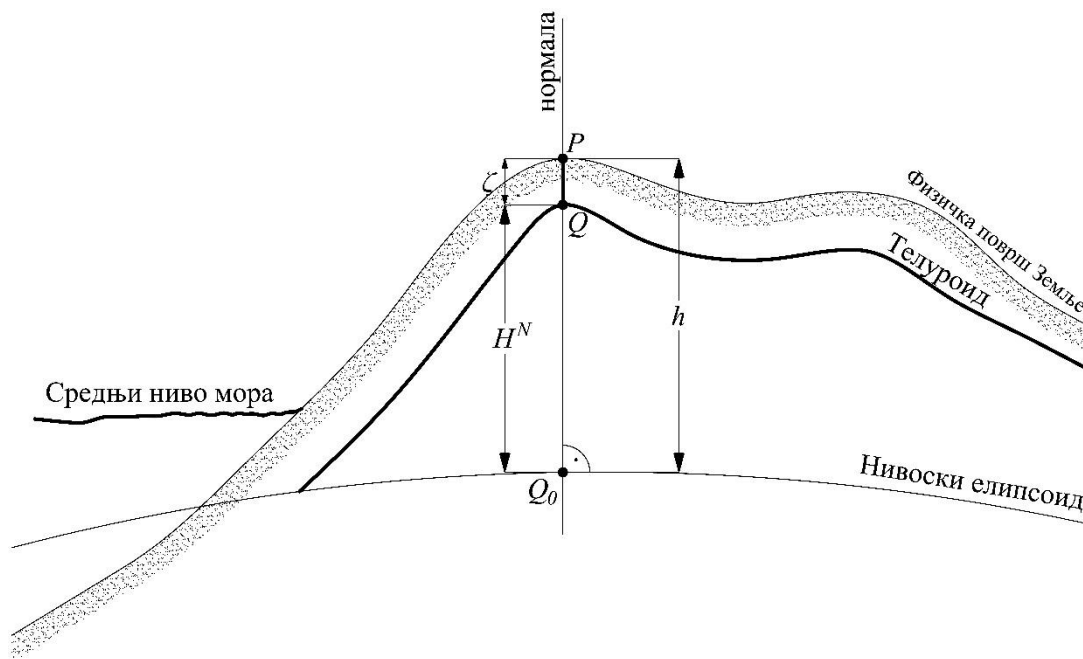


година прошлог века је изнео Молоденски. Пошто геоид није могуће одредити са довољном тачношћу Молоденски је увео алтернативну референтну површ познатију као квазигеоид (слика 2.17).

Растојање по нормали између нивоског елипсоида и квазигеоида назива се аномалија висине  $\zeta$ :

$$\zeta = h - H^N . \quad (2.97)$$

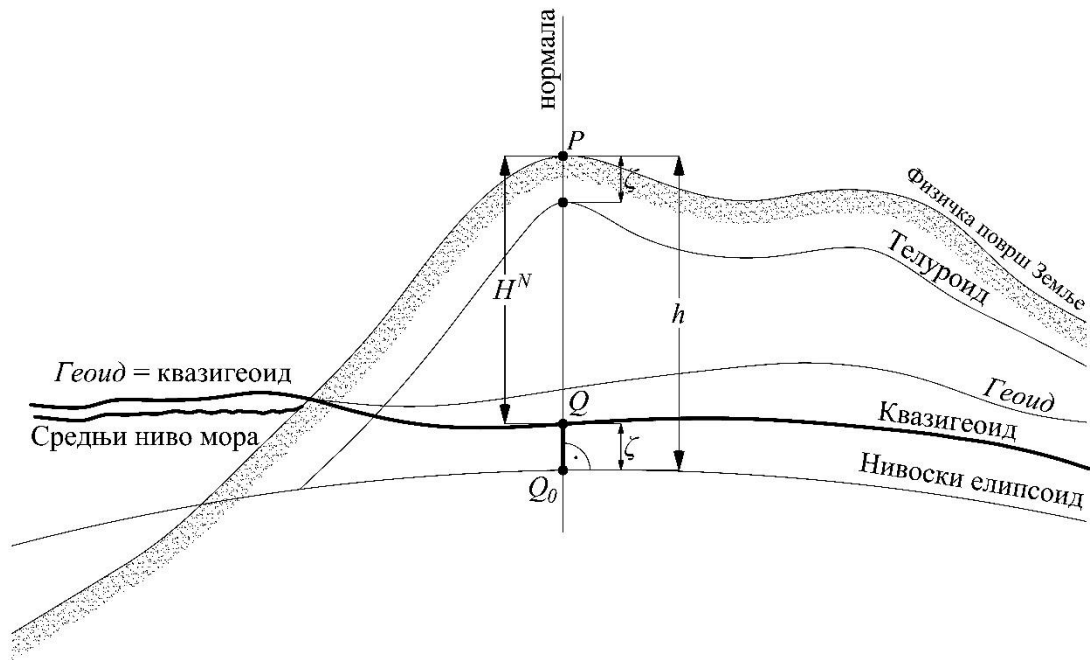
За одређивање квазигеоида није неопходно познавање распореда густина и маса у кори Земље јер се прорачуни не односе на површ геоида, већ на површ Земље, односно на површ која је веома слична површи Земље, званој телуроид (слика 2.16).



Слика 2.16: Телуроид

Теорија Молоденског се односи на потенцијал убрзања изван површи Земље. Приступ Молоденског не захтева никакво познавање густина, пошто се односи само на спољашње гравитационо поље и потребно је само познавање геометрије спољашњег поља. С друге стране, пошто је приступ заснован на геометрији, неопходна је интеграција по површи Земље, односно преко телуроида. Телуроид је површ која изгледа као површ Земље, осим што је померена од површи Земље за вредност аномалије висине  $\zeta$ , која је глатко варијабилна величина и креће се у распону вредности од -100 m и +100 m, као ундулација геоида. Да би квазигеоид имао практичну примену, мора бити повезан са физички смисленим системом.

Нормална висина тачке  $H^N$  на топографској површи дефинише се као висина одговарајуће тачке на телуроиду изнад референтног елипсоида, мерена по нормали. Међутим, нормалне висине могу се еквивалентно посматрати и као висине топографске површи изнад квазигеоида, такође мерене по нормали.



Слика 2.17: Однос између квазигеоида, геоида и нивоског елипсоида

Однос између нормалне висине  $H^N$ , геодетске висине  $h$  и аномалије висине  $\zeta$  (једначина 2.97) је исти као однос између ортометријске висине  $H^O$ , геодетске висине  $h$  и ундулације геоида  $N$ . Нормалне и ортометријске висине на отвореном мору су подударне, док се на копну могу разликовати више од једног метра.

Геоид је прилично глатка површ без ирегуларности и прекида док је површ телуроида много грубља (као и површ Земље). Односно, површ Земље није довољно глатка да би била могућа интеграција по њој. Места драстичних вертикалних раседа или веома изражених косина су места дисконтинуитета између површи Земље и телуроида што додатно компликује проблематику. То су локације где ни површ Земље ни телуроид не могу бити описани као математичке функције хоризонталног положаја. На таквим местима математички апарат Молоденског не показује задовољавајућа решења. Да би се превазишле ове потешкоће, потребна је нека врсте оптимизације ради прилагођавања топографије, тј. да би се површ телуроида изгладила. Ипак, овакав приступ може довести до неочекиваних грешака у коначном резултату (Vaníček, et al., 2012).

Као и у случају геоида, и код квазигеоида могуће је преко аномалијског потенцијала (једначина 2.71) и Брунсове формуле израчунати аномалију висине по формули:

$$\zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q}, \quad (2.98)$$

где је:

- $T_P$  – вредност аномалијског потенцијала који се односи на тачку  $P$  на физичкој површи Земље и
- $\gamma_Q$  – вредност нормалног потенцијала у тачки  $Q$  на површи телуроида, тј. на површи квазигеоида.

### **3. ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ**

При решавању геодетских проблема граничних вредности, од изузетног значаја је потенцијал убрзања силе Земљине теже  $W$ . Ова величина се оцењује кроз мерљиве параметре, који се изражавају у облику извода (функционала) аномалијског потенцијала  $T$  на геоиду.

Решење ових проблема дефинише граничне услове и апроксимативни облик Земље. Све везе између аномалијског потенцијала  $T$  и његових функционала у теорији и практичним применама засноване су на теоремама Стокса.

Једнозначно одређивање хармонијске функције ван дате површи  $S$  је могуће на основу њених задатих вредности на тој површи.

#### **3.1 ПРВИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – ДИРИХЛЕОВ ПРОБЛЕМ**

Први проблем граничних вредности теорије потенцијала, познат као Дирихлеов проблем, обухвата одређивање хармонијске функције унутар или изван дате површи  $S$  на основу познатих вредности на тој површи.

Дирихлеов принцип представља доказ да увек постоји хармонијска функција одређена из њених вредности задатих на површи  $S$ . Овај доказ егзистира када се разматра функција  $T$  која је хармонијска ван или унутар површи  $S$  (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010).

#### **3.2 ДРУГИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – НОЈМАНОВ ПРОБЛЕМ**

Случај када су уместо вредности хармонијске функције  $T$  познате вредности првог парцијалног извода у правцу нормале површи  $S$ , то представља други проблем граничних вредности теорије потенцијала или Нојманов проблем.

У спољашњем простору ван тела  $S$ , вредност аномалијског потенцијала  $T$  може се одредити познавањем вредности његовог првог извода на граничној површи. Ово се директно односи на одређивање вредности поремећеног убрзања силе Земљине теже  $\delta g$  које представљају градијент аномалијског потенцијала (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010).

$$\frac{\partial T}{\partial n} \rightarrow \delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}. \quad (3.1)$$

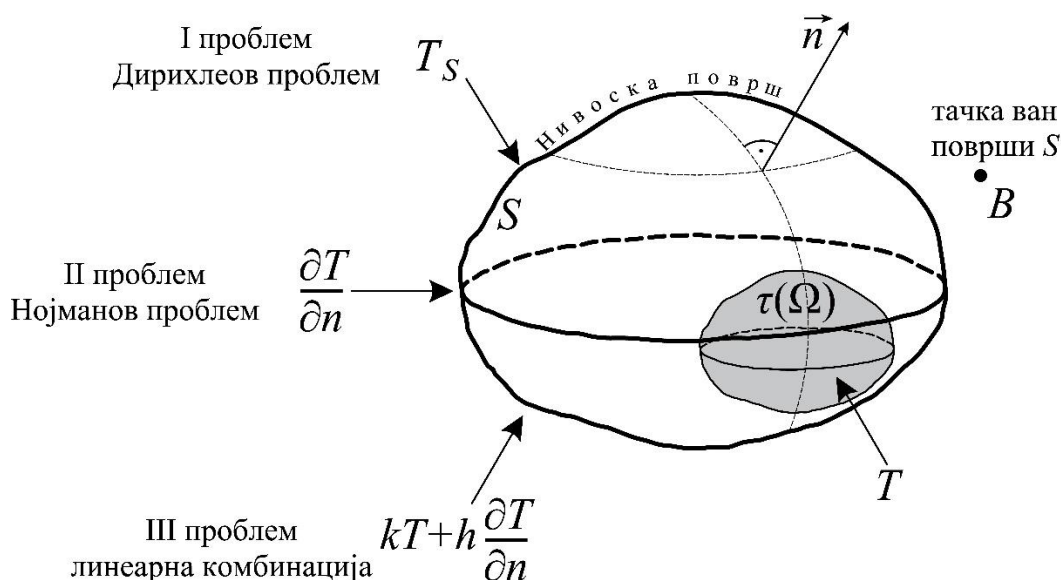
### 3.3 ТРЕЋИ ПРОБЛЕМ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА – ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА

Трећи проблем граничних вредности теорије потенцијала односи се на дефинисање хармонијске функције изван или унутар површи  $S$  (слика 3.1), што се постиже линеарном комбинацијом аномалијског потенцијала  $T$  и његовог нормалног извода на површи  $S$ .

У простору изван подручја  $S$ , аномалијски потенцијал  $T$  може се одредити коришћењем основне једначине физичке геодезије, тј. на основу познатих вредности аномалије убрзања силе Земљине теже  $\Delta g$  на граничној површи. Овај приступ укључује рачунање хармонијске функције  $T$  на основу познатих вредности линеарне комбинације на граничној површи  $S$ , како је представљено у једначини:

$$kT + h \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T \quad (3.2)$$

где су  $k$  и  $h$  константне величине (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010).



Слика 3.1: Граничне вредности – тело  $\tau$  запремине  $\Omega$  унутар површи  $S$  (Одаловић, 2024)

### 3.4 РЕШЕЊА ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

#### 3.4.1 Приступу у решавању проблема граничних вредности

Решавање проблема граничних вредности теорије потенцијала се постиже помоћу два различита приступа – **параметарског** и **операционог (интегралног)**.

Први, параметарски приступ, захтева формирање математичких модела у којима се аномалијски потенцијал представља као функција једног или више параметара. Ови модели могу бити непосредни или посредни, у зависности од начина представљања аномалијског потенцијала. У случају када је аномалијски потенцијал представљен као директна функција једне измерене величине, модел се класификује као непосредни или

директни. Супротно томе, ако је представљен као функција низа параметара који зависе од једне мерене величине, модели се називају посредним или индиректним.

У оба случаја, резултати опажања једне величине морају бити познати у свим тачкама подручја за који се модел одређује.

С друге стране, операциони приступ одређује аномалијски потенцијал из резултата опажања низа величина дотупних у коначном броју тачака.

### **3.4.2 Решења проблема граничних вредности**

Како је већ поменуто, ундулација геоида и аномалија висине се рачунају применом једначина 2.95 и 2.98. Ово се постиже коришћењем Брунсове теореме након решавања граничних проблема и одређивања аномалијског потенцијала.

Сфернохармонијска анализа укључивањем развоја потенцијала Земљине теже у ред сферних хармоника омогућава решење првог проблема граничних вредности, односно решење Дирихлеовог проблема.

У исто време други проблем граничних вредности, познат као Нојманов проблем, истражује и анализира се посебно у контексту GNSS технологија и метода.

Што се трећег проблема тиче, он се решава различитим методама, укључујући параметарски приступ, решење Стоксове једначине, редове Молоденског, или интегрални модел геодезије, познат и као колокација, (Одаловић, 2005; Грекуловић, 2014).

## 4. МЕТОДОЛОГИЈЕ ОДРЕЂИВАЊА КВАЗИГЕОИДА И ГЕОИДА

Методологије за одређивање квазигеоида и геоида углавном укључују следеће кораке:

1. **прикупљање података:** ово укључује коришћење података гравиметријских и сателитских мерења, као и податке о брзини сателита, њиховом међусобном растојању и положају у различитим временским тренуцима.
2. **обрада података:** подаци се анализирају и обрађују коришћењем гравиметријских метода и метода обраде сателитских података. Овде се укључују методе као што су гравиметријска реконструкција, гравиметријске корекције и обрада сателитских података.
3. **моделирање:** на основу обрађених података креира се модел квазигеоида или геоида. Ово може укључивати математичке моделе који се примењују на податке како би се добио најтачнији приказ Земљине површи.
4. **валидација:** креирани модел се валидира коришћењем независних података и мерења како би се потврдила његова тачност и прецизност.
5. **имплементација:** на крају, креирани модел квазигеоида или геоида се користи у различитим геодетским или геофизичким применама, као што су геодетско и геофизичко картирање, топографски премер и инжењерски пројекти.

Методологије за одређивање квазигеоида и геоида могу се поделити у зависности од доступних података, тј. примењених метода прикупљања тих података на:

1. **терестричке методе:** које се у главном односе на **гравиметријска мерења** промене убрзања силе Земљине теже на различитим тачкама на Земљи што укључује примену Стоксове формуле у случају одређивања геоида или редова Молоденског када се одређује квазигеоид. Такође, применом **астрогеодетског нивелмана**, који укључује астрономска и геодетска мерења, одређује се промена ундулације у функцији одступања вертикала.
2. **сателитске методе** као што су:
  - сателитска гравиметрија** која представља метод за изучавање гравитационог поља Земље помоћу сателита који се крећу око Земље. Ова техника користи сензоре на сателитима за праћење варијација у јачини гравитационог поља Земље, што омогућава стварање детаљних карата аномалија убрзања Земљине теже;
  - сателитска алтиметријска** прикупља информације о висини терена или океанске површи које се мере помоћу алтиметара на сателитима. Алтиметријски сателити прате измене у висини површи Земље, што укључује и промене у гравитационом пољу. Пратећи ове измене, могу се одредити разлике у гравитационом потенцијалу Земље, што доприноси одређивању геоида;
  - градиометрија** представља методу мерења гравитационог градијента помоћу специјалних сензора на сателитима. Гравитациони градијент представља разлику у гравитационом пољу између две тачке и омогућава детаљније разумевање аномалија убрзања Земљине теже на површи Земље. Мерења градијента се користе за израду карата аномалија убрзања, које могу бити корисне у процесу одређивања геоида;

**опажања путања сателита** су мерења која се користе за анализу и праћење путање сателита у околини Земље. Према теорији опште релативности, сателити трпе мање или веће промене убрзања силе Земљине теже у зависности од тога да ли пролазе преко области са већим или мањим масама. Пратећи ове разлике у убрзању, могу се добити информације о аномалијама убрзања Земљине теже и структури испод површи Земље;

**сателитско позиционирање (GPS/dh техника нивелања)** је коришћење глобалних навигационих сателитских система (GNSS) за одређивање висина на Земљи – **GPS/dh** метода нивелања.

3. **интегрални модел:** Ова методологија или приступ комбинује податке из различитих извора, укључујући терестричке и сателитске податке, како би се креирала комплетнија слика о геоиду и квазигеоиду. Ово укључује математичке моделе и алгоритме који интегришу различите типове података у јединствен модел.

Коришћењем наведених метода и различитих извора података, као и њихово комбиновање омогућава стварање најтачнијих и најпрецизнијих модела геоида и квазигеоида, због чега је посебно интересантан интегрални модел геодезије или колокација.

Такође, при решавању граничних проблема, неизбежно је разматрати да ли је информација о функционалу аномалијског потенцијала доступна за све тачке на Земљи или се односи само на ограничен (коначан) број тачака.

У приступима, попут решења Молоденског и Стокса, захтева се познавање резултата на свим тачкама Земљине површи, што у пракси представља изазов.

С друге стране, алтернативни приступ, као што је интегрални модел геодезије, односно колокација, омогућава рад са ограниченим (коначаним) бројем тачака. Иако је од суштинског значаја имати информације за коначан број тачака, ни то није увек реално изводљиво. У најбољем случају, ово је могуће испунити на тачкама глобалног модела квазигеоида или геоида које су веома ретко просторно распоређене.

Практично се располаже резултатима одређивања функционала на само једном делу физичке површи Земље. Тако да је коришћењем ових резултата, могуће одредити модел (квазигеоида, односно геоида) у локалном подручју. Овако одређени модели називају се локални квазигеоиди или локални геоиди.

Локални модел, био то квазигеоид или геоид, односи се на подручје које може бити ограничено меридијанима и паралелама, а простире се над територијом која:

- је релативно мала у глобалном контексту или
- обухвата континенте, више држава или појединачне државе.

Резолуција модела квазигеоида и геоида одређена је на основу броја и распореда тачака које се користе у поступку предикције коначног сигнала, односно аномалије висине и ундулације геоида, на тачкама модела користећи интерполацију. Резолуција мора бити тако дефинисана да се на основу измерених података може одредити аномалија висине, односно ундулација геоида на центиметарском нивоу.

Резолуција модела (квазигеоида и геоида) одређена је на основу броја и распореда тачака које се користе у поступку предикције (интерполације и екстраполације) коначног сигнала (аномалије висине и ундулације геоида) на тачкама модела. Резолуција мора бити тако дефинисана да је могуће, на основу мерења посредством интерполације, одредити аномалију висине тј. ундулацију геоида на центиметарском нивоу за потребе одређивања површи квазигеоида или геоида.

Модел квалитетног геоида и геоида, који задовољавају ове услове, су модели високе резолуције и центиметарске тачности.

## 4.1 ТЕРЕСТРИЧКЕ МЕТОДЕ

### 4.1.1 Терестричка гравиметрија

За директно одређивање тежине или убрзања на Земљиној површи, користе се апсолутни гравиметри. Ови инструменти се деле на две основне категорије, са клатнима и балистички инструменти.



Слика 4.1: Подела апсолутних гравиметара (Наод, 2021)

Кључно је прецизно мерење времена кретања посматране масе, а затим се мерени временски интервал конвертује у вредност убрзања коришћењем одговарајућих једначина кретања. Тачност мерења у великој мери зависи од контроле услова средине у којој се обављају мерења и броја поновљених мерења и креће се у распону од око 100  $\mu\text{Gal}$  за клатна, до око 1  $\mu\text{Gal}$  или боље за балистичке уређаје. Обе врсте гравиметара мере апсолутну вредност убрзања.

Међутим, много чешће се користе преносиви оперативни гравиметри, тј. релативни гравиметри, инструменти којима се мере разлике убрзања између тачака. Будући да ови гравиметри мере релативне разлике убрзања, њихова тачност је значајно виша од апсолутних инструмената. Рутински се постиже тачност од око 50  $\mu\text{Gal}$ , али постоје и инструменти чија је тачност виша од 1  $\mu\text{Gal}$ . Такође, инерцијални позициони уређаји у посебним режимима рада имају способност мерења локалних варијација убрзања између тачака где је убрзање познато. Тачност овако процењених убрзања износи око 3  $\text{mGal}$ .

Комбинацијом мерења апсолутних и релативних гравиметара формирају се мреже гравиметријских тачака. Станице са апсолутним мерењима убрзања представљају фиксне тачке, док се релативним мерењима успостављају везе између тих тачака. За сваку тачку у овој мрежи, неопходно је једнозначно дефинисати њену позицију користећи уређену тројку бројева  $(B, L, H^0)$ , где висина  $(H^0)$  треба да буде позната са



највишом тачношћу. Овај аспект је кључан због потребе за високом тачношћу у вертикалном смислу, имајући у виду да убрзање силе Земљине теже зависи више од висине него од хоризонталног положаја. Тачност у дефинисању висине може варирати у пракси, од неколико дециметара у идеалним условима, до неколико метара у најизазовнијим ситуацијама, у зависности од примењене методологије мерења, (Vaníček & Krakiwsky, 1982).

Након одређивања вредности убрзања силе Земљине теже на тачкама мерења, на њима се може рачунати аномалија убрзања силе теже  $\Delta g$ . За то је потребно редуковати површинско убрзање  $g$  на површ геоида ( $g_0$ ) користећи градијент силе Земљине теже, где се површинско убрзање редукује за утицај висине тачке  $H^0$ :

$$g_0 = g + \frac{\partial g}{\partial H} H^0, \quad (4.1)$$

где су:

- $g_0$  – вредност убрзања теже на геоиду,
- $g$  – вредност убрзања теже добијена опажањем на површи Земље,
- $\frac{\partial g}{\partial H}$  – вертикални градијент убрзања теже,
- $H^0$  – ортометријска висина тачке на којој се мери и
- $\frac{\partial g}{\partial H} H^0$  – редукација за слободан ваздух на геоид.

Складно принципу преноса грешака, свака грешка у одређивању висине тачке преноси преко вертикалног градијента теже у грешку аномалије, по једначини:

$$\sigma_{\Delta g}^2 = \sigma_g^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial H} \right)^2 \sigma_H^2, \quad (4.2)$$

где су:

- $\sigma_{\Delta g}$  – стандардна девијација аномалија убрзања силе теже,
- $\sigma_g$  – стандардна девијација теже која је опажана на површи Земље и
- $\sigma_H$  – стандардна девијација висине.

Рачунање аномалије убрзања силе Земљине теже  $\Delta g$  или интензитет аномалијског убрзања се рачуна по формули:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (4.3)$$

Интензитет аномалијског убрзања представља интензитет вектора аномалијског убрзања силе Земљине теже. Овај вектор се рачуна као разлика између два вектора:

$$\Delta \vec{g} = \text{grad}(W_P) - \text{grad}(U_Q) = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q, \quad (4.4)$$

где је:

- $\vec{g}_P$  – вектор убрзања реалне теже у тачки  $P$  на физичкој површи Земље и

- $\vec{\gamma}_Q$  - вектора убрзања нормалне теже у тачки  $Q$  на елипсоиду.

Величине које одређују вектор аномалијског убрзања силе Земљине теже  $\Delta\vec{g}$  и његов интензитет  $\Delta g$  су неопходни у већини формулација које се односе на аномалијски потенцијал  $T$  и пружају директну везу између геоида и нивоског елипсоида (слика 4.2).

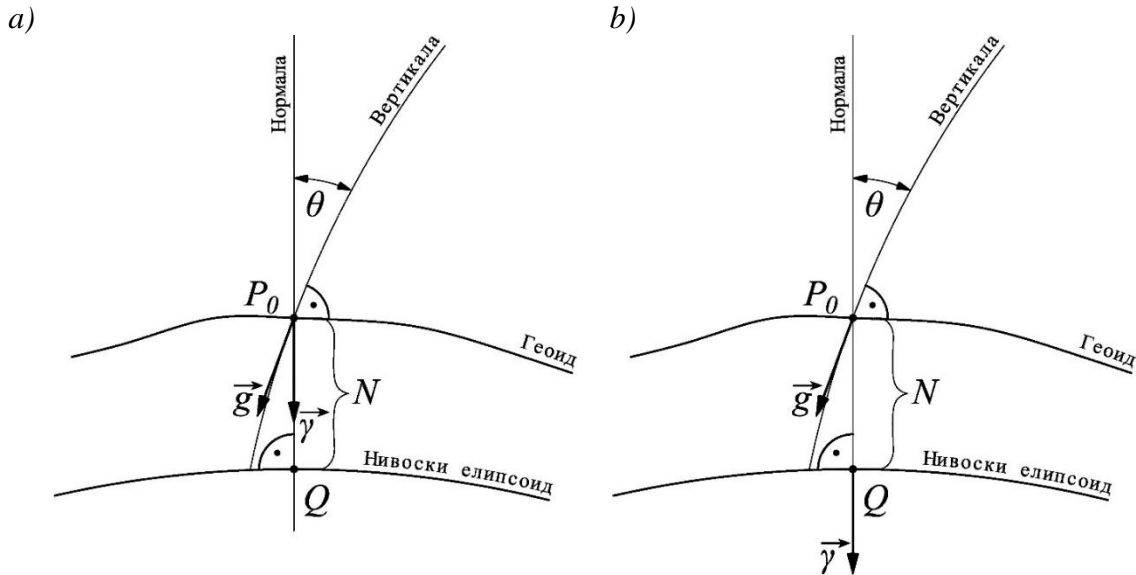
На тачки  $P_0$  на површи геоида могуће је одредити и поремећајно убрзање силе теже  $\delta g$ :

$$\delta g_p = g_p - \gamma_p, \quad (4.5)$$

које представља интензитет вектора поремећајног убрзања  $\vec{\delta}_p$ :

$$\vec{\delta}_p = \text{grad}(T_p) = \text{grad}(W_p - U_p) = \text{grad}(W_p) - \text{grad}(U_p) = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_p. \quad (4.6)$$

Вектор поремећајног убрзања  $\vec{\delta}_p$  представља градијент аномалијског потенцијала односно, градијент разлике стварног и нормалног потенцијала (слика 4.2).



Слика 4.2: Вектори убрзања Земљине и нормалне теже (Одаловић, 2005)

Показано је да аномалија убрзања  $\Delta g$  (једначине 2.74 и 3.2):

$$\Delta g = L^{\Delta g} [T] = \left( -\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\gamma} \right) T = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\gamma} T, \quad (4.7)$$

и поремећајно убрзање  $\delta g$  (једначине 2.75 и 3.1):

$$\delta g = L^{\delta g} [T] = \left( -\frac{\partial}{\partial n} \right) T = -\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (4.8)$$

предстваљају линеарне функционале аномалијског потенцијала.

Једначина 4.7, позната као фундаментална једначина физичке геодезије, има кључну улогу у разумевању промена у убрзању силе теже и њихових ефеката (Одаловић, 2005).

### 4.1.2 Астрогеодетски нивелман

Коришћењем Хелмертове формуле (једначина 4.9) и познате вредности одступања вертикале  $\varepsilon$  (слика 4.3), могуће је дефинисати облик површи геоида:

$$dN = -\varepsilon ds, \quad (4.9)$$

где  $dN$  представља инфинитезималну или диференцијалну промену у ундулацији, насталу као резултат промене елемента растојања  $ds$  у равни која сече површи елипсоида и геоида, а пролази кроз вертикалу тачке  $P_0$  под произвољним азимутом  $\alpha$ . Овде  $\varepsilon$  представља одступање вертикале у наведеној равни, а одређује се по једначини:

$$\varepsilon = \xi \cos(\alpha) + \eta \sin(\alpha). \quad (4.10)$$

Из познатих вредности одступања вертикала дуж произвољне криве  $S$  на површи геоида, која спаја поменуте тачке  $P_0$  и  $P_1$ , могуће је одредити разлику ундулација те две тачке:

$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = N_{P_1} - N_{P_0}. \quad (4.11)$$

Ако су компоненте одступања вертикала познате у свим тачкама дуж криве  $S$ , тада се разлика ундулација може израчунати интеграцијом леве и десне стране једначине 4.9. Разлика ундулација између тачака  $P_0$  и  $P_1$ , које се налазе на геоиду рачуна се по једначини:

$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = N_{P_1} - N_{P_0} = - \int_{P_1}^{P_0} \varepsilon ds. \quad (4.12)$$

Након уврштавања једначине 4.10 у 4.12 добија се формула за рачунање разлика ундулација:

$$\Delta N_{P_0}^{P_1} = - \int_{P_1}^{P_0} (\xi \cos(\alpha) + \eta \sin(\alpha)) ds. \quad (4.13)$$

Уколико се рачуна разлика ундулација између  $n$  тачака у којима су позната одступања вертикала потребно је по истом принципу спровести интеграцију као што је претходно показано. При томе су тачке  $P_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) спојене линијом која пролази кроз свих  $n$  тачака па се разлика ундулација  $\Delta N_{P_1}^{P_n}$  рачуна преко суме:

$$\Delta N_{P_1}^{P_n} = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i ds_i, \quad (4.14)$$

при чему се одступање вертикале сада рачуна по формули:

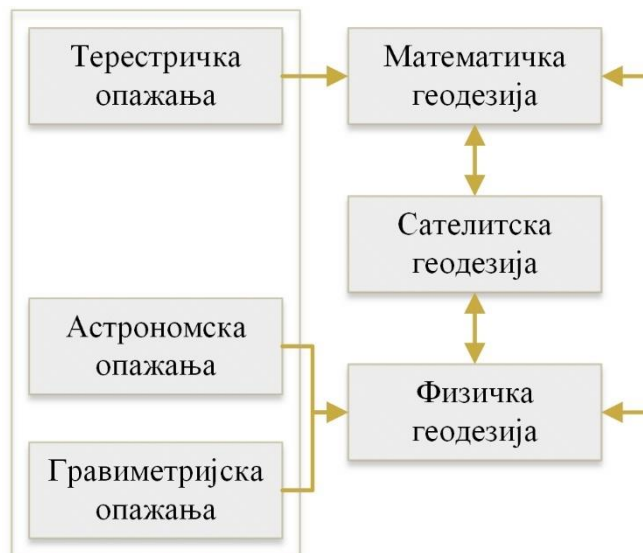
$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} [(\xi_{i-1} + \xi_i) \cos(\alpha_{i-1,i}) + (\eta_{i-1} + \eta_i) \sin(\alpha_{i-1,i})]. \quad (4.15)$$

На овај начин је могуће одредити разлике ундулација између сваке две тачке у посматраном профилу. Међутим, када се површ нивоског елипсоида апроксимира сфероидом, израз за рачунање ундулације добија облик:



## 4.2 САТЕЛИТСКЕ МЕТОДЕ

Област геодезије која укључује све методе које користе вештачке сателите за решавање различитих аспеката геодезије, посебно проблема одређивања и дефинисања површи геоида, позната је као сателитска геодезија (слика 4.4).



Слика 4.4: Место и улога сателитских метода у геодезији (Благојевић, 2014)

Класификација вештачких сателита у геодетским истраживањима и радовима често се заснива на висини њихове орбиталне путање и могу се поделити на:

1. **сателите високе орбите**, који играју кључну улогу у прецизном одређивању географских координата објеката на Земљи. Они се користе за одређивање положаја тачака у референтном координатном систему. Истовремено, радијално поље Земљине гравитационе силе пружа могућност представљања потенцијала гравитационе силе на великим растојањима. Нивоске површи на великим удаљеностима, на неколико десетина хиљада километара, прилично се приближавају форми концентрично распоређених сфера. Уз ове податке, моделирање ефекта поља убрзања постаје много једноставније, док се орбите сателита практично подударују са Кеплеровим елипсама;
2. **сателите ниске орбите**, који пружају значајан извор информација о гравитационом пољу Земље и користе се за праћење промена у гравитационом потенцијалу Земље у функцији времена. Пролазећи кроз нивоске површи, које су обликоване пре свега неправилностима у облику и распореду густине маса Земљиног тела, ови сателити прикупљају податке о тим аномалијама путем мерења параметара стварног гравитационог потенцијала. Испитивањем ових података и анализом варијација у путањама сателита ниске орбите у односу на теоријски одређене орбите, могу се одредити коефицијенти сферно хармонијског развоја (Одаловић, 2005).

Површи потенцијала убрзања гравитационе силе Земље ван тела Земље не приказују правилну геометријску форму и могу се адекватно описати коришћењем сферних хармоника (Moritz, 1980):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos(\theta)) (A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)). \quad (4.17)$$

Употреба једначине 4.17 омогућава представљање спољног гравитационог потенцијала Земље, који је хармонска функција.

Међутим, када је степен  $n = 0$ , у изразу 4.17 јавља се само први члан. Ово је случај када се посматране тачке налазе на великим удаљеностима од Земље, где други члан израза 4.17 тежи нули са повећањем растојања. Због тога, за тачке на великим удаљеностима од Земље, потенцијал се одређује помоћу следеће једначине:

$$V = \frac{GM}{r}, \quad (4.18)$$

док израз 4.17 може бити представљен и једначином 4.19, која се често користи у сателитској геодезији:

$$V = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos(\theta)) (J_{nm} \cos(m\lambda) + K_{nm} \sin(m\lambda)) \right], \quad (4.19)$$

где је:

- $R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{n,m}(\cos(\theta)) \cos(m\lambda)$  – Лежандрови површински хармоници,
- $S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{n,m}(\cos(\theta)) \sin(m\lambda)$  – Лежандрови површински хармоници,
- $P_{n,m}(\cos(\theta))$  – придружени Лежандрови полиноми,
- $h(\lambda) = \cos(m\lambda)$  или  $h(\lambda) = \sin(m\lambda)$  – косинус или синус лонгитуде помножене са редом  $m$  посматране функције (Лежандровог полинома),
- $n = 2, 3, 4, \dots$  – степен посматране функције (Лежандровог полинома) и
- $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$  – ред посматране функције (Лежандровог полинома).

За Лежандрове сферне хармонике  $R_{nm}$  и  $S_{nm}$  важи следеће:

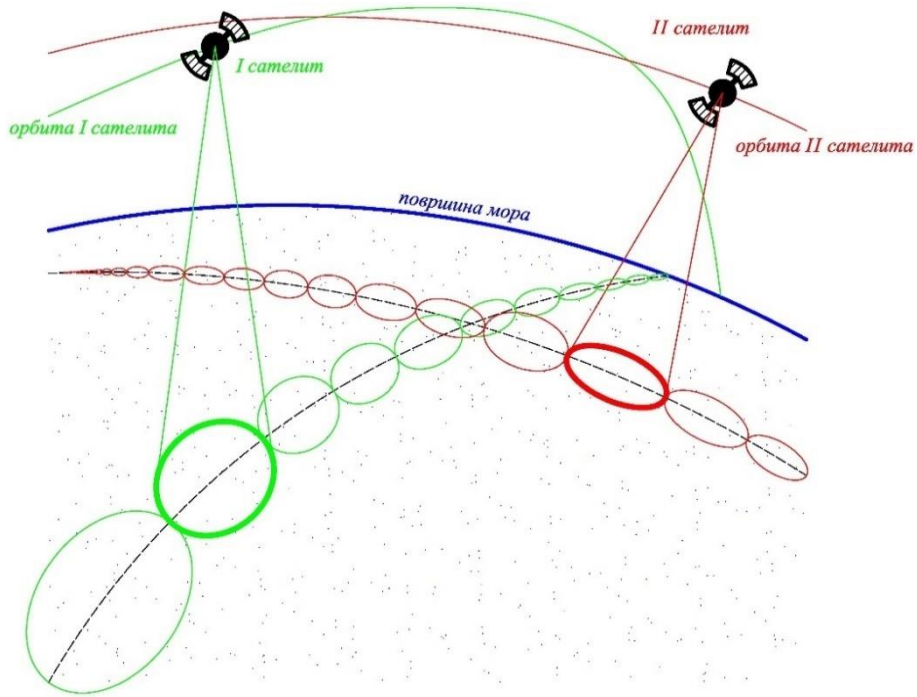
- када је  $m = 0$ , добијају се зонални сферни хармоници,
- када је  $m > 0$ , добијају се тесерални сферни хармоници и
- када је  $m = n$ , добијају се секторски сферни хармоници.

У једначини 4.19, чланови су једнаки нули уколико је степен  $n = 1$  када је координатни почетак у геоцентру, те степен почиње од  $n = 2$  (Moritz, 1980).

#### 4.2.1 Сателитска алтиметрија

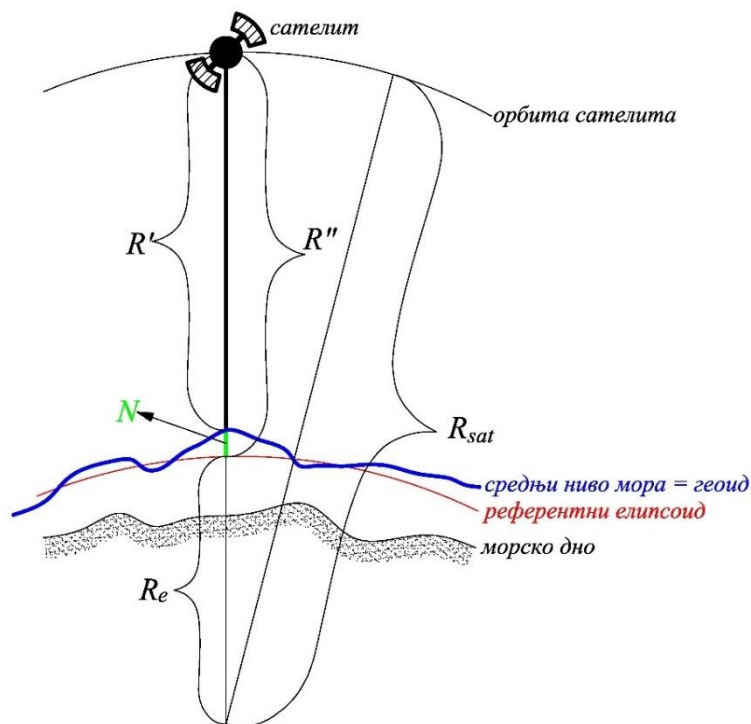
Коришћењем вештачких сателита који омогућавају микроталасно осматрање Земље на даљину, могуће је прецизно измерити и утврдити облик геоида у подручјима мора и океана. Сателитски алтиметар је опремљен радаром који детектује време кашњења од тренутка слања до пријема сигнала, односно енергетског импулса. На слици 4.5 приказан је шематски процес мерења удаљености од предајне антене до површи воде, што је једнако половини производа времена кашњења и брзине светлости.

#### 4. Методологије одређивања квазигеоида и геоида



Слика 4.5: Одређивање површи геоида помоћу сателитске алтиметрије (NOAA, 2024)

Из ове измерене удаљености или висине, уклањају се локални површински утицаји као што су плима, ветар и морске струје, како би се добила висина сателита  $R'$  изнад средњег нивоа мора, односно површи геоида. На слици 4.6 приказано је како се, уз помоћ прецизних Доплерових ефемериде које су доступне за сателит, радијус  $R_{sat}$  до сателита у тренутку сваког опажања, заједно са радијусом  $R_e$  до елипсоида, лако одређују. Овим је могуће израчунати ундулацију геоида  $N$  одузимањем радијуса  $R_e$  и висине сателита  $R'$  од  $R_{sat}$  (NOAA, 2024).



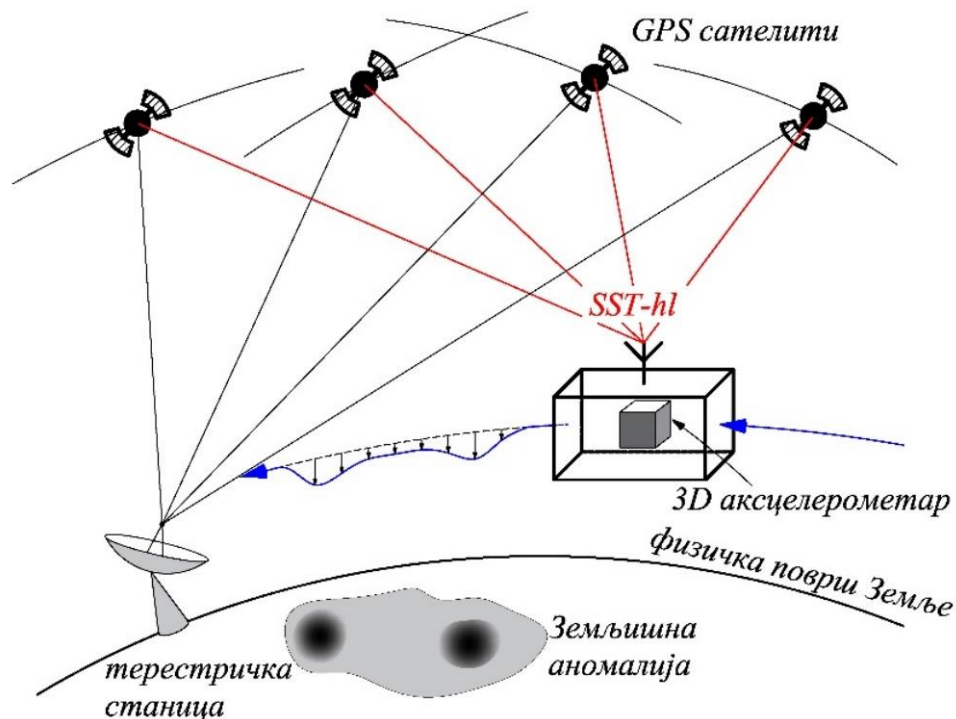
Слика 4.6: Шематски приказ система за мерење сателитском алтиметријом (Fu, 2014)

#### 4.2.2 Међусателитско праћење

Техника **SST** (*Satellite-to-Satellite Tracking*) користи сателите за праћење других сателита. Ова метода има различите примене, укључујући истраживање гравитационог поља и побољшање орбита. Сателит на великој висини може да послужи као релејна станица између терестричких станица за праћење и сателита на малој висини. На тај начин, сателити на малој висини могу бити посматрани чак и када нису доступни терестричким станицама.

Мерна техника међусателитског праћења се користи у мисијама **CHAMP**, **GRACE** и **GOCE**.

На слици 4.7 представљен је концепт праћења сателита путем другог сателита у режиму „високо-ниско“ **SST-hl** (*Satellite-to-Satellite Tracking in the high-low mode*). У овом концепту сателите у ниској Земљиној орбити **LEO** (*Low Earth Orbit*) прате сателити **GPS**-а у високој орбити, у односу на мрежу терестричких станица. Сигнал који генерише терестричка станица за праћење прима релејни **GPS** сателит, а затим га преноси на сателит на нижој орбити. Овај сигнал се затим враћа на терестричку станицу истим путем.



Слика 4.7: Шема праћења сателита са другим сателитом у „високо-ниском“ режиму **SST-hl** (Johannessen, et al., 1999)

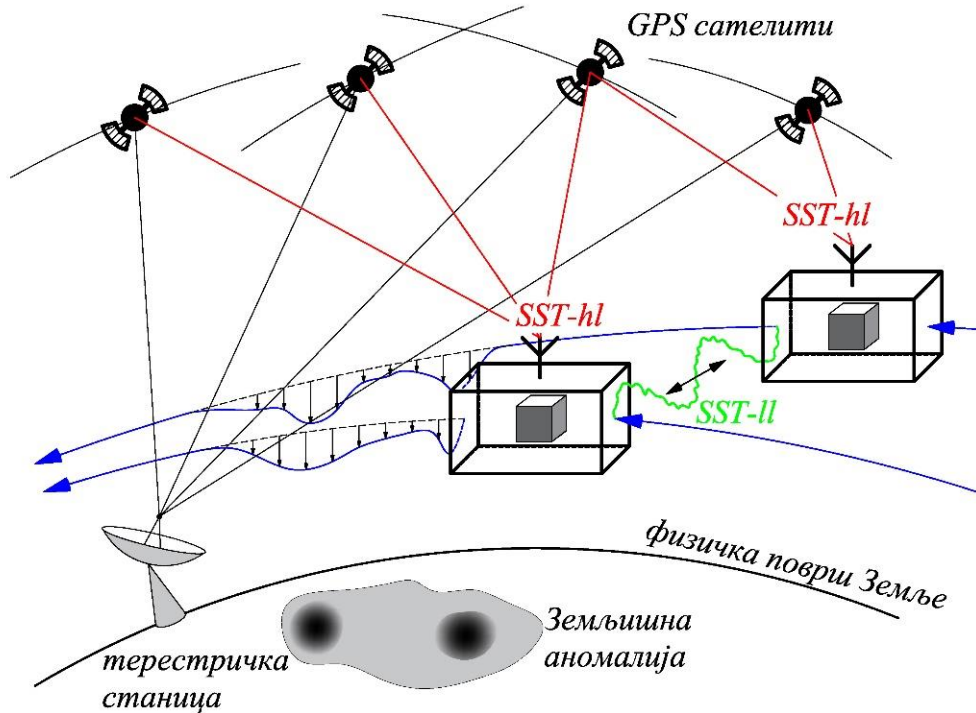
Концепт праћења сателита путем другог сателита у режиму „ниско-ниско“ **SST-ll** (*Satellite-to-Satellite Tracking in the low-low mode*) у комбинацији са **SST-hl** је представљен на слици 4.8. Ова метода мери релативно кретање између два сателита у ниској орбити који се прате у истој орбити на удаљености од неколико стотина километара помоћу међусателитских веза.

Два сателита на малој висини могу међусобно пратити варијације у орбитама које су узроковане неправилностима у гравитационом пољу. Неколико сателита на великој



висини са прецизно познатим орбитама могу се користити за одређивање положаја сателита на малој висини.

Овај процес захтева тачно мерење разлика у орбитама, што се постиже употребом акцелерометара помоћу којих се мере негравитационе силе на ниско орбитирајућем сателиту (Johannessen, et al., 1999; NOAA, 2024).



Слика 4.8: Шема праћења сателита са другим сателитом у „ниско-ниском“ режиму SST-hl у комбинацији са SST-hl (Johannessen, et al., 1999)

### 4.2.3 Сателитска градиометрија

У градиометрији у поступку мерења одређују се у реалном времену вредности просторних градијената вектора убрзања силе Земљине теже. Градијент представља просторни извод вектора убрзања силе Земљине теже, и може се замислити као брзина промене компоненте вектора убрзања силе Земљине теже која је измерена на малом растојању. Дакле, градијент се може измерити одређивањем разлике у убрзању силе Земљине теже на две блиске, али различите тачке у којима се мере убрзања директно у сателиту. Овакав поступак се назива још и диференцијална акцелерометрија.

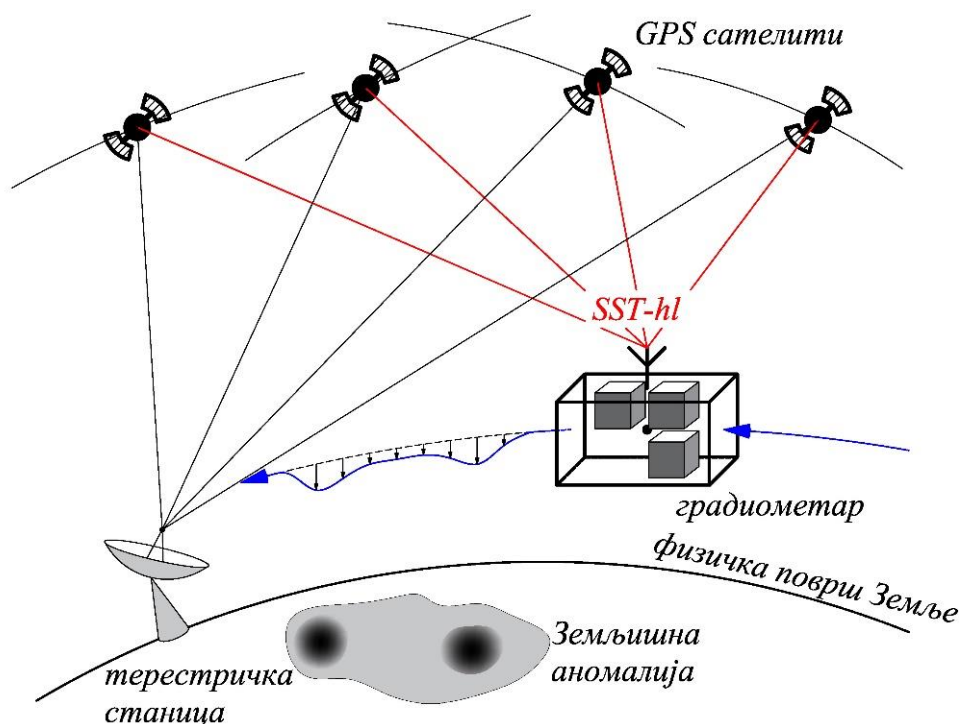
На слици 4.9 представљен је концепт сателитске градиометрије у комбинацији са SST-hl, где се на сателиту у ниској орбити помоћу диференцијалне акцелерометрије мери други извод потенцијала убрзања силе Земљине теже

У сателитској градиометрији SGG (Satellite Gravity Gradiometry) убрзање се мери са три пара акцелерометара, а промена гравитационог убрзања у три просторна правца добија се из одговарајућих вредности убрзања, мерена са два акцелерометра. На тај начин добија се градијент гравитационог убрзања у сва три просторна правца. Из чега следи да

градијент у тачки има облик тензора, пошто представља извод сваке компоненте вектора убрзања силе Земљине теже у правцу све три осе.

Потом, интеграцијом градијента односно резултата мерења градиометра вредност било које компоненте вектора убрзања силе Земљине теже може бити одређена дуж целе путање сателита. На основу тога је, у реалном времену израчунат прецизан гравитациони модел из ког се коначно одређује и дефинише непрекидан модел нормалне гравитације, надморске висине и аномалија убрзања силе теже.

Предност сателитске градиометрије у поређењу са SST техником је та што су негравитациона убрзања практично иста за сва мерења унутар сателита па се уклањају диференцијацијом. Пример коришћења сателитске градиометрије као мерне технике је мисија GOCE (Наод, 2022; NOAA, 2024).



Слика 4.9: Шема сателитске градиометрије у комбинацији са SST-hl (Johannessen, et al., 1999)

## 4.3 ИНТЕГРАЛНИ МОДЕЛ

### 4.3.1 Одређивање локалног квазигеоида високе резолуције применом модела интегралне геодезије

Локални квазигеоид обухвата само део површи квазигеоида у локалном подручју које може бити:

- мало подручје које се обично ограничава меридијанима и паралелама или
- подручје целе државе или континента.

Рачунање локалног квазигеоида суштински се односи на рачунање вредности аномалије висине на одређеном броју тачака нивелманске мреже високе тачности у оквиру локалног подручја. Ове вредности аномалије висине се одређују применом **GPS/dh**

методе, где се користи елипсоид повезан са геодетским референтним системом **GRS80**, центиметарске тачности.

При томе је резолуција квазигеоида дефинисана бројем и распоредом тачака нивелманске мреже високе тачности на којима се одређују аномалије висине.

Резолуција мора бити таква да се на основу одређених аномалија висина може одредити аномалија висине у било којој тачки локалног подручја применом интерполације, такође са тачношћу центиметарског нивоа.

Квазигеоид одређен под наведеним условима назива се квазигеоид високе резолуције, а на исти начин могуће је дефинисати и геоид високе резолуције, када се уместо аномалије висине разматрају ундулације.

Квазигеоид или геоид високе резолуције одређује се коришћењем следећа три скупа података:

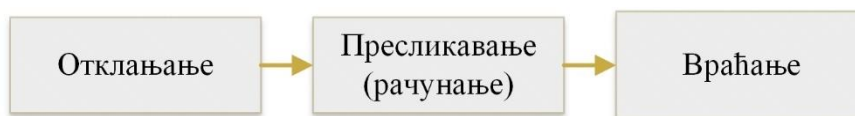
- коефицијената глобалног геопотенцијалног модела (**GGM**),
- резултата гравиметријских, астрономских терестричких и сателитских одређивања на тачкама локалног подручја и
- дигиталног модела терена (**DTM**).

Основна разлика при одређивању наведених површи настаје због редукције резултата опажања при одређивању геоида.

Кључно у поступку одређивања квазигеоида је одређивање аномалије висина као једног од функционала аномалијског потенцијала, који се рачунају применом интегралног модела (Одаловић, 2000).

### 4.3.2 Remove-Compute-Restore метода

Метода „*Remove-Compute-Restore*“ (*отклањање-пресликавање-враћање*) или краће **RCR** метода може се користити за процену гравитационог поља на основу података који су познати у локалном подручју. Следећи опис и слика 4.10 сумирају кључне аспекте ове методе.



Слика 4.10: Шематски приказ основног концепта RCR методе (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010)

У кораку „*Remove*“ (**отклањање**), уклања се део података који се може предвидети на основу физичких својстава функционала аномалијског потенцијала (кораци 5, 6 и 7 на слици 4.11). Овим поступком се уклањају дуготаласне карактеристике (нискофреквентне компоненте) података, отклањајући одговарајуће компоненте глобалног геопотенцијалног модела до изабраног максималног степена  $d$  (**GGM degree**) и реда  $o$  (**GGM order**). Истовремено, долази се до глатких површи користећи краткоталасне карактеристике (високофреквентне компоненте), које потичу од теренских утицаја. Ово се постиже уклањањем резидуалног теренског ефекта (*Residual Terrain Effect*) или **RTM** (Residual Terrain Modelling).

Након претходног корака, у фази „*Compute*“ (израчунавање), користећи теоријски дефинисане везе између аномалијског потенцијала и његових функционала, долази се до жељеног функционала (корак 8 на слици 4.11). У основи, овај процес преводи преостали део резултата опажања (сигнала) у резидуални сигнал, односно средњеталасну карактеристику - резидуалну вредност функционала. Ова резидуална карактеристика потом служи као основа за математичко моделирање у локалном контексту, што доприноси добијању резидуалне карактеристике (компоненте) оцењене величине функционала аномалијског потенцијала.

У последњем кораку „*Restore*“ (враћање), одређује се део функционала који се појављује као последица дела резултата опажања који је елиминисан у фази отклањања. Овај део затим се додаје на вредности које су одређене у фази пресликавања (кораци 9, 10 и 11 на слици 4.11). Конкретно, дуготаласна (из **GGM**) и краткоталасна (из **RTM**) карактеристика оцењене величине (функционала аномалијског потенцијала или аномалије висине) додају се на резидуалну компоненту како би се добила коначна оцена укупног сигнала (тј. оцењена величина аномалије висине) (Одаловић, 2005; Barzaghi, 2016).

Поступак анализе и тумачења података у оквиру **RCR** методе укључује значајне појмове за практично утврђивање аномалије висине, или ундулације геоида, који обухватају следеће кључне аспекте (Одаловић, 2005; Одаловић, 2010):

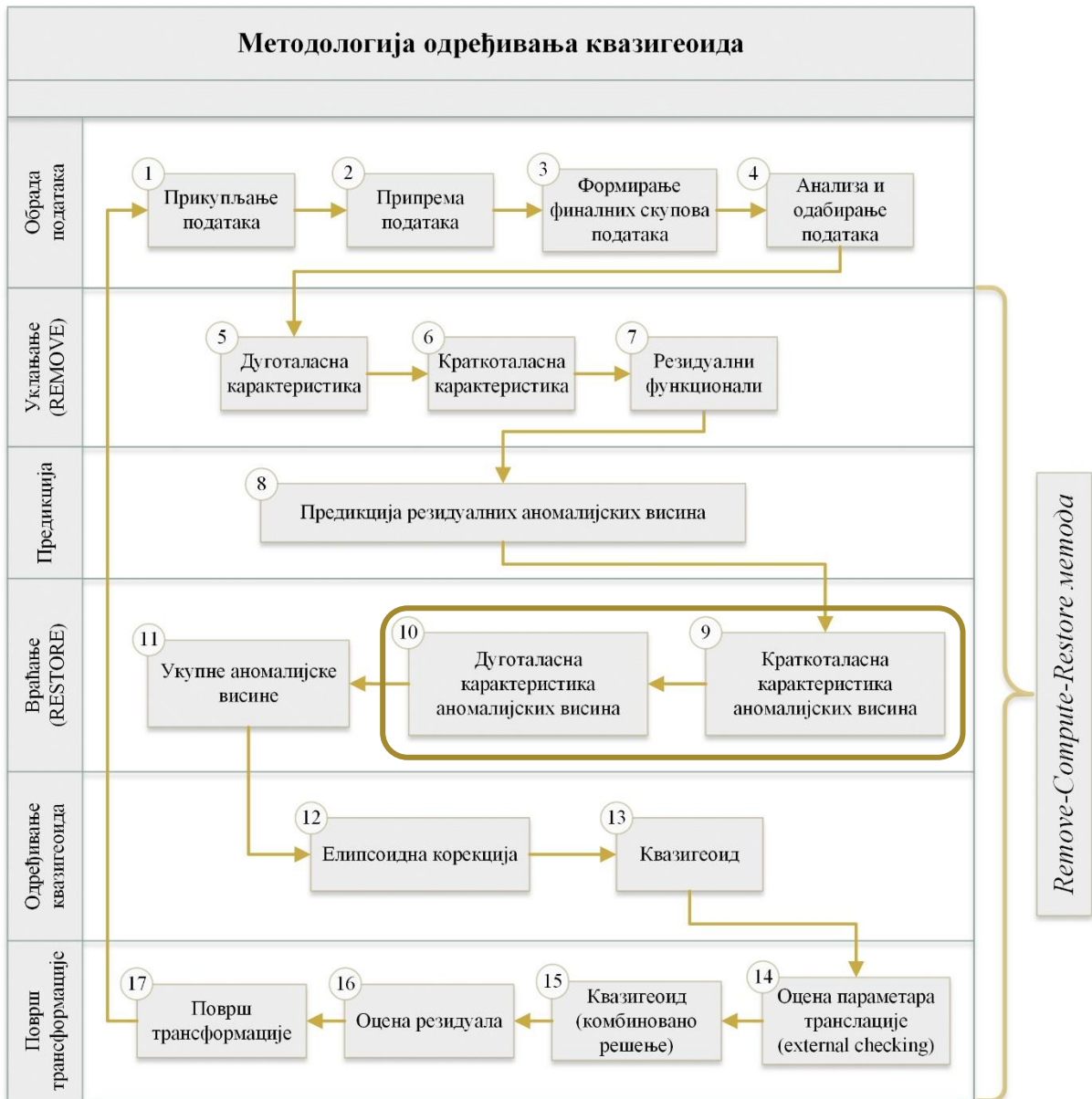
- карактеристике функционала аномалијског потенцијала и
- тачке предикције.

Притом, сваки сигнал тј. мерена величина може се представити као линеарни функционал аномалијског потенцијала  $t$ , који се може изразити као сума дуготаласне  $t'$ , средњеталасне  $t''$  и краткоталасне карактеристике  $t'''$ . Свака од карактеристика, у складу са својом резолуцијом, имплицира одређени степен промене укупне вредности функционала  $t$ :

$$t = t' + t'' + t''' \quad (4.20)$$

Када је реч о аномалијама висина, односно ундулацијама геоида, укупна промена зависи од различитих фактора:

- промене дуготаласне карактеристике  $t'$ , које зависе од **GGM**, са резолуцијом од 50 km до 100 km. Овакве промене могу резултовати променом укупне вредности на нивоу неколико метара,
- промене средњеталасне карактеристике  $t''$ , које произлазе из терестричких мерења, као што су гравиметријска и **GPS/dh** мерења, са резолуцијом од неколико десетина километара. Овакве промене могу утицати на укупну вредност на нивоу неколико дециметара и
- промене краткоталасне карактеристике  $t'''$ , које потичу из података о топографији, са резолуцијом од неколико километара. Овакве измене могу изазвати промене укупне вредности на нивоу од неколико центиметара.



Слика 4.11: Методологија RCR одређивања квазигеоида (Одаловић, 2009; Одаловић, 2010)

Процес одређивања и анализе претходних карактеристика се обавља на тачкама предикције, које су подељене у две категорије:

- тачке мерења: овде су укључене тачке где су већ измерени функционали аномалијског потенцијала и
- тачке одређивања: у овој категорији се налазе тачке на којима се одређују и анализирају аномалије висине, тј. ундулације геоида. Ове висине се одређују применом метода интерполације и/или екстраполације.

Важно је истаћи да постоји разноврсност приступа при рачунању квазигеоида. У ситуацијама када се квазигеоид рачуна на основу података о убрзању силе Земљине теже, дигиталног модела терена и глобалног геопотенцијалног модела, најчешће се прибегава **RCR** методи. Основни циљ је, након што се добије гравиметријски модел, прилагодити га локалном (националном) референтном систему користећи аномалије висине  $\zeta^{GPS/dh}$  које су добијене методом **GPS/dh**. Ове аномалије висина дефинишу се као

разлика између висина добијених **GPS**-ом изнад елипсоида  $h^e$  (елипсоидна тј. геодетска висина) и нивеланих нормалних висина  $H^N$  на истим тачкама на физичкој површи Земље.

## 4.4 СПЕКТРАЛНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ СИГНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

### 4.4.1 Дуготаласна карактеристика

Коришћење израза 2.86 за дефинисање дуготаласне карактеристике функционала аномалијског потенцијала укључује аномалијски потенцијал који је у функцији ортонормираних сферних хармоника, при чему се за  $R$  усваја вредност велике полуосе обртног елипсоида у равни екватора  $a$ :

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (4.21)$$

где је:

- $G$  – универзална гравитациона константа,
- $M$  – маса тела Земље,
- $n$  – степен развоја глобалног геопотенцијалног модела,
- $m$  – ред развоја глобалног геопотенцијалног модела,
- $\theta$  – сферна колатитуда,
- $\lambda$  – сферна лонгитуда,
- $r$  – интензитет радијус вектора,
- $a$  – велика полуоса обртног елипсоида у равни екватора.
- $\bar{J}_{nm}, \bar{J}_{nm}^U$  и  $\bar{K}_{nm}$  – ортонормирани коефицијенти сфернохармонијског развоја потенцијала убрзања силе Земљине теже и
- $\bar{P}_{nm}$  – ортонормирани Лежандрови полиноми.

Знак  $\infty$ , у контексту једначине 4.21, користи као се симбол за укључивање свих могућих степена (од 2 до  $\infty$ ), што је у суштини идеална ситуација у теоријском смислу. Међутим, у практичној примени, није могуће укључити све степене у модел, јер постоји коначан број расположивих податка неопходних за прорачуне. У том смислу,  $\infty$  се користи како би се нагласила идеалност теоријског модела, због чега се уводи замена са емпиријском вредношћу  $N_{max}$  која се користи у практичној примени реалне апроксимације једначине 4.21 помоћу масималног степена **GGM**. Такође, непознате теоријске вредности коефицијената  $\bar{J}_{nm}$  и  $\bar{K}_{nm}$  се замењују са реалним вредностима  $\bar{J}'_{nm}$  и  $\bar{K}'_{nm}$  које су доступне из глобалног геопотенцијалног модела. Применом ових замена у једначини 4.21, добија се израз помоћу којег је могуће одредити дуготаласне карактеристике аномалијског потенцијала у било којој тачки на физичкој површи Земље:

$$T_{GGM} = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)). \quad (4.22)$$

Сада је могуће помоћу  $T_{GGM}$  одредити дуготаласне карактеристике свих функционала аномалијског потенцијала у практичном смислу, тако да једначине од 2.72 до 2.77, односно од 2.87 до 2.92 добијају следећи облик:

1. ундулација геоида  $N_{GGM}$ :

$$N_{GGM} = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (4.23)$$

2. аномалија висине  $\zeta_{GGM}$ :

$$\zeta_{GGM} = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (4.24)$$

3. аномалија убрзања силе теже  $\Delta g_{GGM}$ :

$$\Delta g_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (4.25)$$

4. поремећајно убрзање силе теже  $\delta g_{GGM}$ :

$$\delta g_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)), \quad (4.26)$$

5. компоненте одступања вертикала у правцу меридијана  $\zeta_{GGM}$ :

$$\xi_{GGM} = \frac{GM}{ar\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{N_{\max}} [(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}'_{nm} \sin(m\lambda)] \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos(\theta))}{\partial \theta}, \quad (4.27)$$

6. компоненте одступања вертикала у правцу првог вертикала  $\eta_{GGM}$ :

$$\eta_{GGM} = \frac{GM}{ar\gamma \sin(\theta)} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [m(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \sin(m\lambda) - \bar{K}'_{nm} \cos(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)). \quad (4.28)$$

Резолуција вредности дуготаласне карактеристике функционала аномалног потенцијала (аномалија висине) се одређује на основу ограниченог броја тачака грида са дискретним вредностима, чији се број рачуна према следећој формули:

$$\Delta B \approx \Delta L \approx \frac{180^\circ}{N_{\max}}, \quad (4.29)$$

где су:

- $\Delta B$  – минимална промена геодетске латитуде (вредност минималне угловне разлике латитуда две суседне тачке грида по меридијану) и
- $\Delta L$  – минимална промена геодетске лонгитуде (вредност минималне угловне разлике лонгитуда две суседне тачке грида по паралели).

Прецизност одређивања дуготаласних карактеристика зависи од неколико фактора. Прво, квалитет основног изворног материјала игра кључну улогу, што укључује тачност

кофицијената коришћених у глобалном геопотенцијалном моделу. Други аспект од значаја је степен и ред самог модела (Одаловић, 2005; Одаловић, 2009).

У овом контексту, истичу се два модела високе резолуције који поседују изузетно велик степен и ред:

- **XGM2019e\_2159** (2019. год.) представља комбиновани модел глобалног гравитационог поља, представљен сфероидним хармоницима до степена и реда 5399. Овај модел поседује просторну резолуцију од  $2' \times 2'$ , што одговара приближно  $4 \text{ km} \times 4 \text{ km}$  (Zingerle, et al., 2020) и
- **SGG-UGM-2** (2020. год.) представља модел високе резолуције гравитационог поља Земље, базиран на сателитској гравиметрији, сателитској алтиметрији и подацима из модела **EGM2008**. Развијен коришћењем теорије елипсоидне хармонијске анализе и трансформације коефицијената (**ЕНА-СТ**), овај модел поседује степен 2190 и ред 2159, што одговара просторној резолуцији од  $5' \times 5'$ , или приближно  $9 \text{ km} \times 9 \text{ km}$  (Liang, et al., 2020).

#### 4.4.2 Средњеталасна карактеристика

Најчешће коришћене стратегије за израчунавање средњеталасних карактеристика ундулације геоида или аномалије висине обухватају примену:

- Стоксовог решења,
- решења Молоденског или
- интегралног модела.

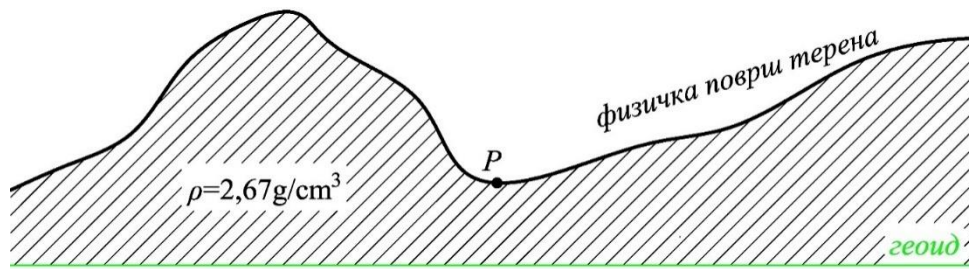
Примена Стоксовог решења и решења Молоденског обично је могућа када постоји значајан број добро распоређених тачака на којима су доступни подаци дискретних вредности опажања убрзања силе Земљине теже прикупљених гравиметријским мерењима. Истовремено, интегрални модел омогућава синтезу свих релевантних доступних информација (Одаловић, 2005).

Самим тим, средњеталасна карактеристика је директно зависна од теренских мерења, што представља њену главну ограниченост, а основна намера овог истраживања је развој методологије која неће укључити средњеталасне карактеристике у моделирање укупног сигнала аномалијског потенцијала, као што је аномалија висине.

#### 4.4.3 Краткоталасна карактеристика

Краткоталасна карактеристика функционала аномалијског потенцијала је резултат утицаја неправилно распоређених топографских маса Земље. Приликом анализе ових утицаја, важно је усмерити пажњу на „видљиве масе“, односно масе које се налазе изнад површи геоида (слика 4.12). Ови утицаји на краткоталасну карактеристику могу произићи од локалних или удаљених маса, при чему њихова удаљеност од тачке предикције одређује да ли ће интензитет утицаја бити већи или мањи.





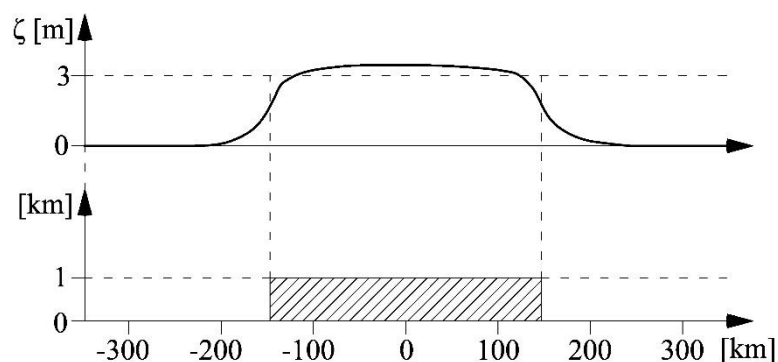
Слика 4.12: Видљиве топографске масе – утицај топографије, тј. прилагођена Бугеова редуција (укључује утицај Бугеове плоче умањен за теренску корекцију) (Forsberg, 1985)

Када се проучавају ови утицаји, треба имати на уму који функционал аномалијског потенцијала је у питању, јер топографске масе различито утичу на различите функционале аномалијског потенцијала. У истраживању представљеном у дисертацији, посебно је важан утицај топографских маса на аномалију висине и ундулацију геоида, што је на нивоу неколико центиметара. Због тога је у истраживању анализиран утицај топографских маса у складу са њиховим ефектом на аномалију висине и ундулацију геоида.

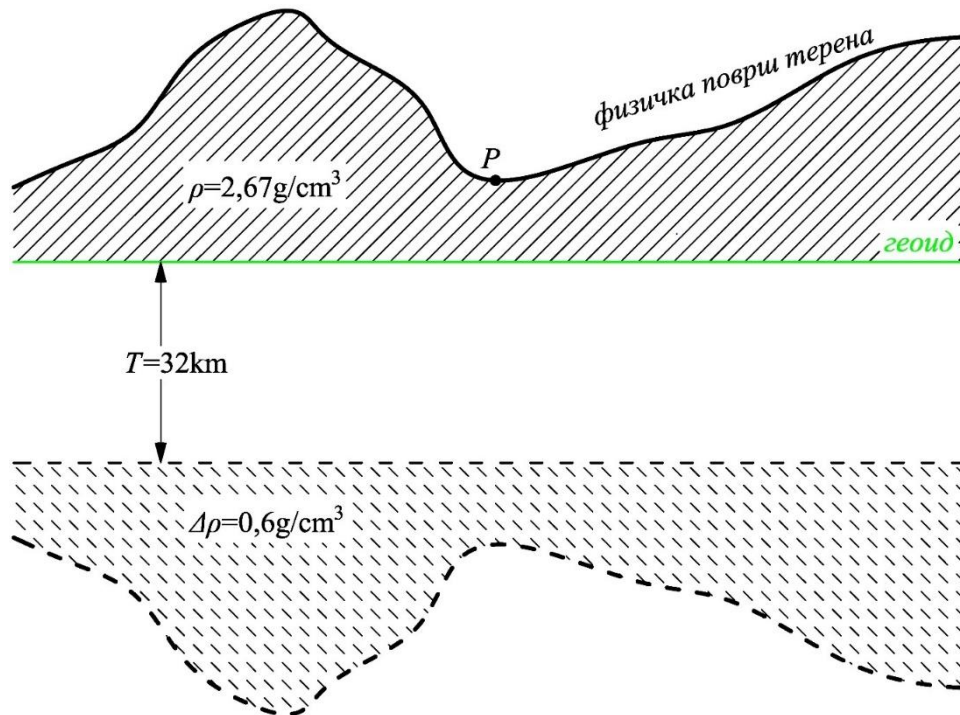
Ово је важно истаћи јер видљиве масе имају значајан и различит утицај на различите функционале и њихове краткоталасне карактеристике, при чему је њихов утицај често већи од самих вредности функционала. Највећи утицај на одређивање краткоталасне карактеристике у некој тачки имају масе у радијусу од неколико стотина километара око те тачке (Forsberg, 1985; Одаловић, 2005).

Истраживање краткоталасних карактеристика функционала захтева примену различитих метода и модела. Један од често коришћених модела је **Ејријев изостатички модел** (слика 4.14), који се комбинује са глобалним геопотенцијалним моделима. Овај приступ пружа задовољавајуће резултате, али захтева прецизно дефинисање граница и усвајање хипотеза о распореду густина. Поред тога, неопходно је узети у обзир и друге факторе као што су ивични ефекти и растојање од граница подручја. Овакав приступ компликује процес, али обезбеђује адекватне краткоталасне карактеристике.

На слици 4.13 је представљен утицај ивичних ефеката на аномалију висине у случају примене Ејријевог модела када се разматра утицај маса правилне призме са квадратном основом константне густине и одговарајуће компензације у централном профилу. На слици је приказан утицај у централном профилу.



Слика 4.13: Утицај ивичних ефеката на аномалију висине у случају примене Ејријевог модела (горња функција) и изглед призме (доња функција)



Слика 4.14: Ејријев изостатички модел (Forsberg, 1985)

Узимањем у обзир сувише удаљених топографских маса, краткоталасне карактеристике могу укључити и део утицаја који је већ присутан у дуготаласним карактеристикама одређеним на основу глобалних геопотенцијалних модела. Ово истиче важност прецизног разматрања утицаја топографских маса на краткоталасне карактеристике у оквиру истраживања (Одаловић, 2005).

Још један начин утврђивања утицаја топографских маса је кроз концепт **резидуалног теренског модела (RTM)**, који су увели Р. Форсберг и К. К. Чернинг 1981. године (Forsberg & Tscherning, 1981). Овај приступ поседује неколико предности у односу на Ејријев модел, као што је коришћење само једне хипотезе о густини топографских маса и константан утицај удаљених маса који је најчешће занемарљив. Такође, овакав модел елиминише потребу за одређивањем утицаја закривљености Земље, што га чини једноставнијим за моделирање.

Овај модел се заснива на следећим принципима:

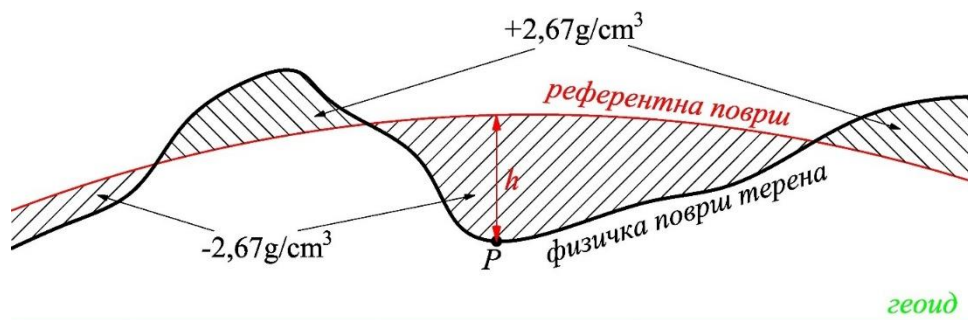
- одређени утицаји топографских маса Земље су већ укључени у дуготаласне карактеристике, које су изведене коришћењем глобалног геопотенцијалног модела,
- део укључен у дуготаласну карактеристику је дефинисан преко референтне површи, односно средње нивоске површи. Резолуција ове површи одговара резолуцији глобалног геопотенцијалног модела, чиме се грубо одређују топографске масе (слика 4.15) и
- топографске масе које остају изнад референтне површи имају константну густину (обично усвојено  $2,67\text{g/cm}^3$ ), док се долине, чији је утицај уклоњен када су уклоњене дуготаласне карактеристике, попуњавају масама са негативним предзнаком (обично усвојено  $-2,67\text{g/cm}^3$ ).

Такође, погодност у коришћењу резидуалног модела терена је та што је могуће произвољно усвајање резолуције референтне површи путем специфичног процеса филтрирања висина тачака у области обраде. Уколико је резолуција референтне површи слична резолуцији глобалног геопотенцијалног модела, утицај топографије у основи је исправно одређен.

Ипак, различите резолуције могу утицати на карактеристике вредности одређених резидуала. Нижа резолуција референтне површи креира изузетно глатке површи вредности одређених резидуала, што може бити погодно за предикције. Са друге стране, висока резолуција се користи за добијање краткоталасних карактеристика функционала чији утицај у укупној вредности функционала није значајн.

Главни изазов код одређивања резидуалног модела терена је када тачке које остају унутар маса, након попуњавања долина, због чега аномалијски потенцијал више не одговара хармонијској функцији потенцијала.

Превазилажење овог проблема је могуће, пошто у околини тачке  $P$ , која остаје унутар маса након попуњавања долина, референтна површ се не мења значајно (слика 4.15). Тако се утицај маса изнад тачке  $P$  и испод референтне површи може сматрати као утицај **Бугеове плоче**. Кондензацијом маса плоче у материјалну површ испод тачке  $P$ , неће бити значајних промена у потенцијалу изван референтне површи, али ће потенцијал у тачки  $P$  сада бити хармонијска функција. Утицај кондензације „попуњавајућих“ маса на аномалију висине може бити занемарљив у поређењу са самом вредношћу краткоталасне карактеристике.



Слика 4.15: Референтна или средња нивоска површи и тачка унутар маса након попуњавања долина (Одаловић, 2005)

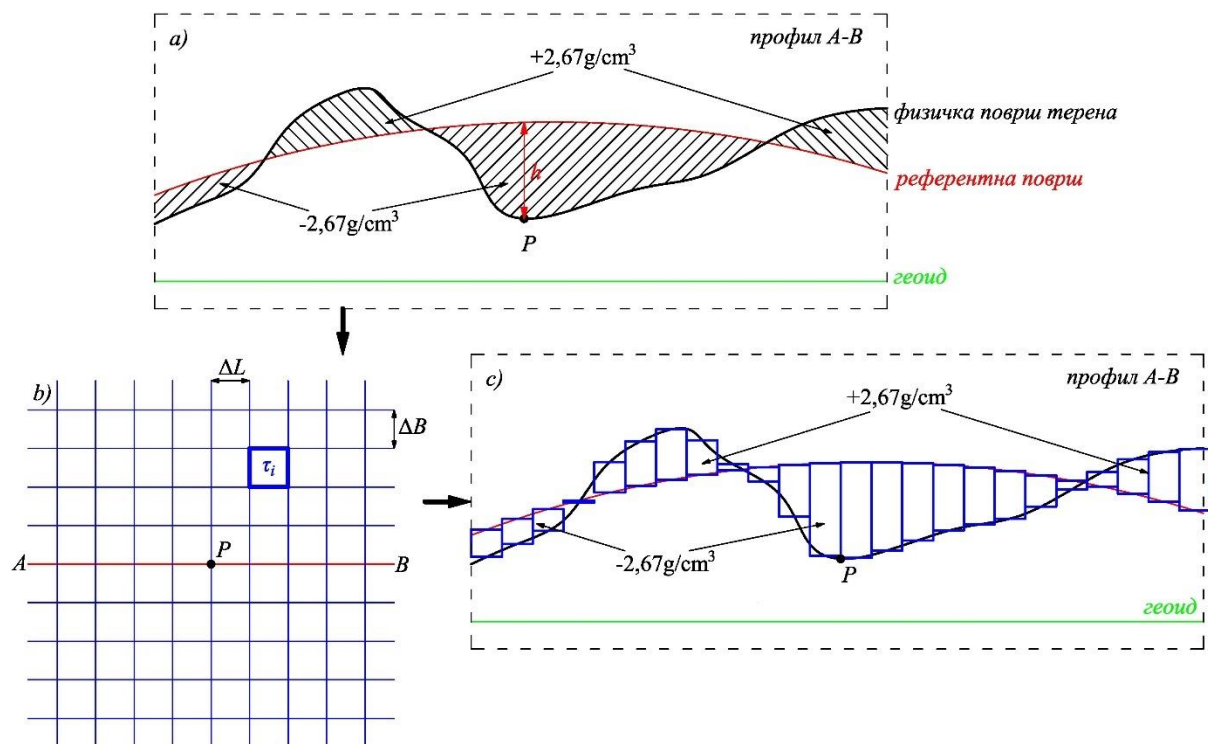
Битно је нагласити да коришћени модел густина топографских маса не утиче на сам поступак одређивања краткоталасних карактеристика функционала аномалијског потенцијала, и он обухвата следеће кораке:

- **подела топографских маса на тела правилног геометријског облика** – за потребе одређивања краткоталасних карактеристика у тачки  $P$ , топографске масе око те тачке се деле на тела правилног геометријског облика  $\tau_i$  где је  $i = 1, \dots, n$ ,
- **одређивање делова краткоталасне карактеристике који су последица сваког појединачног елемента** - одређује се део краткоталасне карактеристике  $t_L^{\tau_i}$  посматраног функционала који настаје као последица сваког појединачног елемента  $\tau_i$ .

- одређивање укупне краткоталасне карактеристике - укупна краткоталасна карактеристика посматраног функционала добија се као сума по формули:

$$t_L = \sum_{i=1}^n t_L^{\tau_i} . \quad (4.30)$$

Подела топографских маса углавном се врши употребом дигиталних модела терена (DMT), који се могу дефинисати на основу података из разних извора, попут мисије SRTM. Резултати овакве анализе су призме  $\tau_i$  са правоугаоном или приближно правоугаоном основом (слика 4.16). У овом процесу, димензије основе се одређују на основу резолуције дигиталног модела,  $\Delta B \times \Delta L$ , где је  $\Delta B$  корак у правцу латитуде, а  $\Delta L$  корак у правцу лонгитуде. Обично се бирају вредности које су приближно једнаке, тј.  $\Delta B \approx \Delta L$ .



Слика 4.16: Расподела топографских маса на призме са правоугаоном основом применом дигиталног модела терена (Одаловић, 2005)

Висине призми  $\tau_i$  могуће је одредити помоћу једначине 4.31:

$$H_P = \frac{\sum_{j=1}^4 H_j^O - H_j^{ref}}{4} \xrightarrow{\forall j: H_j^{ref} = H^{ref}} H_P = \left( \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 H_j^O \right) - H^{ref} , \quad (4.31)$$

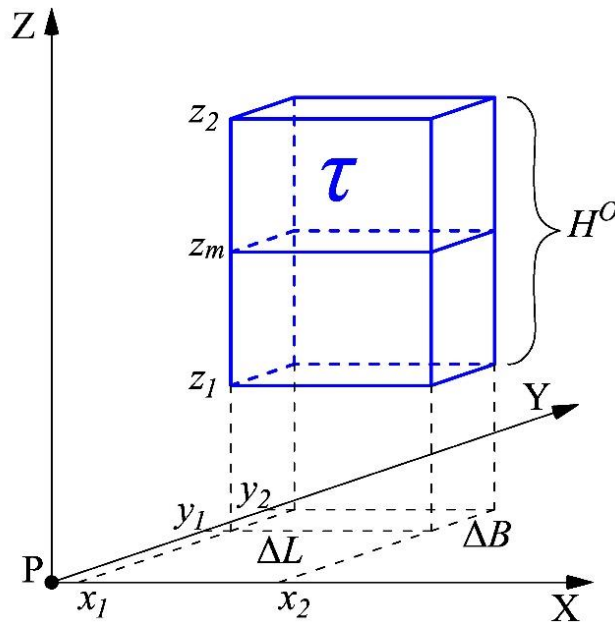
где су:

- $H_j^O$  - ортометријске висине горња четири темена призме  $\tau_i$  и
- $H_j^{ref}$  - ортометријске висине доња четири темена призме  $\tau_i$ , које представљају висину референтне површи у односу на геоид. Будући да је висина референтне

површи дуж основе призме константна вредност, тада важи  $\forall j: H_j^{ref} = H^{ref}$ , где се  $H^{ref}$  одређују се из дигиталног модела терена (**DTM**) користећи методе предикције, колокације или друге методе.

Прикупљањем свих неопходних параметара из **DTM**, могуће је израчунати гравитациони утицај призме. Ови параметри омогућавају потпуно одређивање утицаја топографије. Дакле, користећи параметре ( $\Delta B$ ,  $\Delta L$ ,  $H^0$ ), који дефинишу призму константне густине  $\tau$ , може се формулисати израз за потенцијал убрзања гравитационе силе призме. Ова формула пружа могућност рачунања гравитационог утицаја призме на функционале аномалијског потенцијала.

На слици 4.17 приказана је призма  $\tau$  у правоуглом координатном систему  $XYZ$  с координатним почетком у тачки  $P$ .



Слика 4.17: Призма  $\tau$  са правоугаоном основом димензија  $\Delta B \times \Delta L$  и константне густине  $\rho$

Потенцијал убрзања гравитационе силе призме, у функцији правоуглих координата  $x$ ,  $y$  и  $z$ , дефинише се једначином:

$$T_{\text{ТОРО}}^{\tau_i} = G\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r} dx dy dz . \quad (4.32)$$

Решавањем 4.32 добија се:

$$T_{\text{ТОРО}}^{\tau_i} = G\rho \left[ xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) - \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{xr}\right) - \frac{y^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{xz}{xr}\right) - \frac{z^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{xr}\right) \right] \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2} , \quad (4.33)$$

где је  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Коначно, **RTM** ефекат се може израчунати применом Брунсове формуле и једначине 4.33:

$$\zeta_i^{RTM} = \zeta_{TOPO}^{\tau_i} = \frac{T_{TOPO}^{\tau_i}}{\gamma}. \quad (4.34)$$

Коришћењем резидуалног модела терена, утицај маса које су релативно близу тачака опажања одређује се тако што се призме сматрају паралелним, али само након што се призма спусти испод хоризонта тачке  $P$  за вредност одређену једначином 4.35:

$$\Delta z = \frac{r^2}{2R}, \quad (4.35)$$

где је:

- $r$  – хоризонтално растојање центра основе призме од тачке рачунања и
- $R$  – полупречник терестричке сфере.

У жељи да се олакшају прорачуни, уводе се апроксимативне формуле и смањује се укупан број призми, поготово за удаљене зоне, повећавањем њихових основа или корака  $\Delta B$  и  $\Delta L$  у дигиталном моделу (Одаловић, 2005).

## 5. ИЗВОРИ ЗА МОДЕЛИРАЊЕ ПАРАМЕТАРА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

У предложеној методологији, фокус је искључиво на коришћењу дуготаласних и краткоталасних карактеристика, док се средњеталасна карактеристика изоставља из анализе. Разлози за овакав приступ у решавању проблема одређивања функционала аномалијског потенцијала, као што су аномалија висине и ундулација геоида, могу се објаснити на следећи начин:

- параметри неопходни за одређивање дуготаласних и краткоталасних карактеристика укупног сигнала могу се прикупити из различитих глобалних сервиса доступних на интернету. Дуготаласна карактеристика може се моделирати користећи статичке моделе који су доступни на сајту **ICGEM**. Краткоталасна карактеристика, која произилази из резидуалног модела терена (**RTM**), може се одредити помоћу дигиталних модела терена (**DTM**) се дефинисаних на основу података из мисије **SRTM**, што је доступно на сајту **EARTHDATA-NASA**. (При моделирању укупног сигнала, такође се узима у обзир елипсоидна корекција, која ће бити детаљније обрађена у наредним поглављима.)
- за одређивање средњеталасне карактеристике најчешће се користе решења Молоденског, Стокса или интегралног модела геодезије (колокација). Међутим, за ова решења неопходно је располагати великим бројем резултата опажања убрзања Земљине теже, што представља изазов. Дакле, за успешно моделирање средњеталасне карактеристике потребно је имати обимна терестричка мерења на густо распоређеним тачкама, што може бити изузетно компликовано и непрактично.

Укратко, предложена методологија има за циљ да понуди ефикасан и практичан приступ за одређивање модела површи локалног квазигеоида применом дуготаласних и краткоталасних карактеристика, што се постиже коришћењем слободно доступних извора информација који су описани у наставку поглавља.

### 5.1 ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ - ДУГОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА

Појам глобални геопотенцијални модел (*Global Geopotential Model*) или глобални гравитациони модел (*Global Gravity Model*) представља математичке моделе и концепте, моделирања и апроксимације гравитационог поља Земље у тродимензионалном простору.

Ови модели, познати и као глобални модели, играју изузетно важну улогу у истраживању гравитационог поља Земље и представљају кључан математички и физички алат за анализу различитих аспеката Земљине структуре (распоред маса) и површи.

Такође, имају суштинску улогу у геодезији и другим геонаукама, пружајући битне информације о распореду маса унутар Земље, као и о динамике океана и атмосфере.



Глобални геопотенцијални модели омогућују анализу гравитационих појава изван Земље и играју важну улогу у геодетским истраживањима, помажући у разумевању и мерењу гравитационих феномена и ефеката при различитим теренским условима, што доприноси бољем разумевању структуре и својстава планете.

Глобални геопотенцијални модели се састоје од математичких функција које приказују гравитационо поље Земље као комплексан систем. При томе ове функције имају кључну улогу у моделирању аномалијског потенцијала ( $T$ ) и његових линеарних функционала.

Омогућујући дубље проучавање и анализу различитих аспеката структуре и својстава планете, ови модели представљају неизоставан алат за истраживање гравитационог поља Земље. Анализом линеарних функционала аномалијског потенцијала, омогућава се истраживање комплексних физичких и геолошких процеса који утичу на површ и унутрашњост планете. Тако пружају дубље увиде у динамичку природу Земље и њених сложених интеракција, што помаже у разумевању њене еволуције и будућих промена (Barthelmes, 2014; Одаловић, et al., 2018).

### 5.1.1 Глобални геопотенцијални модел EGM2008

У предложеној методологији је коришћен модел **EGM2008**. **EGM2008** представља сфернохармонијски модел гравитационог потенцијала Земље, а његова прецизност и обим омогућавају детаљну и прецизну анализу и истраживање гравитационих појава и њихових утицаја. Он је развијен методом најмањих квадрата комбиновањем гравитационог модела **ITG-GRACE03S** и коваријационе матрице грешака, са подацима о гравитацији добијеним из глобалног скупа аномалија слободног ваздуха на гриду резолуције  $5' \times 5'$ . Ова комбинација метода и података обезбеђује још већу тачност и способност да се детаљније разумеју гравитационе појаве и њихови утицаји.

Модел **ITG-GRACE03S** представља резултат свемирске мисије истраживања гравитационог поља, познате под називом **GRACE** (*Gravity Recovery and Climate Experiment*). Ова мисија представља значајан напредак у погледу тачности и резолуције одређивања гравитационог поља.

Иновативни карактер ове мисије је резултат високо прецизних мерења:

1. међусобне удаљености „*line-of-sight range*“ два упарена сателита и
2. брзине промене удаљености у **K**-опсегу „*range-rate K-band*“ (опсег фреквенције од 18 GHz до 26,5 GHz) између два упарена сателита.

Додатно, тродимензионални акселерометри у сателитима прате и оцењују брзину промене кретања сателита. Ова информација је значајна за кориговање и уклањање нежељених утицаја при обради података добијених мерењем.

Као резултат ове мисије дефинисани су различити искључиво сателитски (*Satellite-only GGM*) и комбиновани (*Combined GGM*) глобални геопотенцијални модели. Управо један од таквих комбинованих модела је **EGM2008** (Mayer-Gürr, et al., 2010).

Комбиновањем различитих извора података о гравитацији у јединствен скуп података оформљен је коначан GRID модела резолуције  $5' \times 5'$ . Ово укључује податке који су прикупљени на различите начине и из различитих извора, укључујући:



1. терестричке податке (*terrestrial dataset*),
2. податке добијене алтиметријом (*altimetry-derived dataset*) и
3. податке сакупљене помоћу гравиметријских мерења из ваздуха (*airborne gravity dataset*).

Процес спајања ових података обезбедио је комплетније и тачније информације о гравитационом пољу Земље, што је допринело креирању прецизнијег глобалног геопотенцијалног модела као што је **EGM2008**. Уз то, тамо где су постојали подаци ниске резолуције, спектрални садржај је проширен додавањем гравитационих информација које су произашле из локалног утицаја топографије. Као резултат, модел **EGM2008** је развијен до степена и реда 2159 и садржи додатне коефицијенте до степена 2190 и реда 2159. Ово значајно повећање у детаљности и спектру информација у моделу **EGM2008** пружа боље могућности за анализу и проучавање гравитационог поља Земље.

Провера тачности модела **EGM2008** је извршена поређењем моделираних вредности из модела са мереним величинама на следећи начин:

1. рачунањем разлика између ундулација геоида, израчунатих помоћу модела **EGM2008** и независних вредности добијених методом **GPS/dh**, и оне се крећу у распону од  $\pm 5$  cm до  $\pm 10$  cm и
2. рачунањем разлика одступања вертикала, које су моделиране на основу модела **EGM2008** и вредности независних астрогеодетских мерења на територијама САД и Аустралије, и оне се налазе у распонима од  $\pm 1,1''$  до  $\pm 1,3''$ .

На основу резултата добијених провером дошло се до закључка да модел **EGM2008** има сличне карактеристике као локални модели геоида високих резолуција. Такође, утврђено је да у поступцима орбиталних прорачуна **EGM2008** показује одличне резултате као и други модели који се базирају на **GRACE** мисији.

Може се рећи да **EGM2008** модел представља прекретницу у моделирању глобалног гравитационог поља, пружајући први пут доказ да један глобални геопотенцијални модел може задовољити потребе разноврсних примена, уз коришћење детаљних гравиметријских података високе тачности (Pavlis, et al., 2012).

Податке, који су коришћени за развој модела, укључујући датотеку формата .gfc (део датотеке је приказан на слици 5.1), и пратећи научни рад који описује процес развоја модела, као и графички приказ модела (слика 5.2), могуће је преузети са веб странице **ICGEM**, (слика 5.3):

[https://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](https://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime)

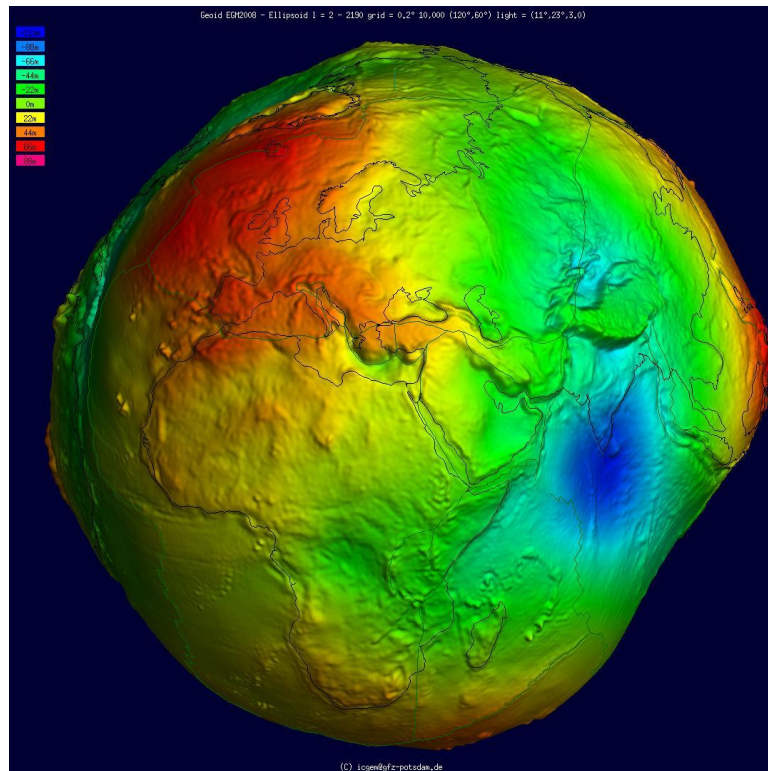
## 5. Извори за моделирање параметара аномалијског потенцијала

Pavlis, N.K., S.A. Holmes, S.C. Kenyon, and J.K. Factor:  
 An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008,  
 presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union,  
 Vienna, Austria, April 13-18, 2008.

product_type	gravity_field	коэффициенти		оцене стандардних девијација			
modelname	EGM2008	степен $n$	ред $m$	$\bar{J}'_{nm}$	$\bar{K}'_{nm}$		
earth_gravity_constant	0.3986004415E+15			$\sigma_{\bar{J}'_{nm}}$	$\sigma_{\bar{K}'_{nm}}$		
radius	0.63781363E+07						
max_degree	2190						
errors	calibrated						
norm	fully_normalized						
tide_system	tide_free						
url	<a href="http://earth-info.nima.mil/GandG/">http://earth-info.nima.mil/GandG/</a>						
key		L	M	C	S	sigma C	sigma S
end_of_head		=====					
gfc	0	0	1.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
gfc	2	0	-0.484165143790815e-03	0.000000000000000e+00	0.7481239490e-11	0.0000000000e+00	0.0000000000e+00
gfc	2	1	-0.206615509074176e-09	0.138441389137979e-08	0.7063781502e-11	0.7348347201e-11	0.7348347201e-11
gfc	2	2	0.243938357328313e-05	-0.140027370385934e-05	0.7230231722e-11	0.7425816951e-11	0.7425816951e-11
gfc	3	0	0.957161207093473e-06	0.000000000000000e+00	0.5731430751e-11	0.0000000000e+00	0.0000000000e+00
gfc	3	1	0.203046201047864e-05	0.248200415856872e-06	0.5726633183e-11	0.5976692146e-11	0.5976692146e-11
gfc	3	2	0.904787894809528e-06	-0.619005475177618e-06	0.6374776928e-11	0.6401837794e-11	0.6401837794e-11
gfc	3	3	0.721321757121568e-06	0.141434926192941e-05	0.6029131793e-11	0.6028311182e-11	0.6028311182e-11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Слика 5.1: Део датотеке глобалног геопотенцијалног модела EGM2008, (ICGEM, 2024).

У датотеци модела за сваки пар вредности оцењених коефицијената  $\bar{J}'_{nm}$  и  $\bar{K}'_{nm}$ , наведени су и степен и ред коефицијената, као и оцене њихових стандардних девијација, респективно  $\sigma_{\bar{J}'_{nm}}$  и  $\sigma_{\bar{K}'_{nm}}$ . Укупно, модел садржи 4802666 коефицијената и једнаки број оцењених вредности стандардних девијација.



Слика 5.2: Модел EGM2008 представљен псеудобојама, сенчењем рељефа и вертикалним увећањем у размери 1:10 000 (ICGEM, 2024)

5. Извори за моделирање параметара аномалијског потенцијала

**ICGEM**

**Global Gravity Field Models**

We kindly ask the authors of the models to check the links to the original websites of the models from time to time. Please let us know if something has changed.

The table can be interactively re-sorted by clicking on the column header fields (Nr, Model, Year, Degree, Data, Reference).  
 In the data column, the datasets used in the development of the models are summarized, where **A** is for altimetry, **S** is for satellite (e.g., GRACE, GOCE, LAGEOS), **G** for ground data (e.g., terrestrial, shipborne and airborne measurements) and **T** is for topography.  
 The links **calculate** and **show** in the last columns of the table directly invoke the Calculation Service and Visualization page for the selected model.  
 For models with a registered doi ("digital object identifier") the last column contains the symbol ✓, which directly opens the page on "http://dx.doi.org/".  
 If you click on the reference, the complete list of references can be seen.

Nr	Model	Year	Degree	Data	References	Download	Calculate	Show	DOI
180	WHU-SWPU-GOGR2022S	2023	300	S (Goce), S (Grace)	Zhao, Yongqi et al 2023	gfc zip	Calculate	Show	✓
179	GOSG02S	2023	300	S (Goce)	Xu, Xinyu et al 2023	gfc zip	Calculate	Show	✓
178	Tongji-GMMG2021S	2022	300	S (Goce), S (Grace)	Chen, J. et al. 2022	gfc zip	Calculate	Show	✓
177	SGG-UGM-2	2020	2190	A, EGM2008, S(Goce), S(Grace)	Liang, W. et al. 2020	gfc zip	Calculate	Show	✓
176	XGM2019e_2159	2019	2190 5540 760	A, G, S(GOCC006s), T	Zingerle, P. et al. 2019	gfc zip gfc zip gfc zip	Calculate	Show	✓
175	GO_CONS_GCF_2_TIM_R6e	2019	300	G (Polar), S(GoCe)	Zingerle, P. et al. 2019	gfc zip	Calculate	Show	✓
174	ITSG-Grace2018s	2019	200	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al. 2018	gfc zip	Calculate	Show	✓
173	EIGEN-GRGS-RL04-MEAN-FIELD	2019	300	S	Lemoine, J.M. et al. 2019	gfc zip	Calculate	Show	✓
172	GOC006s	2019	300	S	Kvas, A. et al. 2021	gfc zip	Calculate	Show	✓
171	GO_CONS_GCF_2_TIM_R6	2019	300	S(GoCe)	Brockmann, J. M. et al. 2021	gfc zip	Calculate	Show	✓
170	GO_CONS_GCF_2_DIR_R6	2019	300	S	Bruinsma, S. L. et al. 2014	gfc zip	Calculate	Show	✓
169	IGTT_R1C	2018	240	G, S(GoCe), S(Grace)	Lu, B. et al. 2019	gfc zip	Calculate	Show	✓
168	Tongji-Grace02k	2018	180	S(Grace)	Chen, Q. et al. 2018	gfc zip	Calculate	Show	✓
167	SGG-UGM-1	2018	2159	EGM2008, S(GoCe)	Liang, W. et al. 2018 & Xu, X. et al. (2017)	gfc zip	Calculate	Show	✓
166	GOSG01S	2018	220	S(GoCe)	Xu, X. et al. 2018	gfc zip	Calculate	Show	✓
165	IGTT_R1	2017	240	S(GoCe)	Lu, B. et al. 2017	gfc zip	Calculate	Show	✓
164	IE_GOCO05s	2017	250	S	Wu, H. et al. 2017	gfc zip	Calculate	Show	✓
163	GO_CONS_GCF_2_SPW_R5	2017	330	S(GoCe)	Gatti, A. et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
162	GAO2012	2012	360	A, G, S(GoCe), S(Grace)	Demisnov, G. et al. 2012	gfc zip	Calculate	Show	✓
161	XGM2016	2017	719	A, G, S(GOCC005e)	Pail, R. et al. 2017	gfc zip	Calculate	Show	✓
160	Tongji-Grace02s	2017	180	S(Grace)	Chen, Q. et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
159	NULP_02s	2017	250	S(GoCe)	A.N. Marchenko et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
158	HUST-Grace2016s	2016	160	S(Grace)	Zhou, H. et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
157	ITU_GACE16	2016	180	S(Grace)	Akyilmaz, O. et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
156	ITU_GGC16	2016	280	S(GoCe), S(Grace)	Akyilmaz, O. et al. 2016	gfc zip	Calculate	Show	✓
155								Show	✓
154								Show	✓
153								Show	✓
152								Show	✓
151								Show	✓
150								Show	✓
149								Show	✓
148								Show	✓
147								Show	✓
146								Show	✓
145								Show	✓
144								Show	✓
143								Show	✓
142								Show	✓
141								Show	✓
140								Show	✓
139								Show	✓
138								Show	✓
137								Show	✓
136								Show	✓
135								Show	✓
134								Show	✓
133								Show	✓
132								Show	✓
131								Show	✓
130								Show	✓
129								Show	✓
128								Show	✓
127								Show	✓
126								Show	✓
125								Show	✓
124								Show	✓
123								Show	✓
122								Show	✓
121								Show	✓
120								Show	✓
119								Show	✓
118								Show	✓
117								Show	✓
116								Show	✓
115	GOCO01S	2008	2160	A, G, S(GoCe), S(Grace)	Pail, R. et al. 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
114	EIGEN-51C	2008	360	S, S(Champ), S(Grace)	Bruinsma, S.L. et al. 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
113	AIUB-CHAMP03S	2008	180	S(Champ)	Prange, L., 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
112	EIGEN-CHAMP05S	2008	180	S(Champ)	Flechtner, Frank et al. 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
111	ITSG-Grace2010s	2010	180	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al. 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
110	AIUB-GRACE02S	2008	150	S(Grace)	Jaggi, A. et al. 2012	gfc zip	Calculate	Show	✓
109	GGM03C	2009	360	A, G, S(Grace)	Tapley, B.D. et al. 2007	gfc zip	Calculate	Show	✓
108	GGM03S	2008	180	S(Grace)	Tapley, B.D. et al. 2007	gfc zip	Calculate	Show	✓
107	AIUB-GRACE01S	2008	120	S(Grace)	Jaggi, A. et al. 2010	gfc zip	Calculate	Show	✓
106	EIGEN-5S	2008	150	S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al. 2008	gfc zip	Calculate	Show	✓
105	EIGEN-5C	2008	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al. 2008	gfc zip	Calculate	Show	✓
104	EGM2008	2008	2190	A, G, S(Grace)	Pavlis, N.K. et al. 2012	gfc zip	Calculate	Show	✓
103	ITG-Grace03	2007	180	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al. 2007	gfc zip	Calculate	Show	✓
102	AIUB-CHAMP01S	2007	70	S(Champ)	Prange, L. et al. 2009	gfc zip	Calculate	Show	✓
101	ITG-Grace02s	2006	170	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al. 2006	gfc zip	Calculate	Show	✓
100	EIGEN-GL04S1	2006	150	S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al. 2006	gfc zip	Calculate	Show	✓
99	EIGEN-GL04C	2006	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al. 2006	gfc zip	Calculate	Show	✓
98	eigen-cg03c	2005	360	A, G, S(Champ), S(Grace)	Forste, C. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
97	GGM02C	2004	200	A, G, S(Grace)	Tapley, B. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
96	GGM02S	2004	160	S(Grace)	Tapley, B. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
95	EIGEN-CG01C	2004	360	A, G, S(Champ), S(Grace)	Reigber, C. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
94	EIGEN-CHAMP03S	2004	140	S(Champ)	Reigber, C. et al. 2004	gfc zip	Calculate	Show	✓
93	EIGEN-GRACE02S	2004	150	S(Grace)	Reigber, Christoph et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
92	TUM-2S	2004	60	S(Champ)	Wermuth, M. et al. 2004	gfc zip	Calculate	Show	✓
91	DEOS_CHAMP-01C	2004	70	S(Champ)	Ditmar, P. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓
90	ITG_Champ01K	2003	70	S(Champ)	IK, K.H. et al. 2005	gfc zip	Calculate	Show	✓

**EGM2008**

Pavlis, N.K. et al, 2012

Pavlis, N.K, Holmes, S.A, Kenyon, S.C, Factor, J.K.:  
 The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008);, Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012) Volume 117, B04406, 2012. <https://doi.org/10.1029/2011JB008916> , 2012

Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., Factor, J.K.;  
 An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008;  
 Vienna, Austria, 2008

Слика 5.3: Визуелни приказ интернет сајта ICGEM (ICGEM, 2024)

## 5.2 РЕЗИДУАЛНИ МОДЕЛ ТЕРЕНА - КРАТКОТАЛАСНА КАРАКТЕРИСТИКА

Одређивање гравитационог утицаја топографских маса представља област истраживања која се бави праћењем и анализом варијација гравитационог поља Земље узрокованих различитим топографским особинама на површи терена. Оваква истраживања су од суштинског значаја у различитим областима, укључујући геодезију, гравиметрију и истраживања у областима геофизике и геодинамике.

Гравитациони утицај топографских маса може бити изразито различит и зависи од промена у висинама и масама у површинским слојевима Земље. У глобалном смислу, гравитационо поље Земље може се разликовати због флукуација у густини материјала, што укључује промене у топографским облицима.

У овим истраживањима, за потребе анализе, користе се дигитални модели терена **DTM**, при чему је у развијању методологије употребљен глобални дигитални модел терена добијен из мисије **SRTM** (*Shuttle Radar Topography Mission*).

### 5.2.1 Свемирска радарска топографска мисија SRTM

Свемирска радарска топографска мисија **SRTM** имала је за циљ прикупљање податка који образују детаљну дигиталну топографску базу података о површи Земље. Да би ови подаци били корисни, морају да испуњавају следеће **ITHD-2** (*Interferometric Terrain Height Data*) спецификације:

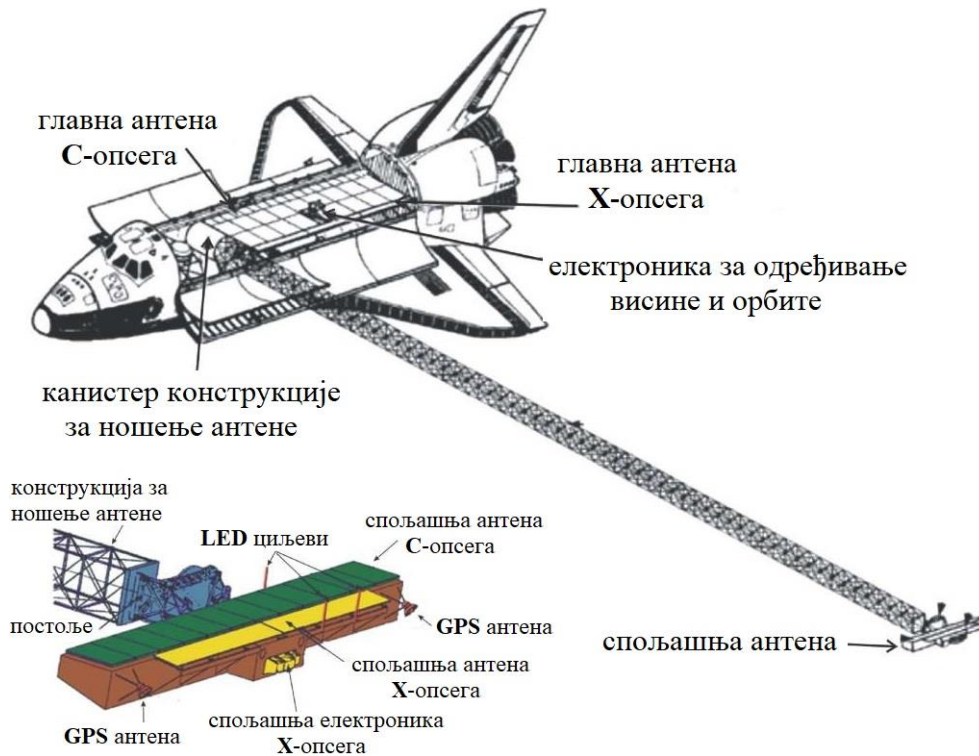
1. просторни узорак (резулација): 30 m × 30 m,
2. апсолутна вертикална тачност: 16 m,
3. релативна вертикална тачност: 10 m и
4. апсолутна хоризонтална кружна тачност: 20 m.

Мерења су реализована помоћу радио-радарских сензора **IFSAR** (*Interferometric Synthetic Aperture Radars*), који раде у **C**-опсегу и **X**-опсегу (слика 5.4). Ови сензори су омогућили прикупљање топографских података на преко 80% површине Земље, односно између северне (60°N) и јужне (56°S) латитуде. Резултати мерења у мисији **SRTM** постигли су жељену тачност у 90% случајева мерења и обраде података, што је у складу са **NMAS** стандардима за тачност картирања (**NMAS - USGS / National Mapping Accuracy Standards - United States Geological Survey**) (NASA-SRTM, 2024; NASA-Earthdata, 2024).

**SRTM** игра виталну улогу у стварању дигиталних модела терена (**DTM**) који су неопходни за одређивање резидуалног модела топографије (**RTM**). Путем коришћења радио-радарских сензора, у оквиру **SRTM** су прикупљени подаци високе резолуције о топографији Земље, а на основу њих креиране су дигиталне топографске карте које се користе за израду **DTM**. Ове карте су затим неопходне и за одређивање **RTM**, који представља модел топографије у који су урачунати резидуални утицаји различитих фактора. **SRTM** подаци о топографији су од суштинског значаја за разумевање терена на Земљи и за различите научне и инжењерске апликације. Наравно, Свемирска агенција за истраживање управља целим **SRTM** пројектом, омогућавајући приступ информацијама које су од значаја за истраживаче и инжењере широм света (NASA-Earthdata, 2024).



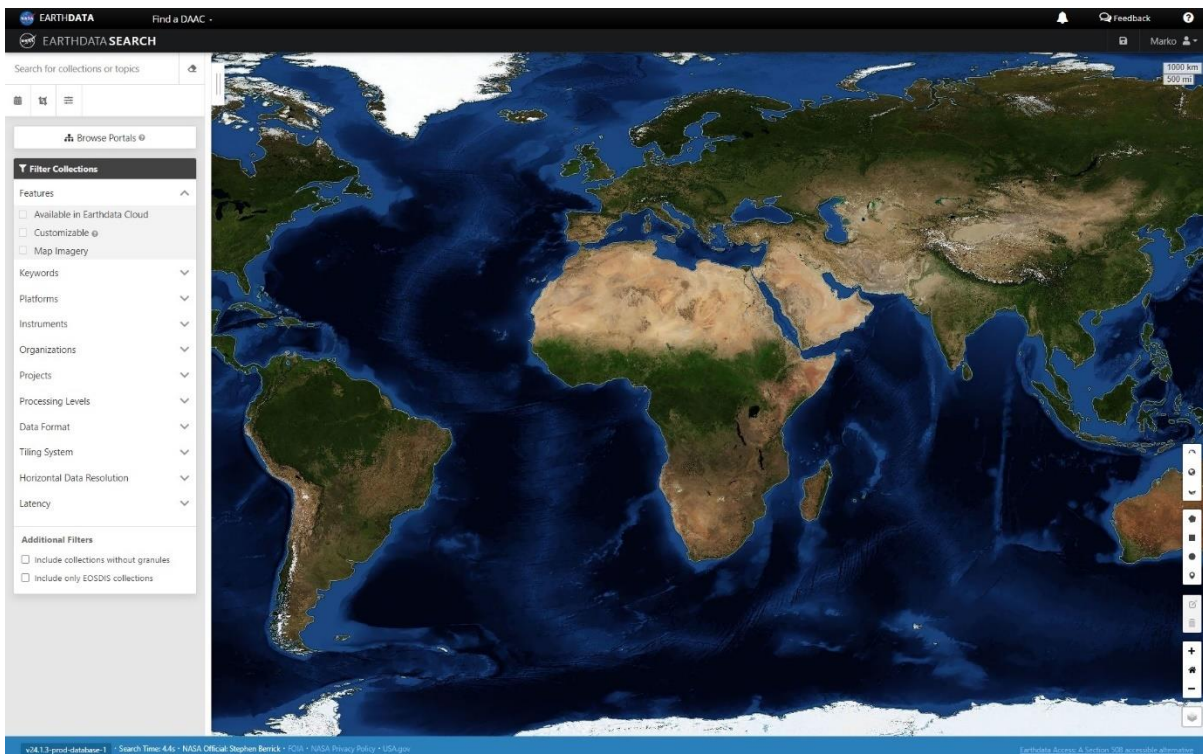
## 5. Извори за моделирање параметара аномалијског потенцијала



Слика 5.4: Платформа за мерење у SRTM – преглед (what-when-how, 2024)

Подаци коришћени за рачунања резидуалног утицаја топографије (**RTM**) су преузети у облику дигиталног модела терена (**DTM**) са веб сајта (слика 5.5):

<https://www.earthdata.nasa.gov/sensors/srtm>



Слика 5.5: Глобални приказ DTM-а, добијен помоћу SRTM мисије (EARTHDATASEARCH, 2024)

### 5.3 УКУПНА АНОМАЛИЈА ВИСИНЕ

У поступку моделирања укупне аномалије висине  $\zeta_i$ , прво је неопходно одредити дуготаласну карактеристику  $\zeta_i^{GGM}$  из одабраног глобалног геопотенцијалног модела. Затим се одређује краткоталасна карактеристика  $\zeta_i^{RTM}$  из резидуалног модела топографије. Њиховим сумирањем рачуна се вредност  $\zeta_i'$  по једначини 5.1 за све тачке, било да се ради о реалним тачкама мреже које постоје на терену или аналитички дефинисаним тачкама грида за потребе моделирања површине у ширем подручју.

$$\zeta_i' = \zeta_i^{GGM} + \zeta_i^{RTM}, \quad (5.1)$$

где је:

- $\zeta_i'$  - вредност аномалије висине из дуготаласне и краткоталасне карактеристике,
- $\zeta_i^{GGM}$  - дуготаласна карактеристика која се одређује из глобалног геопотенцијалног модела **GGM**,
- $\zeta_i^{RTM}$  - краткоталасна карактеристика која се одређује из резидуалног модела топографије **RTM** на основу дигиталног модела терена према подацима из мисије **SRTM**,
- $i = 1, \dots, n$  - тачке предикције на којима се одређују дуготаласна и краткоталасна карактеристика и крајња укупна вредност аномалије висине.

Као последњи параметар неопходан у рачунању укупне аномалије висине  $\zeta_i$ , због примењене сферне апроксимације, потребно је израчунати вредност елипсоидне корекције  $EK_i$  и додати је већ израчунатим вредностима  $\zeta_i'$  у свим тачкама предикције. Елипсоидна корекција се рачуна по једначини:

$$EK_i = e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2(B_i) \right) \zeta_i', \quad (5.2)$$

где је:

- $e$  – први бројни ексцентрицитет коришћеног референтног елипсоида,
- $B_i$  – геодетска латитуда тачке  $i$  за коју се рачуна елипсоидна корекција и
- $\zeta_i'$  – вредност аномалије висине тачке  $i$ , која се рачуна као сума дуготаласне  $\zeta_i^{GGM}$  и краткоталасне  $\zeta_i^{RTM}$  карактеристике за коју се рачуна елипсоидна корекција  $EK$ .

Након додавања елипсоидне корекције  $EK_i$  вредности аномалије висине  $\zeta_i'$  добија се укупна аномалија висине  $\zeta_i$  по једначини:

$$\zeta_i = \zeta_i' + EK_i = \zeta_i^{GGM} + \zeta_i^{RTM} + EK_i. \quad (5.3)$$

У наредном поглављу су детаљно објашњене три варијације поступка спољашње провере резулата моделирања укупне вредности аномалије висине по једначини 5.3.

## 6. МЕТОДОЛОГИЈА ОДРЕЂИВАЊА КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ GGM И DTM

### 6.1 КОНЦЕПТ МЕТОДОЛОГИЈЕ

Нумеричка истраживања су заснована на претходно изложеној теоријској анализи, а циљ истраживања јесте разрада методологије за детаљно одређивање површи локалних модела квазигеоида (**LMQG**) високе резолуције и центиментарске тачности, користећи искључиво јавно доступне податке.

Дакле, у овој методологији до коначне оцене укупног сигнала (аномалија висине) треба доћи без употребе података из којих би се извела средњеталасна карактеристика. Тиме се превазилази зависност од резултата терестричких мерења убрзања силе Земљине теже, који су уобичајено неопходни за моделирање средњеталасне карактеристике аномалије висине.

Моделирање површи локалних модела квазигеоида **LMQG** и одређивање укупне вредности аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  у изабраним тачкама постигнуто је помоћу три групе параметара. Ту уређену тројку параметара чине:

1.  $\zeta^{EGM2008}$  – дуготаласна карактеристика,
2.  $\zeta^{RTM}$  – краткоталасна карактеристика и
3.  $EK$  – елипсоидна корекција.

#### 6.1.1 Дуготаласна карактеристика аномалије висине $\zeta^{EGM2008}$

Рачунање дуготаласне карактеристике аномалије висине  $\zeta^{EGM2008}$  на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности (стварним тачкама) и тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  (аналитичким тачкама) коришћен је глобални геопотенцијални модел **EGM2008**.

Овај модел служи као основни извор података за моделирање аномалије висине на свим тачкама (стварним и аналитичким). У ту сврху, примењен је приступ који укључује следеће кораке:

1. **израда референтне површи (*Reference Surface*):** коришћен је **EGM2008** како би се креирала референтна површ, која представља основни модел терена. Ова референтна површ садржи информације о Земљиним потенцијалу (геопотенцијалу) на различитим локацијама,
2. **израчунавање гравитационих ефеката:** на стварним тачкама нивелмана високе тачности, као и на аналитичким тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ , коришћени су подаци из **EGM2008** модела како би се израчунали гравитациони ефекти на тим локацијама. Ови гравитациони ефекти укључују ефекте геоида, топографије и других фактора који утичу на висину терена и
3. **моделирање аномалије висине:** одређивање вредности дуготаласне карактеристике аномалије висине  $\zeta^{EGM2008}$  у свим изабраним тачкама (тачке предикције).

Разлог за моделирање локалних модела квазигеоида на гриду резолуције  $5' \times 5'$ , јесте је тај што је то резолуција глобалног модела **EGM2008**. Усклађивањем ових резолуција обезбеђује се:

1. **очување прецизности:** када се користи геопотенцијални модел одређене резолуције попут **EGM2008**, важно је да се резолуција креираног грида поклапа са резолуцијом овог модела како би се очувала прецизност у моделирању. Веће разлике у резолуцији могу довести до губитка детаља и прецизности у резултатима.
2. **компатибилност података:** када се користи иста резолуција за геопотенцијални модел и креирани GRID, олакшава се упоређивање и интеграција података. Подаци добијени из **EGM2008** могу се директно упоредити са подацима добијеним из креираног грида без потребе за додатном интерполацијом или корекцијама због разлика у резолуцији.
3. **конзистентност анализа:** када су улазни подаци и резултати моделирања компатибилни по питању резолуције, олакшава се спровођење анализа и интерпретација резултата. Конзистентност омогућава доследно и тачно тумачење добијених резултата и олакшава валидацију методологије.
4. **ефикасност у раду:** коришћењем исте резолуције геопотенцијалног модела и креираног грида омогућава се ефикаснији рад у смислу обраде података, јер се избегава потреба за конверзијом или прилагођавањем података различитих резолуција.

### 6.1.2 Краткоталасна карактеристика аномалије висине $\zeta^{RTM}$

На основу дигиталног модела терена добијеног из **SRTM** срачунат је резидуални утицај топографије (**RTM**). Процес рачунавања **RTM** из **SRTM** података састоји се из четири корака:

1. **израда референтне површи (Reference Surface):** коришћени су **SRTM** подаци у креирању референтне површи, која представља основни модел терена.
2. **израда средње елевационе површи (Mean Elevation Surface):** из референтне површи рачуна се средња елевациона површ, која представља очекивани модел терена на основу различитих топографских фактора.
3. **рачунање разлика (Residuals):** рачунање разлике између стварне елевационе површине (из **SRTM** података) и средње елевационе површине. Рачунање ових разлика представља процес стварања резидуалног модела терена (**RTM**), тј. резидуалне вредности или грешке у коришћеном моделу терена.
4. **корекција модела:** помоћу резидуалних вредности (из тачке 3) поправља се почетни модел терена **SRTM**, како би се одредио прецизнији **RTM**. Ово укључује додавање или одузимање вредности грешака из почетног модела терена, чиме се уклањају или смањују грешке приказа топографских карактеристика.

### 6.1.3 Елипсоидна корекција **EK**

Као последњи параметар у моделирању укупне вредности аномалије висине, срачуната је елипсоидна корекција **EK** у односу на геодетски референтни систем **GRS80** у свим изабраним тачкама.



Након одређивања дуготаласне и краткоталасне карактеристике аномалије висине, њихов збир треба допунити вредношћу елипсоидне корекције због сферне апроксимације резултата.

#### 6.1.4 Укупна вредност аномалије висине $\zeta^{LMQG}$

Коначна вредност укупне аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  у свим изабраним тачкама, одређије се сумирањем резултата уређене тројке параметара ( $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$ ,  $EK$ ) на тим тачкама.

Овим је завршено моделирање локалног модела квазигеоида **LMQG** а у изабраним тачкама поступком предикције су одређене коначна вредност укупне аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$ . Сада је неопходно спровести поступак спољашње провере резултата.

Целокупни поступак спољашње провере изведен је на мрежи тачака нивелмана високе тачности, која обухвата локално подручје и на којој су доступне аномалије висине одређене **GPS/dh** методом, као и аномалије висине/ундулације које се односе на референтни (званични) квазигеоид/геоид у том подручју **RMQG**. Ови подаци су од суштинске важности за валидацију процеса моделирања, обезбеђујући тачност и робустност методологије и добијених решења. Дакле, на истој мрежи у локалном подручју потребно је упоредити три скупа дискретних вредности аномалија висина:

1. **скуп** –  $\zeta^{GPS/dh}$  мерене (реалне) вредности (одређене **GPS/dh** методом),
2. **скуп** –  $\zeta^{RMQG}$  или  $N^{RMG}$  референтне вредности (аномалије висине званичног квазигеоида, тј. ундулације званичног геоида) и
3. **скуп** –  $\zeta^{LMQG}$  моделиране вредности у складу са поступком методологије.

У случају када је доступан само референтни модел геоида ( $N^{RMG}$ ), неопходно је трансформисати вредности ундулације  $N^{RMG}$  у аномалију висине преко Бугеове аномалије.

На изабраним тачкама упоређују се вредности аномалија висина из наведена **три скупа**, чиме се проверавају (*external checking*) добијена решења  $\zeta^{LMQG}$  и постиже се валидација предложене методологије.

На истим тачкама, поред аномалија висина из **прва два скупа**, доступни су и други јавно доступни подаци неопходни за процес моделирања и спољашње провере вредности аномалија висина  $\zeta^{LMQG}$ .

Да би се постигао већи степен сигурности у оквиру методологије примењена су **три начина спољашње провере** коначних резултата. Спољашњом провером резултата постиже се коначна оцена укупног сигнала (аномалије висине) моделираних вредности параметара функционала аномалијског потенцијала.

У поступку спољашње провере, неопходно је посветити посебну пажњу третирању и отклањању утицаја ивичних ефеката. Ови ефекти се највише примeћују на тачкама које су најближе границама подручја, што може имати значајан утицај на квалитет модела. Решење за смањење овог утицаја је померање границе подручја ка центру, чиме се искључују тачке у пограничним областима које су највише подложне ивичним ефектима. Ово омогућава вишу тачност и квалитет одређених модела.

## 6.2 ПРВИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА

### 6.2.1 Провера резултата LMQG на GPS/dh тачкама

Спољашња провера моделираних вредности аномалија висина је суштински мера приближења између моделиране **LMQG** и референтне површи **RMQG**, која се добија као разлика између моделираних и референтних вредности. Ове иницијалне разлике, односно иницијални резидуали  $t$ , одређују се директним одузимањем аномалија висина добијених **GPS/dh** методом од моделираних аномалија висина **LMQG**.

Након тога, потребно је урадити оцену тих резидуала. За ту оцену одабрана је четворопараметарска трансформација, при чему су параметри трансформације  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$  оцењени посредством статистичке методе најмањих квадрата **MHK**.

Оцењени резидуали представљају вредности које се користе за translацију моделиране површи **LMQG** са циљем да се постигне најбоље приближење референтном (званичном) моделу у локалу. Ова translација, односно приближење моделиране површи **LMQG** референтном моделу постиже се одузимањем оцењених резидуала  $\hat{t}$  од моделиране аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$ . На тај начин добија се translирана моделирана површ **LMQG\_t** која се прилагођава површи званичног модела **RMQG**.

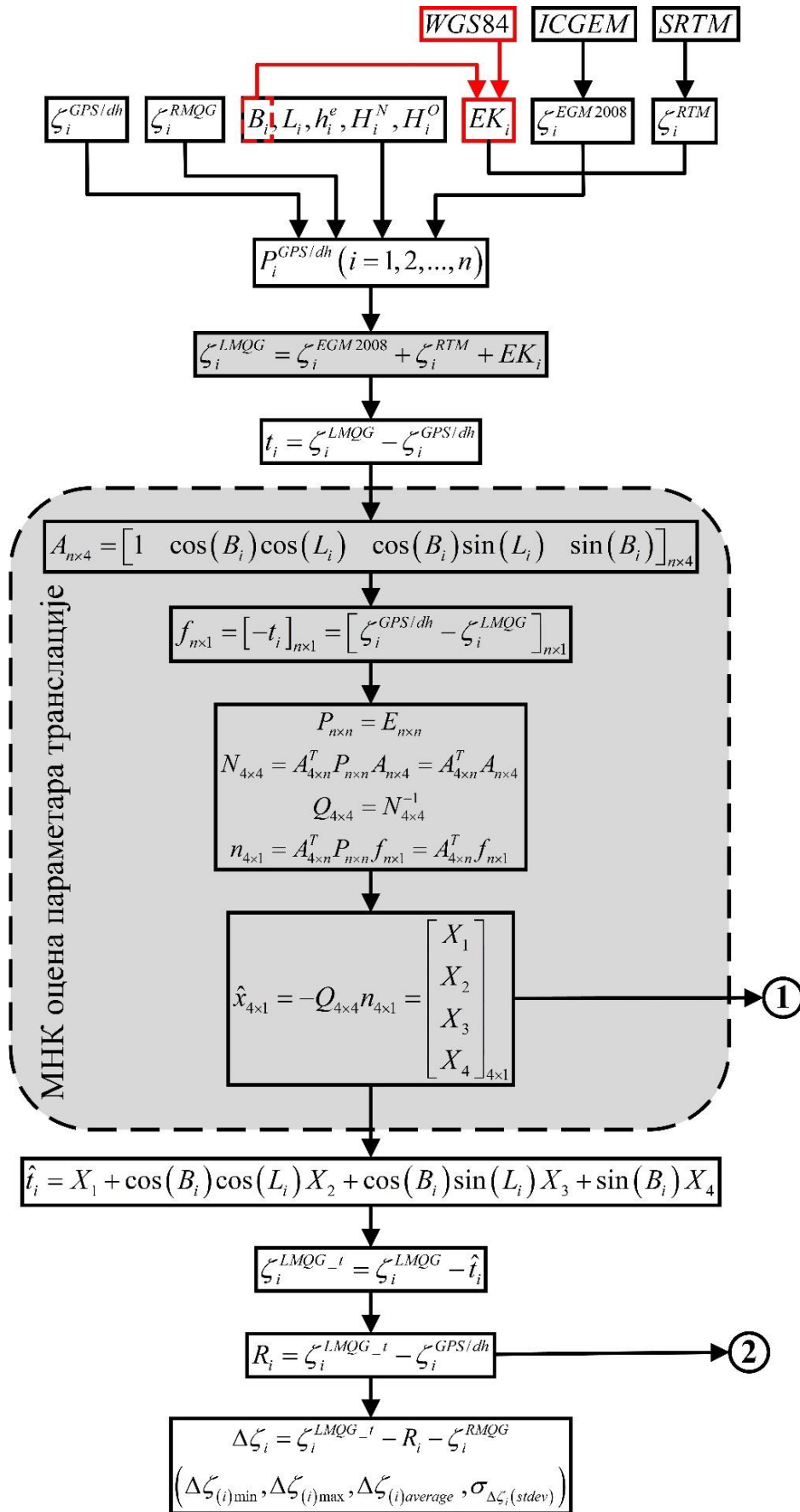
Међутим, то приближење ни у којем случају неће бити потпуно, односно до пуног поклапања између две површи неће доћи. Зато се рачунају преостали резидуали (разлике)  $R$  између translиране моделиране површи **LMQG\_t** и површи референтног (званичног) модела **RMQG**. Ови резидуали се рачунају као разлике између translираних моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG-t}$  и „реалних“ (мерених) аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$  које су добијене из **GPS/dh** методе.

Укупно или максимално приближење (transлирање) моделиране површи се постиже када се од translиране моделиране површи **LMQG\_t** одузму преостали резидуали  $R$ . На овај начин је постигнуто максимално приближење моделиране и референтне површи.

Статистичка анализа оцењених и преосталих резидуала је важан алат за оцену ефикасности моделирања у постизању минималних вредности резидуала. Минималне вредности резидуала су очекиване и жељене, и оне указују на то да је моделирана површ успешно представљена и да најбоље одговара званичном (референтном) моделу у локалном подручју.

Уз то, коначна валидација локалног модела квазигеоида заснива се на статистичкој анализи укупних или коначних резидуала (разлика) између максимално translираних моделираних аномалија висине и аномалија висине званичног модела. Постизање минималних вредности укупних разлика је неопходно у оквиру моделирања за успешну валидацију.

Део поступка моделирања и спољашње провере је представљен на слици 6.1.



Слика 6.1: Први начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на GPS/dh тачкама

### 6.2.2 Провера резултата LMQG на тачкама грида

Овај корак (слика 6.2) представља интегрални део развијене методологије и обухвата целокупну територију анализираниог подручја. Испитивање и осигуравање робусности и непрекидности у тачности су кључни.

То значи да је битно обезбедити да се ниво тачности у овом делу процеса не нарушава и да се одржава на константном нивоу на читавом подручју. Посебно је важно постићи конзистентност у деловима где нема тачака нивелмана високе тачности.

Првенствено је неопходно развити GRID жељене резолуције ( $5' \times 5'$ ) на читавом подручју. GRID представља мрежу тачака која не постоји на терену, већ је аналитички дефинисана за потребе моделирања и валидације површи локалног модела квазигеоида (LMQG).

Потом се на том GRIDу, понавља идентичан поступак моделирања укупне аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  (моделирање површи LMQG) као на тачкама нивелмана високе тачности. Односно, на свакој тачки GRIDа се сабирају свака три моделирана параметара из три категорије података: дуготаласна карактеристика дефинисана из глобалног геопотенцијалног модела **EGM2008**, краткоталасна карактеристика садржана у резидуалном утицају топографије (RTM) срачунатом из SRTM-а и елипсоидна корекција (EK) израчуната у односу на **GRS80**.

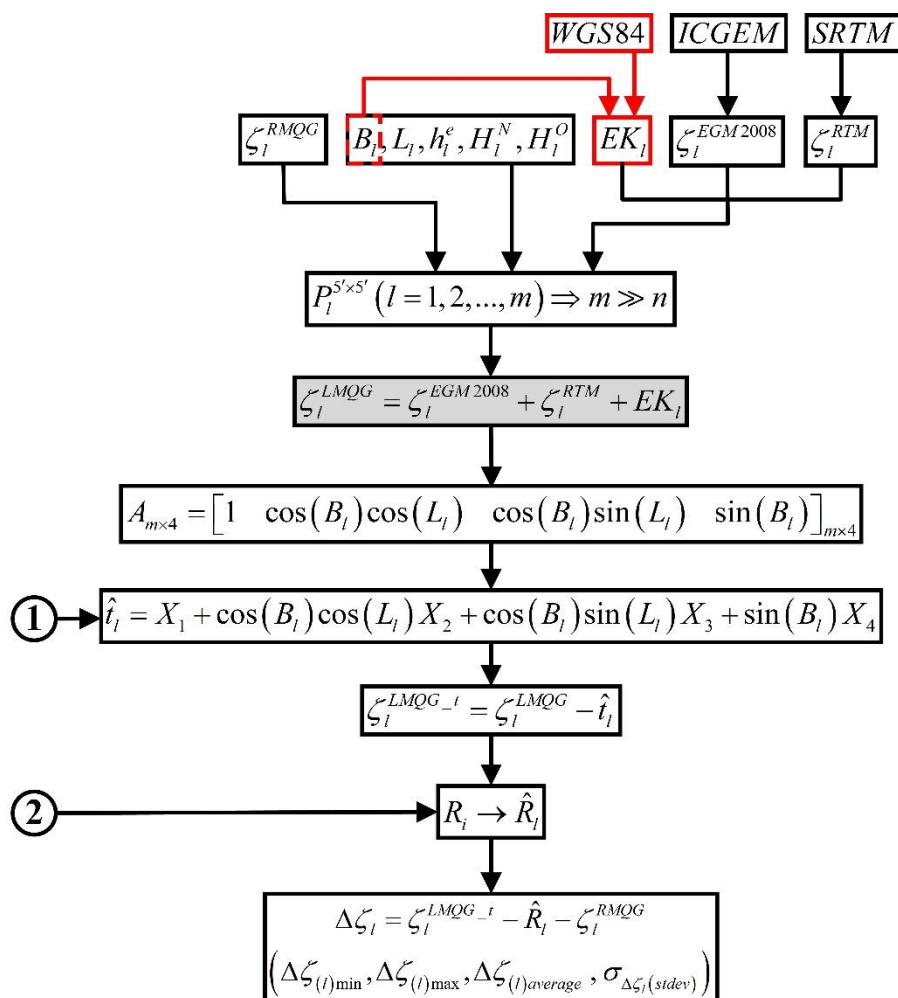
Као што је већ наглашено, GRID је аналитички дефинисана правилна мрежа на чијим тачкама, нема доступних „реалних“ (мерених) вредности аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$ . То значи да је немогуће израчунати иницијалне резидуале  $t$  како би се применио исти поступак спољне провере и валидације помоћу МНК и четворопараметарске трансформације, као на тачкама нивелмана високе тачности.

Стога се приступа посредној оцени иницијалних резидуала на тачкама GRIDа за шта се користе **оцењени параметри трансформације добијени са тачака нивелмана високе тачности** ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ). На овај начин се превазилази проблем недостатка мерених аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$  на тачкама GRIDа.

Такође, оваквим поступком се омогућава постизање (приближно) исте тачности у моделирању аномалије висине као и на **GPS/dh** тачкама, али на широком подручју. Остваривање (приближно) исте тачности на GRIDу је неопходно како би се осигурала конзистентност и пуна применљивост модела на свим локацијама у анализираниом подручју.

Коришћењем ових параметара трансформације на GRIDу, треба постићи усаглашавање тачности у моделирању аномалије висине као на нивелману високе тачности, али на широком подручју иако на тачкама GRIDа не постоје „реалне“ (мерене) вредности аномалије висине.

Затим, као и на тачкама нивелмана високе тачности, помоћу оцењених резидуала  $\hat{t}$  моделирана површ LMQG се транслира тако да се постигне најбоље приближење референтном (званичном) моделу у локалу. И у овом случају транслација моделиране површи LMQG се постиже одузимањем оцењених резидуала од моделиране аномалије висине чиме се добија транслирана моделирана површ LMQG\_t која је прилагођена површи званичног модела.



Слика 6.2: Први начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на гриду резолуције  $5' \times 5'$

Још једна последица непостојања мерених аномалија висине на тачкама грида је немогућност рачунања преосталих резидуала  $R$  на тим тачкама. Уместо тога, користи се интерполација преосталих резидуала  $R$ . У овом поступку предикције моделирају се вредности резидуала на тачкама грида помоћу познатих тачака нивелмана високе тачности. За ову сврху примењен је метод гридирања „Inverse Distance to a Power“, али је могуће користити и друге методе.

Као што је већ показано на тачкама нивелмана високе тачности и у случају тачака грида, укупно или максимално приближење (транслирање) моделиране површи **LMQG** ка референтној површи **RMQG** се постиже када се од вредности моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  одузму оцењени  $\hat{t}$  и (моделирани) преостали резидуали  $\hat{R}$ .

Следећи корак је статистичка анализа оцењених  $\hat{t}$  и (моделираних) преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида, што је аналогно процесу анализе на тачкама нивелмана високе тачности.

Циљ ове анализе је утврђивање нивоа приближења моделиране површи ка референтној и процена да ли је постигнут основни критеријум успешности у моделирању, односно да ли су оцењени  $\hat{t}$  и (моделирани) преостали  $\hat{R}$  резидуали минималне вредности.

Минималне вредности резидуала указују на успешно моделиране површи и њену најбољу прилагођеност званичном (референтном) моделу на локалном нивоу.

Додатно, коначна валидација моделиране површи локалног модела квазигеоида заснива се на статистичкој анализи укупних или коначних разлика (резидуала) између максимално транслираних моделираних аномалија висине и аномалија висине званичног модела на читавом гриду. Постизање минималних вредности укупних разлика представља неопходан услов за успешну валидацију у контексту моделирања.

Коначно, ако су постигнути циљеви и очекивања, онда је доказано да је методологија ефикасна у моделирању аномалије висине на гриду резолуције  $5' \times 5'$ . То такође потврђује да су параметри трансформације добро оцењени (на **GPS/dh** тачкама) и да је модел способан да одражава стабилну и конзистентну тачност на различитим локацијама у целом анализираном подручју. Доказује се да је модел способан да се прилагоди различитим условима и да пружи исти ниво тачности као и моделирање на **GPS/dh** тачкама, што је кључно за његову примену на ширем подручју.

## 6.3 ДРУГИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА

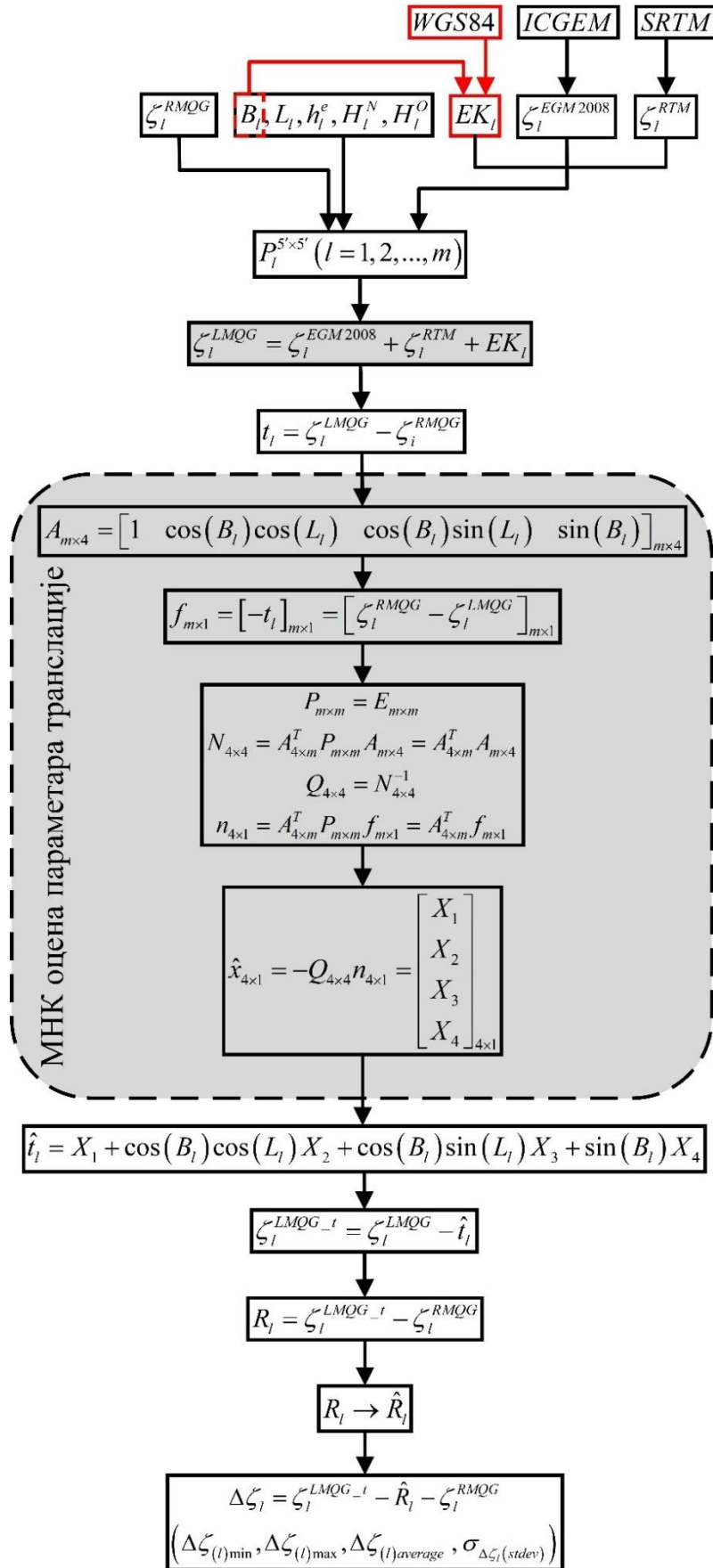
### 6.3.1 Провера резултата LMQG на гриду без употребе GPS/dh тачака и $\zeta^{GPS/dh}$

У другом начину спољашње провере (слика 6.3), основна разлика у односу на први начин је у томе што нису коришћене „реалне“ (мерене) вредности аномалије висине  $\zeta^{GPS/dh}$ . Уместо тога, вредности иницијалних резидуала  $t$  су срачунате као разлике између локалног модела квазигеоида (**LMQG**) и референтног (званичног) модела квазигеоида (**RMQG**). Овај начин спољашње провере има за циљ упрошћавање и убрзавање поступка анализе на широком подручју, али може са собом носити ризик од губитка детаља и прецизности који су доступни у првом начину.

Након израчунавања иницијалних резидуала  $t$ , применом методе најмањих квадрата и четворопараметарске трансформације урађена је њихова оцена, слично као у првом начину спољашње провере резултата.

Још једна важна разлика у односу на први начин јесте како су срачунати преостали резидуали  $R$ . Уместо коришћења „реалних“ (мерених) аномалија висине измерених помоћу **GPS/dh** методе, преостале разлике  $R$  су срачунате тако што су од моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  одузети оцењени резидуали (транслације)  $\hat{t}$ , а затим су од тако транслиране површи **LMQG\_t** одузете аномалије висине које се односе на референтни модел **RMQG**. Овим се желело постићи боље прилагођавање референтном моделу али треба узети у обзир могуће губитке информација који су настали изостављањем мерених аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$ .

На основу преосталих резидуала  $R$ , моделирана је нова резидуална површ, тако што су те преостале разлике употребљене за оцену нових резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида. Овај поступак се примењује ради равномерне прерасподеле грешака и добијања „глађе“ резидуалне равни.



Слика 6.3: Други начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на греди резолуције 5'x5'

На крају, процена ефикасности моделирања се врши на основу статистичке анализе укупних разлика између моделираних и референтних аномалија висине на читавом гриду. Постизање минималних вредности укупних разлика је неопходан услов за успешну валидацију у контексту моделирања.

Овај начин спољашње провере, иако је спроведен са циљем упрошћавања поступка, треба анализирати у упоредном контексту са првим начином спољашње провере, у коме су наведене предности и недостаци коришћења мерених аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$ .

## 6.4 ТРЕЋИ НАЧИН СПОЉАШЊЕ ПРОВЕРЕ РЕЗУЛТАТА

### 6.4.1 Провера резултата LMQG на GPS/dh тачкама без коришћења $\zeta^{GPS/dh}$

У трећем начину спољашње провере (слике 6.4 и 6.5), користи се нивелман високе тачности (GPS/dh тачке), али вредности аномалије висине измерене GPS/dh методом на тим тачкама не користе се у поступку спољашње провере (валидације) поступка моделирања. Уместо тога, иницијални резидуали  $t$  на тачкама нивелмана високе тачности рачунају се исто као у другом начину спољашње провере на гриду резолуције  $5' \times 5'$ . То значи да су иницијални резидуали срачунати као разлика моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  и аномалија висине које се односе на референтни квазигеоид  $\zeta^{RMQG}$ .

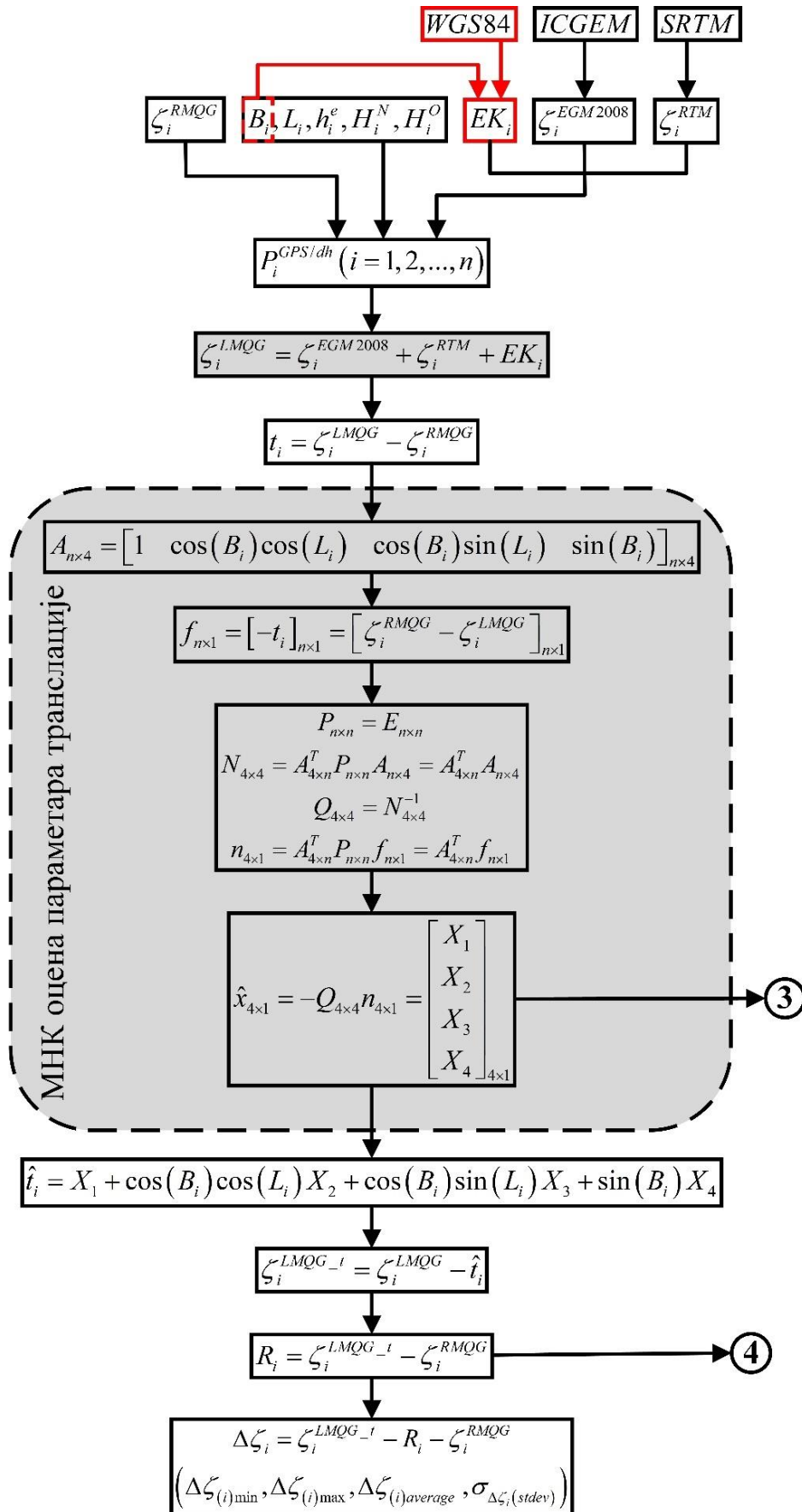
Након тога, применом методе најмањих квадрата (МНК), рачунају се и оцењују параметри трансформације ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ). Помоћу тих оцењених параметара и поступка четворопараметарске трансформације оцењују се вредности иницијалних резидуала, чиме се добијају оцењени резидуали (транслације)  $\hat{t}$ .

Затим се рачунају преостали резидуали  $R$  према релацији која је такође већ представљена у другом начину спољашње провере на гриду  $5' \times 5'$ . Односно, од моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  одузимају се оцењени резидуали  $\hat{t}$ , а затим се од тако добијене транслиране површи **LMQG\_t** одузимају вредности аномалија висине које се односе на референтни квазигеоид  $\zeta^{RMQG}$ . Овим поступком добијају се преостали резидуали  $R$ .

У овом начину спољашње провере на тачкама нивелмана високе тачности, коначне (укупне) разлике  $\Delta\zeta$  ће бити нула. За спољашњу проверу поступка моделирања, уместо аномалија висина одређених **GPS/dh** методом, користе се аномалије висине које се односе на референтни модел.

Коначно, за потребе спољашње провере моделираних аномалија висине, одређују се коначне разлике  $\Delta\zeta$  између моделираних и референтних аномалија висине на тачкама нивелмана високе тачности. Очекивани исход је да су оцењени и преостали резидуали минималне вредности.





Слика 6.4: Тећи начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на GPS/dh тачкама (без коришћења аномалија висина измерених GPS/dh методом)

### 6.4.2 Провера резултата LMQG на гриду без претходног коришћења $\zeta^{GPS/dh}$

Као у првом начину за потребе рачунања оцењених резидуала  $\hat{i}$  на тачкама грида  $5' \times 5'$  преузимају се оцењени параметри трансформације ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ) који су срачунати у поступку **МНК** на тачкама нивелмана високе тачности и користе се у четворопараметарској трансформацији за потребе рачунања оцењених резидуала (транслација)  $\hat{i}$ .

У следећем кораку су моделирани преостали резидуали  $\hat{R}$  на тачкама грида на основу срачунатих преосталих резидуала  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности.

Као и до сада, битно је статистичком анализом оцењених резидуала  $\hat{i}$  и моделираних преосталих резидуала  $\hat{R}$  установити да ли су њихове вредности минималне.

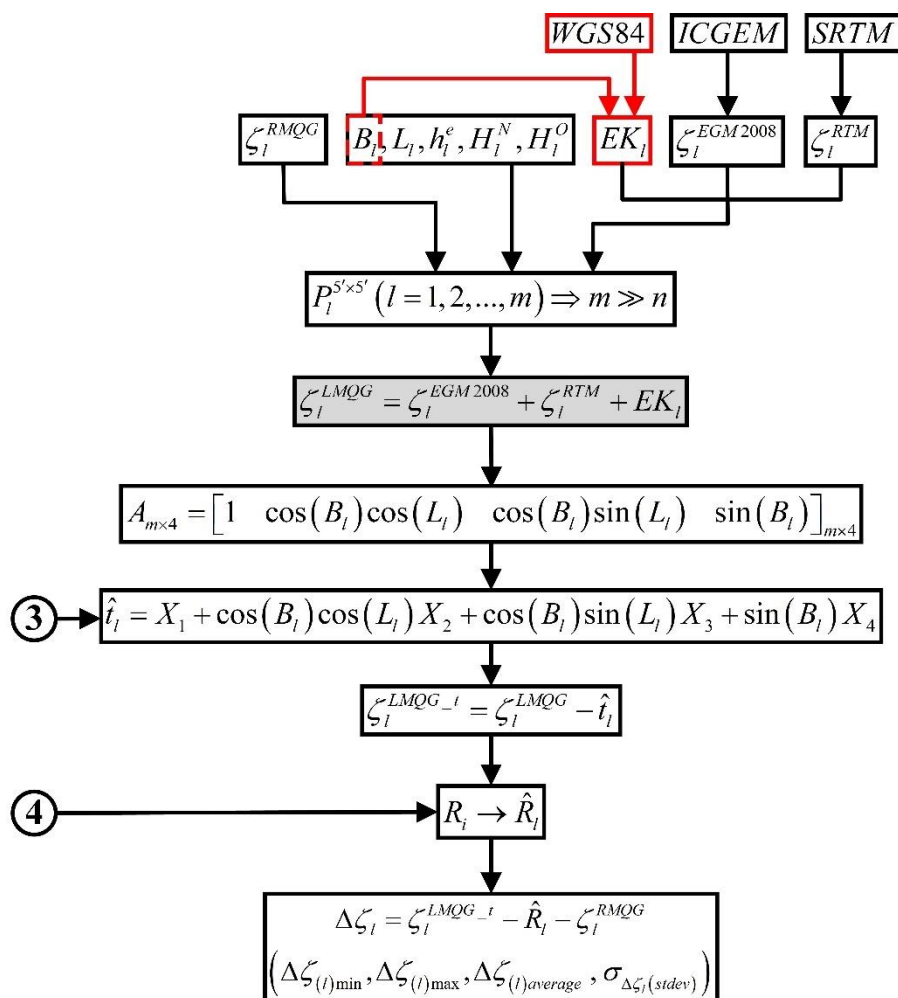
Потом се рачунају коначне (укупне) разлике  $\Delta\zeta$  по истој релацији као што је то урађено и у претходна два начина провере. Дакле, од моделираних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  су одузети оцењени  $\hat{i}$  и моделирани преостали резидуали  $\hat{R}$  на тачкама грида и на тај начин је дефинисана транслирана површ локалног модела квазигеоида која је најбоље пришла референтном (званичном) моделу **RMQG**. Од тако транслираних вредности аномалије висине се потом одузимају аномалије висине које се односе на референтни модел **RMQG** где се добијају коначне разлике  $\Delta\zeta$ .

Коначна валидација моделиране површи локалног модела квазигеоида заснива се на статистичкој анализи укупних или коначних разлика  $\Delta\zeta$  на читавом гриду. Постизање минималних вредности укупних разлика представља неопходан услов за успешну валидацију у контексту моделирања.

Дакле, у трећем начину спољашње провере избегава се употреба аномалије висине  $\zeta^{GPS/dh}$  на тачкама нивелмана високе тачности. Уместо тога, користи се аномалија висине која се односи на референтни (званични) квазигеоид  $\zeta^{RMQG}$ .

Ова промена има значајне последице. Пре свега, умањује се зависност од аномалије висине измерене **GPS/dh** методом, која може бити подложна различитим факторима грешка и променама топографије. Уместо тога, коришћење референтне аномалије висине пружа стабилнију основу за моделирање и анализу површи локалног модела квазигеоида. Ово може довести до поузданијих и конзистентнијих резултата, што је од суштинског значаја за прецизно моделирање и анализу у методологији.

Овај део поступка приказан је на слици 6.5.



Слика 6.5: Трећи начин спољашње провере резултата – рачунање и валидација моделиране површи на гиду резолуције 5'×5'

Упоређење са првим начином спољашње провере открива неколико значајних разлика. Први начин спољашње провере укључивао је коришћење аномалије висине измерене **GPS/dh** методом на тачкама нивелмана високе тачности, док трећи начин спољашње провере избегава тај корак и уместо њега користи вредности које се односе на референтни квазигеоид. Ово је значајна разлика јер се први начин ослања на директно измерене вредности, док је трећи начин фокусиран на коришћење референтних вредности.

Што се тиче последица ове разлике, трећи начин може пружити стабилнију основу за моделирање и анализу површи. Коришћење референтних висина може смањити утицај грешака у измереним аномалијама висине, што може довести до поузданијих резултата. С друге стране, ова измена може утврдити потребу за додатном валидацијом и корекцијом референтних висина како би се осигурала њихова тачност и применљивост у моделирању.

Укратко, трећи начин спољашње провере има захтевнији приступ при обради података, али може пружити стабилнију основу за моделирање и анализу површи упоредно са првим начином.

## 7. НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

### 7.1 ИЗВОРИ И ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА

У овој фази истраживања, фокус је на идентификацији различитих извора података неопходних за успешну реализацију истраживачког рада. Ова етапа укључује процесе прикупљања података из разноврсних извора за територије три изабрана подручја:

1. Републику Србију,
2. регион Оверња и
3. државу Колорадо.

Прикупљени подаци обухватају различите категорије информација, укључујући:

- **званичне моделе квазигеоида/геоида који су коришћени у изабраним подручјима:** Ови модели представљају основу за даље анализе и истраживања. За територију Републике Србије коришћен је квазигеоид **SQM2011**. За анализу у региону Оверња изабран је гравиметријски геоид **ITUGRG2021**. За територије држава Колорадо и Новог Мексика, избор је био квазигеоид **CoIFFTGWG2020**.
- **EGM2008:** Овај модел коришћен је за моделирање оног дела аномалије висине (укупног сигнала) који се одређује из дуготаласне карактеристике линеарног функционала аномалијског потенцијала. Модел је доступан на линку јавног сервиса **ICGEM**:

[https://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime;](https://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime;)

- **податке доступне на тачкама нивелмана високе тачности:** Оригинална нумеричка истраживања су спроведена на овим тачкама у сва три изабрана подручја. При томе су коришћени различити параметри, укључујући геодетску латитуду  $B$  и лонгитуду  $L$ , нормалну  $H^N$  и елипсоидну  $h^e$  висину. Као и аномалију висине  $\zeta^{GPS/dh}$  добијене помоћу **GPS/dh** методе,  $\zeta^{EGM2008}$  добијене из глобалног геопотенцијалног модела **EGM2008** и  $\zeta^{RMQG}$  дефинисане у односу на званичне локалне квазигеоиде.

У процесу моделирања локалних квазигеоида, неопходно је укључити две корекције како би се добио крајњи резултат рачунања укупне вредности аномалије висине. Ове корекције укључују:

- **SRTM податке:** Сателитски подаци из **SRTM** мисије користе се за креирање дигиталног модела терена. Ови подаци омогућавају одређивање резидуалног утицаја топографије (**RTM**) који се затим користи за проучавање краткоталасних карактеристика сигнала аномалијског потенцијала, у ознаци  $\zeta^{RTM}$ . **SRTM** подаци су доступни на **NASA-EARTHDATA** сајту преко линка:

<https://search.earthdata.nasa.gov/search?q=SRTM;>

- **GRS80 параметре:** У контексту моделирања аномалије висине, **GRS80** се користи за рачунање елипсоидне корекције (**EK**). Елипсоидна корекција је поправка која се додаје као трећи параметар приликом моделирања укупне аномалије висине. Ова корекција узима у обзир облик тела Земље које није

сферног облика, већ је ближе елипсоиду. Коришћењем **GRS80** као референтног модела за ову корекцију, омогућава се прецизније моделирање аномалије висине у складу са реалним обликом Земљине површи.

На крају, сабирањем компоненти  $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$  и  $EK$  на свакој тачки, добијена је укупна вредност аномалије висине локалног модела квазигеоида  $\zeta^{LMQG}$ .

Подаци су прикупљени за наведена три подручја, одабрана због њиховог значаја и репрезентативних карактеристика за потребе истраживања и развијања методологије. Конкретно:

1. **Република Србија**: представља значајно подручје у истраживању, са величином од приближно  $5^\circ \times 5^\circ$ , обухвата различите типове терена, од равнице на северу до брдских и планинских предела на југу. Ова широка варијација топографије представља изазов за моделирање аномалије висине, посебно када се узме у обзир да се конфигурација топографије може променити из равничарске у брдску и планинску.

Што се тиче распореда нивелмана високе тачности, **GPS/dh** тачке су просторно распоређене као влакови који пролазе кроз целу територију. Ова распрострањеност тачака омогућава покривеност широког спектра топографских карактеристика, што је неопходно за адекватно моделирање аномалије висине.

С обзиром на ове карактеристике, подаци са **GPS/dh** тачака на територији Републике Србије, преузети од Републичког геодетског завода, су од великог значаја у истраживању. Они пружају могућност анализирања и моделирања аномалије висине на различитим типовима терена и разумевање њиховог утицаја на добијене резултате.

2. **регион Оверња (Република Француска)**: представља значајно подручје за истраживање из неколико разлога. Прво, ово подручје је одабрано због јавно доступних података преко корисничког сервиса **ISG**, што олакшава прикупљање информација и обраду података. Друго, величина подручја од  $2^\circ \times 3^\circ$  омогућава адекватно обухватање различитих географских карактеристика и топографских услова који су битни у анализи. Такође, регион Оверња је репрезентативан због варијација у топографији (заступљеност разних типова терена) и геодетских услова (равномерно распоређене **GPS/dh** тачке) који могу бити од интереса у истраживању.
3. **држава Колорадо (САД)**: значај последњег изабраног подручја постоји из више разлога. Прво, подаци за ово подручје такође су преузети са корисничког сервиса **ISG**, чиме је обезбеђена јавна доступност информација неопходних у истраживању. Ипак, методологија се сусреће са специфичним изазовима у овом подручју, као што је значајна депресија терена и неравномеран распоред **GPS/dh** тачака. Овај контекст је изазвао развој посебног начина спољашње провере резултата јер интерполација није била могућа у процесу моделирања. Дакле, и у оваквом специфичном подручју, изражене депресије и веома неповољног просторног распореда **GPS/dh** тачака, примењена је предложена методологија. При томе је покушано да се добијени резултати провере на тај начин да специфичности подручја не утичу на квалитет спољашње провере резултата. Што се тиче величине подручја од  $1,5^\circ \times 5^\circ$  она обезбеђује адекватну

покривеност терена и пружа могућност истраживања услед специфичне конфигурације топографије и неповољног распореда **GPS/dh** тачака, што су битни услови у поступку истраживања.

Што се тиче доступности података, сва три изабрана подручја су јавно доступна за геодетска истраживања. Ова доступност омогућава упоређивање и анализу података из различитих извора, што је кључно за процену и испитивање ефикасности предложене методологије на различитим теренским условима и геодетским сценаријима.

У наставку поглавља, претходно споменути подаци биће детаљно разматрани, укључујући процесе прикупљања, тумачења и интерпретације. Анализа ових података обухвата различите аспекте и карактеристике, као и њихов значај и утицај на предложену методологију. Овим је омогућено дубље разумевање природе података и њихове релевантности у поступку моделирања површи локалних квазигеоида, што треба додатно да потврди основе и суштину примењених начина спољашње провере резултата и анализа.

Након тога, приступа се математичком апарату развијеном у оквиру методологије, где су прикупљени подаци подвргнути детаљној анализи и обради у поступцима моделирања локалних квазигеоида у сва три начина спољашње провере резултата.

На крају су приказани добијени резултати на основу којих су донети коначни закључци о ефикасности и оправданости предложене методологије.

## 7.2 ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА Р. СРБИЈУ

### 7.2.1 Квазигеоид **SQM2011**

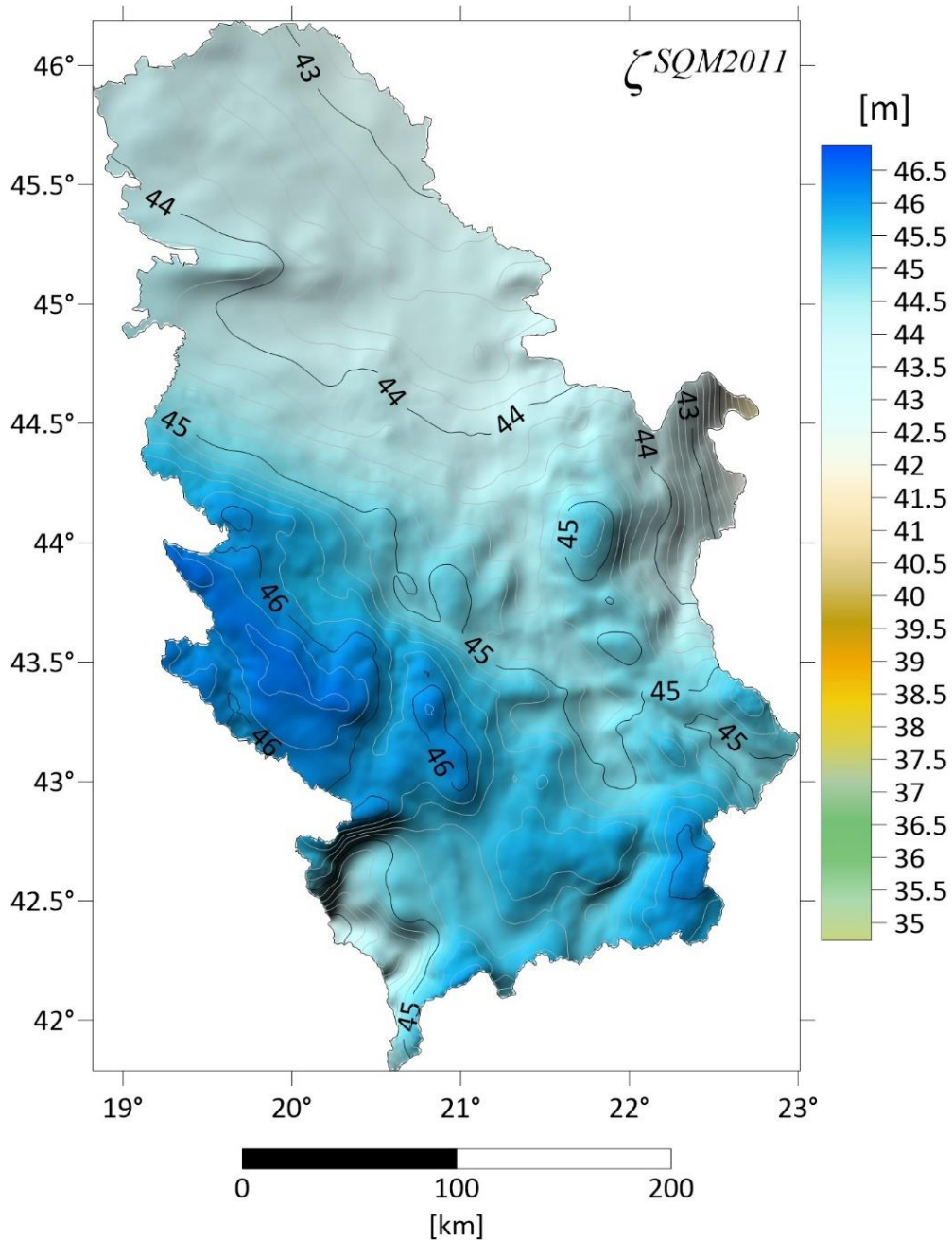
Подаци који се односе на територију Р. Србије добијени су на основу упућеног захтева Републичком геодетском заводу (**РГЗ**). Ови подаци обухватају широк спектар информација, укључујући званични квазигеоид за целу територију Р. Србије - **SQM2011** (слика 7.1), вредности аномалија висине измерених помоћу **GPS/dh** методе, елипсоидне и нормалне висине, као и геодетске латитуде и лонгитуде на 1001 тачки нивелмана високе тачности.

Квазигеоид **SQM2011** је развијен 2011. године за читаву територију Р. Србије. За потребе рачунања новог квазигеоида за територију Р. Србије прво је израчунат нови гравиметријски модел на основу старих података о убрзању силе Земљине теже. Потом је тај гравиметријски модел упоређен и прилагођен **GNSS/dh** мерењима на тачкама **FR** и **SREF**.

Коначни гравиметријски модел је добијен преко четворопараметарске трансформације уз додатак глатке резидуалне површи која надограђује систематске ефекте унутар референтних оквира за територију Р. Србије као и преостале грешке дуготаласне карактеристике модела гравиметријског квазигеоида. Рачунање гравиметријског модела је урађено методом **LSMSA** (**КТН** методом) користећи за оно време потпуно нов сателитски глобални геопотенцијални модел **GOCO02S**, који је добијен на основу података из **GOCE** и других сателитских мисија (Goiginger, et al., 2011).

Коначно, „просечне“ аномалије убрзања силе Земљине теже из **EGM2008** на правилном гриду  $5' \times 5'$  су коришћене за добијање информација о високо фреквентним аномалијама убрзања за територије суседних држава где нису доступни подаци из мерењима убрзања силе Земљине теже (тј. резултати гравиметријских мерења).

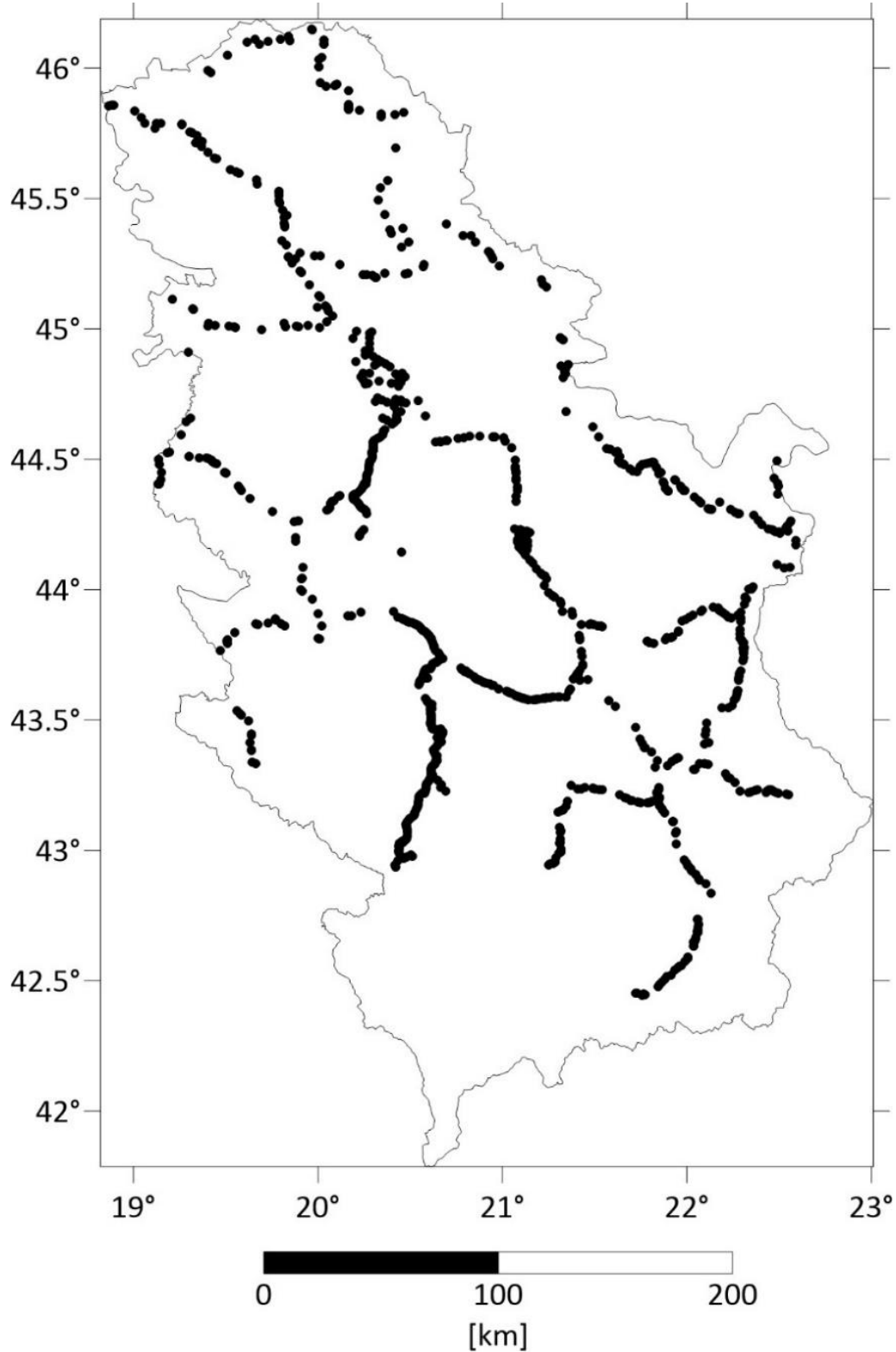
Такође је спроведено истраживање, колико доступни подаци гравиметријских мерења у суседним државама побољшавају резултате унутар територије Р. Србије у поређењу са другом најбољом опцијом а то је коришћење просечних аномалија убрзања из модела **EGM2008** резолуције  $5' \times 5'$  у тим суседним државама.



Слика 7.1: Илустрација квазигеоида SGM2011, (еквидистанција 0,1 m)

### 7.2.2 Нивелманска мрежа високе тачности на територији Р. Србије

У почетној фази моделирања, анализирани су подаци (табела 7.1) са 1001 **GPS/dh** тачке нивелмана високе тачности (слика 7.2). Ове тачке представљају кључне тачке у истраживању и омогућавају детаљан увид у променљиве које се испитују.



Слика 7.2: Просторни распоред *GPS/dh* тачака нивелмана високе тачности на територији Р. Србије



На овим тачкама су доступни следећи подаци (табела 7.1):

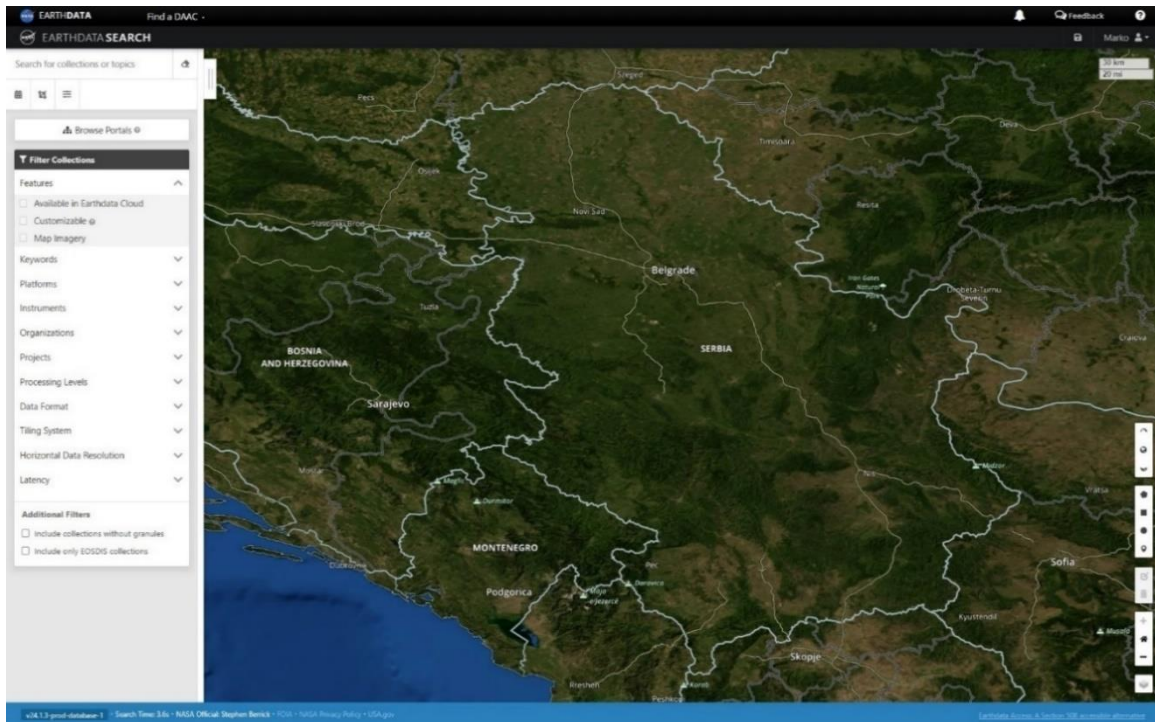
- $(B_i, L_i)$  - геодетска латитуда и лонгитуда, респективно,
- $H_i^N$  - нормална висина,
- $h_i^e$  - елипсоидна (геометријска или геодетска) висина,
- $\zeta_i^{GPS/dh}$  - аномалија висине одређена **GPS/dh** методом и
- $\zeta_i^{SQM2011}$  - аномалија висине квазигеоида **SQM2011**.

Табела 7.1: Пример података преузетих од РГЗ-а за прве три од 1001 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности

$i$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$H^N$ [m]	$\zeta^{GPS/dh}$ [m]	$\zeta^{SQM2011}$ [m]
1	PP-274	43,433	20,659	423,374	377,728	45,646	45,745
2	SP-496	44,358	21,073	138,528	94,600	43,928	44,026
3	PP-124	44,590	20,821	154,834	111,059	43,775	43,872
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Уз претходно наведене податке, на истим тачкама у поступку моделирања укупне аномалије висине израчунате су њене карактеристике (табела 7.2):

- $\zeta_i^{EGM2008}$  - дуготаласна карактеристика одређена из **EGM2008** са уразмеравањем, *tide free* од степена и реда 0,
- $\zeta_i^{RTM}$  - краткоталасна карактеристика одређена из **RTM**, при чему је **RTM** срачунат у односу на **DTM** добијен из **SRTM** (слика 7.3) и
- $EK_i$  - елипсоидна корекција одређена у односу на **GRS80**.



Слика 7.3: DTM за Р. Србију преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024)

Табела 7.2: Моделиране вредности за прве три од 1001 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у Р. Србији

$i$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta_{\text{tide free}}^{EGM 2008}$ од 0 са узрамерањем [m]	$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$ [m]	$EK$ [m]
1	PP-274	43,433	20,659	45,563	0,254	-0,032
2	SP-496	44,358	21,073	43,989	0,065	-0,034
3	PP-124	44,590	20,821	43,855	0,065	-0,035
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

У табели 7.3 приказани су основни статистички подаци за аномалију висине измерену GPS/dh методом, аномалију висине у односу на референтни квазигеоид **SQG2011**, вредности моделираних карактеристика и елипсоидну корекцију.

Табела 7.3: Основни статистички подаци моделираних вредности на 1001 GPS/dh тачки нивелмана високе тачности у Р. Србији

вредност	$min$ [m]	$max$ [m]	$average$ [m]	$range$ [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta^{GPS/dh}$	42,330	46,414	44,642	4,084	0,852
$\zeta^{SQM 2011}$	42,306	46,378	44,623	4,072	0,852
$\zeta_{\text{tide free}}^{EGM 2008}$	42,294	46,209	44,524	3,915	0,805
$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$	-0,025	0,310	0,110	0,335	0,068
$EK$	-0,028	-0,041	-0,034	0,013	0,003

## 7.3 ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА РЕГИОН ОВЕРЊА (Р. ФРАНЦУСКА)

### 7.3.1 Геоид ITUGRG2021

Гравиметријски модел геоида **Auvergne-ITUGRG2021** или краће **ITUGRG2021** (слика 7.4) је израчунат за шире подручје региона Оверња, које је одабрано као циљно подручје за тествање различитих рачунских метода одређивања геоида и квазигеоида у оквиру **EGGP** пројекта (**EGGP – European Gravity and Geoid Project**).

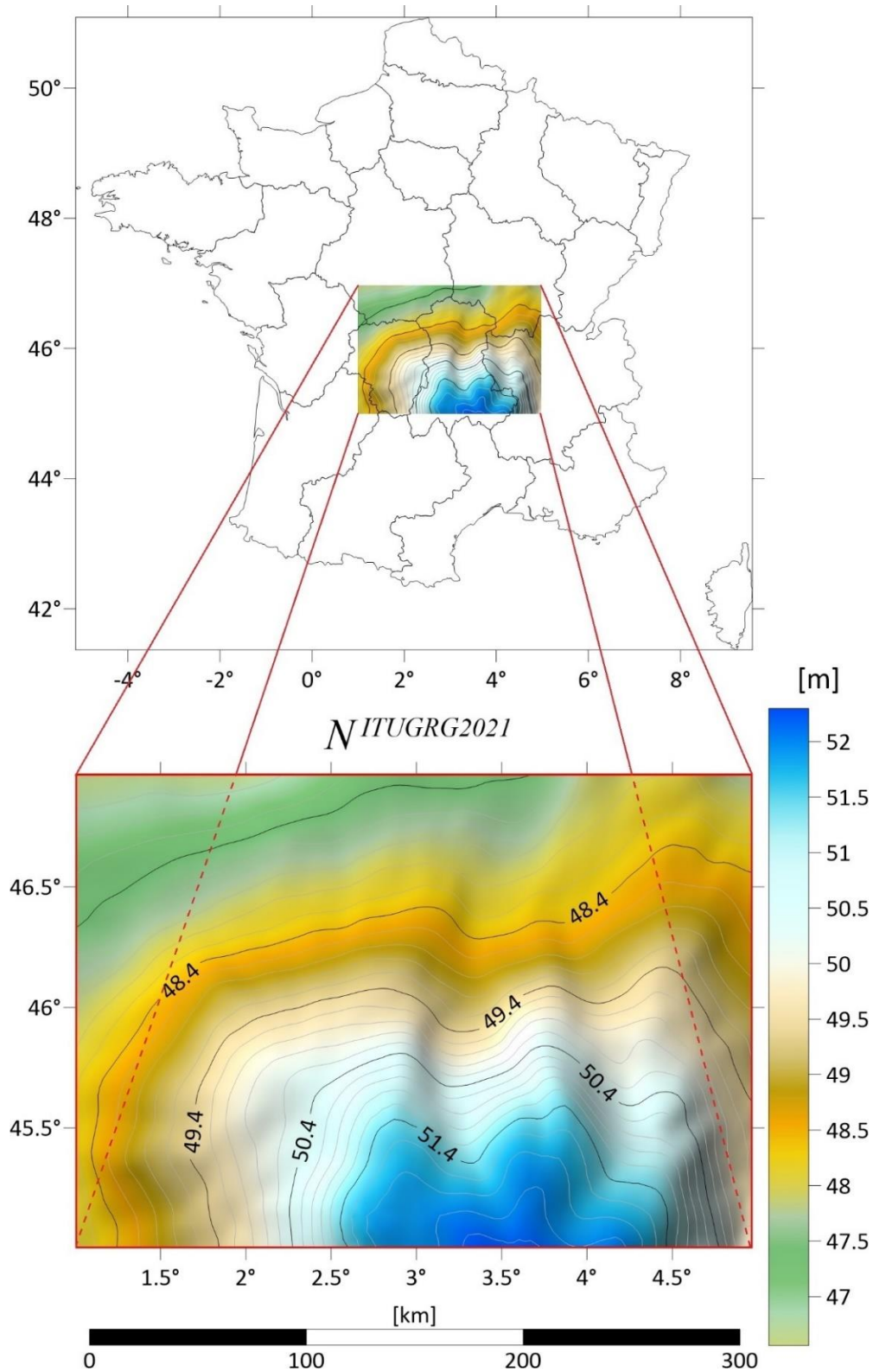
Овим моделом обухваћено је подручје између латитуда  $45^{\circ}N \leq B \leq 47^{\circ}N$  и лонгитуда  $1^{\circ}E \leq L \leq 5^{\circ}E$  при чему је резолуција модела  $2' \times 2'$ . Модел је срачунат применом **МНК** модификоване Хотинеове интегралне функције са радијусом интеграције од  $0,5^{\circ}$  и са додатним корекцијама из **LSMHA** методе. У рачунању и евалуацији овог геоида величине  $2^{\circ} \times 3^{\circ}$  коришћен је скуп података који је објавио Француски Национални географски институт (**IGN – Institut Géographique National**), на захтев управног одбора Европског пројекта за гравитацију и геоид (**EGGP**).

Тај скуп података се састоји од:

- 75 GPS/dh референтних тачака за потребе валидације израчунатог модела (табела 7.4),

## 7. Нумеричка истраживања

- 244009 гравиметријских тачака на којима су урађена гравиметријска мерења са тачношћу од 1 mGal до 2 mGal (табела 7.5) и
- дигитални модел терена (табела 7.6).



Слика 7.4: Илустрација геоида ITUGRG2021, (еквидистанција 0,2 m)

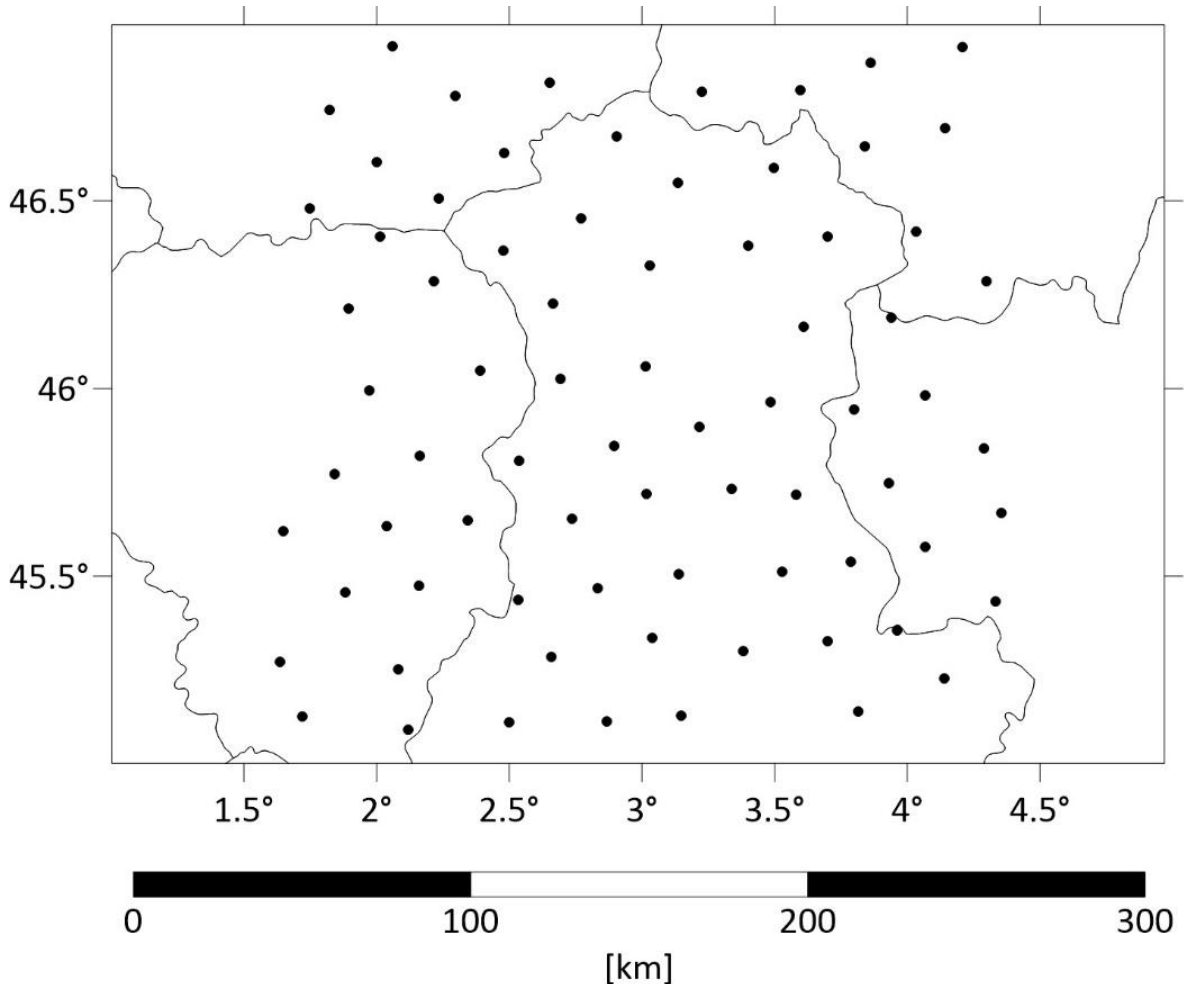
Такође, у рачунању је коришћен и глобални геопотенцијални модел **XGM2016** до степена и реда 500. Као резултат спољашње провере (*external checking*), добијена је тачност израчунатог модела од 3,8 cm, која је додатно побољшана на 2,7 cm након прилагођавања модела посредством четворопараметарске трансформације.

Подаци који су коришћени у истраживању, преузети са сајта **ISG**, где је назначено да је могуће преузимање модела пре прилагођавања, чија је тачност 3,8 cm. Модел је доступан на следећем линку:

[https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/France/auvergne2021\\_g.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/France/auvergne2021_g.html)

### 7.3.2 Нивелманска мрежа високе тачности на територији региона Оверња

Регион Оверња обухвата 75 **GPS/dh** тачака нивелмана високе тачности (слика 7.5), које су равномерно распоређене на његовој територији. Подаци са ових тачака су израчунати у оквиру пројекта *Auvergne Test*.



Слика 7.5: Просторни распоред GPS/dh тачака нивелманске мреже високе тачности на територији региона Оверња

Подаци о овом пројекту доступни су на следећем линку:

[https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/Auvergne\\_test.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/Auvergne_test.html)

7. Нумеричка истраживања

Информације о подацима из овог пројекта су представљене у следеће три табеле (7.4, 7.5 и 7.6). Такође, у свакој од табела је наведен наслов и формат датотеке која садржи дотичне податке.

Табела 7.4: Мрежа нивелманских тачка са GPS/dh мерењима, (ISG пројект „Auvergne Test“)

Levelled GPS points		
Назив датотеке:	<b>GPS_LEV.PTS</b>	
Опис садржаја:	<b>GPS/dh</b> тачке из „Основне мреже Француске“ ( <i>Réseau de Base en France</i> ) и такозваног скупа података „ <b>NIVAG</b> “. Укупан број тачака је 75.	
Географске границе:	$45^{\circ} \leq B \leq 47^{\circ}$	$1,5^{\circ} \leq L \leq 4,5^{\circ}$
Формат датотеке:	text ASCII датотека која садржи: латитуду [°] и лонгитуду [°] у референтном систему <b>RGF93/ETRS89</b> , нормалну висину [m] у референтном систему <b>NGF-IGN69</b> и елипсоидну висину [m] у референтном систему <b>RGF93/ETRS89</b> .	

Табела 7.5: Тачке терестричких гравиметријских мерења, (ISG пројект „Auvergne Test“)

Gravity points		
Назив датотеке:	<b>GRAVI_V3.PTS</b>	
Опис садржаја:	Гравиметријске тачке из <b>BGI</b> базе података, са оцењеном тачношћу од 0,25 mGal до 0,75 mGal. Укупан број тачака је 244009.	
Географске границе:	$43^{\circ} \leq B \leq 49^{\circ}$	$-1^{\circ} \leq L \leq 7^{\circ}$
Формат датотеке:	text ASCII датотека која садржи: латитуду [°] и лонгитуду [°] у референтном систему <b>RGF93/ETRS89</b> , нормалну висину [m] у референтном систему <b>NGF-IGN69 (Potsdam + 1930)</b> , ортометријску висину [m] у референтном систему <b>NGF-IGN69 (IGSN71)</b> , елипсоидну висину [m] у референтном систему <b>RGF93/ETRS89</b> , вредности убрзања силе Земљине теже [ $m \cdot s^{-2}$ ] у референтном ситему <b>IGSN71</b> и вредности аномалија слободног ваздуха [mGal] у референтном систему <b>IGSN71, GRS80, NGF-IGN69</b> .	

Табела 7.6: Дигитални модел терена, (ISG пројект „Auvergne Test“)

Digital terrain model			
Назив датотеке:	<b>H_MSL_CGIAR_V3.DTM</b>		
Опис садржаја:	Дигитални модел терена (висина изнад модела геоида <b>EGM96</b> ) на основу <b>SRTM USGS</b>		
Географске границе:	$42^{\circ} \leq B \leq 50^{\circ}$	$-2^{\circ} \leq L \leq 8^{\circ}$	
Формат датотеке:	text ASCII		
Садржај датотеке			
Ред			јединице
1. ред	min_latitude ( $B_{min}$ )	max_latitude ( $B_{max}$ )	[°]
2. ред	min_longitude ( $L_{min}$ )	max_longitude ( $L_{max}$ )	[°]
3. ред	latitude_spacing ( $\Delta B$ )	longitude_spacing ( $\Delta L$ )	[°]
Област DTM-а:	Висине су представљене од севера ка југу за сваку латитуду и од запада ка истоку (лонгитуде варирају брже).		
Јединице:	[m]		
Логички формат:	9601 ред	12001 колона	
Физички формат:	9601 блок (1200 редова са 10 вредности + 1 ред са 1 вредношћу + 1 празан ред) вредности су цели бројеви, кодирани са 5 цифара раздвојених једним размаком.		

На 75 **GPS/dh** тачака нивелмана високе тачности (табела 7.7) за потребе иницијалних рачунања, издвајају се следећи подаци:

7. Нумеричка истраживања

- $(B_j, L_j)$  - геодетска латитуда и лонгитуда, респективно,
- $H_j^N$  - нормална висина,
- $h_j^e$  - елипсоидна (геометријска или геодетска) висина,
- $\zeta_j^{GPS/dh}$  - аномалија висине одређена **GPS/dh** методом и
- $N_j^{ITUGRG2021}$  - ундулација геоида **ITUGRG2021**.

Табела 7.7: Пример података преузетих од ISG-а за прве три од 75 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у региону Оверња

$j$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$H^N$ [m]	$\zeta^{GPS/dh}$ [m]	$N^{ITUGRG2021}$ [m]
1	10	45,125	1,720	398,157	348,853	49,3039	49,262
2	21	46,213	1,896	357,468	309,021	48,4467	48,407
3	26	46,742	1,824	162,504	115,332	47,1716	47,192
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

На истим тачкама у поступку моделирања срачунате су (табеле 7.8 и 7.9):

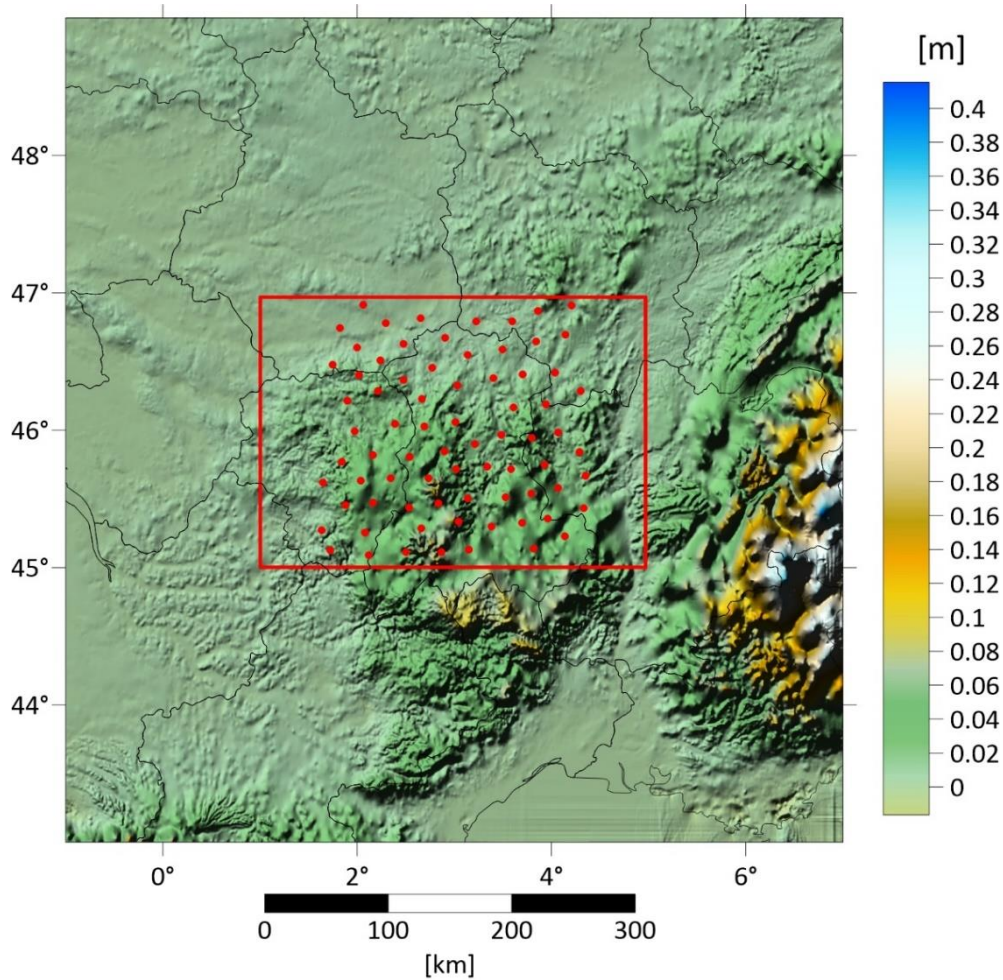
- $\zeta_j - N_j$  - разлике између аномалије висине и ундулације преко Бугеове аномалије (слика 7.6),
- $\zeta_j^{ITUGRG2021}$  - аномалија висине (**ITUGRG2021**) преко Бугеове аномалије,
- $\zeta_j^{EGM2008}$  - дуготаласна карактеристика одређена из **EGM2008** са уразмеравањем, *tide free* од степена и реда 0,
- $\zeta_j^{RTM}$  - краткоталасна карактеристика одређена из **RTM**, при чему је **RTM** срачунат у односу на **DTM** добијен из **SRTM**-а (слика 7.7) и
- $EK_j$  - елипсоидна корекција у односу на **GRS80**.

Табела 7.8: Пример **ITUGRG2021** аномалија висине за прве три од 75 GPS/dh тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња

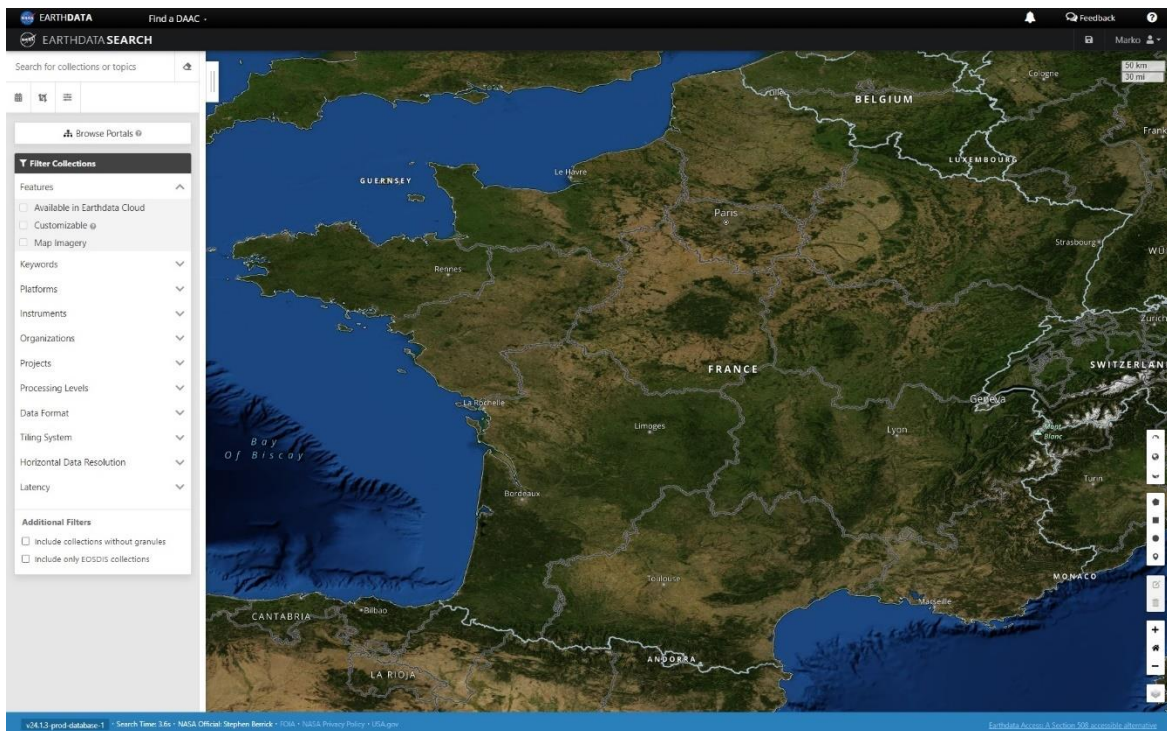
$j$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta - N$ [m]	$\zeta^{ITUGRG2021}$ [m]
1	10	45,125	1,720	0,013	49,276
2	21	46,213	1,896	0,013	48,420
3	26	46,742	1,824	0,003	47,195
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.6: Карта разлика аномалија висине и ундулација преко Бугеове аномалије: регион Оверња



Слика 7.7: DTM за Р. Француску преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024)

Табела 7.9: Моделиране вредности за прве три од 75 GPS/dh тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња

$j$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta_{tide\ free}^{EGM\ 2008}$ од 0 са узрамеравањем [m]	$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$ [m]	$EK$ [m]
1	10	45,125	1,720	49,406	0,089	-0,042
2	21	46,213	1,896	48,521	0,107	-0,046
3	26	46,742	1,824	47,283	0,058	-0,047
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

У табели 7.10 приказани су основни статистички подаци за Бугеову аномалију, аномалију висине измерену **GPS/dh** методом, ундулацију геоида **ITUGRG2021**, аномалију висине срачунату из вредности ундулације геоида **ITUGRG2021**, вредности моделираних карактеристика и елипсоидну корекцију.

Табела 7.10: Основни статистички подаци моделираних вредности на 75 GPS/dh тачка нивелмана високе тачности у региону Оверња

вредност	$min$ [m]	$max$ [m]	$average$ [m]	$range$ [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta-N$	0,001	0,069	0,023	0,068	0,015
$\zeta^{GPS/dh}$	46,774	52,147	49,550	5,374	1,473
$N^{ITUGRG2021}$	46,824	52,007	49,496	5,183	1,429
$\zeta^{ITUGRG2021}$	46,829	52,057	49,519	5,228	1,442
$\zeta_{tide\ free}^{EGM\ 2008}$	46,908	52,236	49,641	5,329	1,469
$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$	0,013	0,191	0,098	0,178	0,039
$EK$	-0,048	-0,042	-0,046	0,006	0,001

## 7.4 ЈАВНО ДОСТУПНИ ПОДАЦИ ЗА ДРЖАВУ КОЛОРАДО (САД)

### 7.4.1 Квазигеоид ColFFTWG2020

Квазигеоид **ColFFTWG2020** (слика 7.8) је део експеримента познатог као „*The 1 cm geoid experiment*“ или „*Colorado experiment*“, који је развијен за делове Колорада и Новог Мексика. Овај квазигеоид представља једно од петнаест варијанти решења које је развијала једна од четрнаест међународних истраживачких група за наведено подручје. Главни циљ експеримента је био да се постигне тачност од 1 cm у рачунању геоида на територији Колорада. Он се састојао од процене и упоређивања вредности ундулације, аномалије висине и потенцијала користећи исте улазне податке, али применом различитих методологија за моделирање гравитационог поља и површи геоида и квазигеоида.

Улазни подаци за овај експеримент обухватају област од око 500 km × 800 km у Колораду и укључују:

- податке о убрзању силе Земљине теже прикупљене терестричким и аеромерењима,
- дигитални модел терена и



- **GNSS/dh** податке.

Са овим подацима, четрнаест група из четрнаест земаља израчунало је и дало оцене гравитационог поља користећи сопствене методологије и софтвере. Након првог покушаја и две итерације, свака група је дефинисала моделе геоида и квазигеоида резолуције  $1' \times 1'$  за целу област укључујући вредности ундулација, аномалија висине и вредности геопотенцијала на 223 референтне тачке влака **GSVS17** (*Geoid Slope Validation Survey 2017*).

Методологије примењене у овом експерименту, поређење резултата и главни закључци детаљно су представљени у посебном издању „*Reference Systems in Physical Geodesy*“ часописа „*Journal of Geodesy*“. Основни закључци експеримента могу се пронаћи и на сајту:

[https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado\\_experiment.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado_experiment.html).

а модел квазигеоида **ColFFTWG2020** је доступан на линку:

[https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/America/USA/Colorado20FFTWG\\_g.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/America/USA/Colorado20FFTWG_g.html)

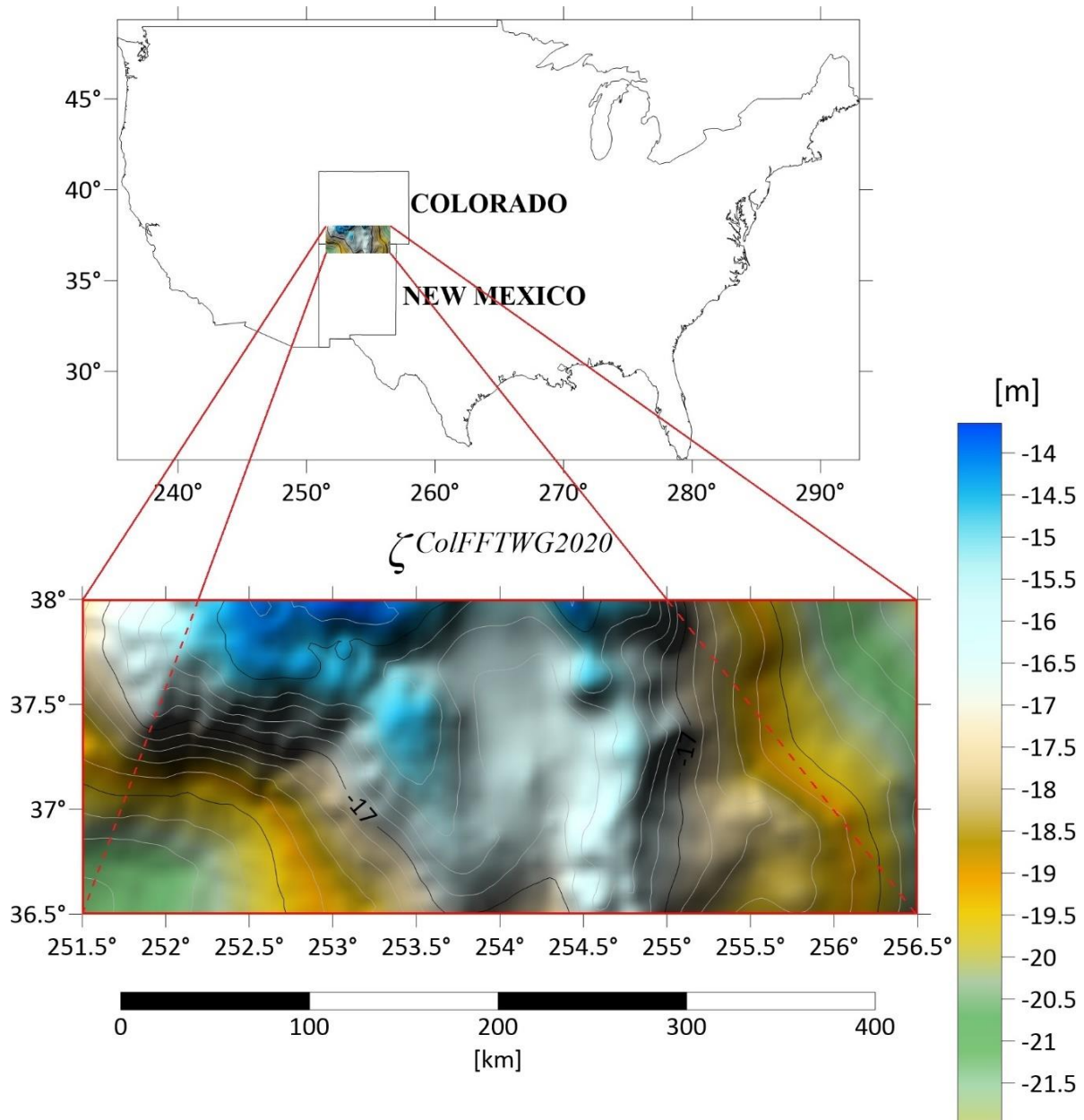
односно на линку:

<https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/America/USA/public/ColoradoExperiment-QuasiGeoid-FFTWG.txt>

Треба нагласити да су под називом **ColFFTWG2020** упоредно развијени модели геоида и квазигеоида. Они представљају два гравиметријска модела који су изрчунати у Лабораторији за изучавање и примену гравитационог поља – Аристотелов универзитет у Солуну (*Laboratory of Gravity Field Research and Applications, Aristotle University of Thessaloniki*). Оба модела су креирна у склопу међународног удружења **IAG** (*International Association of Geodesy*), кроз Заједничку радну групу 2.2.2 под називом већ поменутог експеримента „*The 1 cm geoid experiment*“ тј. „*Colorado experiment*“.

Подручје обухваћено моделима је  $108,5^{\circ}E \leq L \leq 103,5^{\circ}E$ ,  $36,5^{\circ}N \leq B \leq 38^{\circ}N$  са резолуцијом грида  $2' \times 2'$ . Прорачуни су засновани на **RCR** техници користећи **XGM2016** као референтну површ. Топографски утицаји су обрађени коришћењем резидуалне теренске корекције или **RTC** (*Residual Terrain Correction*) корекције решавајући проблем спектралног филтера **RTC**-а користећи моделе **Earth2014** и **ERTM2160**. Улазни подаци о убрзању силе земљине теже су резултати терестричких и аеро мерења који су комбиновани помоћу **MHC** колокације (*Least-Squares Collocation – LSC*).

Коначна процена је урађена помоћу 1D Брзе Фуријеове трансформације (*1D Fast Fourier Transform – 1D FFT*) са *Wong-Gore* модификацијом *Stokes kernel*-а. Просечна тачност модела, када се упореде са **GSVS17 GPS/dh**, износила је око 2,5 cm.



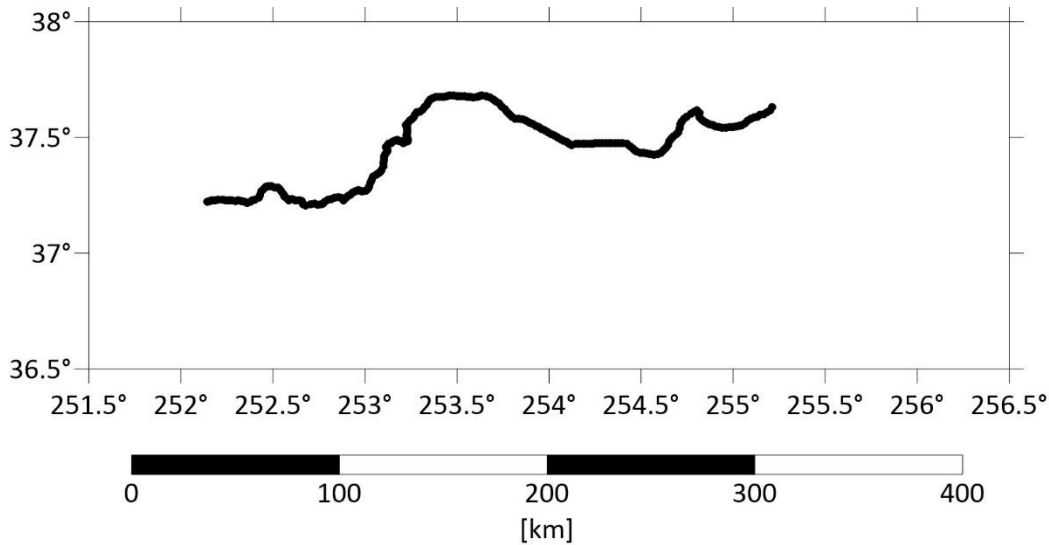
Слика 7.8: Илустрација квазигеоида  $\zeta_{ColFFTWG2020}$ , (еквидистанција 0,5 m)

#### 7.4.2 Нивелманска мрежа високе тачности на територији државе Колорадо

У случају државе Колорадо, просторни распоред коришћених тачака у експерименту је специфичан, за разлику од претходна два подручја. Тачке су неравномерно распоређене и густо груписане у облику низа, односно уметнутог нивелманског влака (слика 7.9).

Овакав распоред представља изазов у процесу предикције тј. интерполације, што је наметнуло потребу за развојем специфичног начина спољашње провере резултата. Такав посебан начин провере у оквиру предложене методологије је развијен са циљем превазилажења проблема неравномерног распореда **GPS/dh** тачака и обезбеђивања ефикасне интерполације података.

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.9: Просторни распоред GPS/dh тачака нивелманске мреже високе тачности на територији Колорада

Подаци и релевантне информације о пројекту „Colorado Experiment“ доступни су на веб страници:

[https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado\\_experiment.html](https://www.isgeoid.polimi.it/Projects/colorado_experiment.html)

а детаљни опис и формати датотека у којима су сачувани, као и друге релевантне информације, налазе се у наредних шест табела (7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 и 7.16).

Табела 7.11: Тачке терестрички гравиметријских мерења, (ISG пројект „Colorado Experiment“)

Terrestrial Gravity Dataset	
Назив датотеке:	<b>Colorado_gravity_data.dat</b>
Опис садржаја:	Датотека садржи скуп тачака са резултатима терестричких мерења убрзања силе Земљине теже, који су извучени из <b>NGA/NGS</b> скупа података. Ово је исправљени скуп података. Укупан број тачака износи 59303.
Географске границе:	$35^{\circ}\text{N} \leq B \leq 40^{\circ}\text{N}$ $250^{\circ}\text{E} \leq L \leq 258^{\circ}\text{E}$
Формат датотеке:	ASCII са колонама у којима су: латитуда [°], лонгитуда [°], ортометријска висина (у односу на средњи ниво мора) [m], убрзање силе Земљине теже [mGal], ID мерења, година.

Табела 7.12: GRAV-D вредности убрзања силе Земљине теже одређене из ваздуха, (ISG пројект „Colorado Experiment“)

GRAV-D Airborne Gravity Dataset	
Назив датотеке:	<b>GRAVD_ms05_median_debiased_1hz.txt</b>
Опис садржаја:	Низ тачака на којима је измерено убрзање силе Земљине теже из ваздуха, засновано на мерењима <b>GRAV-D</b> у блоку <b>MS05 (GRAV-D Data Block MS05)</b> . Овај скуп података је прошао процес уклањања тренда коришћењем технике максималне вредности медијана, а затим је поново узоркован на стопу од 1 Hz. Укупан број тачака износи 283716.
Географске границе:	$34,5^{\circ}\text{N} \leq B \leq 38,9^{\circ}\text{N}$ $250,8^{\circ}\text{E} \leq L \leq 258,7^{\circ}\text{E}$
Формат датотеке:	ASCII са колонама у којима су: блок, линија, време [YYYYMMDDHHMMSS.SSS], латитуда [°], лонгитуда [°], елипсоидна висина [m] и убрзање силе Земљине теже [mGal]. Координате су у <b>IGS08</b> систему, а елипсоидне висине се односе на референц елипсоид <b>GRS80</b> .

Табела 7.13: Дигитални модел терена, (ISG пројект „Colorado Experiment“)

Digital Elevation Model (DEM)	
Назив датотеке:	<b>Colorado_dem.grd</b>
Опис садржаја:	Грид датотека са топографским висинама које су засноване на <b>SRTM v4.1</b> скупу података са веб странице: <a href="https://srtm.csi.cgiar.org/srtmdata/">https://srtm.csi.cgiar.org/srtmdata/</a>
Географске границе:	$35^{\circ}\text{N} \leq \text{B} \leq 38,6^{\circ}\text{N}$ $250^{\circ}\text{E} \leq \text{L} \leq 258^{\circ}\text{E}$
Формат датотеке:	<b>DTU/GRAVSOF</b> T grid format with center cell registration. Текстуална датотека се чита од севера ка југу и од запада ка истоку (први ред има вредност латитуде $40^{\circ}\text{N}$ , у оквиру ког се лонгитуда мења од $250^{\circ}$ до $258^{\circ}$ ).

Табела 7.14: Глобални геопотенцијални модел, (ISG пројект „Colorado Experiment“)

Global Gravity Model (GGM)	
Назив датотеке:	<b>xGEOID17RefB.gfc</b>
Опис садржаја:	Сфернохармонијски коефицијенти потенцијала убрзања силе земљине теже, обезбеђени од стране <b>NGS (National Geodetic Survey)</b> .
Формат датотеке:	<b>ICGEM ASCII</b> format (.gfc) са колонама: кључне речи, степен (degree) n, ред (order) m, косинусни коефицијент $C_{nm}$ , синусни коефицијент $S_{nm}$

Табела 7.15: Подаци за оцену на територији државе Колорадо – историјски скуп GPS/dh података

Validation data over Colorado, USA – Historical GPS/Leveling Dataset	
Назив датотеке:	<b>Colorado_GPSBM_v2.2_08Feb18.txt</b>
Географске границе:	$35^{\circ}\text{N} \leq \text{B} \leq 40^{\circ}\text{N}$ $250^{\circ}\text{E} \leq \text{L} \leq 258^{\circ}\text{E}$
Опис садржаја:	Датотека са подацима добијеним помоћу GPS/dh методе за територију Колорада и околних савезних држава. Укупан број репера је 509, од којих 467 припада Интегрисаној бази података Националне геодетске службе ( <b>NGS Integrated Database (IDB)</b> ), а 42 припада <b>NGS OPUS-Share Tool</b> на веб страници <a href="https://www.ngs.noaa.gov/OPUS/">https://www.ngs.noaa.gov/OPUS/</a> Редак просторни распоред репера је последица планинске топографије, а очекивана тачност геоида износи од 4 cm до 5 cm. Оригинални скуп података је из <b>NAD83/NAVD88</b> система, трансформисан у <b>IGS08</b> за потребе овог експеримента.
Формат датотеке:	<b>ASCII</b> датотека са колонама раздвојеним зарезима у којима су: индекс, латитуда [°], лонгитуда [°], <b>IGS08</b> елипсоидна (геодетска) висина [m], <b>NAVD88</b> ортометријска висина [m], PID, савезна држава, ознака.

Табела 7.16: Подаци за оцену на територији државе Колорадо – GSVS17 скуп GPS/dh података

Validation data over Colorado, USA – GSVS17 GPS/Leveling Dataset	
Назив датотеке:	<b>GSVS17_FieldData.xlsx</b>
Географске границе:	$37,2^{\circ}\text{N} \leq \text{B} \leq 37,7^{\circ}\text{N}$ $252,1^{\circ}\text{E} \leq \text{L} \leq 255,5^{\circ}\text{E}$
Опис садржаја:	Датотека тачака са <b>GPS</b> , нивелманским, гравиметријским и астрогеодетским опажањима одступања вертикале, прикупљеним дуж правца од 360 km (од Дуранга до Валсенбурга), са надморским висинама у распону од 1900 m до 3300 m, са размаком између станица од отприлике 1,6 km. Укупан број тачака је 223. Очекивана тачност ундулација геоида износи је око 1,5 cm. За додатне информације читалац се упућује на веб адресу: <a href="https://geodesy.noaa.gov/GEOID/GSVS17/index.shtml">https://geodesy.noaa.gov/GEOID/GSVS17/index.shtml</a>
Формат датотеке:	<b>EXCEL</b> with column descriptions in the table header.

За иницијална рачунавања на 222 **GPS/dh** тачке нивелмана високе тачности коришћени су следећи подаци (табела 7.17):

7. Нумеричка истраживања

- $(B_k, L_k)$  - геодетска латитуда и лонгитуда, респективно,
- $H_k^N$  - нормална висина,
- $h_k^e$  - елипсоидна (геометријска или геодетска) висина,
- $N_k^{GPS/dh}$  - ундулација одређена **GPS/dh** методом,
- $\zeta_k^{ColFFTWG2020}$  - аномалија висине квазигеоида **ColFFTWG2020** и
- $\Delta\zeta_{bias}$  - отклон или одступање у висини између модела и аномалије висине **GSVS17**.

Табела 7.17: Пример података преузетих од ISG-а за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо

$k$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$H^N$ [m]	$N^{GPS/dh}$ [m]	$\zeta^{ColFFTWG2020}$ [m]	$\Delta\zeta_{bias}$ [m]
1	DURANGO_CA	37,223	252,143	1944,08	1964,220	-20,140	-18,686	0,88
2	GSVS_002	37,225	252,156	1982,73	2002,864	-20,134	-18,669	0,88
3	GSVS_003	37,229	252,169	2026,36	2046,475	-20,115	-18,644	0,88
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

На истим тачкама у поступку моделирања срачунате су (табеле 7.18 и 7.19):

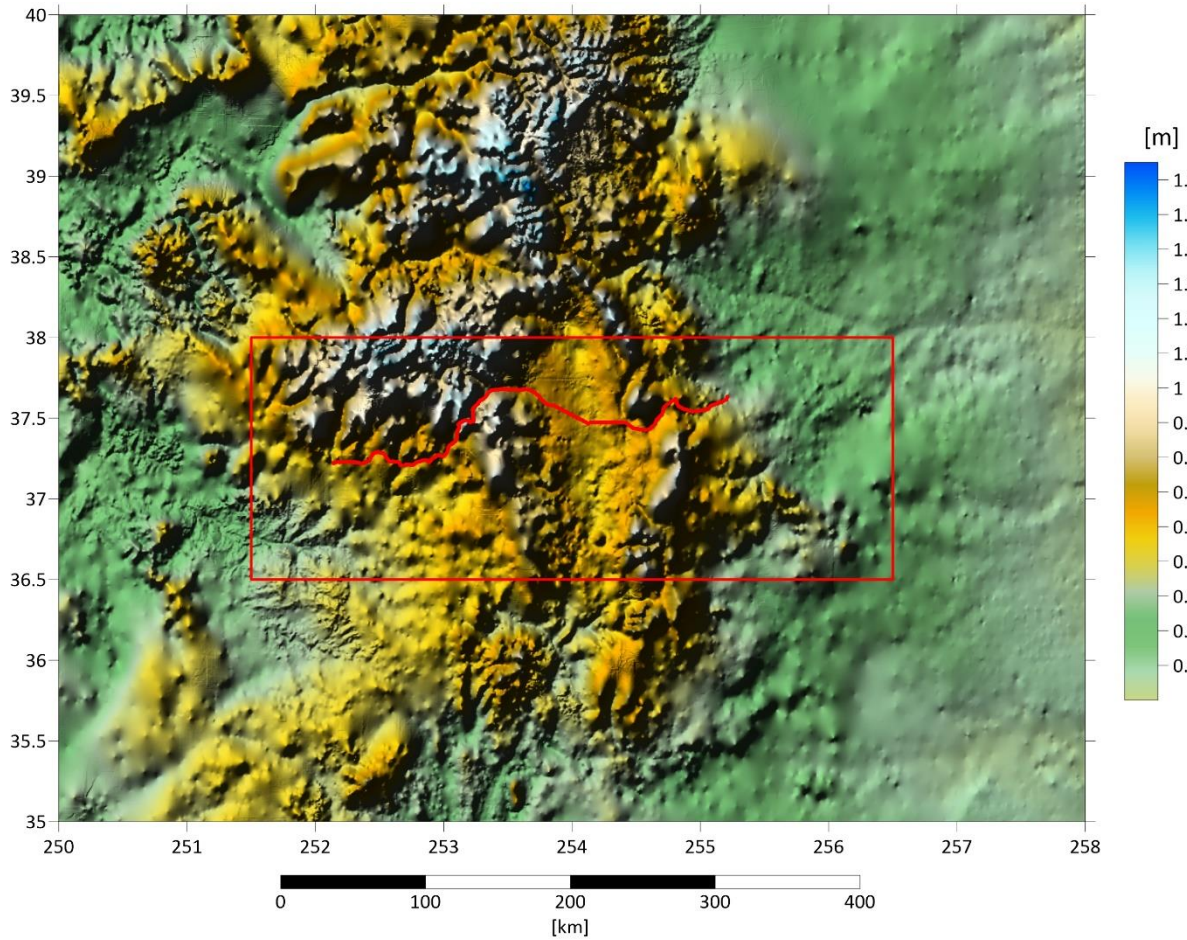
- $\zeta_k - N_k$  - разлике између аномалије висине и ундулације преко Бугеове аномалије (слика 7.10),
- $\zeta_k^{GPS/dh}$  - аномалија висине одређена **GPS/dh** методом,
- $\zeta_k^{EGM2008}$  - дуготаласна карактеристика одређена из **EGM2008** са уразмеравањем, *tide free* од степена и реда 0,
- $\zeta_k^{RTM}$  - краткоталасна карактеристика одређена из **RTM**, при чему је **RTM** срачунат у односу на **DTM** добијен из **SRTM**-а (слика 7.11) и
- $EK_k$  - елипсоидна корекција у односу на **GRS80**.

Табела 7.18: Пример GPS/dh аномалија висине за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо

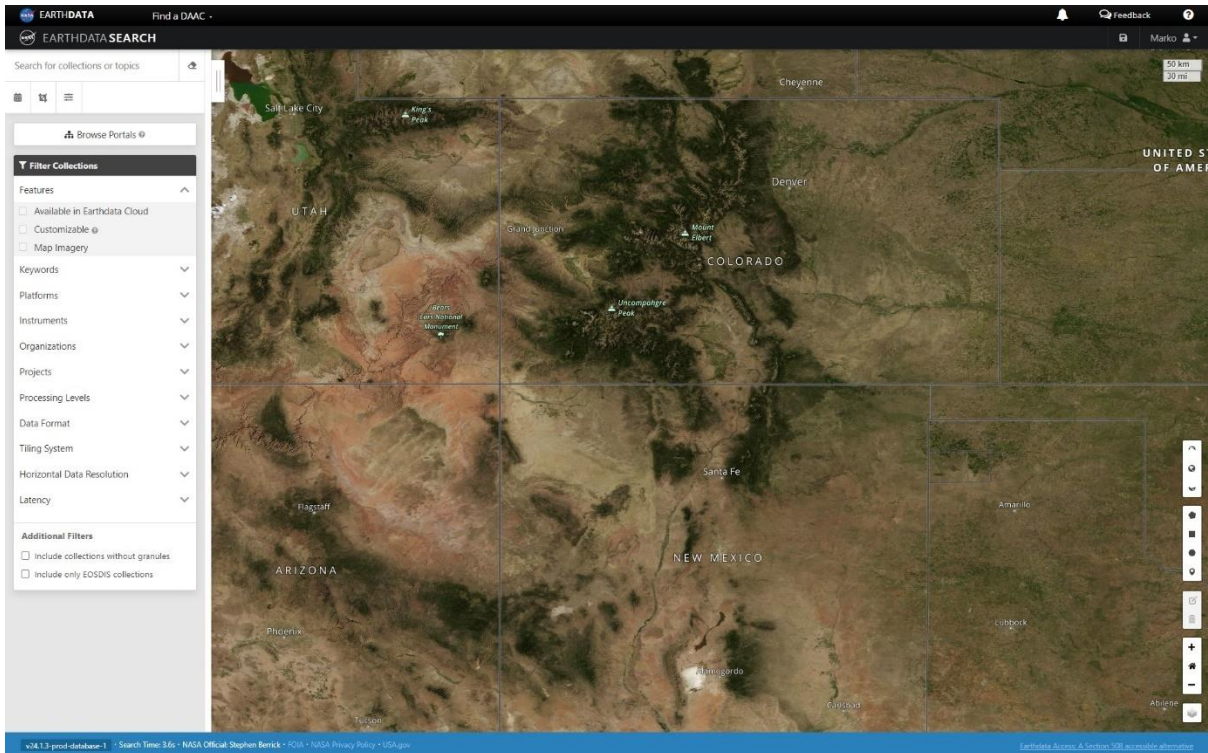
$k$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta - N$ [m]	$\zeta^{GPS/dh}$ [m]
1	DURANGO_CA	37,223	252,143	0,538	-19,601
2	GSVS_002	37,225	252,156	0,552	-19,582
3	GSVS_003	37,229	252,169	0,568	-19,547
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.10: Карта разлика изтеђи аномалија висине и ундулација преко Бугеове аномалије за државу Колорадо са GPS/dh тачкама и границом подручја



Слика 7.11: DTM за државу Колорадо и околину преузет из SRTM (EARTHDATASEARCH, 2024)

## 7. Нумеричка истраживања

Табела 7.19: Моделиране вредности за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо

$k$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta_{\text{tide free}}^{EGM 2008}$ од 0 са узрамеравањем [m]	$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$ [m]	$EK$ [m]
1	DURANGO_CA	37,2227	252,143	-19,470	0,203	0,003
2	GSVS_002	37,2253	252,156	-19,456	0,179	0,003
3	GSVS_003	37,2288	252,169	-19,431	0,201	0,003
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

У табели 7.20 приказани су основни статистички подаци за Бугеову аномалију, ундулацију измерену GPS/dh методом, аномалију висине добијену из вредности GPS/dh ундулације, аномалију висине у односу на референтни квазигеоид **ColFFTWG2020**, вредности моделираних карактеристика и елипсоидну корекцију.

Табела 7.20: Основни статистички подаци моделираних вредности на 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо

вредност	$min$ [m]	$max$ [m]	$average$ [m]	$range$ [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta-N$	0,414	1,031	0,660	0,617	0,118
$N^{GPS/dh}$	-20,140	-16,671	-17,901	3,469	1,031
$\zeta^{GPS/dh}$	-19,601	-15,810	-17,242	3,791	1,106
$\zeta^{ColFFTWG2020}$	-18,686	-14,907	-16,346	3,779	1,109
$\zeta_{\text{tide free}}^{EGM 2008}$	-19,470	-15,528	-17,075	3,941	1,124
$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$	0,078	0,415	0,253	0,337	0,089
$EK$	0,003	0,004	0,003	0,001	0,000

## 7.5 АНАЛИЗА КВАЛИТЕТА ДОСТУПНИХ ПОДАТАКА

### 7.5.1 Нивелман високе тачности и GPS/dh метода

Нивелманске мреже могу значајно утицати на резултате истраживања из различитих разлога:

- **величина мреже:** обим мреже, односно величина изабраног подручја које она покрива, може значајно утицати на резултате услед „нагомилавања“ грешке са повећавањем величине мреже.
- **број епоха мерења и временски интервали:** хомогеност у одређивању делова мреже, као и број и временски периоди између епоха мерења, играју битну улогу у квалитету мреже.
- **дизајн мреже:** одабир распореда тачака мреже, њене величине и размештање тачака у односу на експериментално подручје, као и близина ивица изабраног подручја (ивични ефекти), су такође битни фактори.

Ипак, најпрецизнија метода одређивања физичких висина изнад средњег нивоа мора јесте посредством класичног нивелања (тј. нивелманом високе тачности). Притом,

термин „средњи ниво мора“ овде представља висинску референтну површ (геоид), која је у теоријском смислу проширење морске површи кроз континенте. Међутим, поступак класичног нивелања захтева пуно времена, при чему је практична примењивост додатно оптерећена захтевима развијања и одржавања велике и комплексне инфраструктуре нивелманских мрежа референтних висина на континенталном или државном нивоу. Развијање таквих мрежа за велике територије и територије са изразито неправилном топографијом и високим планинама је захтевна у погледу новца и времена.

У случајевима када таква инфраструктура не постоји, најефикасније решење је **GPS/dh** метода нивелања, за коју је неопходна нивелманска мрежа равномерно распоређених тачака на којима поред нивеланих висина постоје **GNSS** подаци и савремено дефинисан висински датум.

Дакле, **GPS/dh** метода обезбеђује ефикасна и економична решења за потребе одређивања висина и праћења њихових промена. Међутим, поред наведених погодности постоје и два основна ограничења **GPS/dh** методе:

1. тачност висина које су одређене посредством **GNSS** технологије опште намене није боља од 1 cm. Међутим, ова тачност може бити постигнута независно од дужине влака у ком се мери, док је тачност код класичног нивелања обрнуто пропорцијална са увећањем дужине влака. Што значи, да на локалном нивоу могућности ове две методе постају веома сличне;
2. у висинском погледу, резултати **GNSS** мерења су искључиво геометријске висине (тј. елипсоидне висине  $h^e$ ) које су одређене у односу на референтни елипсоид. Оваква ситуација намеће потребу за њиховим претварањем у физичке висине (тј. ортометријске висине  $H^o$ ) које су одређене у односу средњи ниво мора при чему је прецизно познавање геоида (тј. ундулације геоида  $N$ ) од суштинског значаја. Потом се тражена вредност ортометријске висине може једноставно добити као резултат разлике између елипсоидне висине и ундулације геоида. Ипак, иако је геоид резултат комплексног процеса анализа и оцене функционала аномалијског потенцијала, уочавају се неслагања на нивоу дециметарске тачности између гравиметријски одређеног геоида и референтних висина одређених **GPS/dh** методом, што произилази из ограниченог квалитета и доступности терестричких резултата мерења убрзања силе Земљине теже као улазних података, као и разлика у основним референтним моделима и оквирима (Kenyeres, 2016).

### 7.5.2 Глобални геопотенцијални модел EGM2008

Тачност модела **EGM2008** је подложна варијацијама у зависности од различитих фактора, међу којима су нивои тачности доступних података широм света. Конкретно, тачност коришћених података у развоју модела, као што су подаци добијени **GPS/dh** методом, креће се у распону од  $\pm 5$  cm до  $\pm 10$  cm, док су доступне вредности астрогеодетских мерења одступања вертикала на територијама САД и Аустралије у распону од  $\pm 1,1''$  до  $\pm 1,3''$ . Дакле, у различитим деловима света, у зависности од коришћених података у развоју модела, тачност **EGM2008** може варирати, она је приближно у распону од 15 cm до 35 cm и зависи од примењених метода и алгоритама. Овај модел има резолуцију од  $5' \times 5'$  и представља значајан напредак у изучавању



гравитационог поља Земље, пружајући информације високе резолуције и тачности неопходне за различите научне и инжењерске примене (Pavlis, et al., 2012).

### 7.5.3 Дигитални модел терена из SRTM

На основу доступних информација, може се закључити да тачност **SRTM** модела варира у зависности од различитих фактора као што су географска област, методологија процене тачности и коришћени референтни подаци. Ипак, дигитални подаци о висини терена (**DTED**) из мисије **SRTM** сматрају се доста тачним на светском нивоу. Стандардно, постигнута је минимална очекивана тачност висине од 16 m апсолутне грешке са поверењем од 90%. То би значило да је вероватноћа поклапања мерења са стварним тереном једнака 90%. Такође, остварена је средња квадратна грешка (**RMSE**) од 9,73 m (Farr & Kobrick, 2000; Farr, et al., 2007).

Када се упореде различита истраживања, примећује се варијабилност у оценама тачности **SRTM** модела, што указује на комплексност процеса оцењивања и значај регионалних варијација. Ови резултати наглашавају важност пажљиве евалуације тачности модела у специфичним географским контекстима пре него што се користе у различитим применама. Иако **SRTM** модел има одређене грешке у висини, даља истраживања и развој методологија за побољшање тачности могу довести до унапређења. Могуће је применити оптимизацију и корекцију грешака како би се постигла већа прецизност у различитим применама, посебно у областима као што су инжењерски пројекти и топографски премер.

Најбоља могућа тачност **SRTM** модела зависи од више фактора, укључујући квалитет података, методологију обраде података и географске карактеристике региона које се моделује. Према доступним истраживањима (у наставку), тачност **SRTM** модела може варирати у распону од неколико метара, у зависности од услова и региона.

У идеалним условима, са висококвалитетним и прецизним подацима, могуће је постићи тачност **SRTM** модела у границама од око  $\pm 1$  m до  $\pm 2$  m. Међутим, треба имати на уму да овакви идеални услови нису увек доступни, посебно у областима са сложеним географским карактеристикама или ограниченим ресурсима за прикупљање података.

У пракси, тачност **SRTM** модела обично варира у распону од  $\pm 5$  m до  $\pm 10$  m, у зависности од региона и примењених метода. Ови резултати сугеришу да, иако **SRTM** модел пружа корисне информације о висини терена на глобалном нивоу, треба га користити са одговарајућим опрезом и уз разматрање његових ограничења у конкретним применама.

Тачност података из **SRTM** мисије, посебно **CGIAR-CSI SRTM 90 m** дигиталног модела висина (**DEM**), била је предмет оцене у раду (Gorokhovich & Voustianiouk, 2006). Ова евалуација укључивала је упоређивање вредности надморске висине из **CGIAR** датасета са онима прикупљеним **GPS** системом у планинама Катскил (Њујорк, САД) и на острву Пукет (Тајланд). Резултати су показали да апсолутне просечне грешке висине из **CGIAR** датасета варирају. На острву Пукет, грешка је била у распону од  $7,58 \text{ m} \pm 0,60 \text{ m}$ , док је на Катскилу износила  $4,07 \text{ m} \pm 0,47 \text{ m}$  (средња вредност  $\pm$  стандардна грешка мерења). Ове вредности грешке показале су се значајно бољим од стандардне вредности тачности **SRTM** података која је наведена као 16 m. Штавише, студија је открила да су вредности

грешке снажно корелисане са нагибом терена. Може се констатовати да је тачност **CGIAR DEM** производа приметно побољшана за терене са вредностима нагиба већим од  $10^\circ$  када су узети у обзир нагиб и оријентација терена, иако је ово побољшање занемарљиво за терене са вредностима нагиба мањим од  $10^\circ$ .

У истраживању које је урађено у Индији, које је представљено у раду (Mukul, et al., 2017) може се видети да су **CGIAR-CSI SRTM** подаци два до четири пута прецизнији од првобитно постигнуте вредности од 16 m апсолутне грешке **SRTM**. То значи да би тачност **CGIAR-CSI SRTM** података била у распону од 4 m до 8 m апсолутне грешке, што је значајно боље од почетно наведеног стандарда. Овде је такође наведено, да тачност **SRTM** података може варирати у зависности од различитих фактора као што су нагиб и оријентација терена.

Једно од скорашњих истраживања у Ирану, које је објављено у научном раду (Saber, et al., 2023) наводи да је могуће постићи тачност **SRTM** која је оцењена на 4,83 m средње апсолутне грешке (**MAE**). Додатно, предложени модел за побољшање тачности **SRTM DEM** успео је да смањи средњу апсолутну грешку на 0,83 m, односно са почетних 4,83 m на 0,83 m. Ово представља значајно побољшање у тачности **SRTM** модела, што може бити од велике користи у различитим областима где је потребно тачно знање о рељефу терена.

## 7.6 ПРИПРЕМА И ОБРАДА ПОДАТАКА

### 7.6.1 Моделирање аномалија висине на GPS/dh тачкама

Први корак у процесу моделирања је рачунање разлике између аномалија висине и ундулације преко Бугеове аномалије за подручја Оверња и Колорада, по формули:

$$\zeta - N = H^O - H^N, \quad (7.1)$$

одакле следи за аномалију висине:

$$\zeta = N + H^O - H^N. \quad (7.2)$$

За регион Оверња коришћен је званични (референтни) геоид **ITUGRG2021**, док су за државу Колорадо доступне вредности ундулација измерене **GPS/dh** методом на тачкама нивелмана високе прецизности. Ове ундулације је неопходно било трансформисати у аномалије висине.

За регион Оверња, то је урађено применом формуле,

$$\zeta^{\text{ITUGRG2021}} = N^{\text{ITUGRG2021}} + H^O - H^N = N^{\text{ITUGRG2021}} + \zeta - N, \quad (7.3)$$

док је за подручје државе Колорадо коришћена формула,

$$\zeta^{\text{GPS/dh}} = N^{\text{GPS/dh}} + H^O - H^N = N^{\text{GPS/dh}} + \zeta - N. \quad (7.4)$$

Поступак моделирања локалних квазигеоида високе резолуције подразумева рачунање аномалија висине  $\zeta^{\text{LMQG}}$  које описују површ квазигеоида, на **GPS/dh** тачкама локалног подручја. За те потребе, коришћени су подаци:

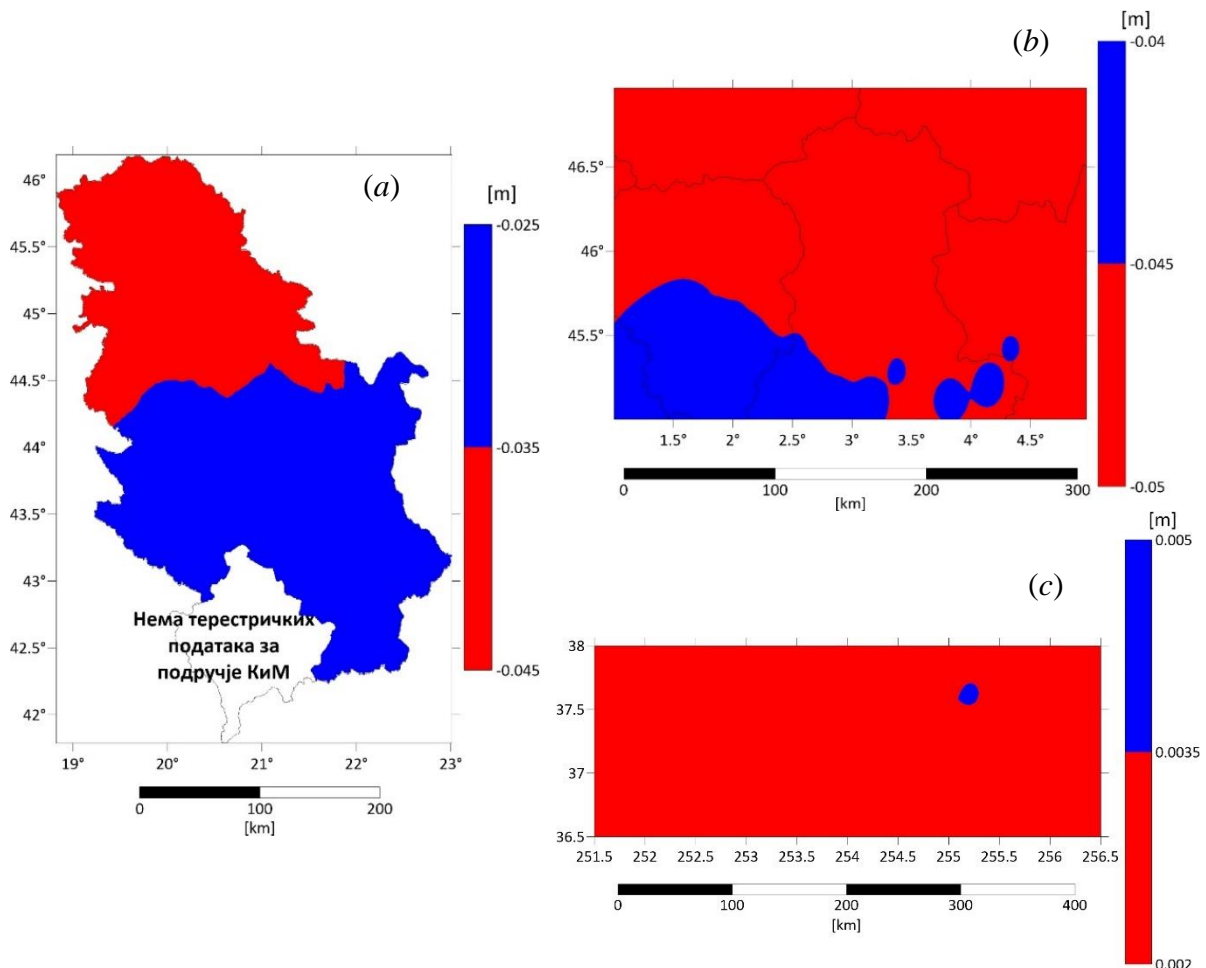
## 7. Нумеричка истраживања

- дуготаласна карактеристика срачуната из коефицијената глобалног геопотенцијалног модела **EGM2008**,
- краткоталасна карактеристика срачуната помоћу резидуалног модела терена **RTM** резолуције  $5' \times 5'$  и
- елипсоидна корекција  $EK$  (јеначина 5.2) срачуната по формули 7.5 у односу на елипсоид **GRS80** (слика 7.12):

$$EK = e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2(B) \right) \zeta = e_{GRS80}^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2(B) \right) (\zeta^{EGM2008} + \zeta^{RTM}), \quad (7.5)$$

где је:

- $e$  – први бројни ексцентрицитет за елипсоид **GRS80**,
- $B$  – геодетска латитуда тачке за коју се рачуна елипсоидна корекција и
- $\zeta$  – аномалија висине израчуната као сума дуготаласне  $\zeta^{EGM2008}$  и краткоталасне  $\zeta^{RTM}$  компоненте на тачки за коју се рачуна елипсоидна корекција  $EK$ .



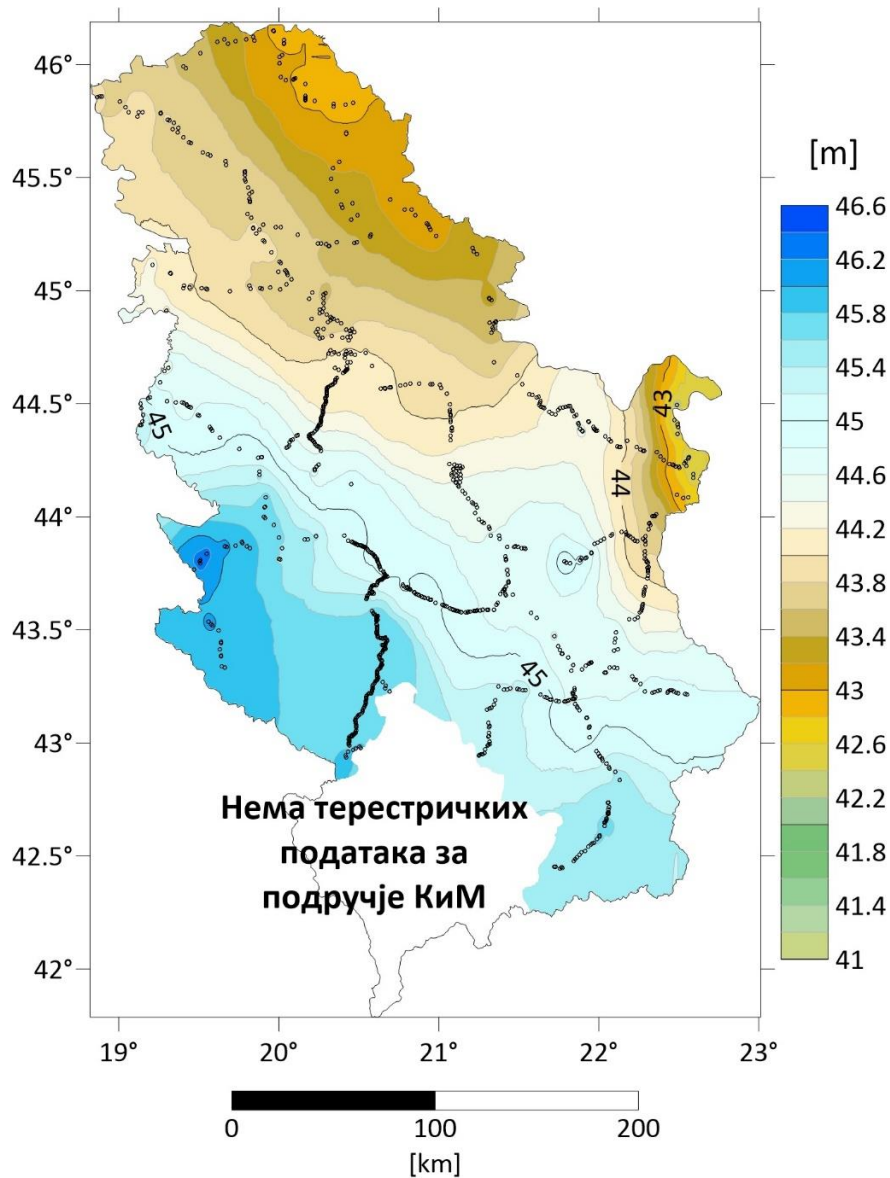
Слика 7.12: Елипсоидна корекција срачуната на тачкама нивелмана високе тачности за (а) Р. Србију, (б) регион Оверња и (с) државу Колорадо

Избор резолуције  $5' \times 5'$  за **RTM** и грида тачака на којима се моделирају локални квазигеоиди у каснијим корацима, је због тога што је то резолуција модела **EGM2008** који је коришћен за одређивање дуготаласне карактеристике.

Укупне вредности аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  на **GPS/dh** тачкама у **првом** и **трећем** начину спољашње провере резултата израчунате су у односу на модел **EGM2008**. Затим су додати утицаји резидуалног модела терена  $\zeta^{RTM}$  резолуције  $5' \times 5'$ , и елипсоидна корекција **EK**. Овим поступком је одређен локални квазигеоид на **GPS/dh** тачкама (слике 7.13, 7.14 и 7.15):

$$\zeta^{LMQG} = \zeta^{EGM2008} + \zeta^{RTM} + EK . \quad (7.6)$$

Ова етапа представља процес моделирања вредности аномалије висине локалног квазигеоида на **GPS/dh** тачкама у првом и трећем начину спољашње провере резултата у методологији (табеле 7.21, 7.22 и 7.23). У **другом** начину спољашње провере резултата **GPS/dh** тачке нису коришћене.

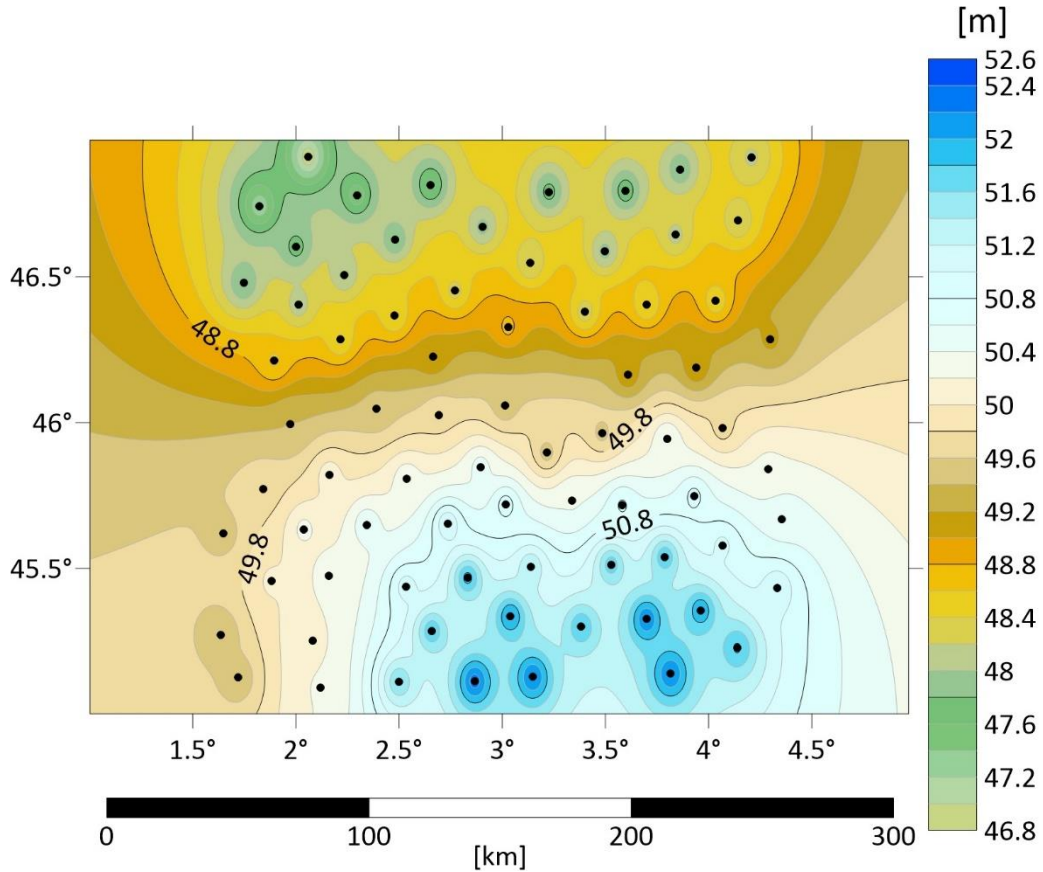


Слика 7.13: Моделирана површ  $LMQG$  на 1001 тачки нивелмана високе тачности – Р. Србија

## 7. Нумеричка истраживања

Табела 7.21: Моделиране вредности  $LMQG$  аномалија висине за прве три од 1001  $GPS/dh$  тачке нивелмана високе тачности у Р. Србији

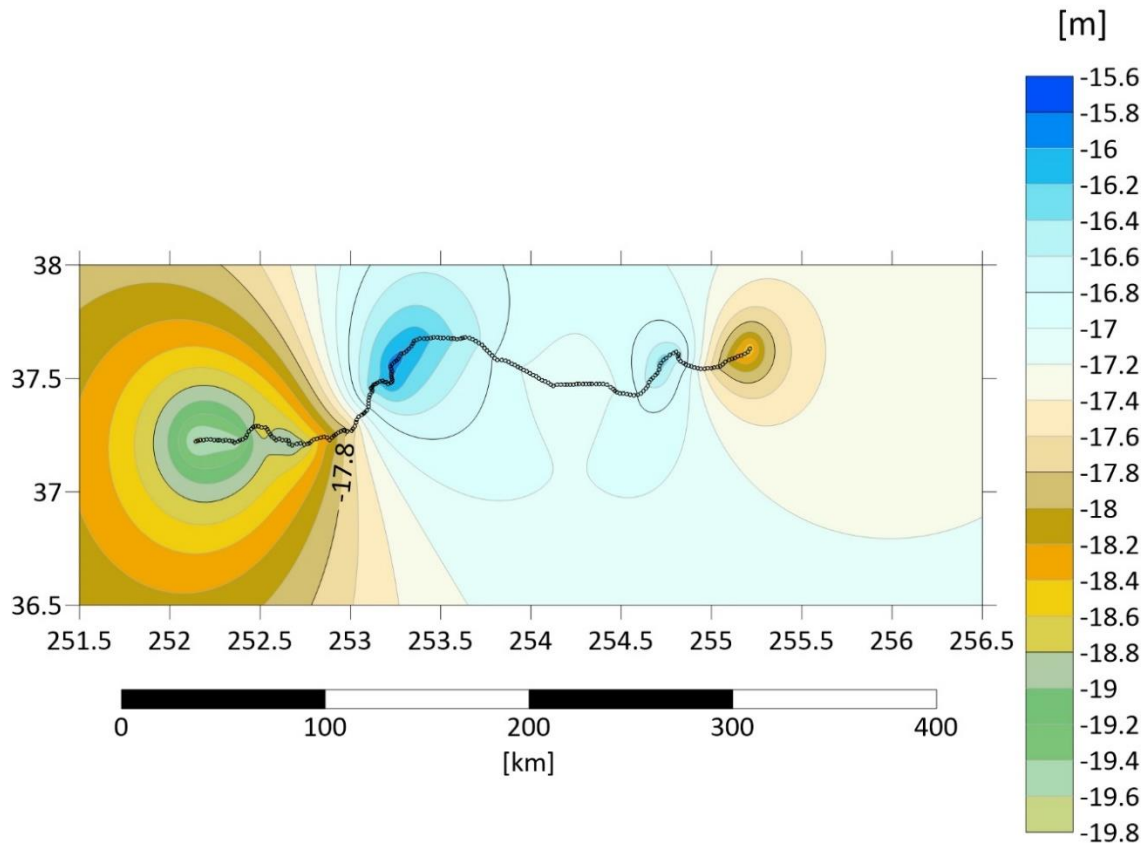
$i$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{LMQG}$ [m]
1	PP-274	43,433	20,659	45,785
2	SP-496	44,358	21,073	44,019
3	PP-124	44,590	20,821	43,885
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



Слика 7.14: Моделирана површ  $LMQG$  на 75 тачака нивелмана високе тачности – регион Оверња

Табела 7.22: Моделиране вредности  $LMQG$  аномалија висине за прве три од 75  $GPS/dh$  тачака нивелмана високе тачности у региону Оверња

$j$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{LMQG}$ [m]
1	10	45,125	1,720	49,452
2	21	46,213	1,896	48,583
3	26	46,742	1,824	47,294
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



Слика 7.15: Моделирана површ LMQG на 222 тачке нивелмана високе тачности – држава Колорадо

Табела 7.23: Моделиране вредности LMQG аномалије висине за прве три од 222 GPS/dh тачке нивелмана високе тачности у држави Колорадо

$k$	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{LMQG}$ [m]
1	DURANGO_CA	37,223	252,143	-19,669
2	GSVS_002	37,225	252,156	-19,632
3	GSVS_003	37,229	252,169	-19,628
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Табела 7.24: Основни статистички подаци моделираних вредности LMQG аномалије висине на тачкама нивелмана високе тачности

Подручје	$\zeta^{LMQG}$	$\zeta_{\min}^{LMQG}$ [m]	$\zeta_{\max}^{LMQG}$ [m]	$\zeta_{\text{average}}^{LMQG}$ [m]	$\sigma_{\zeta^{LMQG}}(\text{stdev})$ [m]
Р. Србија	$\zeta_i^{LMQG}$	42,298	46,287	44,600	0,852
Оверња	$\zeta_j^{LMQG}$	46,903	52,280	49,693	1,501
Колорадо	$\zeta_k^{LMQG}$	-19,669	-15,849	-17,324	1,118

Следећи корак након добијених резултата аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  на GPS/dh тачкама јесте њихова спољашња провера (*external checking*). Затим се приступа поступку интерполације, односно моделирању квазигеоида на целокупним локалним подручјима на пројектованим гридовима резолуције  $5' \times 5'$ . Коначно урађена је спољашња провера резултата на тачкама грида.

Пошто су у оквиру предложене методологије урађена три различита начина спољашње провере резултата у поступку моделирања локалних квазигеоида, било је неопходно дати упоредну анализу њихових статистика, чиме су обухваћени сви релевантни аспекти тачности и поузданости методологије. На овај начин утврђена је стабилност и поновљивост статистика добијених резултата кроз три различита начина спољашње провере, испитујући један од кључних циљева методологије – једнозначност добијених резултата.

Оваква анализа је кључна за даље унапређење и оптимизацију методологије која ће се користити у будућим истраживањима и пројектима.

### 7.6.2 Спољашња провера резултата на GPS/dh тачкама

Након моделирања површи локалног квазигеоида на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности, приступило се рачунању иницијалних резидуала  $t$ .

У првом начину спољашње провере,  $t$  је срачунато као разлика између аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  и  $\zeta^{GPS/dh}$ . Овј поступак пружа детаљни увид у одступању моделираних  $\zeta^{LMQG}$  од мерених („реалних“)  $\zeta^{GPS/dh}$  величина:

$$t = \zeta^{LMQG} - \zeta^{GPS/dh} . \quad (7.7)$$

У трећем начину спољашње провере  $t$  рачуна разликом између аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  и  $\zeta^{RMQG}$ . На овај начин приступило се директном поређењу моделираних **LMQG** и званичних (референтних) **RMQG** вредности аномалија висине у локалним подручјима. Такође је превазиђена потреба за измереним вредностима  $\zeta^{GPS/dh}$  и само су искоришћене тачке нивелмана високе тачности да би се на њима срачунали иницијални резидуали по једначини:

$$t = \zeta^{LMQG} - \zeta^{RMQG} . \quad (7.8)$$

У складу са једначинама 7.7 и 7.8 рачунају се елементи вектора 7.9 и 7.10 респективно, тј. вредности иницијалних резидуала на свакој тачки нивелмана високе тачности у сваком од подручја, у првом,

$$t_{n \times 1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{LMQG} - \zeta_1^{GPS/dh} \\ \vdots \\ \zeta_n^{LMQG} - \zeta_n^{GPS/dh} \end{bmatrix}_{n \times 1} , \quad (7.9)$$

и трећем,

$$t_{n \times 1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{LMQG} - \zeta_1^{RMQG} \\ \vdots \\ \zeta_n^{LMQG} - \zeta_n^{RMQG} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (7.10)$$

где  $n$  представља укупан број **GPS/dh** тачака у зависности од посматраног подручја (за Р. Србију  $n=1001$ , регион Оверња  $n=75$  и државу Колорадо  $n=222$ ).

За прилагођавање/трансформисање површи локалних модела квазигеоида и оцену резидуала  $t$  у сва три експериментална подручја, одабрана је четворопараметарска трансформација:

$$\hat{t} = X_1 + \cos(B)\cos(L)X_2 + \cos(B)\sin(L)X_3 + \sin(B)X_4. \quad (7.11)$$

Ова трансформација је коришћена зато што је погодна када је потребно укључити додатне параметре који се односе на нагињање, ротацију и транслацију израчунатих модела. У контексту површи локалних квазигеоида, примена четворопараметарске трансформације обезбеђује додатну флексибилност за прилагођавање локалним неправилностима (аномалијама) или моделима терена.

Четворопараметарска трансформација (једначина 7.11) за рачунање оцењених резидуала  $\hat{t}$  на тачкама нивелманских мрежа високе тачности примењена је у сва три изабрана подручја. Индекс резидуала, геодетска латитуда и лонгитуда међају се у зависности од подручја и броја тачака нивелманских мрежа високе тачности, за територију:

- Републике Србије:  $i=1, \dots, 1001$ ;
- региона Оверња:  $j=1, \dots, 75$ ;
- државе Колорадо:  $k=1, \dots, 222$ .

На основу коефицијената из једначина четворопараметарске трансформације и геодетских латитуда  $B$  и лонгитуда  $L$  тачака нивелманских мрежа високе тачности формиране су матрице дизајна  $A_{n \times 4}$  (матрица 7.12 односно 7.13), за сва три подручја:

$$A_{n \times 4} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} \end{bmatrix}_{n \times 4}, \quad (7.12)$$

односно,

$$A_{n \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(B_1)\cos(L_1) & \cos(B_1)\sin(L_1) & \sin(B_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(B_n)\cos(L_n) & \cos(B_n)\sin(L_n) & \sin(B_n) \end{bmatrix}_{n \times 4}. \quad (7.13)$$

Матрице дизајна не разликују се у првом и трећем начину спољашње провере у оквиру истих подручја зато што зависе једино од геодетских координата **GPS/dh** тачака.

Вектор слободних чланова  $f_{n \times 1}$  је срачунат у првом начину спољашње провере по формули:

$$f_{n \times 1} = \begin{bmatrix} -t_1 \\ \vdots \\ -t_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{GPS/dh} - \zeta_1^{LMQG} \\ \vdots \\ \zeta_n^{GPS/dh} - \zeta_n^{LMQG} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (7.14)$$

односно, у трећем начину спољашње провере по формули:



## 7. Нумеричка истраживања

$$f_{n \times 1} = \begin{bmatrix} -t_1 \\ \vdots \\ -t_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{RMQG} - \zeta_1^{LMQG} \\ \vdots \\ \zeta_n^{RMQG} - \zeta_n^{LMQG} \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (7.15)$$

С обзиром на претпоставку једнаког нивоа тачности за све податке који су коришћени у анализама у сва три подручја, матрице тежина су изједначене са јединичним матрицама:

$$P_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = E_{n \times n}. \quad (7.16)$$

Матрица дизајна  $N_{4 \times 4}$ , кофакторска матрица  $Q_{4 \times 4}$  и вектор  $n_{4 \times 1}$  добијени су применом одговарајућих формула у складу са поступцима анализе у оквиру **МНК**. Матрице  $N_{4 \times 4}$ , и  $Q_{4 \times 4}$  су исте за први и трећи начин спољашње провере и имају следећу структуру:

$$N_{4 \times 4} = A_{4 \times n}^T P_{n \times n} A_{n \times 4} = A_{4 \times n}^T A_{n \times 4} = \begin{bmatrix} N_{X_1 X_1} & N_{X_1 X_2} & N_{X_1 X_3} & N_{X_1 X_4} \\ N_{X_2 X_1} & N_{X_2 X_2} & N_{X_2 X_3} & N_{X_2 X_4} \\ N_{X_3 X_1} & N_{X_3 X_2} & N_{X_3 X_3} & N_{X_3 X_4} \\ N_{X_4 X_1} & N_{X_4 X_2} & N_{X_4 X_3} & N_{X_4 X_4} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (7.17)$$

$$Q_{4 \times 4} = N_{4 \times 4}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{X_1 X_1} & Q_{X_1 X_2} & Q_{X_1 X_3} & Q_{X_1 X_4} \\ Q_{X_2 X_1} & Q_{X_2 X_2} & Q_{X_2 X_3} & Q_{X_2 X_4} \\ Q_{X_3 X_1} & Q_{X_3 X_2} & Q_{X_3 X_3} & Q_{X_3 X_4} \\ Q_{X_4 X_1} & Q_{X_4 X_2} & Q_{X_4 X_3} & Q_{X_4 X_4} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad (7.18)$$

Вектор  $n_{4 \times 1}$  се разликује за први и трећи начин спољашње провере јер у њему фигурише вектор слободних чланова  $f_{n \times 1}$ , и рачуна се по формули:

$$n_{4 \times 1} = A_{4 \times n}^T P_{n \times n} f_{n \times 1} = A_{4 \times n}^T f_{n \times 1} = \begin{bmatrix} n_{X_1} \\ n_{X_2} \\ n_{X_3} \\ n_{X_4} \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (7.19)$$

За свако подручје су израчунате вредности параметара трансформације  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$ . Такође, на овом месту се добијају различите вредности параметара трансформације у векторима  $\hat{x}_{4 \times 1}$  за први и трећи начин спољашње провере, али се рачунају по истој формули:

$$\hat{x}_{4 \times 1} = -Q_{4 \times 4} n_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (7.20)$$

Оцена параметара трансације представља завршни корак у поступку **МНК**, обезбеђујући нам детаљан увид у прилагођавање модела подацима на сваком подручју (табеле 7.25 и 7.26).

Табела 7.25: Оцењене вредности параметара трансације – први начин спољашње провере

Подручје	$X_1$ [m]	$X_2$ [m]	$X_3$ [m]	$X_4$ [m]
Р. Србија	44,888	-31,177	-7,844	-31,628
Оверња	294,652	-202,723	-8,113	-213,545
Колорадо	-363,140	-79,283	-273,864	224,880

Табела 7.26: Оцењене вредности параметара трансације – трећи начин спољашње провере

Подручје	$X_1$ [m]	$X_2$ [m]	$X_3$ [m]	$X_4$ [m]
Р. Србија	-4,942	2,465	3,896	3,260
Оверња	-18,739	17,077	2,309	9,704
Колорадо	-224,413	-47,297	-170,541	137,892

Затим су, вредности параметара трансације коришћени за оцену иницијалних резидуала, чиме су добијени оцењени резидуали  $\hat{i}$  који представљају главну меру степена успешности прилагођавања модела датим подацима.

Резидуали, имају значајну улогу у провери тачности и робусности четворопараметарске трансформације у односу на доступне податке (мерене и референтне). Они служе као критеријум за оцењивање квалитета и прилагођености модела, представљајући неопходан инструмент за дубље разумевање изведених резултата. Рачунањем оцењених резидуала, прецизније се анализира колико успешно модел примењује трансформацију на податке и указује се на евентуалне неправилности или неподударности у процесу оцењивања.

У складу са једначином 7.11 за одређено подручје, израчунати су елементи вектора оцењених резидуала (7.21).

$$\hat{t}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \vdots \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} X_1 + \cos(B_1)\cos(L_1)X_2 + \cos(B_1)\sin(L_1)X_3 + \sin(B_1)X_4 \\ \vdots \\ X_1 + \cos(B_n)\cos(L_n)X_2 + \cos(B_n)\sin(L_n)X_3 + \sin(B_n)X_4 \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (7.21)$$

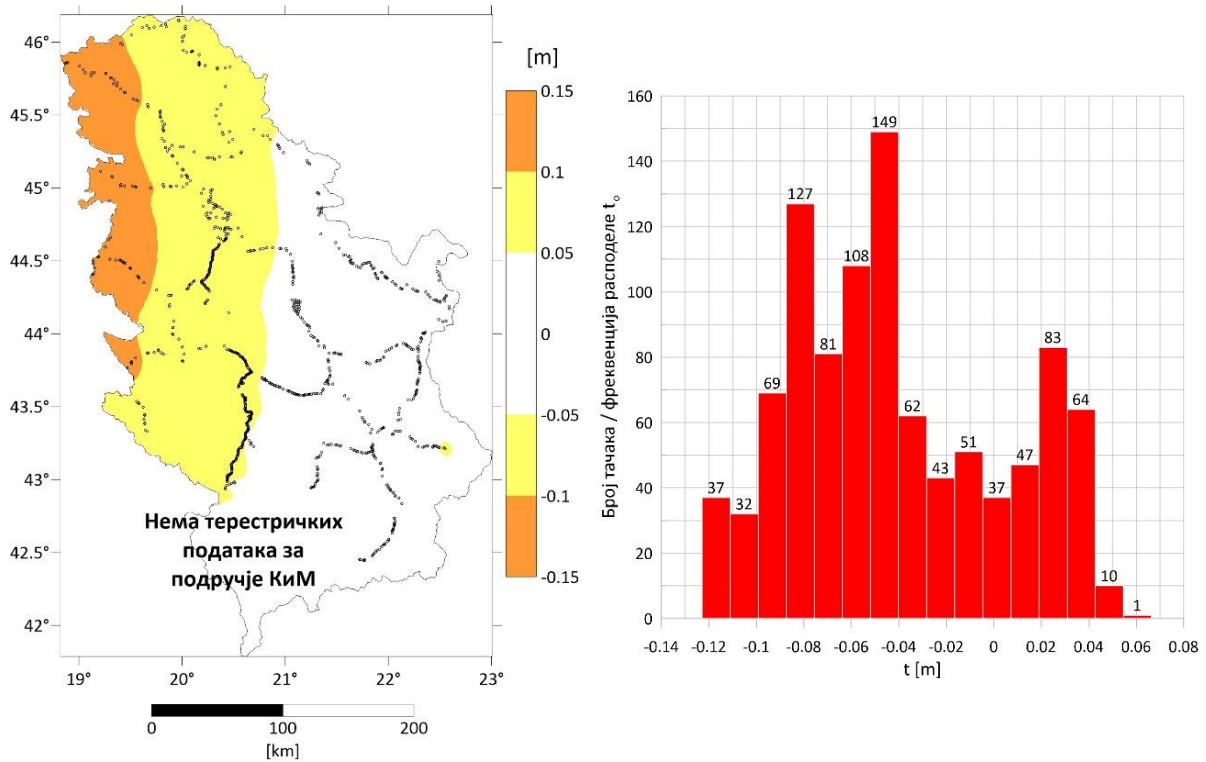
У табели 7.27 представљена је статистика оцењених резидуала  $\hat{i}$  на **GPS/dh** тачкама нивелманске мреже високе тачности за први и трећи начин спољашње провере у методологији у сва три подручја.

Табела 7.27: Основни статистички подаци оцењених резидуала  $\hat{i}$  на GPS/dh тачкама

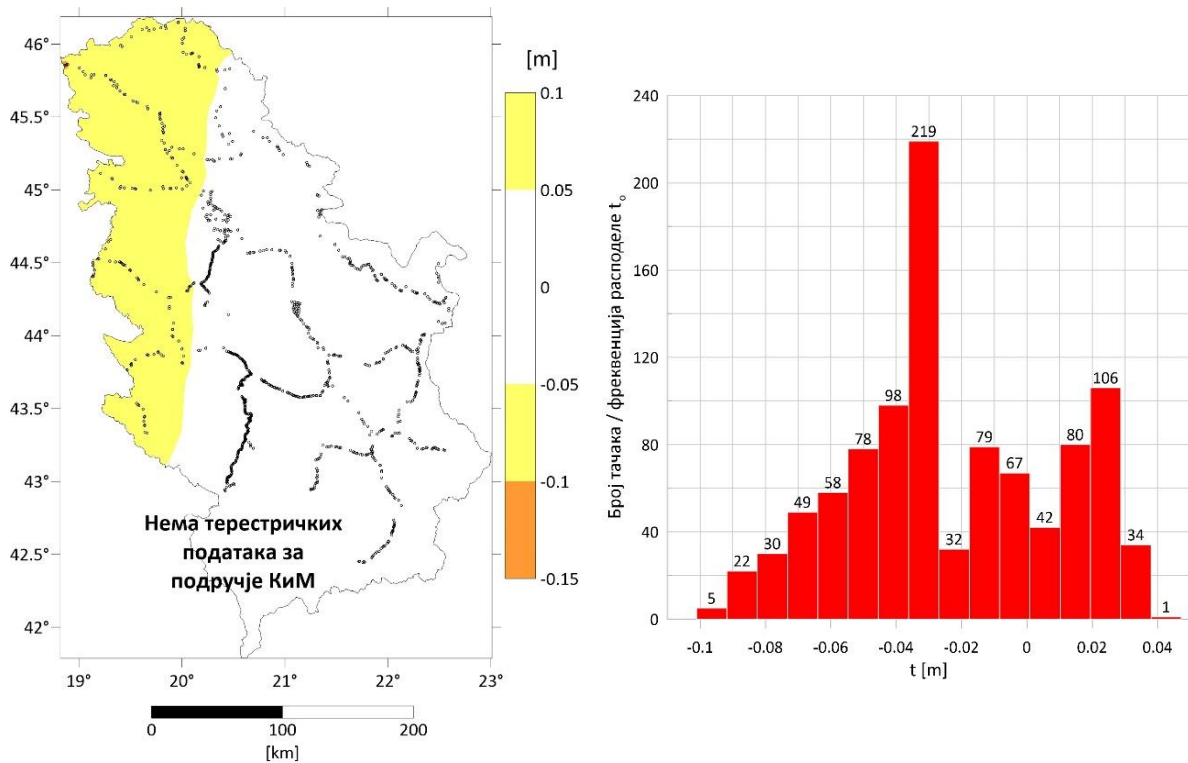
Подручје	први начин спољашње провере				трећи начин спољашње провере			
	$\hat{t}_{\min}$ [m]	$\hat{t}_{\max}$ [m]	$\hat{t}_{\text{average}}$ [m]	$\sigma_{\hat{i}(\text{stdev})}$ [m]	$\hat{t}_{\min}$ [m]	$\hat{t}_{\max}$ [m]	$\hat{t}_{\text{average}}$ [m]	$\sigma_{\hat{i}(\text{stdev})}$ [m]
Р. Србија	-0,12	0,05	-0,04	0,04	-0,10	0,04	-0,02	0,03
Оверња	0,09	0,24	0,14	0,04	0,06	0,27	0,17	0,05
Колорадо	-0,18	-0,04	-0,08	0,04	-0,19	-0,06	-0,10	0,04

## 7. Нумеричка истраживања

Слике од 7.16 до 7.21 приказују површи и хистограме расподеле оцењених резидуала на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности, док табеле 7.28 и 7.29 приказују нумеричку расподелу тих резидуала по распонима.

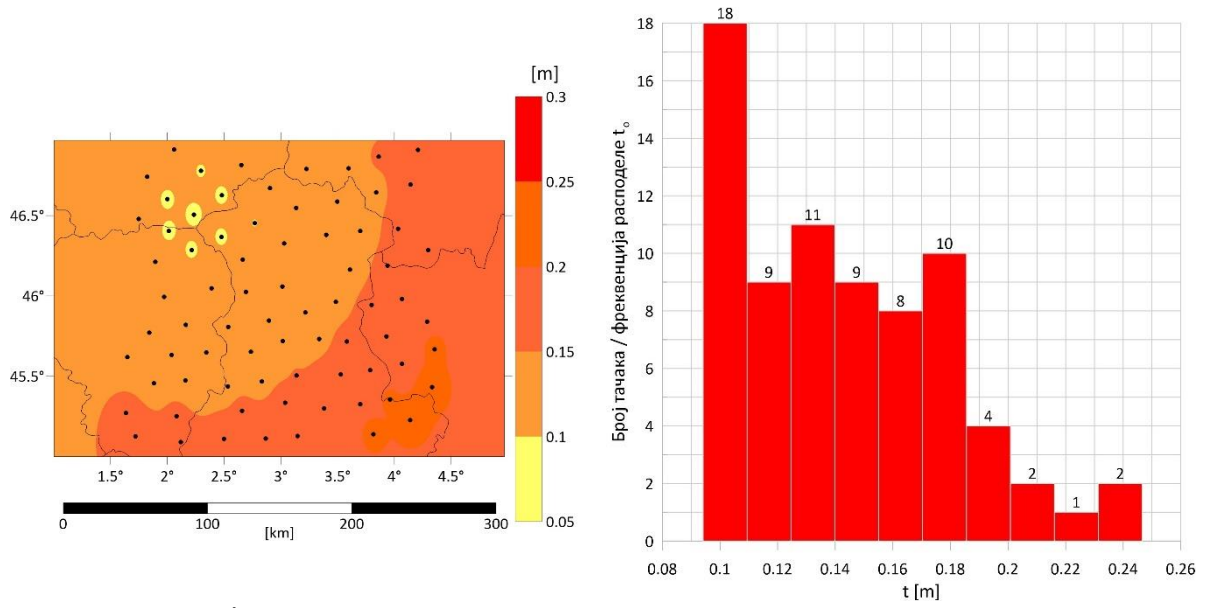


Слика 7.16: Површи  $\hat{t}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере

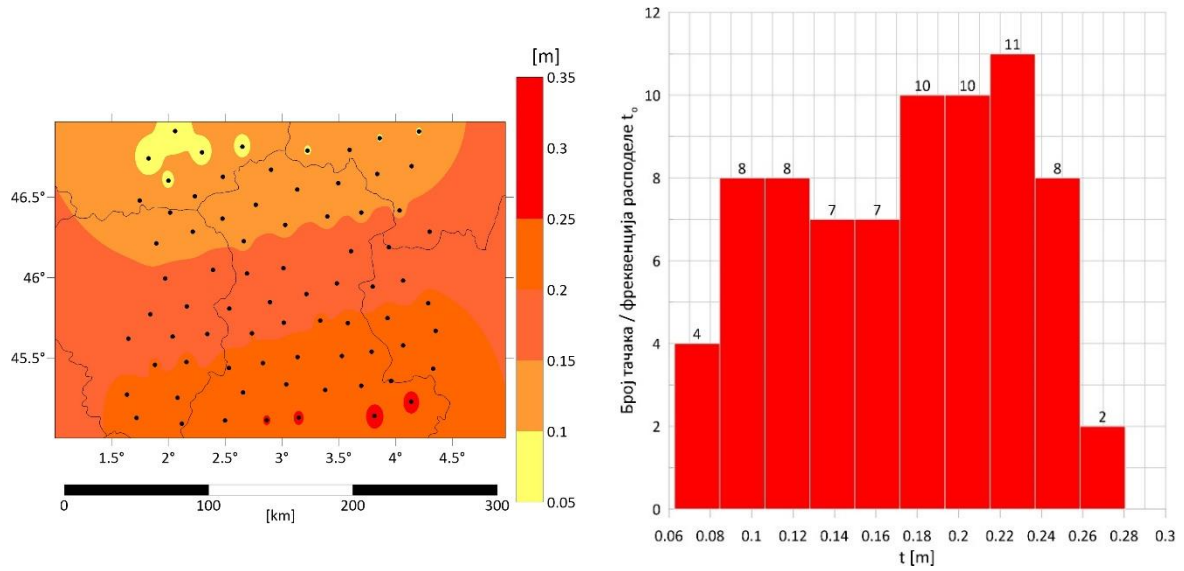


Слика 7.17: Површи  $\hat{t}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања

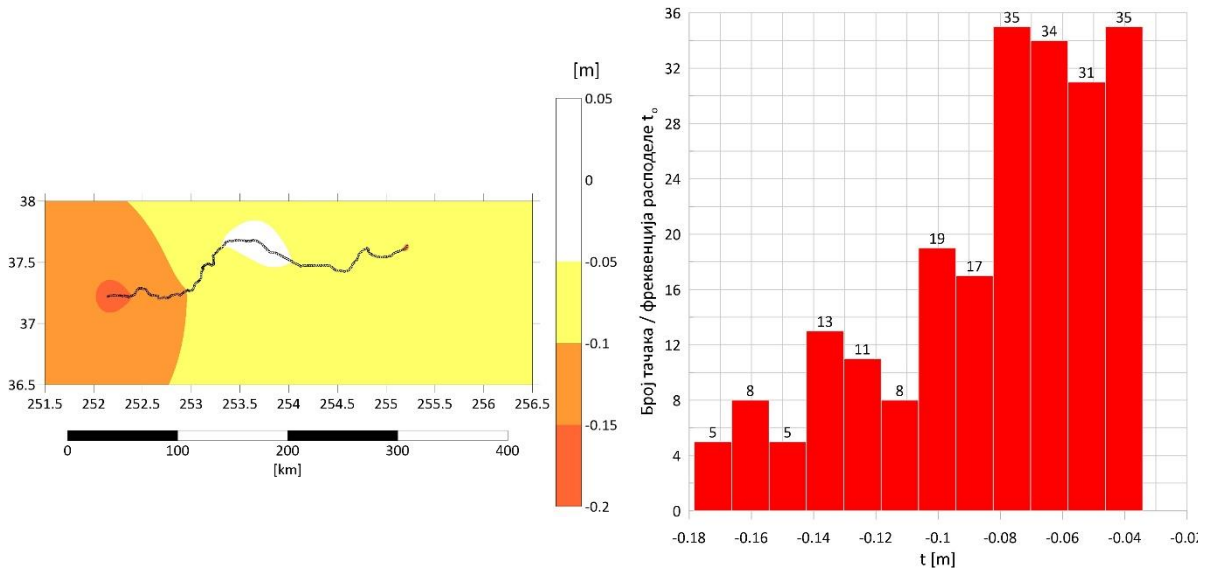


Слика 7.18: Поври  $\hat{t}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

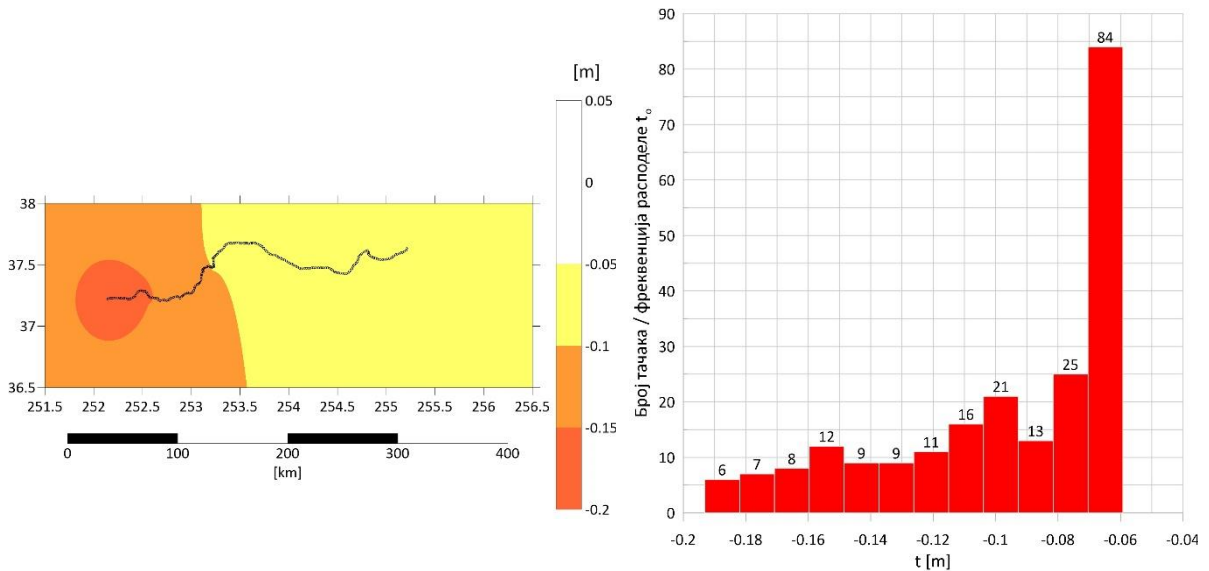


Слика 7.19: Поври  $\hat{t}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.20: Површ  $\hat{i}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере



Слика 7.21: Површ  $\hat{i}$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере

Табела 7.28: Распони оцењених резидуала  $\hat{i}$  на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{i} > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	31	41,33%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{i} \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	35	46,67%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \hat{i} \leq 0,10 \text{ m}$	4	0,40%	9	12,00%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{i} \leq 0,05 \text{ m}$	228	22,78%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{i} < 0,00 \text{ m}$	227	22,68%	0	0,00%	43	19,37%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{i} < -0,05 \text{ m}$	474	47,35%	0	0,00%	120	54,05%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{i} < -0,10 \text{ m}$	68	6,79%	0	0,00%	43	19,37%
$\hat{i} < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	16	7,21%
$\Sigma =$	1001	100%	75	100%	222	100%

7. Нумеричка истраживања

Табела 7.29: Распони оцењених резидуала  $\hat{t}$  на GPS/dh тачкама – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{t} > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	48	64,00%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	18	24,00%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,10 \text{ m}$	0	0,00%	9	12,00%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{t} < 0,05 \text{ m}$	266	26,57%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{t} < 0,00 \text{ m}$	553	55,24%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,05 \text{ m}$	179	17,88%	0	0,00%	138	62,16%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,10 \text{ m}$	3	0,30%	0	0,00%	51	22,97%
$\hat{t} < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	33	14,86%
$\Sigma =$	1001	100%	75	100%	222	100%

У следећем кораку срачунате су транслиране вредности аномалија висине  $\zeta^{LMQG-t}$  на GPS/dh тачкама нивелманске мреже високе тачности по следећим формулама:

$$\begin{aligned} \zeta_1^{LMQG-t} &= \zeta_1^{LMQG} - \hat{t}_1 \\ &\vdots \\ \zeta_n^{LMQG-t} &= \zeta_n^{LMQG} - \hat{t}_n \end{aligned} \quad (7.22)$$

На овај начин моделиране вредности  $\zeta^{LMQG-t}$  су „пришле“ референтним вредностима  $\zeta^{RMQG}$  у локалном подручју. Дакле, оцењени резидуали  $\hat{t}$  служе за усклађивање **LMQG** са заваничним (референтним) **RMQG** моделима локалних подручја. Основни статистички подаци за  $\zeta^{LMQG-t}$  за сва три подручја у првом и трећем начину спољашње провере дата је у табели 7.30,

Табела 7.30: Основни статистички подаци за  $\zeta^{LMQG-t}$  на GPS/dh тачкама

Подручје	први начин спољашње провере				трећи начин спољашње провере			
	$\zeta_{\min}^{LMQG-t}$ [m]	$\zeta_{\max}^{LMQG-t}$ [m]	$\zeta_{\text{average}}^{LMQG-t}$ [m]	$\sigma_{\zeta^{LMQG-t}}$ [m]	$\zeta_{\min}^{LMQG-t}$ [m]	$\zeta_{\max}^{LMQG-t}$ [m]	$\zeta_{\text{average}}^{LMQG-t}$ [m]	$\sigma_{\zeta^{LMQG-t}}$ [m]
Р. Србија	42,264	46,390	44,642	0,852	42,268	46,355	44,623	0,852
Оверња	46,799	52,097	49,550	1,476	46,841	52,026	49,519	1,449
Колорадо	-19,491	-15,792	-17,242	1,085	-19,476	-15,754	-17,226	1,090

У наставку следе кораци:

- у првом начину спољашње провере, рачунају се разлике између транслиране  $\zeta^{LMQG-t}$  и мерене  $\zeta^{GPS/dh}$  вредности аномалије висине, што даје информације о прецизности и усаглашености модела са измереним подацима у реалном окружењу.
- у трећем начину спољашње провере, рачунају се разлике између транслиране  $\zeta^{LMQG-t}$  и референтне  $\zeta^{RMQG}$  вредности аномалије висине, што даје информације о прецизности и усаглашености **LMQG** са референтним моделом **RMQG** без посредства мерених вредности.

Ове разлике представљају преостале резидуале  $R$ , између транслираних и измерених аномалија висине у првом начину спољашње провере, односно између транслираних и референтних аномалија висине у трећем начину спољашње провере. Рачунањем

преосталих резидуала добија се информација о финалним одступањима између два скупа аномалија висине - транслираних и измерених, односно транслираних и референтних.

Статистичком обрадом преосталих резидуала могуће је анализирати тачност модела и утврдити евентуалне недостатке или одступања у поступку моделирања. Добијена информација из овог корака служи као основа за додатна побољшања и усаглашавања (калибрације) модела.

Преостали резидуали представљају елементе вектора  $R_{n \times 1}$  за два различита начина спољашње провере:

- у првом начину означени су као

$$R_{n \times 1} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{LMQG-t} - \zeta_1^{GPS/dh} \\ \vdots \\ \zeta_n^{LMQG-t} - \zeta_n^{GPS/dh} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (7.23)$$

- у трећем начину означени су као

$$R_{n \times 1} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{LMQG-t} - \zeta_1^{RMQG} \\ \vdots \\ \zeta_n^{LMQG-t} - \zeta_n^{RMQG} \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (7.24)$$

Разлике, представљене у вектору  $R_{n \times 1}$  (јеначина 7.23), поред тога што обезбеђују битне информације о конвергенцији две површи на **GPS/dh** тачкама - једне моделиране у поступку предикције, и друге моделиране на основу измерених величина - већ истовремено служе као кључна основа за проверу конвергенције „истих“ површи у кораку интерполације и моделирања локалног квазигеоида на гриду у целом подручју.

У трећем начину спољашње провере, моделирање преосталих резидуала на тачкама грида, спроводи се на основу срачунатих преосталих резидуала на **GPS/dh** тачкама по једначини 7.24. Дакле, поступак се понавља по истом систему као и у првом начину спољашње провере, с тим што су вредности преосталих резидуала срачунате у односу на референтни модел.

Важно је истаћи кључну разлику између првог и трећег начина спољашње провере:

- у првом начину се на основу срачунатих преосталих резидуала на **GPS/dh** тачкама, моделирају се вредности преосталих резидуала на тачкама грида. Овај начин користи се зато што нема доступних измерених вредности аномалија висине  $\zeta^{GPS/dh}$  на тачкама грида.
- у трећем начину не користе се аномалије висине измерене **GPS/dh** методом на тачкама нивелмана високе тачности, већ се уместо њих користе аномалије висине из званичног (референтног) модела **RMQG**. Након тога, вредности срачунатих преосталих резидуала (према једначини 7.24) моделирају се на тачкама целог грида.

Преостали резидуали  $R$ , уз оцењене резидуале  $\hat{t}$  на **GPS/dh** тачкама (како и на тачкама грида у каснијим фазама моделирања), служе као контрола и пружају информацију о

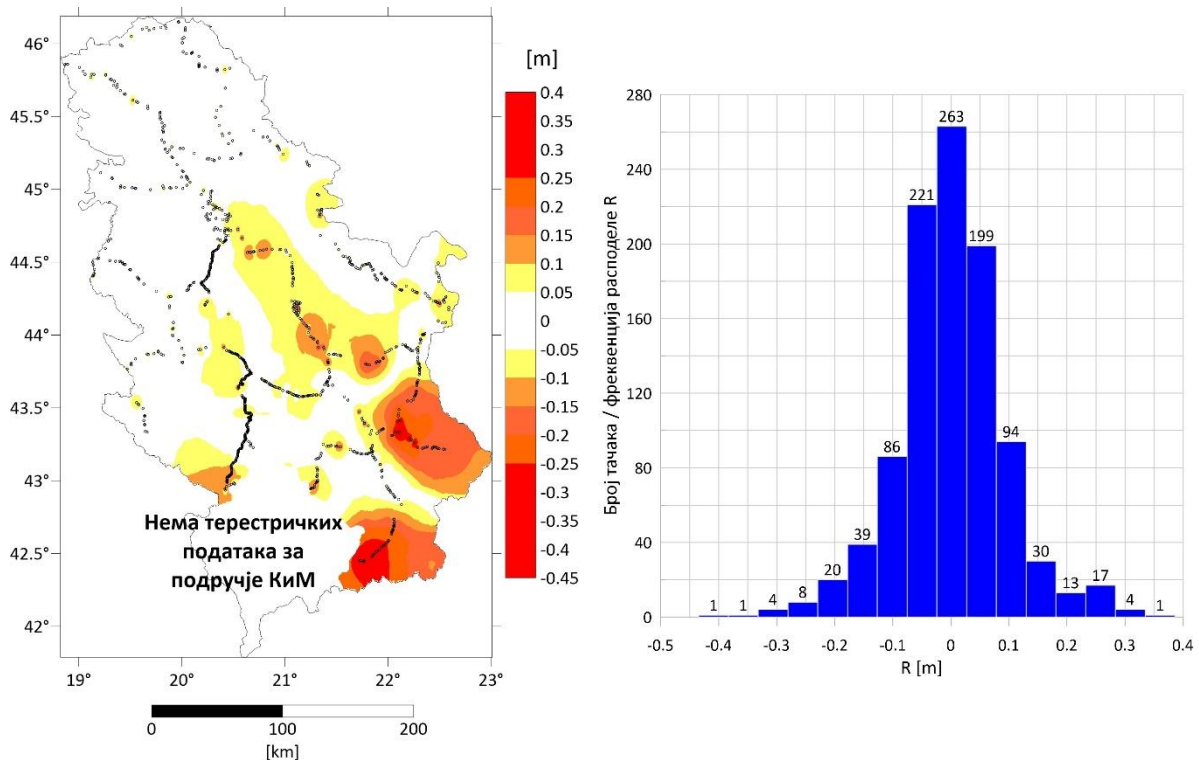
томе колико се моделиране површи приближавају референтним. Ово представља меру тачности моделираних аномалија висине и степен њиховог усаглашавања са референтним моделима.

Табела 7.31 приказује основне статистичке податке квалитета срачунатих преосталих резидуала  $R$  на **GPS/dh** тачкама за сва три локална квазигеоида (**LMQG**) у свим подручјима.

Табела 7.31: Основни статистички подаци преосталих резидуала  $R$  на **GPS/dh** тачкама

Подручје	први начин спољашње провере				трећи начин спољашње провере			
	$R_{min}$ [m]	$R_{max}$ [m]	$R_{average}$ [m]	$\sigma_{R(stdev)}$ [m]	$R_{min}$ [m]	$R_{max}$ [m]	$R_{average}$ [m]	$\sigma_{R(stdev)}$ [m]
Р. Србија	-0,434	0,335	0,000	0,093	-0,388	0,274	0,000	0,083
Оверња	-0,126	0,154	0,000	0,042	-0,105	0,154	0,000	0,044
Колорадо	-0,173	0,126	0,000	0,074	-0,172	0,149	0,000	0,075

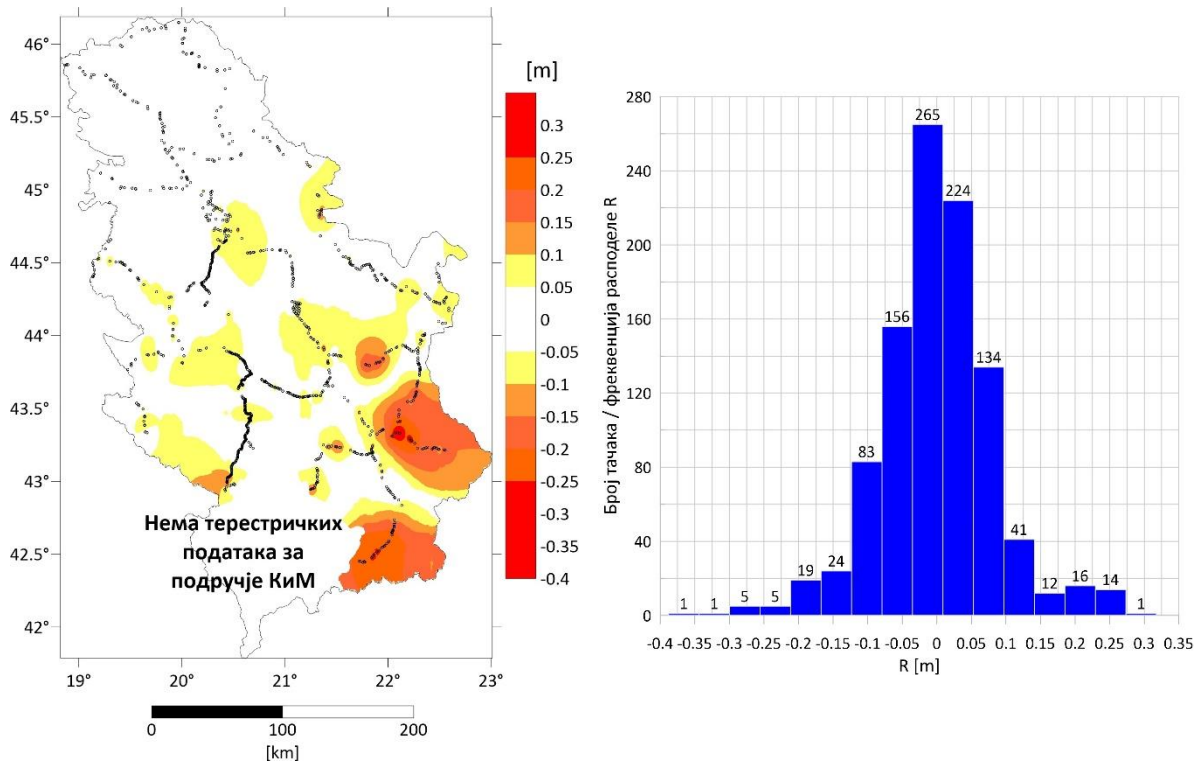
Слике од 7.22 до 7.27 приказују површи преосталих резидуала, моделираних у поступку предикције, као и хистограме расподеле вредности преосталих резидуала на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности. Табеле 7.32 и 7.33 садрже нумеричке информације о расподели пртеосталих резидуала по изабраним распонима, што омогућава детаљнију анализу њихове варијације и расподеле.



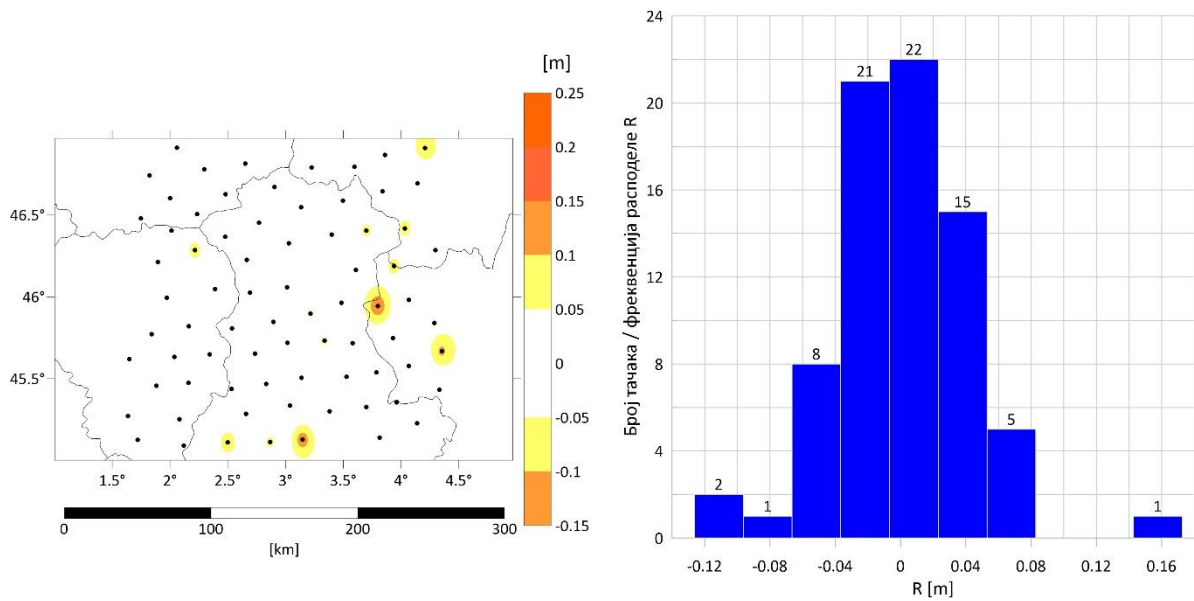
Слика 7.22: Површи  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере



## 7. Нумеричка истраживања

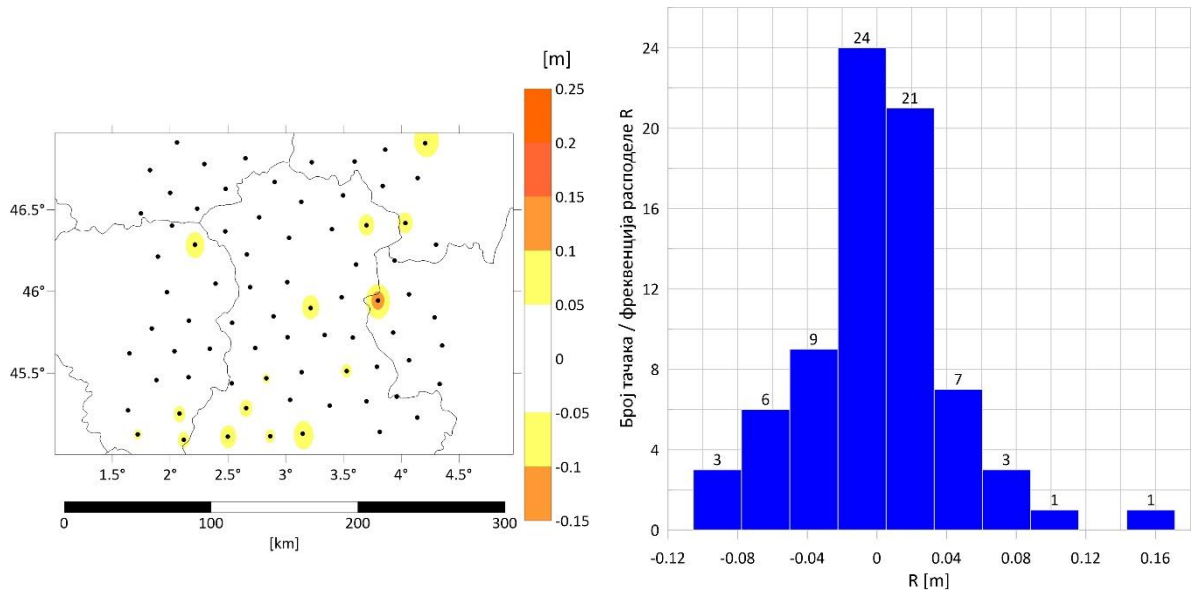


Слика 7.23: Површ  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за  $R$ . Србију – трећи начин спољашње провере

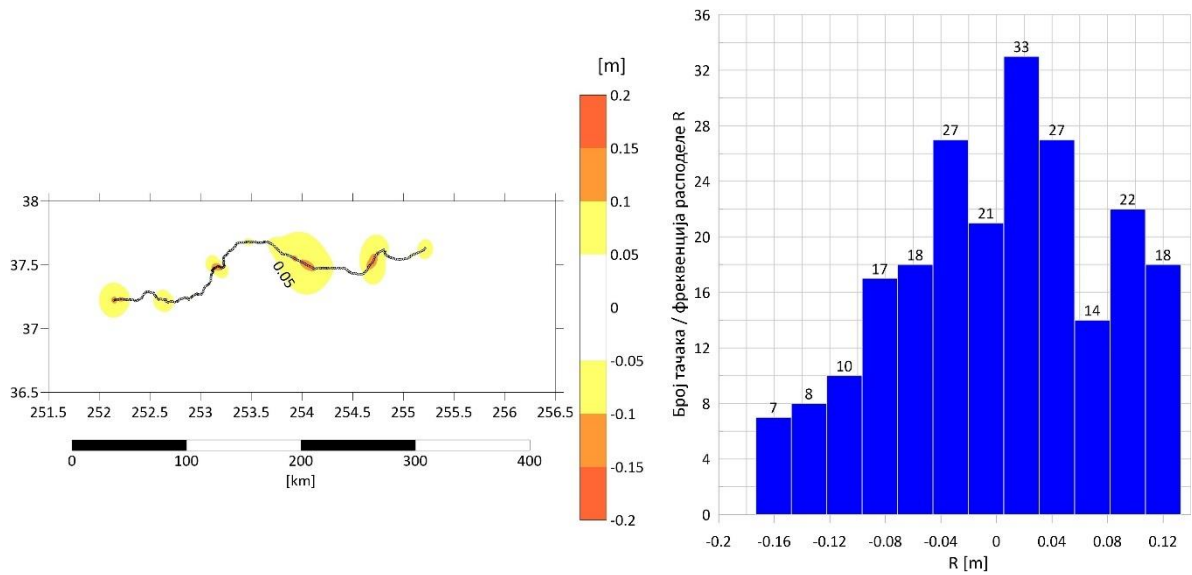


Слика 7.24: Површ  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања

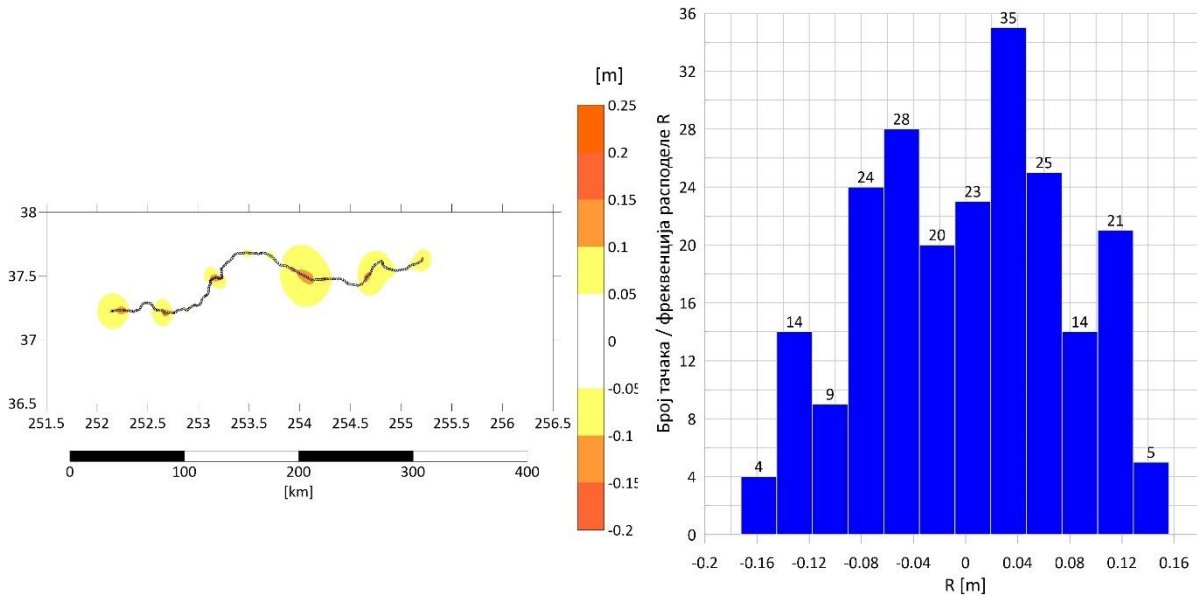


Слика 7.25: Површ  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере



Слика 7.26: Површ  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.27: Површ  $R$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере

Табела 7.32: Распони преосталих резидуала  $R$  на GPS/dh тачкама – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$R > 0,15 \text{ m}$	47	4,80%	1	1,33%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < R \leq 0,15 \text{ m}$	58	5,69%	0	0,00%	23	10,36%
$0,05 \text{ m} < R \leq 0,10 \text{ m}$	146	14,59%	7	9,33%	33	14,86%
$0,00 \text{ m} \leq R < 0,05 \text{ m}$	236	23,58%	31	41,33%	64	28,83%
$-0,05 \text{ m} \leq R < 0,00 \text{ m}$	268	26,67%	30	40,00%	44	19,82%
$-0,10 \text{ m} \leq R < -0,05 \text{ m}$	138	13,89%	4	5,33%	35	15,77%
$-0,15 \text{ m} \leq R < -0,10 \text{ m}$	62	6,29%	2	2,67%	16	7,21%
$R < -0,15 \text{ m}$	46	4,50%	0	0,00%	7	3,15%
$\Sigma =$	1001	100%	75	100%	222	100%

Табела 7.33: Распони преосталих резидуала  $R$  на GPS/dh тачкама – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$R > 0,15 \text{ m}$	41	4,10%	1	1,33%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < R \leq 0,15 \text{ m}$	36	3,60%	0	0,00%	26	11,71%
$0,05 \text{ m} < R \leq 0,10 \text{ m}$	152	15,18%	6	8,00%	34	15,32%
$0,00 \text{ m} \leq R < 0,05 \text{ m}$	270	26,97%	32	42,67%	54	24,32%
$-0,05 \text{ m} \leq R < 0,00 \text{ m}$	266	26,57%	27	36,00%	45	20,27%
$-0,10 \text{ m} \leq R < -0,05 \text{ m}$	146	14,59%	6	8,00%	41	18,47%
$-0,15 \text{ m} \leq R < -0,10 \text{ m}$	49	4,90%	3	4,00%	18	8,11%
$R < -0,15 \text{ m}$	41	4,10%	0	0,00%	4	1,80%
$\Sigma =$	1001	100%	75	100%	222	100%

На основу анализе резултата оцењених резидуала  $\hat{i}$  и срачунатих преосталих резидуала  $R$  и њихове расподеле у оквирима дефинисаних распона, уочава се знатна концентрација резидуала у распону између  $-0,15 \text{ m}$  и  $0,15 \text{ m}$ . Ова висока концентрација указује на изузетно прецизно и поуздано моделирање на **GPS/dh** тачкама. То додатно потврђује успешно усаглашавање моделираних аномалија висине са званичним (референтним)

моделом квазигеоида у свим подручјима. Ово откриће има значајне импликације, указујући на тачно представљање локалних карактеристика.

Вредности  $\hat{t}$  и  $R$  користе се за постизање максималног приближења моделиране површи **LMQG** референтном моделу **RMQG**. Овим се врши валидација моделираних вредности на основу референтних. За постизање овога, неопходно је израчунати **коначне разлике**  $\Delta\zeta$  према једначини 7.25:

$$\Delta\zeta = \zeta^{LMQG-t} - R - \zeta^{RMQG} \rightarrow \begin{cases} \Delta\zeta_i = \zeta_i^{LMQG-t} - R_i - \zeta_i^{SQM2011} \\ \Delta\zeta_j = \zeta_j^{LMQG-t} - R_j - \zeta_j^{QGAuvergne} \\ \Delta\zeta_k = \zeta_k^{LMQG-t} - R_k - \zeta_k^{ColFFTWG2020} \end{cases} \quad (7.25)$$

Статистика коначних разлика  $\Delta\zeta$  на **GPS/dh** тачкама за сва три изабрана подручја у првом начину спољашње провере је приказана у табели 7.34, док су подаци о расподели разлика по распонима представљени у табели 7.35.

Графички прикази површи и хистограми расподеле коначних разлика, израчунатих помоћу једначине 7.25 на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности у оквиру првог начина спољашње провере, представљени су на сликама 7.28, 7.29 и 7.30.

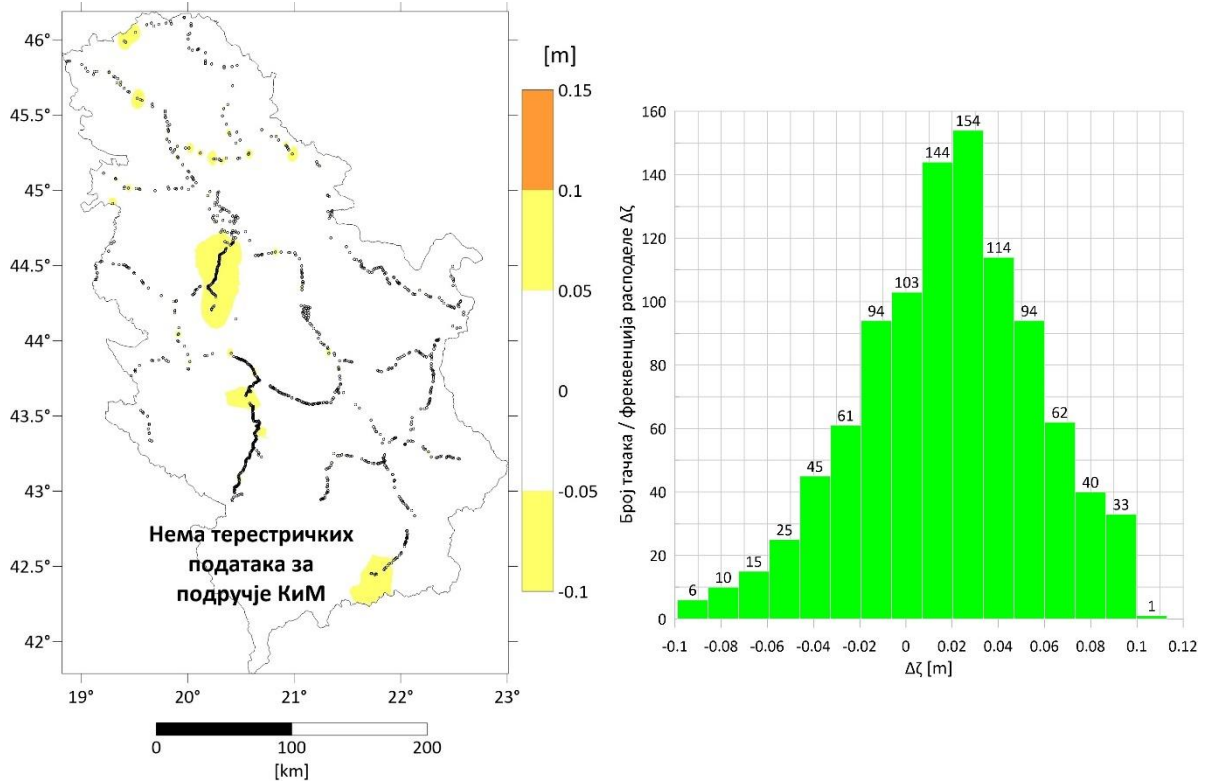
Табела 7.34: Основни статистички подаци коначних разлика  $\Delta\zeta$  на **GPS/dh** тачкама – први начин спољашње провере

Подручје	$\Delta\zeta_{min}$ [m]	$\Delta\zeta_{max}$ [m]	$\Delta\zeta_{average}$ [m]	$\sigma_{\Delta\zeta(stdev)}$ [m]
Р. Србија	-0,099	0,100	0,018	0,038
Оверња	-0,072	0,118	0,031	0,048
Колорадо	-0,060	0,069	-0,016	0,026

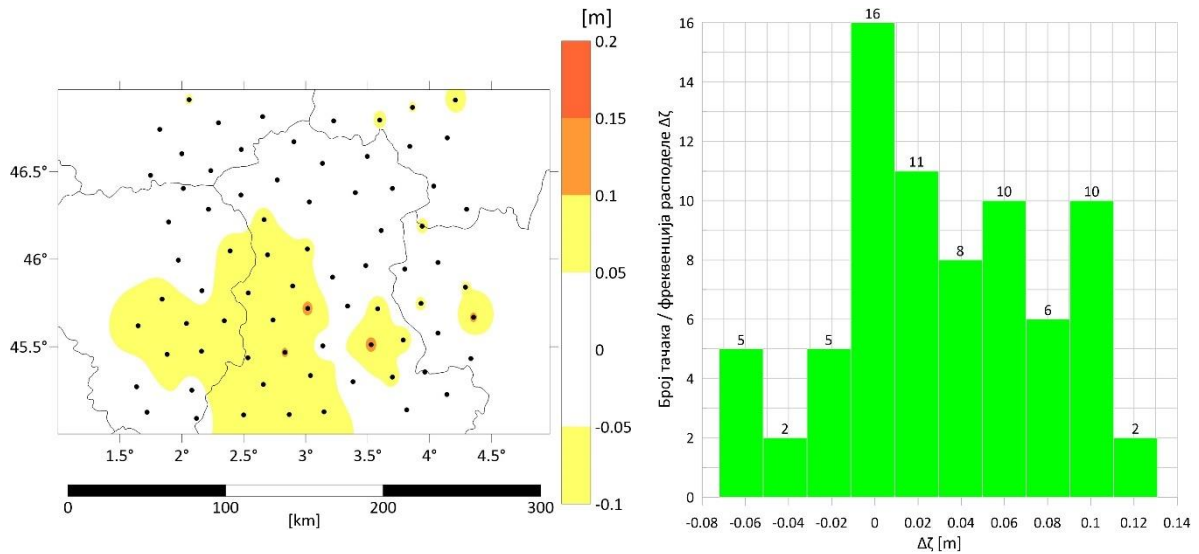
Табела 7.35: Распони коначних разлика  $\Delta\zeta$  на **GPS/dh** тачкама – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15$ m	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,15$ m	0	0,00%	4	5,33%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,10$ m	208	20,78%	24	32,00%	2	0,90%
$0,00 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05$ m	492	49,15%	28	37,33%	48	21,62%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,00$ m	257	25,67%	14	18,67%	156	70,27%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,05$ m	44	4,40%	5	6,67%	16	7,21%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,10$ m	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta < -0,15$ m	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Sigma =$	1001	100%	75	100%	222	100%

## 7. Нумеричка истраживања

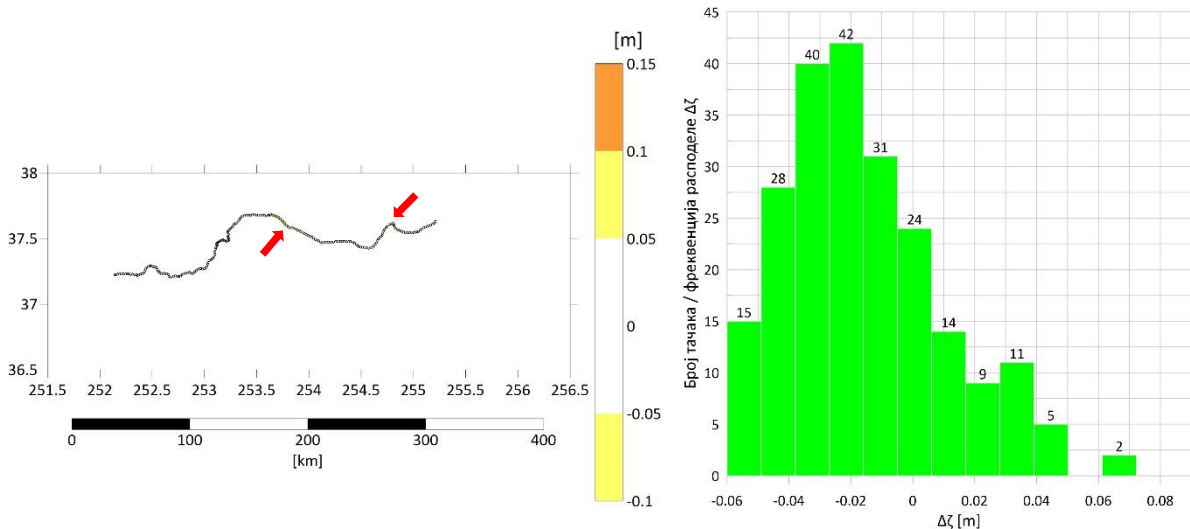


Слика 7.28: Површи  $\Delta\zeta$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере



Слика 7.29: Површи  $\Delta\zeta$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.30: Површ  $\Delta\zeta$  на тачкама нивелмана високе тачности и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере

У трећем начину спољашње провере, коначне разлике  $\Delta\zeta$  на **GPS/dh** тачкама једнаке су нули. Ово је последица коришћења референтних  $\zeta^{RMQG}$  уместо мерених  $\zeta^{GPS/dh}$  аномалија висине у рачунању иницијалних резидуала  $t$ . Након тога се утицај референтних  $\zeta^{RMQG}$  аномалија висине пренео преко иницијалних резидуала кроз **МНК** оцену параметара трансформације на вредности параметара трансформације. Тако да су оцењени резидуали  $\hat{i}$  срачунати у поступку четворопараметарске трансформације зависни од референтног модела **RMQG**.

Као резултат, у поступку валидације моделираног квазигеоида **LMQG**, његова површ се потпуно поклапа са референтним квазигеоидаом, због чега су коначне разлике  $\Delta\zeta$  једнаке нули. Овде је постигнуто максимално и апсолутно приближавање, што утиче на значајно повећање поузданости и прецизности модела.

### 7.6.3 Моделирање аномалије висине на тачкама грида

Након успешне валидације аномалије висине локалних квазигеоида  $\zeta^{LMQG}$ , моделираних на **GPS/dh** тачкама високе тачности, приступа се интерполацији ових вредности на читавим подручјима. Ова интерполација се изводи на аналитичким тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ , а просторни распоред тих тачака за сва три подручја представљен је на сликама 7.33, 7.36 и 7.39.

У исто време, одабир ове резолуције има за циљ да постигне равнотежу између детаљности и рачунских захтева. Резолуција од  $5' \times 5'$  обезбеђује довољно детаљне информације за потребе моделирања вредности аномалија висине, при чему су захтеви у рачунању прихватљиви. Овај избор осигурава да се добије информација високе резолуције о аномалији висине на широком географском простору.

У овом делу истраживања ће бити детаљно разматрани сви начини спољашње провере предложене методологије. Битно је обратити пажњу на следеће:

- други начин није објашњен у претходном делу који се бави истраживањем и анализом резултата рачунања на **GPS/dh** тачкама. На овај начин процес моделирања и анализе се изводи искључиво на тачкама грида. Сав поступак **МНК**

оцене параметара трансформације се заснива на подацима са тачака грида. Објашњење овог начина спољашње провере почиње у овом делу;

- што се тиче првог и трећег начина, на тачкама грида треба применити други део методологије - моделирање локалних модела квазигеоида на основу вредности моделираних на **GPS/dh** тачкама. У овим начинима се користе параметри трансформације који су оцењени на **GPS/dh** тачкама. Значајна разлика између прорачуна на **GPS/dh** тачкама и тачкама грида лежи у начину обраде преосталих резидуала  $R$ . На **GPS/dh** тачкама, ови резидуали се рачунају директно. Насупрот томе, на тачкама грида, вредности преосталих резидуала  $R$  се не рачунају, већ се моделирају (интерполују) на основу срачунатих резидуала на **GPS/dh** тачкама.

Дакле, цео процес истраживања се може поделити на две етапе. Прва етапа обухвата прорачуне који се решавају на **GPS/dh** тачкама, док се друга етапа односи на моделирање локалног модела квазигеоида **LMQG** на тачкама грида у целом подручју. Овај процес омогућава одређивање вредности аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$  у свим тачкама грида на обрађеном подручју. У завршном кораку, моделиране вредности аномалија висине локалног модела  $\zeta^{LMQG}$  у поступку спољашње провере упоређују се са званичним (референтним) моделом **RMQG**, што представља завршетак истраживања.

У наставку ће бити изложени прорачуни на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  у свим начинима спољашње провере, што ће омогућити њихову упоредну анализу и тумачење. Овде ће бити разматрани резултати обраде истраживања, од којих се очекује да пруже дубље увиде у примењене методе и степен њихове ефикасности.

Применом једначине 7.6 рачунају се укупне вредности аномалије висине на тачкама грида ( $5' \times 5'$ ), које детаљно описују површ локалног модела квазигеоида (**LMQG**) у циљаном подручју (слике 7.32, 7.35 и 7.38):

$$\zeta_{5' \times 5'}^{LMQG} = \zeta_{5' \times 5'}^{EGM2008} + \zeta_{5' \times 5'}^{RTM} + EK_{5' \times 5'}. \quad (7.26)$$

Дакле, поступак рачунања на тачкама грида идентичан је поступку на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности. Овај поступак укључује рачунање дуготаласне карактеристике из модела **EGM2008**, краткоталасне карактеристике из резидуалног модела топографије **RTM**, и елипсоидне корекције  $EK$  у односу на **GRS80** (слике 7.31, 7.32 и 7.33). Збиром свих ових компоненти добија се вредност укупног сигнала (табеле 7.37, 7.40 и 7.43).

Поред резултата израчунатих помоћу једначине 7.26, у наставку су приказани сегменти података који су моделовани на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  за сва три подручја (табеле 7.36, 7.39 и 7.42).

На крају поступка предикције и моделирања, сви резултати су статистички обрађени, а добијени подаци су приказани у табелама 7.38, 7.41 и 7.44.

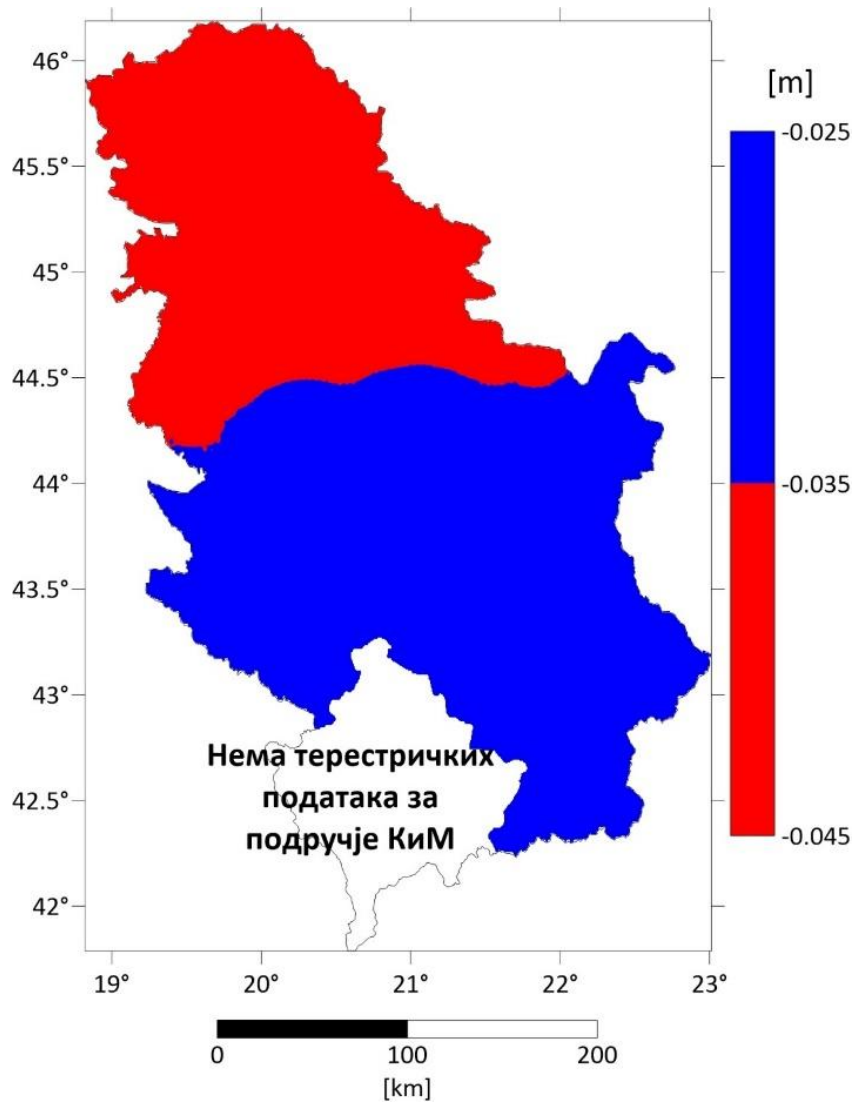
- Република Србија: дефинисано је 4295 тачака грида,

Табела 7.36: Вредности  $h^e$  и  $\zeta^{SQM2011}$  за прве три од 4295 тачака грида у Р. Србији

Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$\zeta^{SQM2011}$ [m]
1	3833	42,263	21,609	988,371	45,506
2	3834	42,263	21,654	673,911	45,345
3	3835	42,263	21,699	465,292	45,241
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

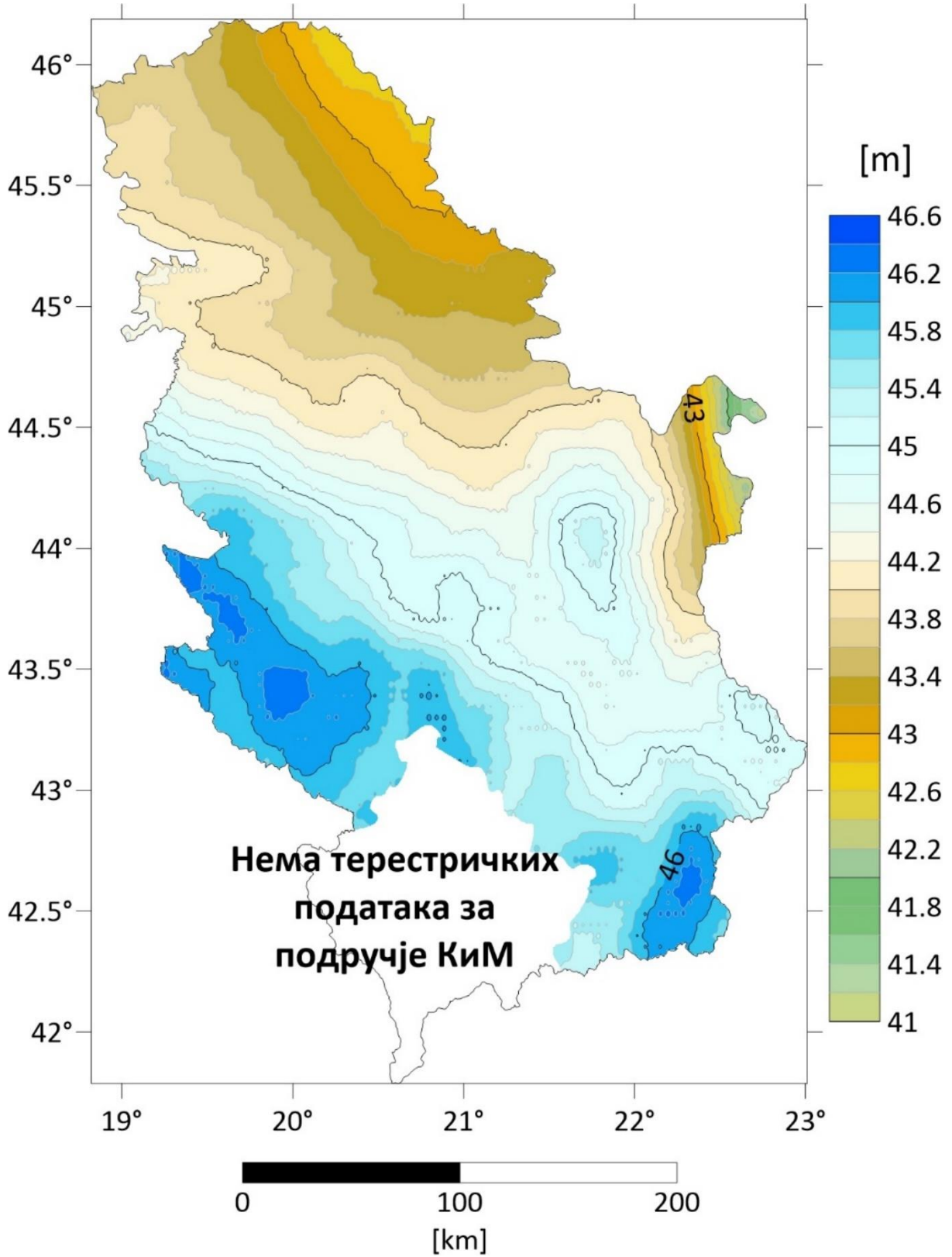
Табела 7.37: Моделиране вредности  $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$  и ЕК за прве три од 4295 тачака грида у Р. Србији

Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{EGM2008}$ <i>tide free</i> од 0 са уразмеравањем [m]	$\zeta^{RTM}$ $5' \times 5'$ [m]	ЕК [m]	$\zeta^{LMOG}$ [m]
1	3833	42,263	21,609	45,313	0,031	-0,027	45,316
2	3834	42,263	21,654	45,218	0,092	-0,027	45,283
3	3835	42,263	21,699	45,183	0,130	-0,027	45,286
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



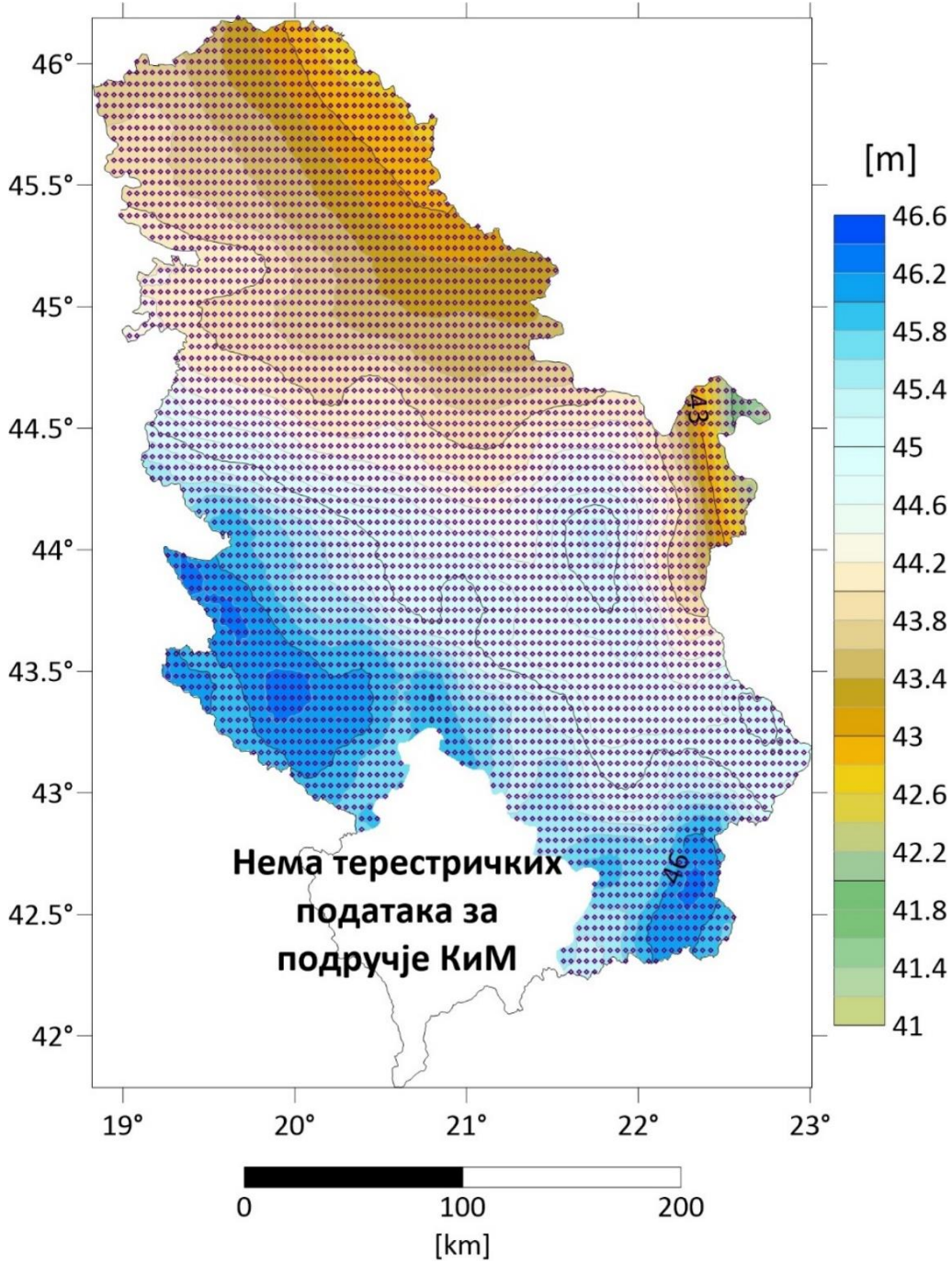
Слика 7.31: Елипсоидна корекција срачуната на 4295 тачака грида резолуције  $5' \times 5'$  – Р. Србија





Слика 7.32: Моделирана површ LMQG на 4295 тачака грида резолуције 5'×5' – Р. Србија

7. Нумеричка истраживања



Слика 7.33: Просторни распоред 4295 тачаке грида резолуције 5'×5' – Р. Србија

Табела 7.38: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у Р. Србији

вредност	<i>min</i> [m]	<i>max</i> [m]	<i>average</i> [m]	<i>range</i> [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta^{SQM2011}$	41,084	46,477	44,587	5,394	0,978
$\zeta_{tide\ free}^{EGM\ 2008}$	41,057	46,291	44,481	5,234	0,940
$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$	-0,202	0,364	0,081	0,566	0,070
<i>EK</i>	-0,041	-0,027	-0,034	0,014	0,003
$\zeta^{LMQG}$	41,040	46,348	44,528	5,308	0,978

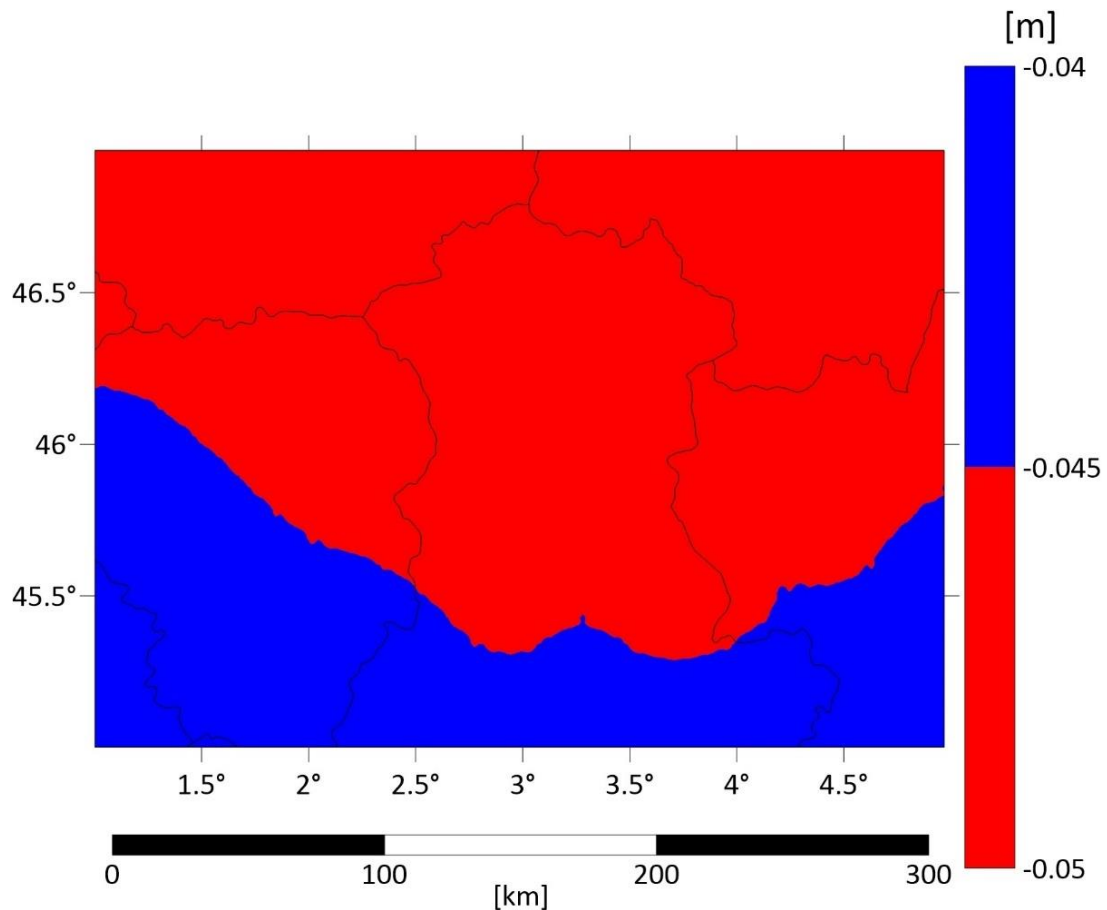
- **Регион Оверња: дефинисано је 1152 тачака грида,**

Табела 7.39: Вредности  $h^e$  и  $\zeta^{ITUGRG2021}$  за прве три од 1152 тачака грида у региону Оверња

Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$N^{ITUGRG2021}$ [m]	$\zeta-N$ [m]	$\zeta^{ITUGRG2021}$ [m]
1	1	45,002	1,003	230,087	47,997	0,004	48,001
2	2	45,002	1,087	154,851	48,151	0,001	48,152
3	3	45,002	1,171	224,756	48,296	0,004	48,300
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Табела 7.40: Моделиране вредности  $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$  и  $EK$  за прве три од 1152 тачака грида у региону Оверња

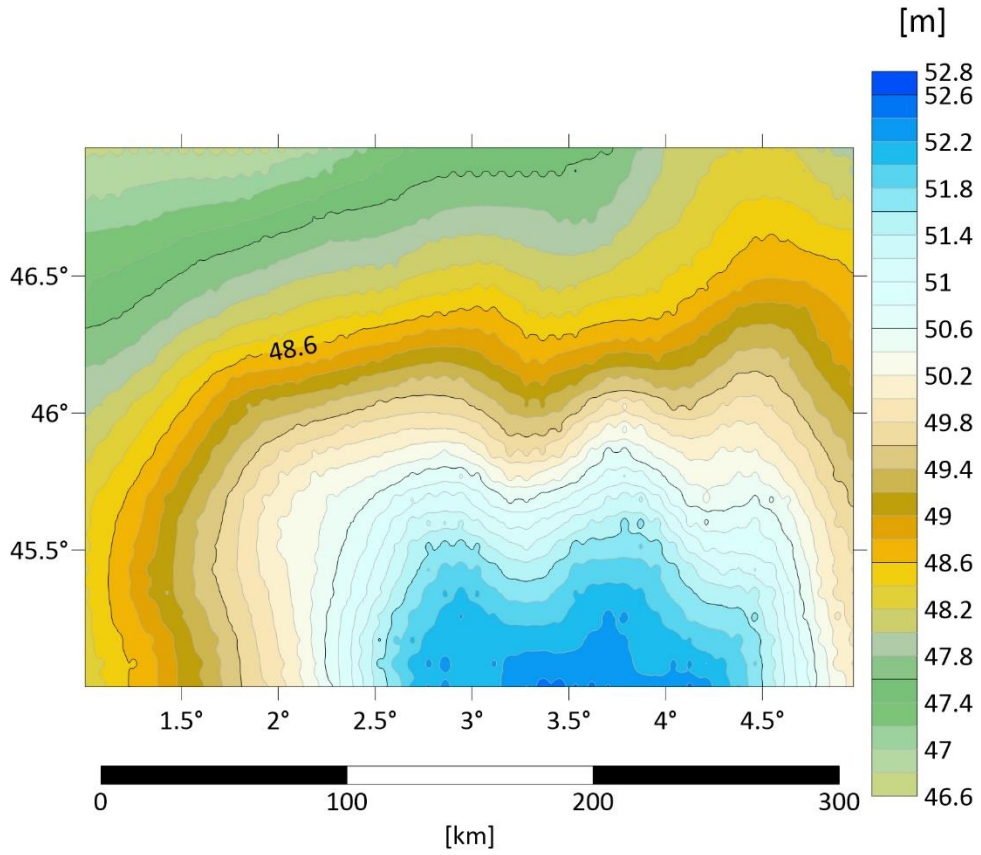
Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{EGM 2008}$ <i>tide free</i> од 0 са узрамеравањем [m]	$\zeta^{RTM}$ 5'×5' [m]	$EK$ [m]	$\zeta^{MQG}$ [m]
1	1	45,002	1,003	48,144	0,071	-0,040	48,174
2	2	45,002	1,087	48,294	0,100	-0,041	48,354
3	3	45,002	1,171	48,428	0,084	-0,041	48,472
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



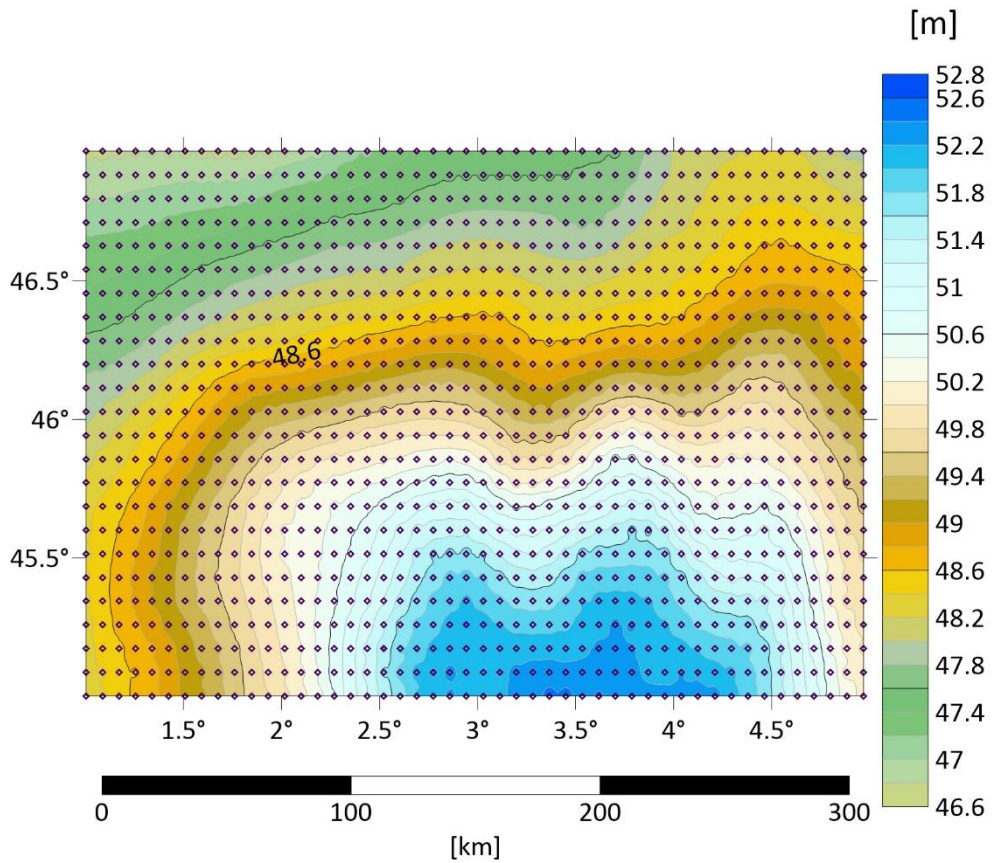
Слика 7.34 Елипсоидна корекција срачуната на 1152 тачке грида резолуције 5'×5' – регион Оверња



## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.35: Моделирана површ LMQG на 1152 тачке грида резолуције  $5' \times 5'$  – регион Оверња



Слика 7.36: Просторни распоред 1152 тачке грида резолуције  $5' \times 5'$  – регион Оверња

## 7. Нумеричка истраживања

Табела 7.41: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у региону Оверња

вредност	$min$ [m]	$max$ [m]	$average$ [m]	$range$ [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta-N$	0,000	0,093	0,018	0,093	0,016
$N^{ITUGRG2021}$	46,558	52,297	49,175	5,739	1,433
$\zeta^{ITUGRG2021}$	46,563	52,368	49,193	5,805	1,446
$\zeta^{EGM\ 2008}_{tide\ free}$	46,684	52,571	49,346	5,887	1,473
$\zeta^{RTM}_{5' \times 5'}$	-0,027	0,246	0,065	0,273	0,043
$EK$	-0,049	-0,040	-0,046	0,008	0,002
$\zeta^{LMQG}$	46,647	52,560	49,365	5,912	1,497

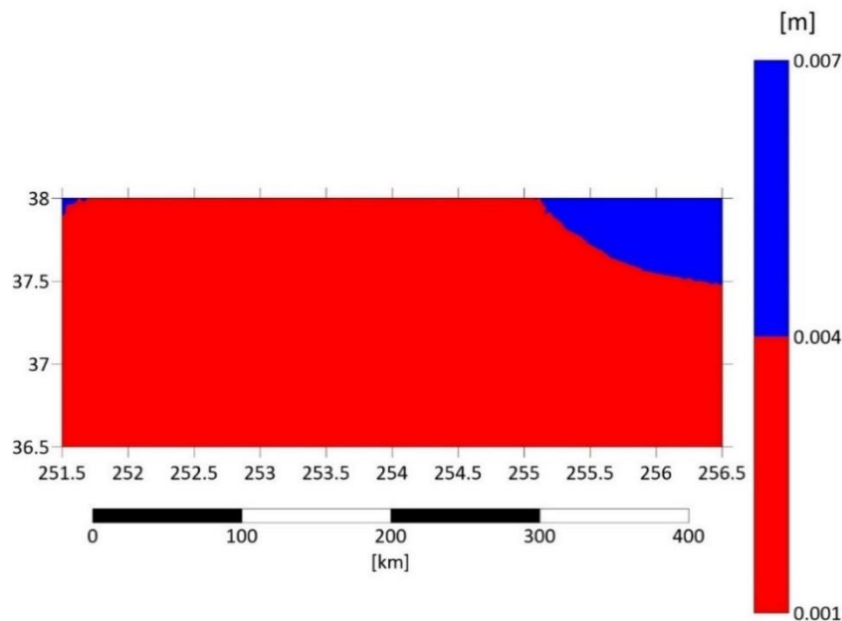
- Држава Колорадо: дефинисано је 1159 тачака грида.

Табела 7.42: Вредности  $h^e$  и  $\zeta^{ColFFTWG2020}$  за прве три од 1159 тачака грида у држави Колорадо

Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$h^e$ [m]	$\zeta^{ColFFTWG2020}$ [m]	$\Delta\zeta_{bias}$ [m]
1	1	36,500	251,500	1631,228	-21,167	0,88
2	2	36,500	251,583	1703,765	-21,113	0,88
3	3	36,500	251,667	1838,174	-21,031	0,88
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

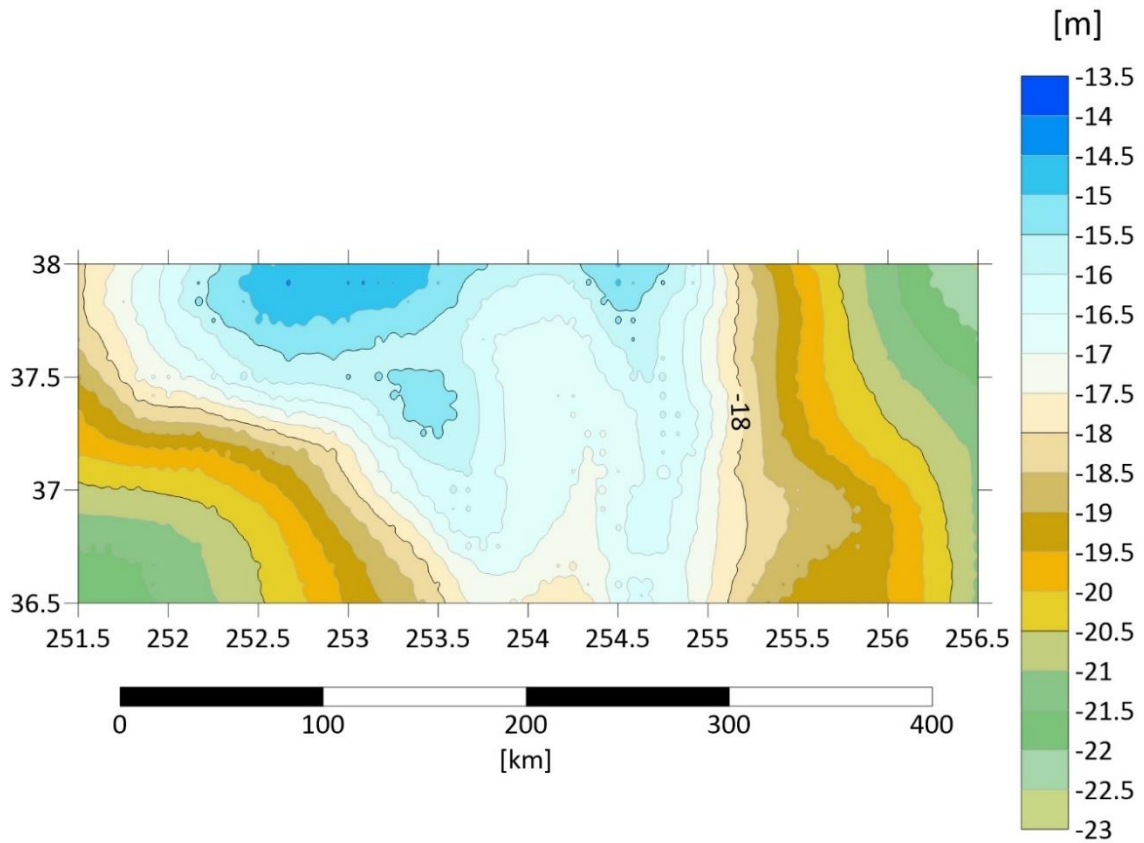
Табела 7.43: Моделиране вредности  $\zeta^{EGM2008}$ ,  $\zeta^{RTM}$  и  $EK$  за прве три од 1159 тачка грида у држави Колорадо

Р. бр.	Тачка	$B$ [°]	$L$ [°]	$\zeta^{EGM\ 2008}_{tide\ free}$ од 0 са уразмеравањем [m]	$\zeta^{RTM}_{5' \times 5'}$ [m]	$EK$ [m]	$\zeta^{LMQG}$ [m]
1	1	36,500	251,500	-21,964	0,054	0,002	-21,908
2	2	36,500	251,583	-21,944	0,049	0,002	-21,893
3	3	36,500	251,667	-21,809	-0,003	0,002	-21,809
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

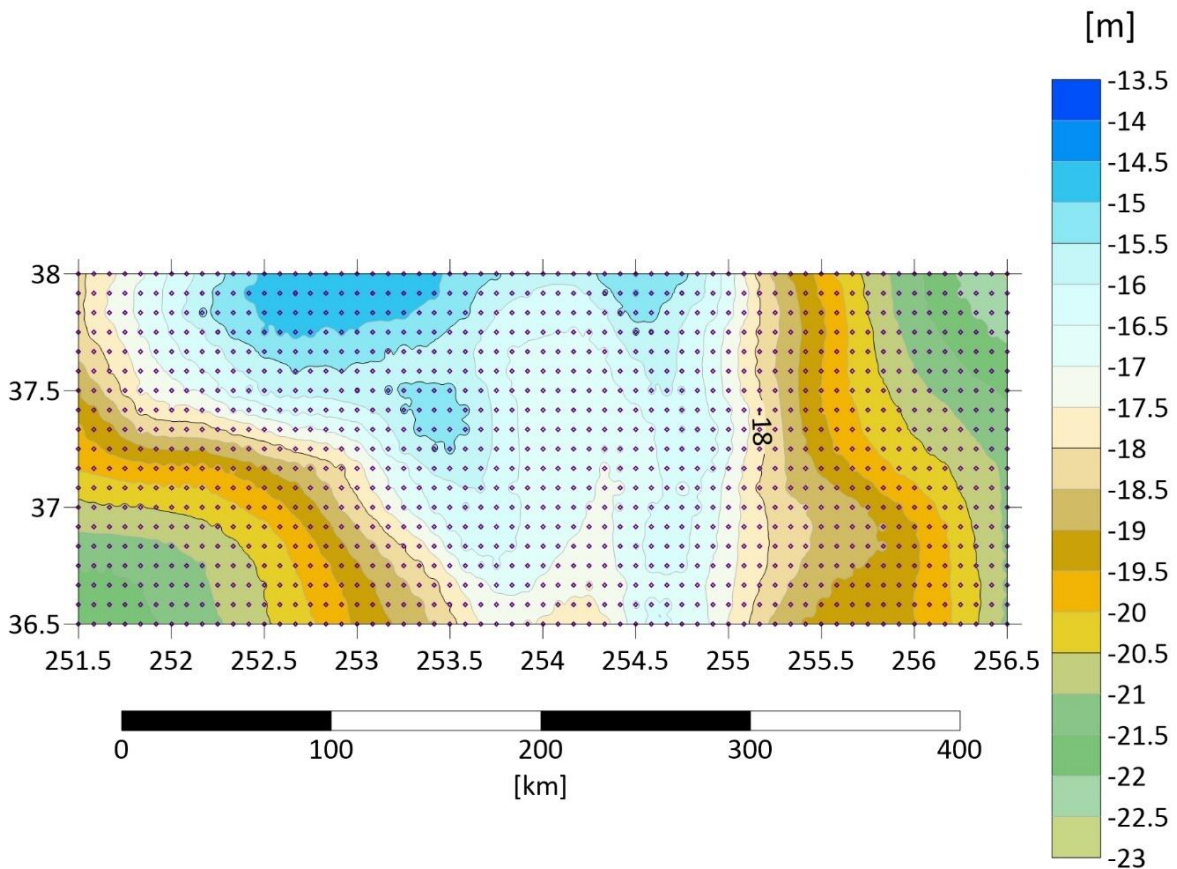


Слика 7.37: Елипсоидна корекција срачуната на 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.38: Моделирана површи LMQG на 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо



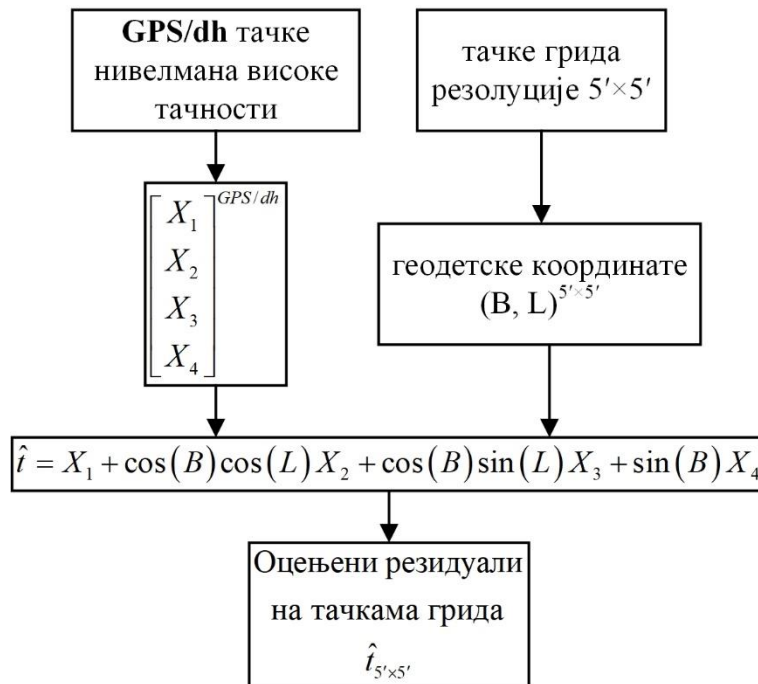
Слика 7.39: Просторни распоред 1159 тачака грида резолуције 5'×5' – држава Колорадо

Табела 7.44: Основни статистички подаци за вредности аномалије висине референтног модела и моделиране аномалије висине локалног модела на тачкама грида у држави Колорадо

вредност	<i>min</i> [m]	<i>max</i> [m]	<i>average</i> [m]	<i>range</i> [m]	$\sigma_{(stdev)}$ [m]
$\zeta^{ColFFTWG2020}$	-21,967	-13,713	-17,433	8,254	2,026
$\zeta_{tide\ free}^{EGM\ 2008}$	-22,692	-14,209	-18,161	8,483	2,065
$\zeta_{5' \times 5'}^{RTM}$	-1,048	0,637	0,097	1,685	0,164
<i>EK</i>	0,002	0,005	0,003	0,004	0,001
$\zeta^{LMOG}$	-22,627	-14,362	-18,061	8,265	2,044

#### 7.6.4 Спољашња провера резултата на тачкама грида

Спољашња провера резултата на тачкама грида, добијених помоћу једначине 7.26, се спроводи према првом и трећем начину спољашње провере на следећи начин. Прво се преузимају оцењени параметри трансформације, добијени у поступку **МНК** оцене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности. Затим се на основу њих рачунају вредности оцењених резидуала (слика 7.40) по узору на једначину 7.11, с том разликом што се овај поступак примењује на тачке грида (једначина 7.27),

Слика 7.40: Рачунање оцењених резидуала  $\hat{t}_{5' \times 5'}$  на тачкама грида

$$\hat{t}_{5' \times 5'} = \begin{bmatrix} X_1^{GPS/dh} & X_2^{GPS/dh} & X_3^{GPS/dh} & X_4^{GPS/dh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(B_{5' \times 5'}) \cos(L_{5' \times 5'}) \\ \cos(B_{5' \times 5'}) \sin(L_{5' \times 5'}) \\ \sin(B_{5' \times 5'}) \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$



У првом (једначина 7.23) и трећем (једначина 7.24) начину спољашње провере, на основу израчунатих преосталих резидуала  $R$  на **GPS/dh** тачкама, се интерполацијом одређују моделиране вредности преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида (слика 7.41).



Слика 7.41: Моделирање преосталих резидуала на тачкама грида

На крају процеса, након одређивања  $\hat{t}$  и  $\hat{R}$  моделира се транслирана површ локалног квазигеоида, прилагођена тако да максимално одговара површи референтног квазигеоида. По једначини 7.28 рачунају се коначне разлике  $\Delta\zeta_{5' \times 5'}$  између ових површи, које представљају меру успеха моделирања локалног квазигеоида у односу на референтни квазигеоид:

$$\Delta\zeta_{5' \times 5'} = \zeta_{5' \times 5'}^{LMQG-t} - \hat{R}_{5' \times 5'} - \zeta_{5' \times 5'}^{RMQG}. \quad (7.28)$$

Крајњи циљ је да се постигну минималне вредности за добијене коначне разлике,

$$\Delta\zeta_{5' \times 5'} \rightarrow \min. \quad (7.29)$$

У поступку спољашње провере резултата, **постоји разлика између другог начина и остала два**. Главна разлика у поступку моделирања је та што се не користе **GPS/dh** тачке нивелмана високе тачности за оцену параметара трансформације  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$  (табела 7.45) и моделирања преосталих резидуала  $R$ . Уместо тога, цео процес се врши на тачкама грида.

Табела 7.45: Оцењене вредности параметара трансформације – други начин спољашње провере

Подручје	$X_1$ [m]	$X_2$ [m]	$X_3$ [m]	$X_4$ [m]
Р. Србија	22,407	-16,122	-2,882	-15,681
Оверња	12,550	-5,613	1,397	-11.869
Колорадо	-226,323	-50,332	-175,406	134,434

**МНК** оцена параметара трансформације, сада се спроводи у односу на иницијалне резидуале, који се рачунају као разлика између моделираних **LMQG** и референтних **RMQG** аномалија висине на тачкама грида. Ови иницијални резидуали, након примене четворопараметарске трансформације, трансформишу се у оцењене резидуале такође на тачкама грида.



Поступак рачунања преосталих резидуала  $R$  се обавља као разлика између транслиране површи локалног квазигеоида за вредност оцењених резидуала  $LMQG\_t$  и референтног квазигеоида  $RMQG$ :

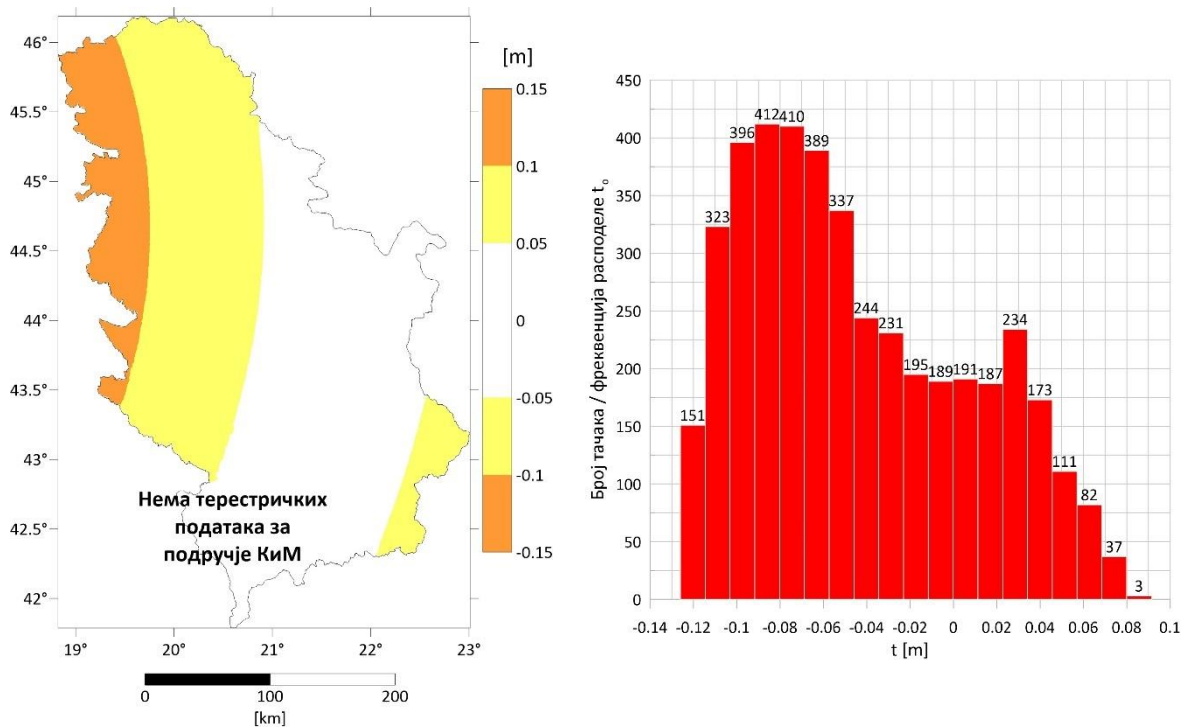
$$R_{5' \times 5'} = \zeta_{5' \times 5'}^{LMQG\_t} - \zeta_{5' \times 5'}^{RMQG}. \quad (7.30)$$

Затим се моделира резидуална површ преосталих резидуала, а преко ње се врши екстракција вредности преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида. На тај начин, урађена је прерасподела (хомогенизација) тачности ових вредности на читавом гриду, које се затим користе за моделирање оцењених вредности преосталих резидуала:

$$R_{5' \times 5'} \xrightarrow{\text{интерполација}} \hat{R}_{5' \times 5'}. \quad (7.31)$$

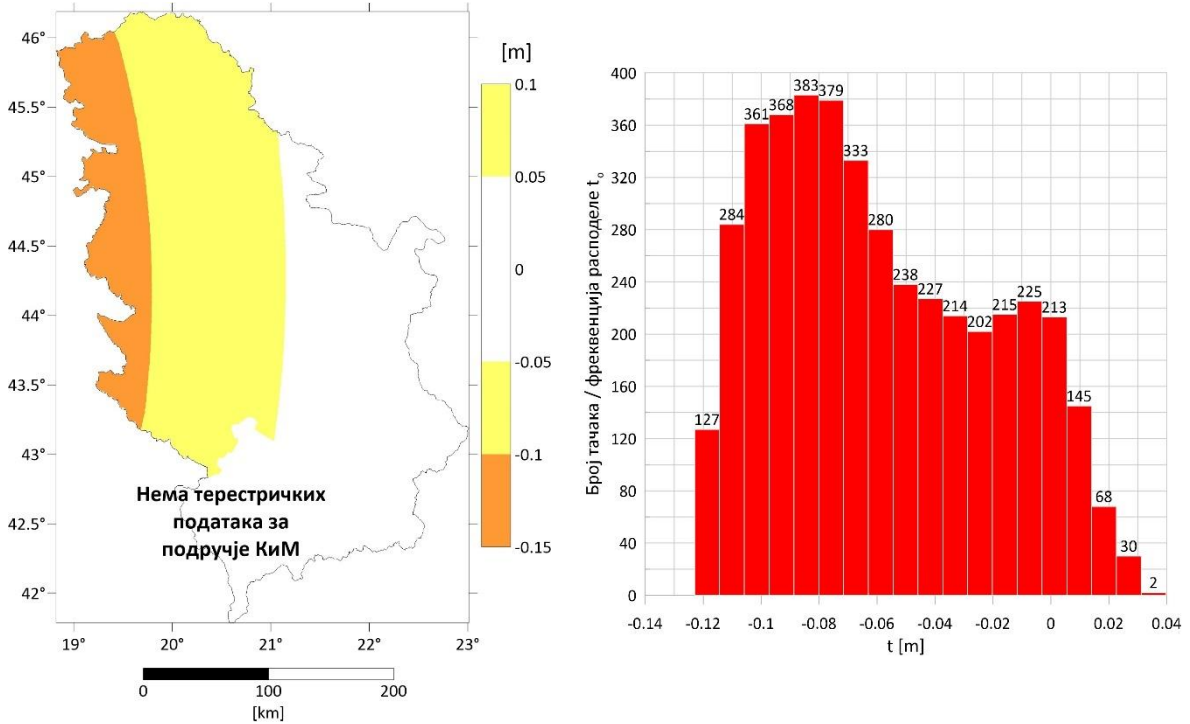
Као и у осталим поступцима спољашње провере у последњем кораку, моделира се транслирана површ локалног квазигеоида, која је прилагођена тако да што је максимално транслирана ка површи референтног квазигеоида. Разлика између ових површи су коначне разлике  $\Delta\zeta_{5' \times 5'}$ , које представљају меру успешности моделирања локалног у односу на референтни квазигеоид и рачуна се по једначини 7.28.

Слике од 7.42 до 7.50 приказују графичке приказе површи и хистограме расподеле оцењених резидуала  $\hat{t}$  на тачкама грида за сва три подручја и сва три начина спољашње провере резултата.

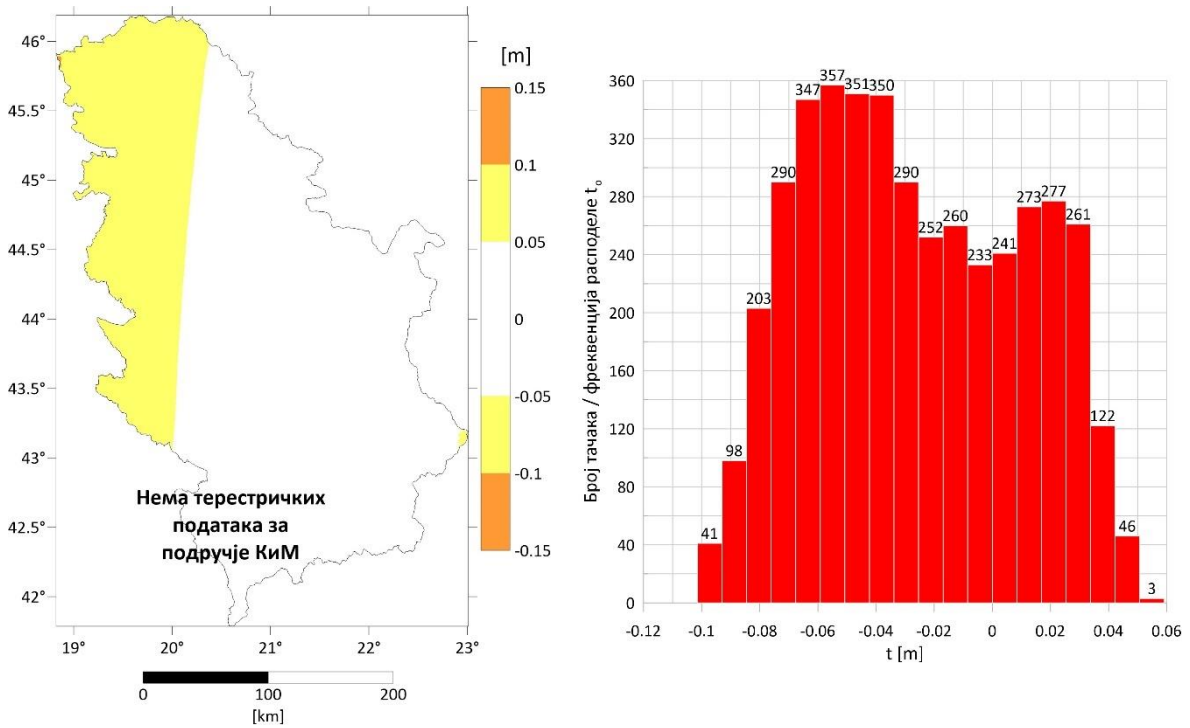


Слика 7.42: Површ  $\hat{t}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања

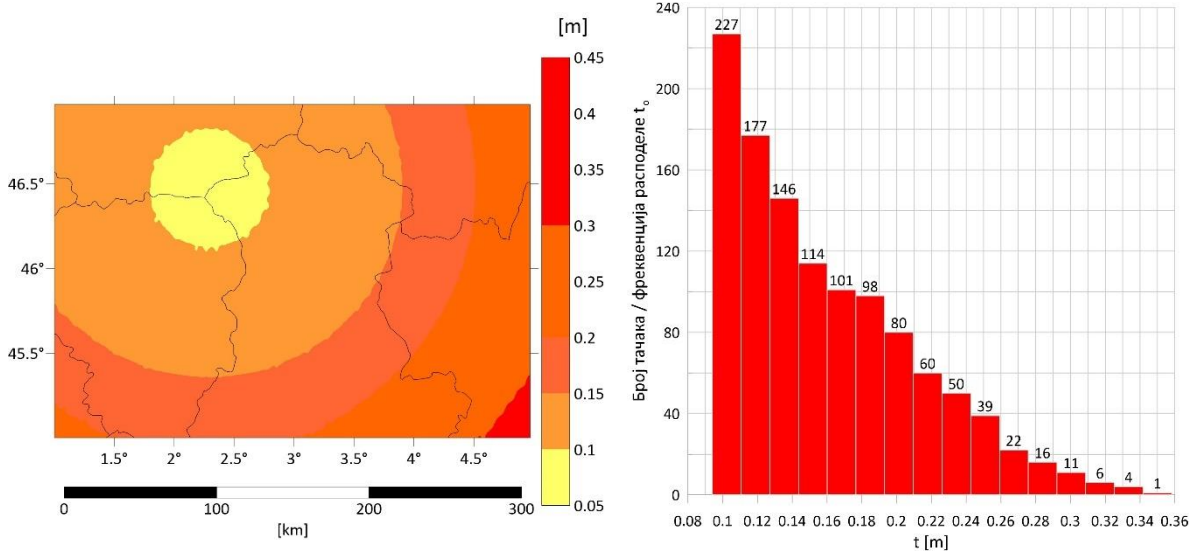


Слика 7.43: Површ  $\hat{t}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за  $P$ . Србију – други начин спољашње провере

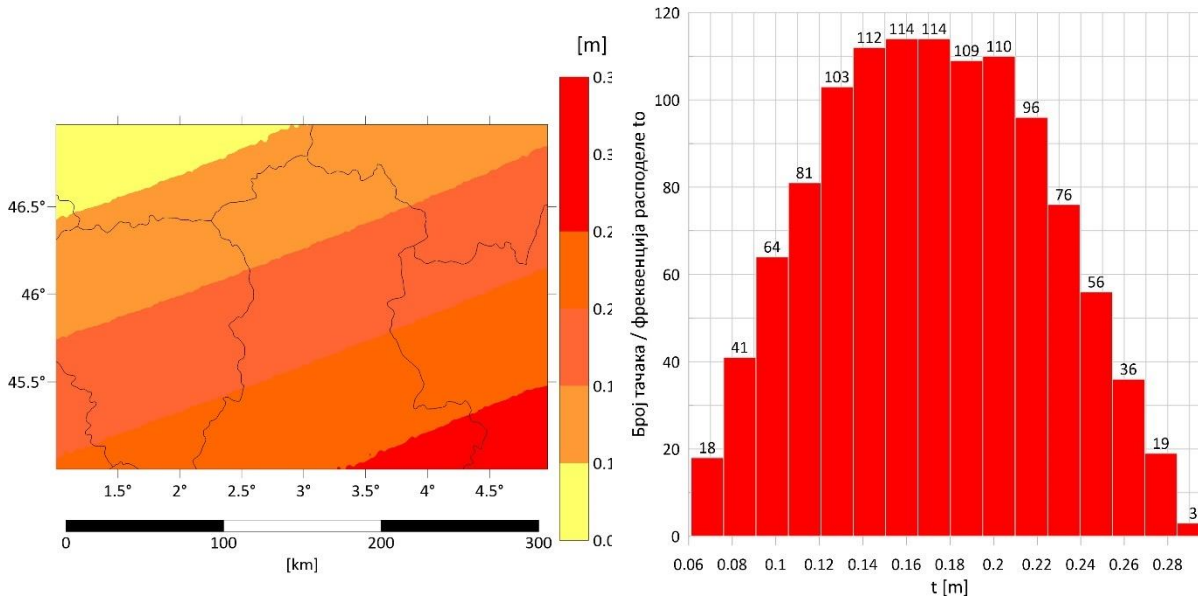


Слика 7.44: Површ  $\hat{t}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за  $P$ . Србију – трећи начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања

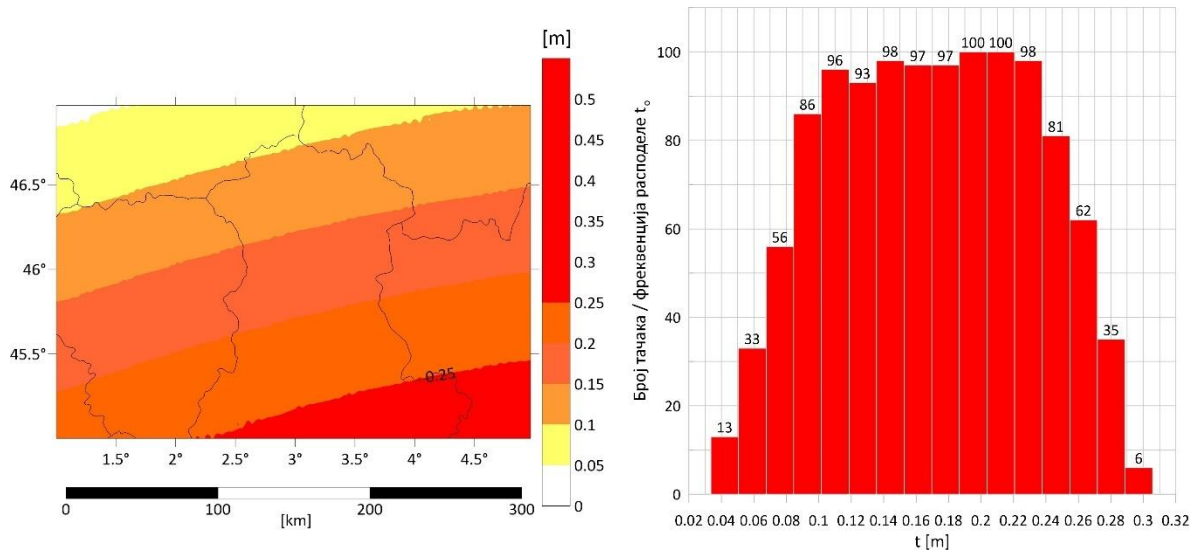


Слика 7.45: Површ  $\hat{t}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

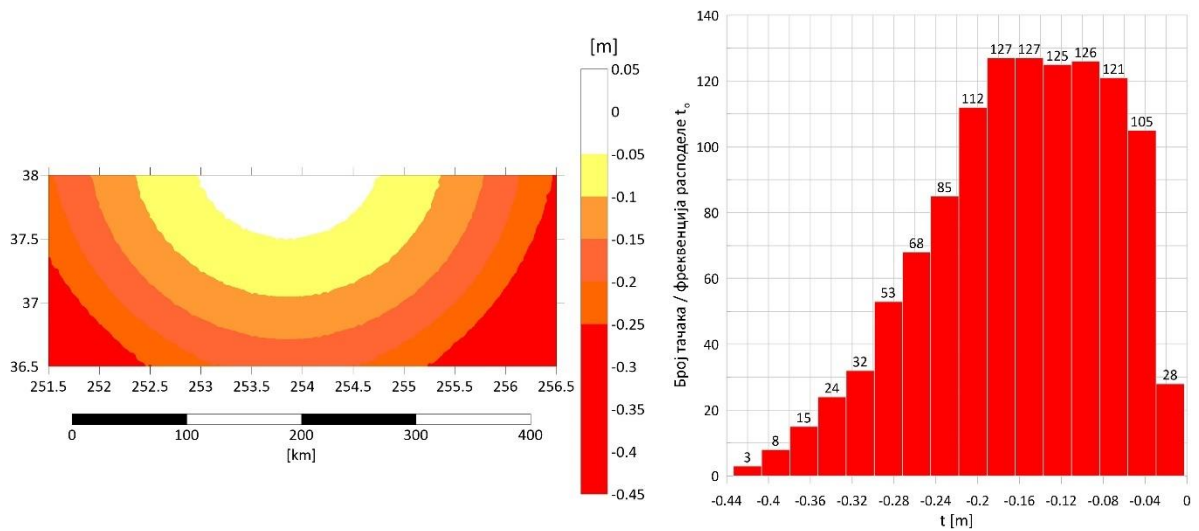


Слика 7.46: Површ  $\hat{t}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере

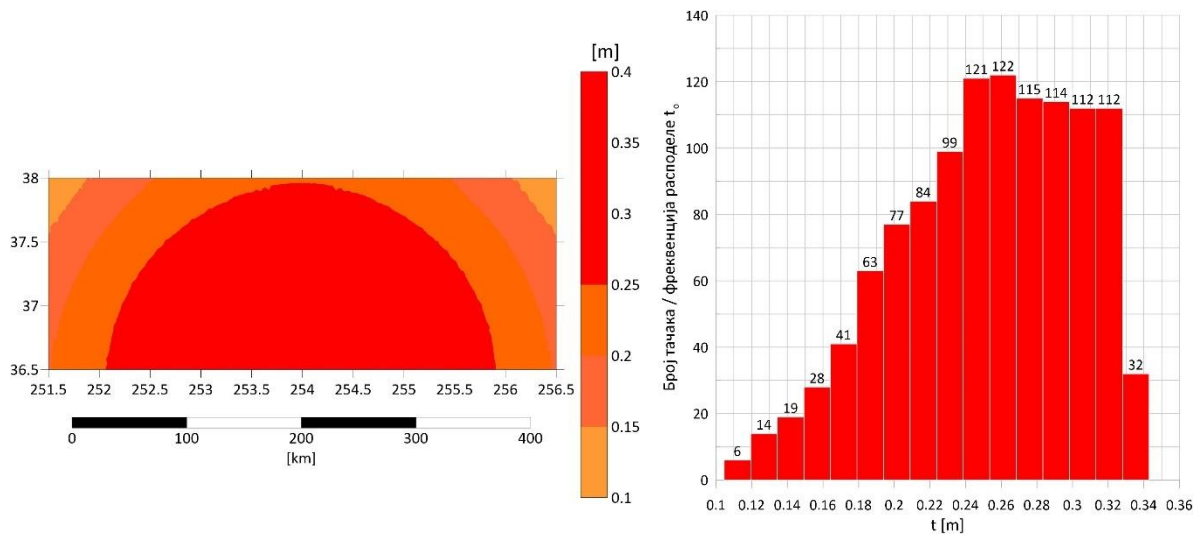
## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.47: Површ  $\hat{t}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере

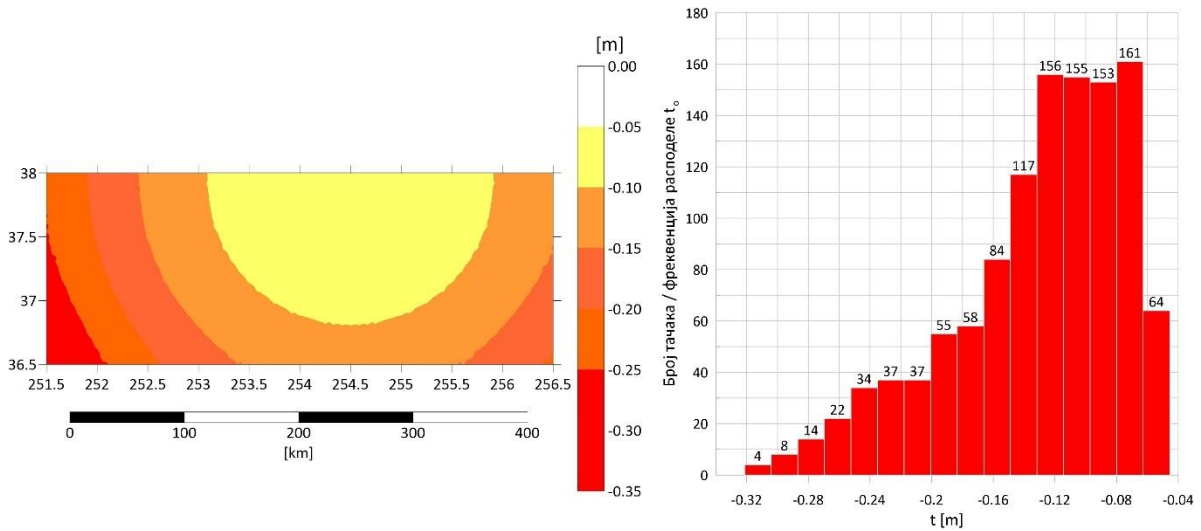


Слика 7.48: Површ  $\hat{t}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере



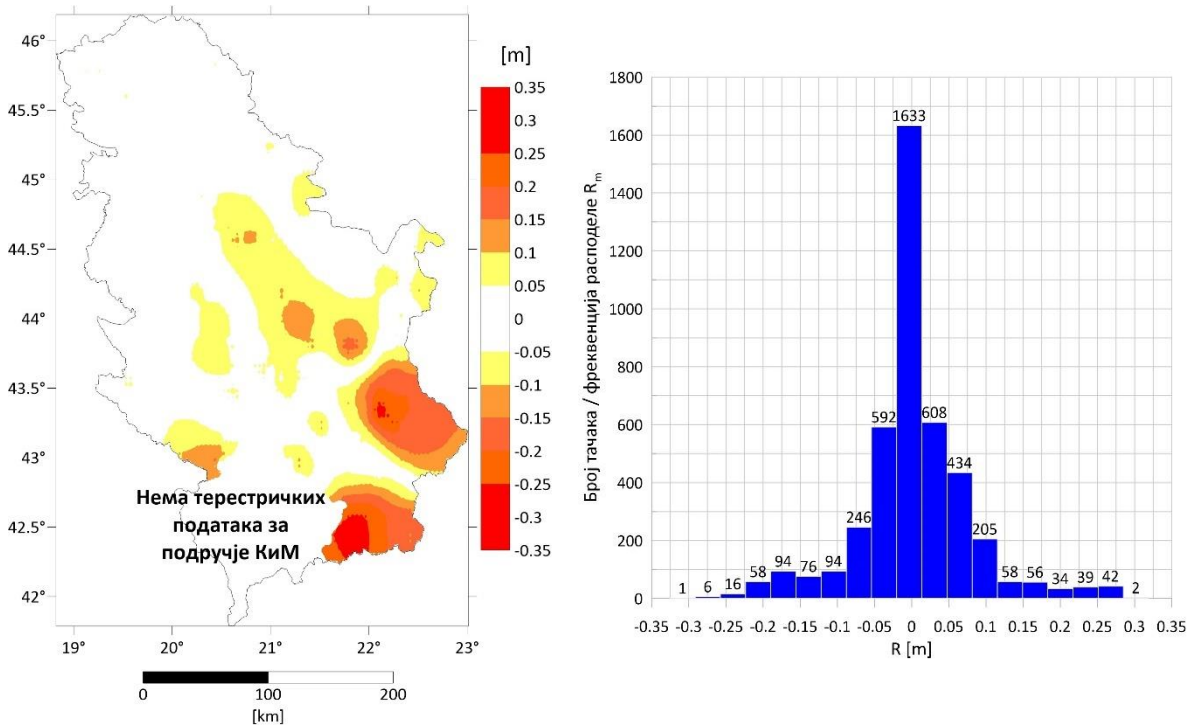
Слика 7.49: Површ  $\hat{t}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



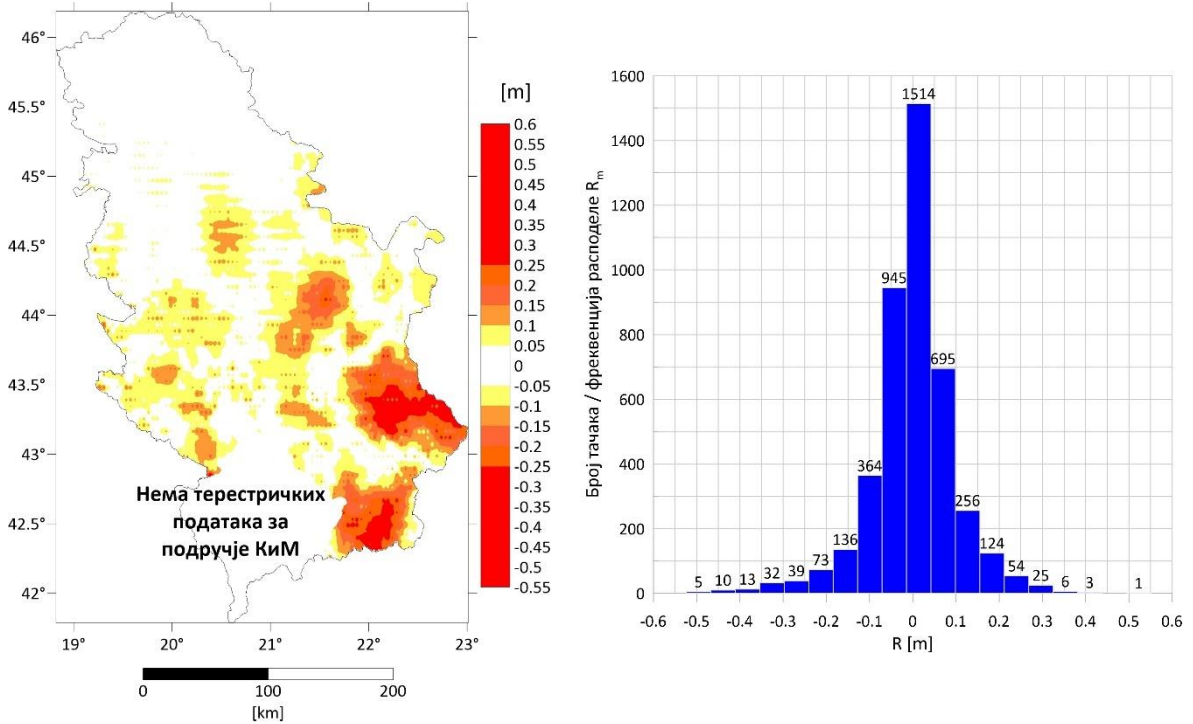
Слика 7.50: Површ  $\hat{t}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере

Слике од 7.51 до 7.59 представљају графичке приказе површи и хистограме расподеле оцењених преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида за сва три подручја и сва три начина спољашње провере резултата.

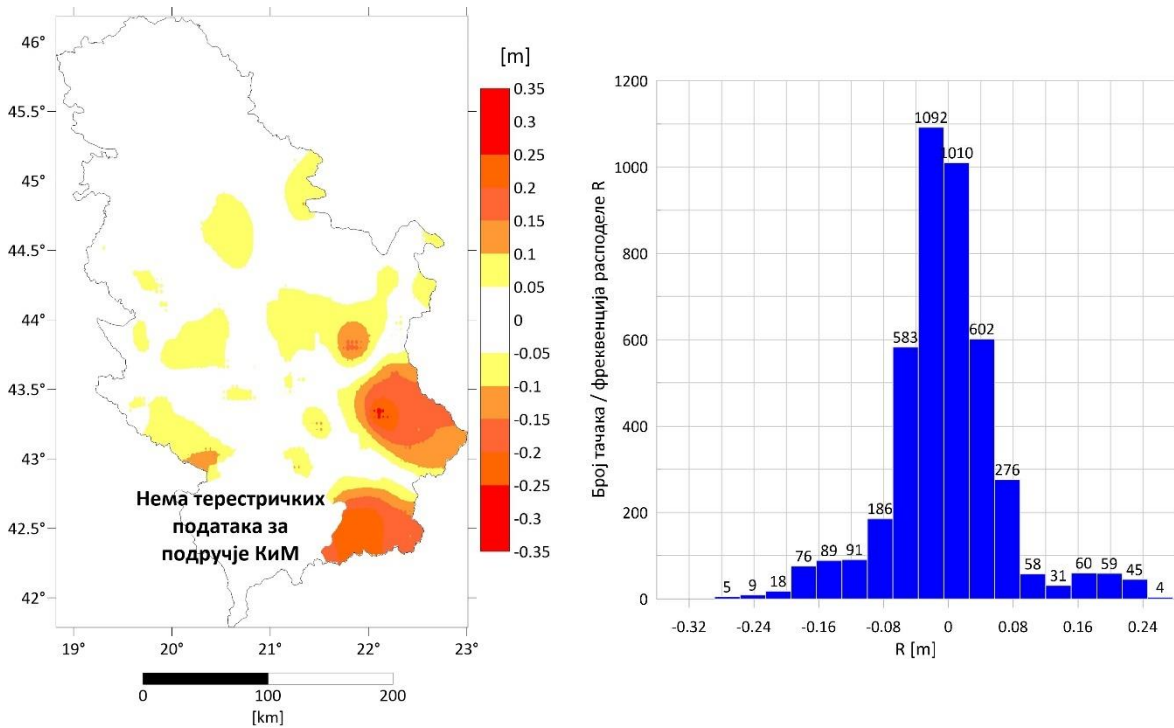


Слика 7.51: Површ  $\hat{R}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



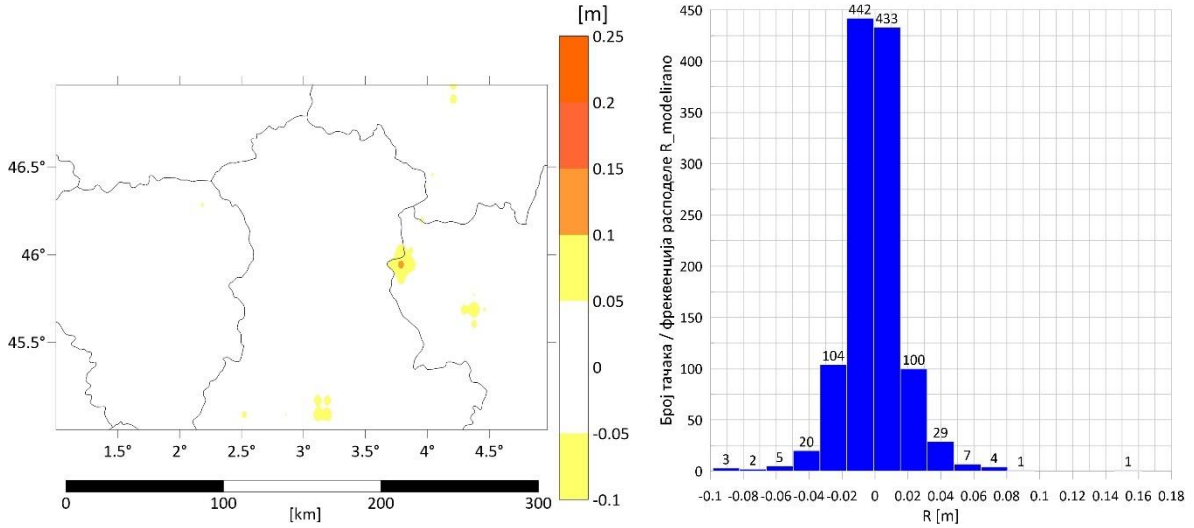
Слика 7.52: Површ  $\hat{R}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за  $R$ . Србију – други начин спољашње провере



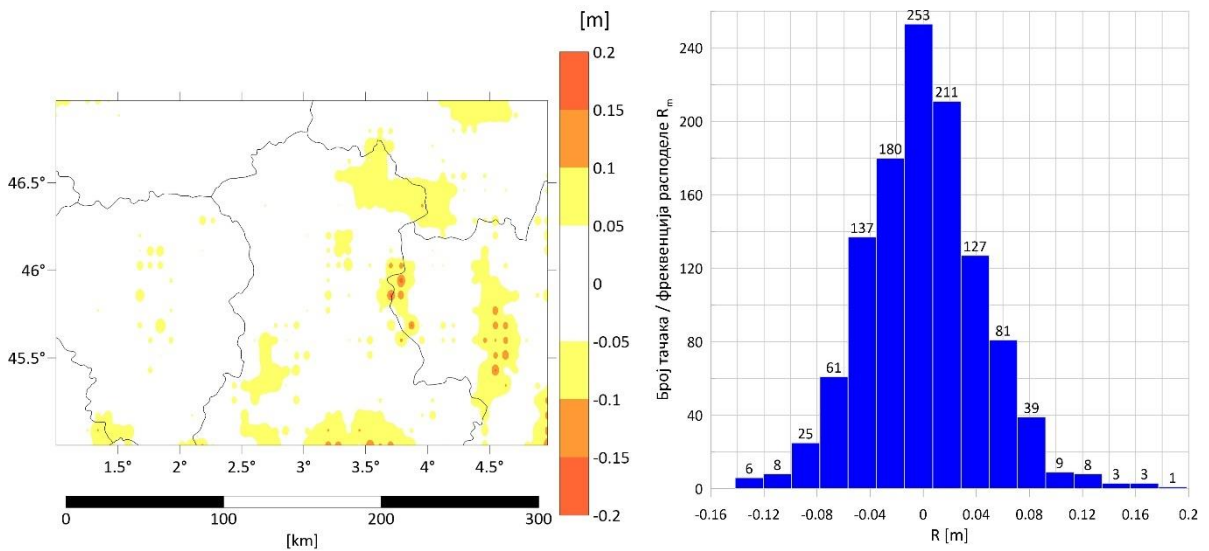
Слика 7.53: Површ  $\hat{R}$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за  $R$ . Србију – трећи начин спољашње провере



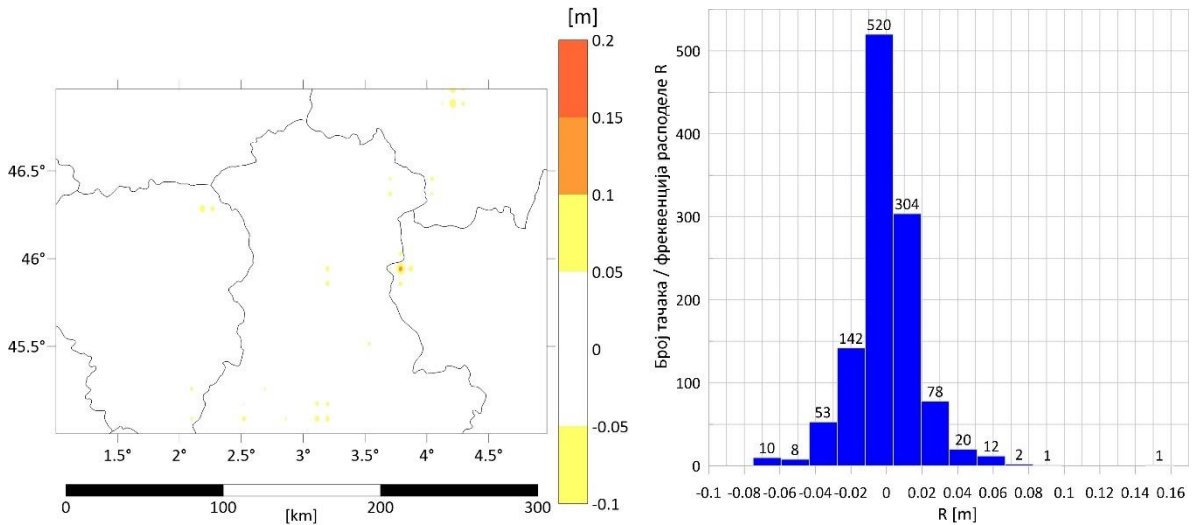
## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.54: Површ  $\hat{R}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

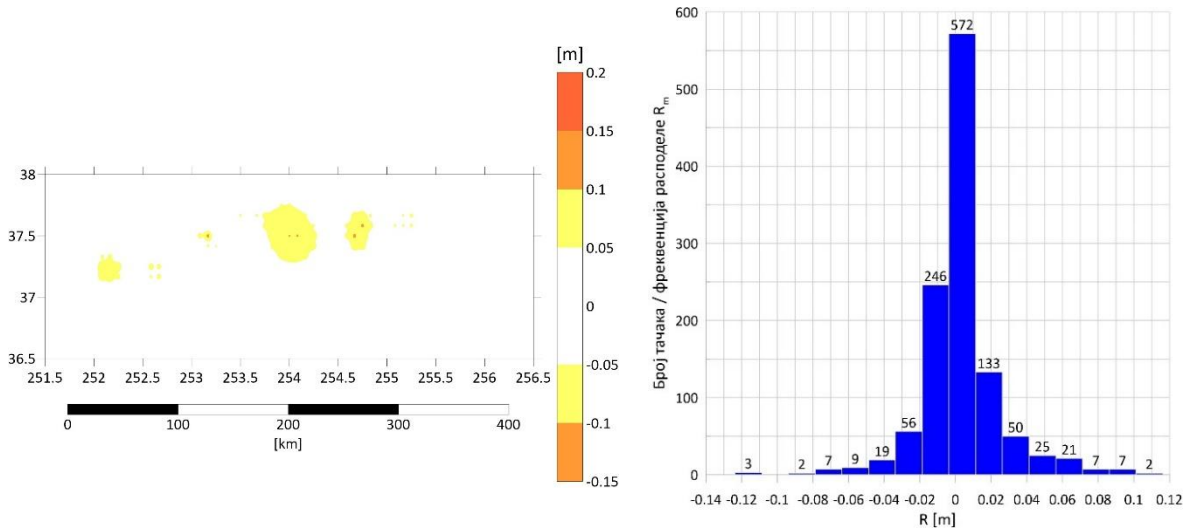


Слика 7.55: Површ  $\hat{R}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере

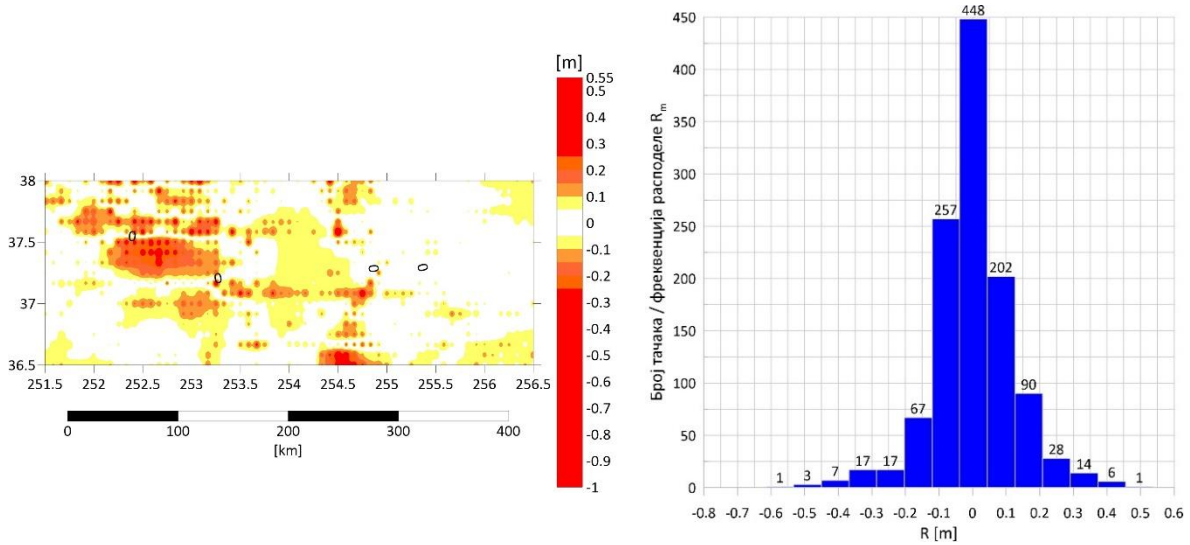


Слика 7.56: Површ  $\hat{R}$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере

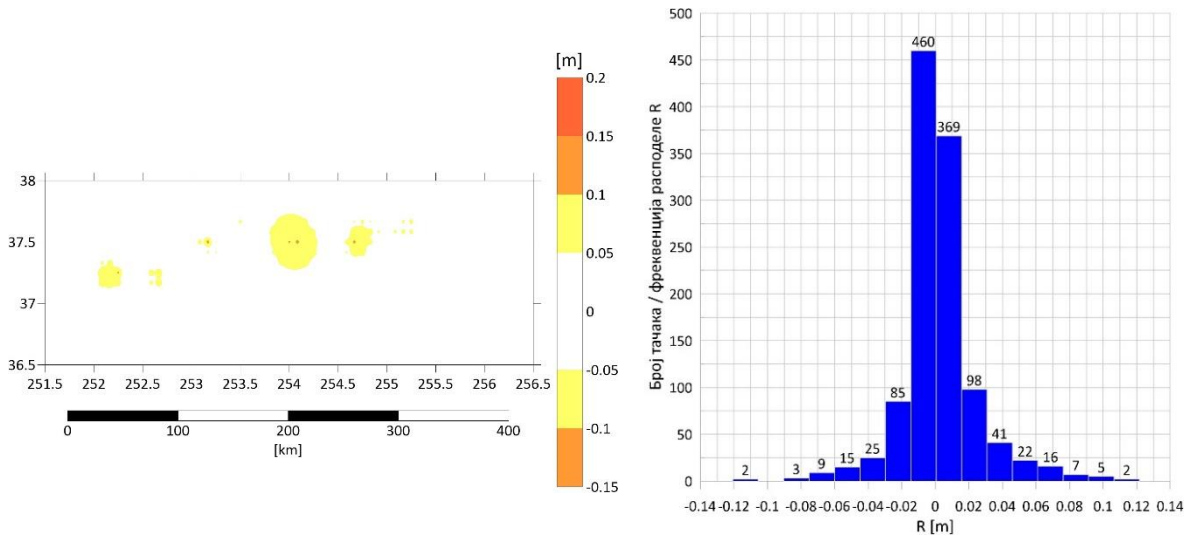
## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.57: Површ  $\hat{R}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере



Слика 7.58: Површ  $\hat{R}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере

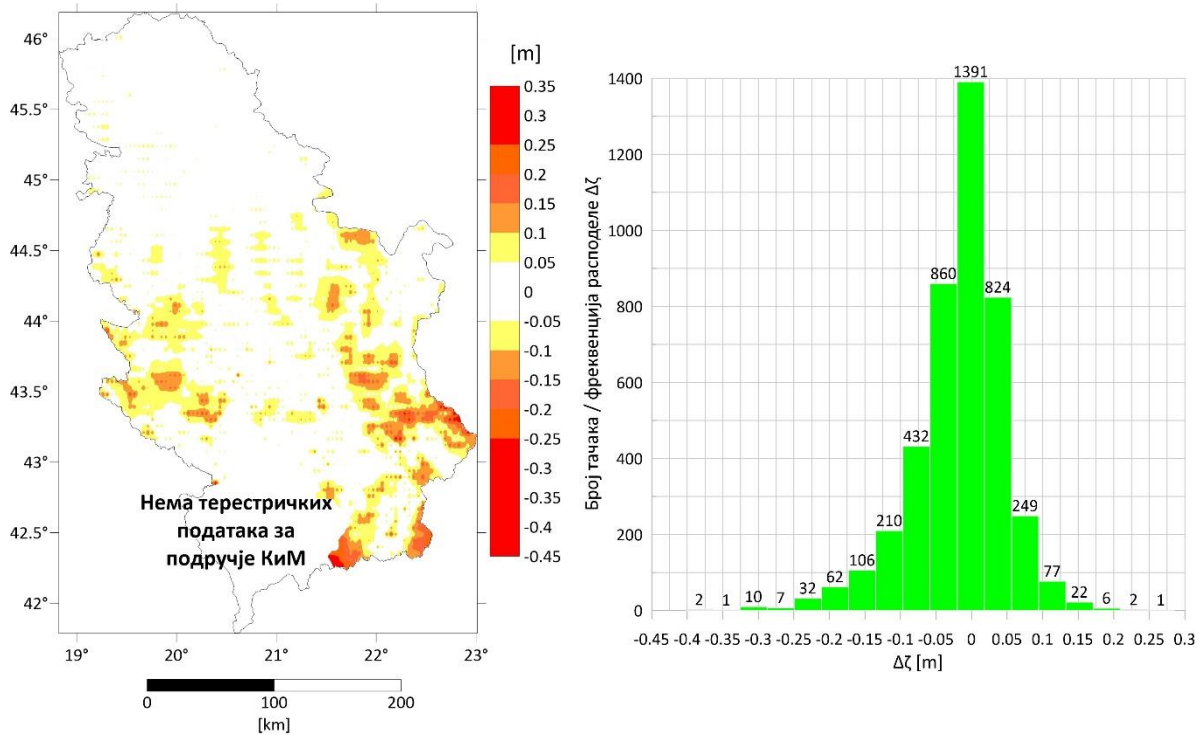


Слика 7.59: Површ  $\hat{R}$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере

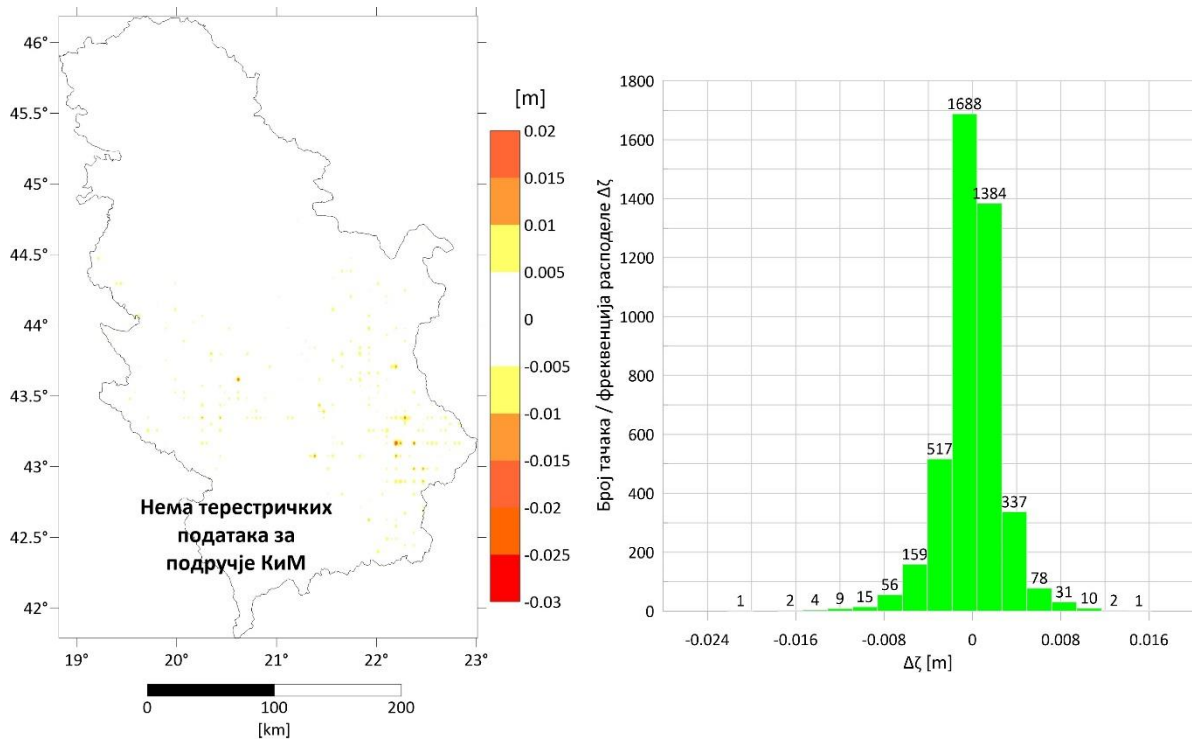


## 7. Нумеричка истраживања

Слике од 7.60 до 7.68 илуструју графичке приказе површи и хистограме расподеле коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида за сва три подручја и сва три начина спољашње провере резултата.

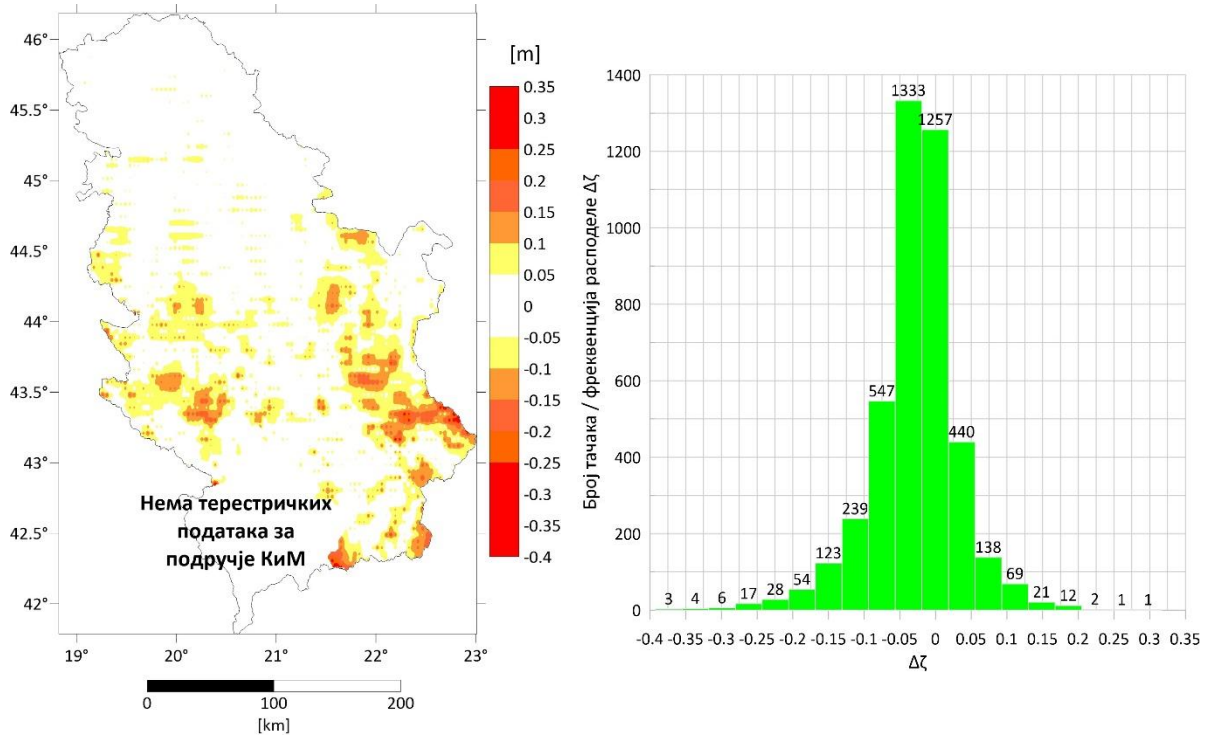


Слика 7.60: Површи  $\Delta\zeta$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – први начин спољашње провере

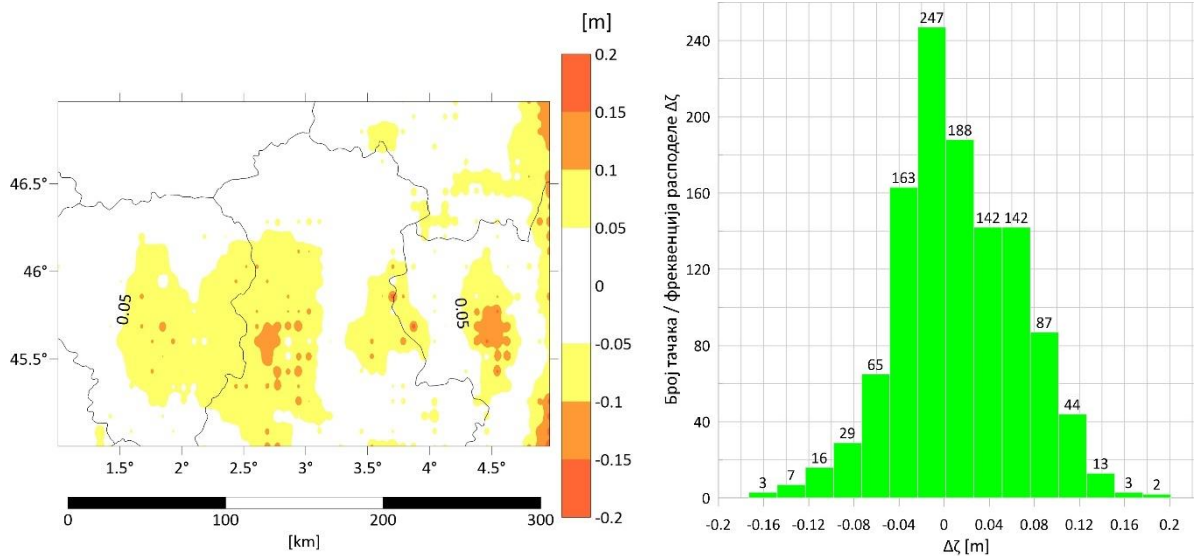


Слика 7.61: Површи  $\Delta\zeta$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – други начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања

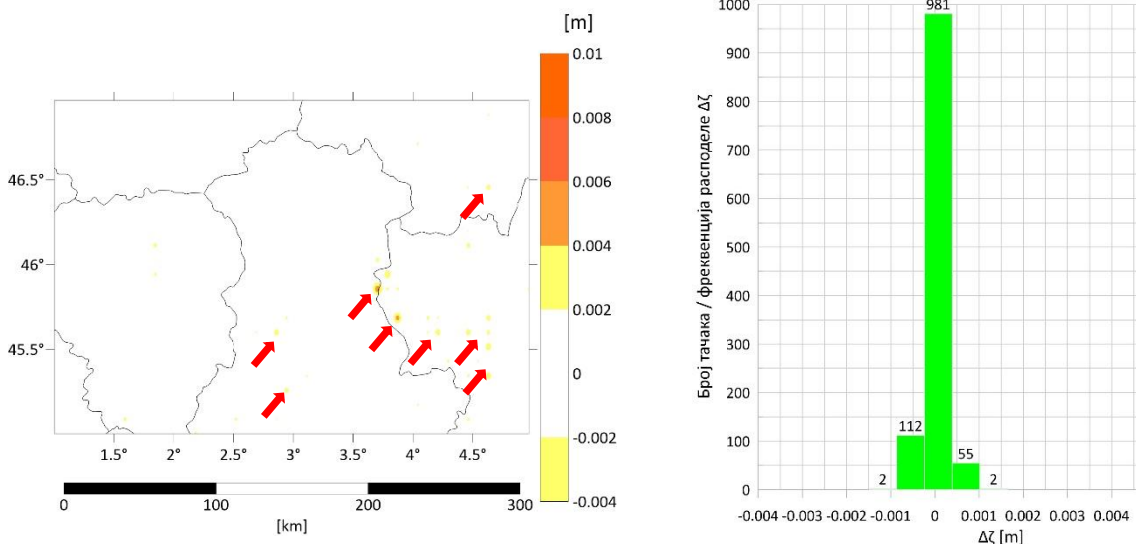


Слика 7.62: Површ  $\Delta\zeta$  на 4295 тачака грида и хистограм расподеле за Р. Србију – трећи начин спољашње провере

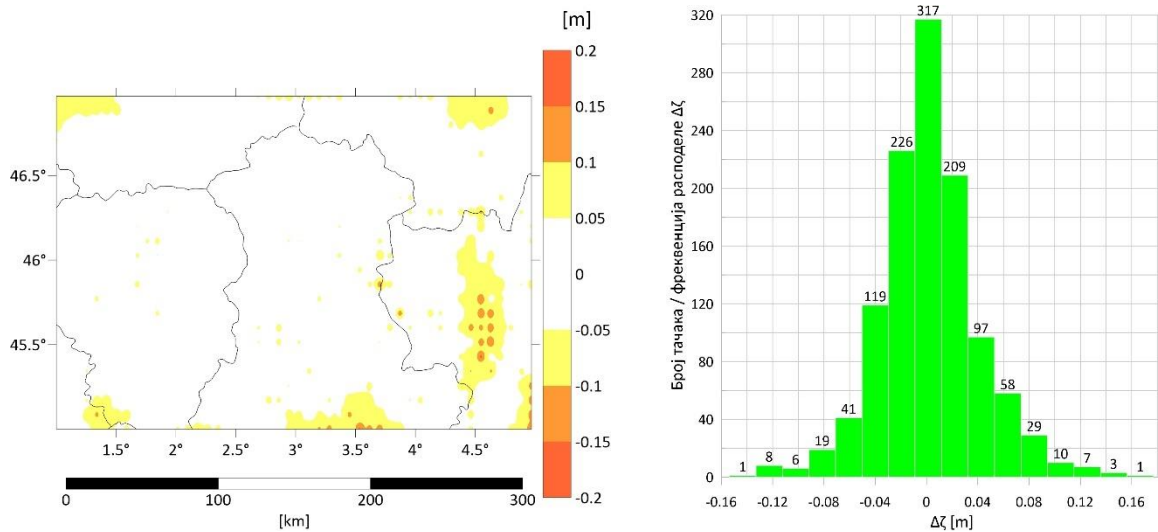


Слика 7.63: Површ  $\Delta\zeta$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – први начин спољашње провере

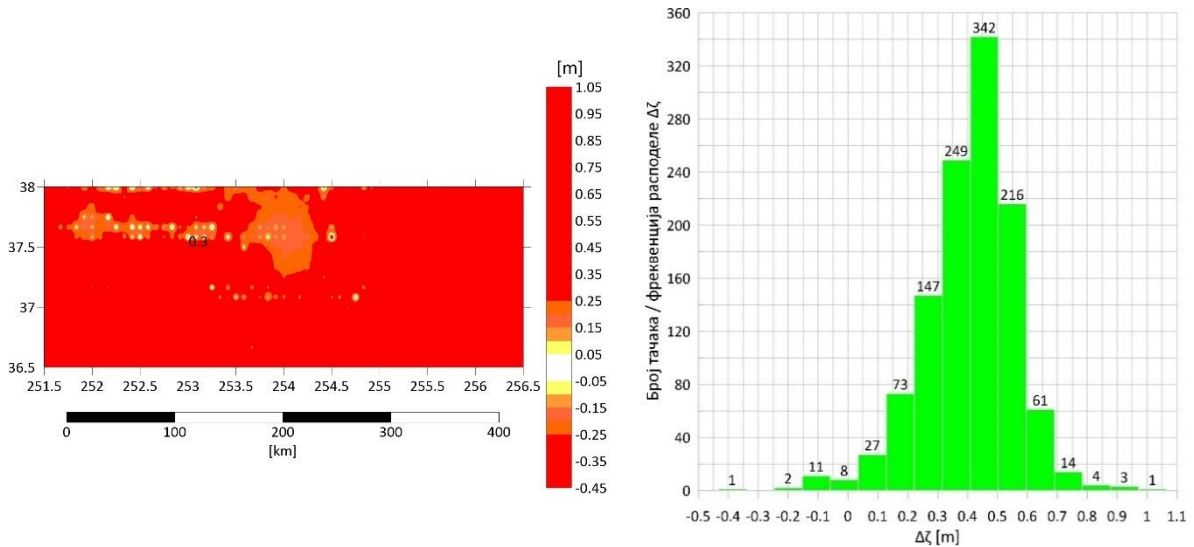
## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.64: Површ  $\Delta z$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – други начин спољашње провере

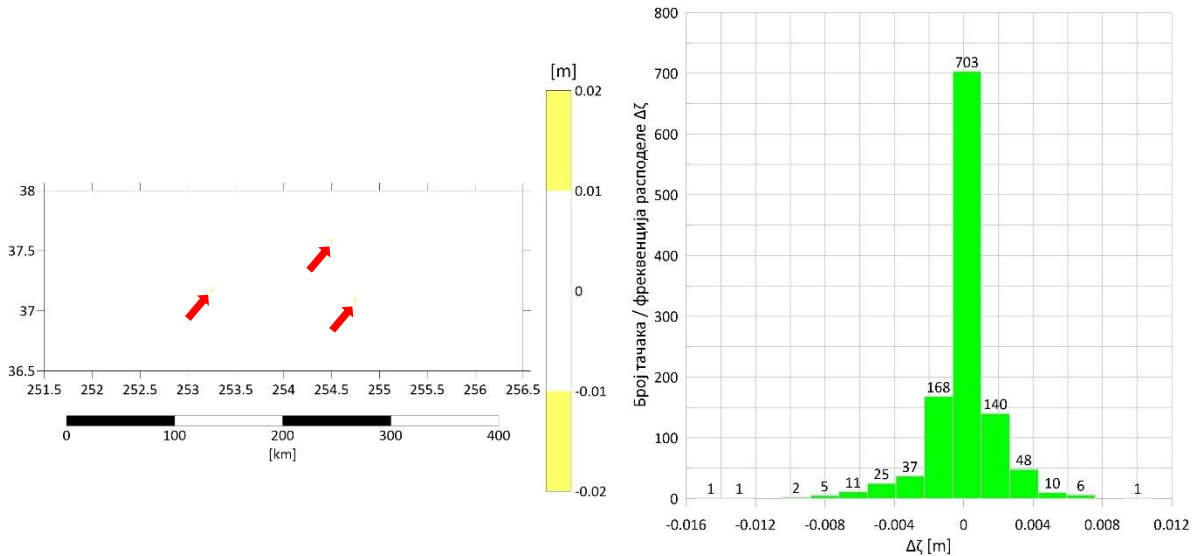


Слика 7.65: Површ  $\Delta z$  на 1152 тачке грида и хистограм расподеле за регион Оверња – трећи начин спољашње провере

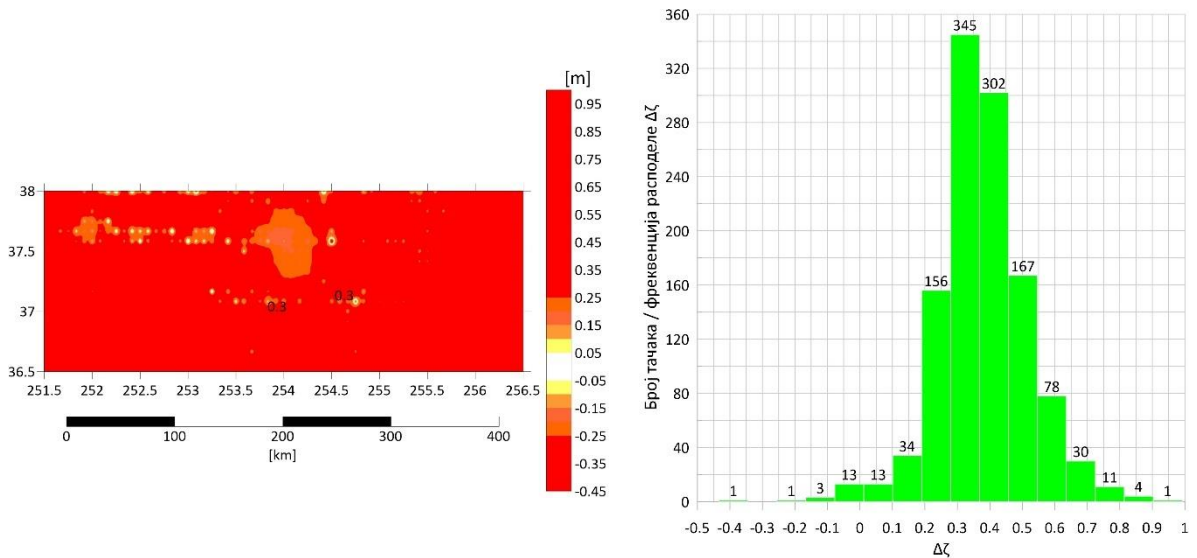


Слика 7.66: Површ  $\Delta z$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – први начин спољашње провере

## 7. Нумеричка истраживања



Слика 7.67: Површ  $\Delta\zeta$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – други начин спољашње провере



Слика 7.68: Површ  $\Delta\zeta$  на 1159 тачака грида и хистограм расподеле за државу Колорадо – трећи начин спољашње провере

У табелама 7.46, 7.47 и 7.48 су наведени распони оцењених резидуала  $\hat{i}$  за сва три начина спољашње провере у свим подручјима.

Табела 7.46: Распони оцењених резидуала  $\hat{i}$  на тачкама грида – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{i} > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	560	48,61%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{i} \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	507	44,01%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \hat{i} \leq 0,10 \text{ m}$	191	4,45%	85	7,38%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{i} < 0,05 \text{ m}$	824	19,19%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{i} < 0,00 \text{ m}$	970	22,58%	0	0,00%	110	9,49%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{i} < -0,05 \text{ m}$	1738	40,47%	0	0,00%	222	19,15%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{i} < -0,10 \text{ m}$	572	13,32%	0	0,00%	232	20,02%
$\hat{i} < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	595	51,34%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

7. Нумеричка истраживања

Табела 7.47: Распони оцењених резидуала  $\hat{t}$  на тачкама грида – други начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{t} > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	735	63,80%	1118	96,46%
$0,10 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	322	27,95%	41	3,54%
$0,05 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,10 \text{ m}$	0	0,00%	95	8,25%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{t} \leq 0,05 \text{ m}$	383	8,92%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{t} < 0,00 \text{ m}$	1279	29,78%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,05 \text{ m}$	1977	46,03%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,10 \text{ m}$	656	15,27%	0	0,00%	0	0,00%
$\hat{t} < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

Табела 7.48: Распони оцењених резидуала  $\hat{t}$  на тачкама грида – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{t} > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	692	60,07%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	279	24,22%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \hat{t} \leq 0,10 \text{ m}$	6	0,14%	168	14,58%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{t} \leq 0,05 \text{ m}$	1217	28,34%	13	1,13%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{t} < 0,00 \text{ m}$	1705	39,70%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,05 \text{ m}$	1364	31,76%	0	0,00%	408	35,20%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{t} < -0,10 \text{ m}$	3	0,07%	0	0,00%	404	34,86%
$\hat{t} < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	347	29,94%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

У наставку, табеле 7.49, 7.50 и 7.51 приказују распоне моделираних преосталих резидуала  $\hat{R}$  за сва три начина спољашње провере у свим подручјима.

Табела 7.49: Распони оцењених преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{R} > 0,15 \text{ m}$	173	4,03%	1	0,09%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,15 \text{ m}$	121	2,82%	0	0,00%	2	0,17%
$0,05 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,10 \text{ m}$	529	12,32%	10	0,87%	43	3,71%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{R} \leq 0,05 \text{ m}$	1137	26,47%	526	45,66%	568	49,01%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{R} < 0,00 \text{ m}$	1702	39,63%	604	52,43%	525	45,30%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,05 \text{ m}$	326	7,59%	11	0,95%	18	1,55%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,10 \text{ m}$	118	2,75%	0	0,00%	3	0,26%
$\hat{R} < -0,15 \text{ m}$	189	4,40%	0	0,00%	0	0,00%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

7. Нумеричка истраживања

Табела 7.50: Распони оцењених преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида – други начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{R} > 0,15 \text{ m}$	229	5,33%	4	0,35%	107	9,23%
$0,10 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,15 \text{ m}$	232	5,40%	14	1,22%	64	5,52%
$0,05 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,10 \text{ m}$	553	12,88%	123	10,68%	138	11,91%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{R} \leq 0,05 \text{ m}$	1220	28,41%	417	36,20%	255	22,00%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{R} < 0,00 \text{ m}$	1132	26,36%	455	39,50%	279	24,07%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,05 \text{ m}$	487	11,34%	125	10,85%	173	14,93%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,10 \text{ m}$	201	4,68%	14	1,22%	61	5,26%
$\hat{R} < -0,15 \text{ m}$	241	5,61%	0	0,00%	82	7,08%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

Табела 7.51: Распони оцењених преосталих резидуала  $\hat{R}$  на тачкама грида – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\hat{R} > 0,15 \text{ m}$	169	3,93%	1	0,09%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,15 \text{ m}$	62	1,44%	0	0,00%	3	0,26%
$0,05 \text{ m} < \hat{R} \leq 0,10 \text{ m}$	427	9,94%	15	1,30%	38	3,28%
$0,00 \text{ m} \leq \hat{R} \leq 0,05 \text{ m}$	1119	26,05%	594	51,56%	566	48,84%
$-0,05 \text{ m} \leq \hat{R} < 0,00 \text{ m}$	1781	41,47%	528	45,83%	527	45,47%
$-0,10 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,05 \text{ m}$	447	10,41%	14	1,22%	23	1,98%
$-0,15 \text{ m} \leq \hat{R} < -0,10 \text{ m}$	135	3,14%	0	0,00%	2	0,17%
$\hat{R} < -0,15 \text{ m}$	155	3,61%	0	0,00%	0	0,00%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

На крају, у табелама 7.52, 7.53 и 7.54, представљене су коначне разлике између максимално транслираних површи локалних модела квазигеоида и референтних површи квазигеоида за сва три начина спољашње провере у свим подручјима.

Табела 7.52: Распони коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	20	0,47%	6	0,52%	1100	94,91%
$0,10 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,15 \text{ m}$	76	1,77%	60	5,21%	22	1,90%
$0,05 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,10 \text{ m}$	338	7,87%	235	20,40%	9	0,78%
$0,00 \text{ m} \leq \Delta\zeta \leq 0,05 \text{ m}$	1369	31,87%	332	28,82%	9	0,78%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,00 \text{ m}$	1503	34,99%	403	34,98%	4	0,35%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	586	13,64%	90	7,81%	7	0,60%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	225	5,24%	22	1,91%	5	0,43%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	178	4,14%	4	0,35%	3	0,26%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%



7. Нумеричка истраживања

Табела 7.53: Распони коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – други начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$0,10 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$0,05 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,10 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$0,00 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	2188	50,94%	556	48,26%	602	51,94%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,00 \text{ m}$	2107	49,06%	596	51,74%	557	48,06%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

Табела 7.54: Распони коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	24	0,56%	1	0,09%	1116	96,29%
$0,10 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,15 \text{ m}$	61	1,42%	14	1,22%	12	1,04%
$0,05 \text{ m} < \Delta\zeta \leq 0,10 \text{ m}$	189	4,40%	102	8,85%	9	0,78%
$0,00 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	871	20,28%	474	41,15%	7	0,60%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,00 \text{ m}$	1970	45,87%	483	41,93%	6	0,52%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	752	17,51%	66	5,73%	5	0,43%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	262	6,10%	11	0,95%	1	0,09%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	166	3,86%	1	0,09%	3	0,26%
$\Sigma =$	4295	100%	1152	100%	1159	100%

После детаљне анализе вредности  $\hat{i}$ ,  $\hat{R}$  и  $\Delta\zeta$  за сва три начина спољашње провере у свим подручјима, фокус је био на статистичкој анализи ових резултата. Табеле које следе (7.55, 7.56 и 7.57) приказују статистичке параметре како би се добио бољи увид у расподелу и различите аспекте резултата истраживања представљених у претходним табелама.

Табела 7.55: Основни статистички подаци за параметре  $\hat{i}$ ,  $\hat{R}$  и  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – први начин спољашње провере

статистика	Р. Србија			Оверња			Колорадо		
	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$
<i>max</i>	0,082	0,290	0,254	0,347	0,151	0,184	-0,021	0,106	1,001
<i>min</i>	-0,126	-0,325	-0,440	0,094	-0,099	-0,198	-0,434	-0,124	-0,434
<i>average</i>	-0,044	0,002	-0,037	0,160	0,000	0,012	-0,161	0,003	0,410
<i>range</i>	0,208	0,616	0,694	0,253	0,249	0,382	0,413	0,230	1,435
<i>stdev</i>	0,051	0,076	0,091	0,053	0,018	0,055	0,086	0,022	0,153

Табела 7.56: Основни статистички подаци за параметре  $\hat{i}$ ,  $\hat{R}$  и  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – други начин спољашње провере

статистика	Р. Србија			Оверња			Колорадо		
	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$
<i>max</i>	0,033	0,504	0,014	0,286	0,184	0,006	0,333	0,482	0,010
<i>min</i>	-0,123	-0,524	-0,027	0,061	-0,142	-0,003	0,105	-0,780	-0,015
<i>average</i>	-0,059	0,000	0,000	0,172	0,000	0,000	0,252	0,000	0,000
<i>range</i>	0,156	1,027	0,041	0,228	0,326	0,010	0,228	1,262	0,025
<i>stdev</i>	0,038	0,097	0,003	0,050	0,044	0,001	0,051	0,121	0,002

Табела 7.57: Основни статистички подаци за параметре  $\hat{i}$ ,  $\hat{R}$  и  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – трећи начин спољашње провере

статистика	Р. Србија			Оверња			Колорадо		
	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$	$\hat{i}$	$\hat{R}$	$\Delta\zeta$
<i>max</i>	0,052	0,251	0,285	0,294	0,150	0,163	-0,057	0,111	0,931
<i>min</i>	-0,101	-0,320	-0,392	0,034	-0,091	-0,154	-0,321	-0,121	-0,433
<i>average</i>	-0,027	-0,003	-0,035	0,170	0,000	-0,003	-0,131	0,003	0,381
<i>range</i>	0,154	0,571	0,678	0,260	0,241	0,316	0,264	0,232	1,365
<i>stdev</i>	0,037	0,069	0,089	0,061	0,019	0,039	0,056	0,022	0,140

Да би се добио коначан и комплетан увид у постигнуте резултате нумеричких истраживања и успех предложене методологије, за сва подручја направљени су прилози који садрже графичке приказе вертикалних профила одређених површи моделираних параметара ( $\zeta^{RMQG}$ ,  $\zeta^{LMQG}$ ,  $\Delta\zeta$ ,  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ ) на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и тачкама грида резолуције 5'×5'. Ови прилози су организовани и приказани у „**Поглављу 10**“ и садрже профиле локалних модела квазигеоида **LMQG** у сва три изабрана подручја, укључујући и информације добијене спољашњим проверама резултата.

## 7.7 АНАЛИЗА ЗАВРШНИХ РЕЗУЛТАТА

Разматрање тачности и конзистентности, као и доношење коначних закључака о квалитету завршних резултата, могуће је урадити поређењем резултата моделирања локалних модела **LMQG** са референтним моделима **RMQG**. Коначни закључци су изведени путем анализе коначних разлика  $\Delta\zeta$ .

Пошто је циљ био одредити локалне моделе квазигеоида центиметарске тачности, битно је анализирати расподелу коначних разлика у оквиру следећих распона:

- $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ ,
- $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$  и
- $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ .

Анализом вредности коначних разлика у табелама 7.58, 7.59, 7.60 и 7.61 добија се процена у којој мери локални модели постижу жељену тачност и у којој мери су резултати конзистентни у односу на референтне моделе.

### 7.7.1 Први начин спољашње провере

Табела 7.58: Групе распона коначних разлика  $\Delta\zeta$  на **GPS/dh** тачкама – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$	1001	100,00%	75	100,00%	222	100,00%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta > 0,10 \text{ m}$	0	0,00%	4	5,33%	0	0,00%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$	1001	100,00%	71	94,67%	222	100,00%
$\Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta > 0,05 \text{ m}$	208	20,78%	28	37,33%	2	0,90%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	749	74,82%	42	56,00%	204	91,89%
$\Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	44	4,40%	5	6,67%	16	7,21%



На основу резултата у табели 7.58 која приказује коначне разлике  $\Delta\zeta$  на тачкама нивелмана високе тачности (GPS/dh тачке) у поступку **првог начина спољашње провере** за сва подручја, могу се извући следећи закључци:

- у свим подручјима на 100% тачака коначне разлике су унутар распона  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ , што указује на висок ниво тачности у одређивању локалних модела квазигеоида;
- слично, 100% тачака у Србији и Колораду, односно 94,67% тачака у Оверњи, има коначне разлике унутар распона  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ , што такође показује висок ниво тачности резултата;
- процент тачака на којима су коначне разлике унутар распона  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$  у Србији је 74,82%, док је у Колораду тај проценат 91,89%, а у Оверњи 56,00%.

Може се уочити да у распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$  у региону Оверња коначне разлике показују нешто већу варијабилност, где су 37,33% тачака са разликама већим од 0,05 m и 6,67% тачака са разликама мањим од -0,05 m.

У Србији и Колораду нема тачака нивелмана високе тачности са разликама које су ван распона  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ , док у Оверњи има 5,33% таквих тачака, што указује на могућу потребу за додатном анализом у том подручју.

Резултати показују висок степен прецизности и конзистентности у свим подручјима за шире распоне ( $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$  и  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ ). Међутим, у ужем распону ( $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ ), постоје варијације које указују на различите нивое тачности и потенцијалне проблеме у региону Оверња, који би могли захтевати додатну пажњу.

Након спољашње провере резултата на тачкама нивелмана високе тачности, треба контролисати резултате који су добијени на тачкама грида. Резултати у табели 7.59 су добијени на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  у поступку **првог начина спољашње провере** за сва подручја.

Табела 7.59: Групе распона коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – први начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	20	0,47%	6	0,52%	1100	94,91%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$	4097	95,39%	1142	99,13%	56	4,83%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	178	4,14%	4	0,35%	3	0,26%
$\Delta\zeta > 0,10 \text{ m}$	96	2,24%	66	5,73%	1122	96,81%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$	3796	88,38%	1060	92,01%	29	2,50%
$\Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	403	9,38%	26	2,26%	8	0,69%
$\Delta\zeta > 0,05 \text{ m}$	434	10,10%	301	26,13%	1131	97,58%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	2872	66,87%	735	63,80%	13	1,12%
$\Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	989	23,03%	116	10,07%	15	1,29%

Закључци на основу резултата у табели 7.59 су:

- модел у Србији показује висок ниво тачности и конзистентности. Вредности коначних разлика на 95,39% тачака грида налазе се у распону  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ , а на 88,38% тачака у распону  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ . Међутим, у најужем распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ , где се налази 66,87% тачака

грида, уочава се значајан проценат од 23,03% тачака са разликама мањим од -0,05 m. Поред тога, 10,10% тачака има разлике веће од 0,05 m, што указује на одређена одступања и варијабилност у моделу;

2. резултати коначних одступања за територију региона Оверња су веома слични као за Р. Србију. Односно, модел у Оверњи такође показује висок ниво тачности, са 99,13% тачака грида на којима се коначне разлике налазе у распону  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$  и 92,01% тачака грида на којима се коначне разлике налазе у распону  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ .

Такође, у најужем распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ , где се налази 66,87% тачака грида, уочава се значајан проценат од 26,13% тачака са разликама већим од 0,05 m. Поред тога, 10,07% тачака има разлике мање од -0,05 m, што указује на одређена одступања и варијабилност у моделу;

3. у Колораду, већина тачака грида (94,91%) има коначне разлике веће од 0,15 m, што указује на значајне проблеме у моделу. Ово је узроковано неповољним просторним распоредом тачака у нивелманској мрежи високе тачности, која је у Колораду постављена у једном низу, слично уметнутом влаку. Због таквог распореда, у поступку предикције није могуће извршити интерполацију већ само екстраполацију.

Параметри трансформације добијени у оквиру четворопараметарске трансформације и **МНК** оцене базирани су на овом неповољном распореду тачака нивелмана високе тачности, што на крају доводи до великих коначних разлика. Вредности параметара трансформације показују добре резултате коначних разлика само за тачке нивелмана високе тачности и одговарају интерполацији (предикцији) само на тим тачкама (што се види у табели 7.58). Међутим, када се параметри трансформације, који су оцењени на тачкама нивелмана високе тачности, примене на тачкама грида и када се повећава удаљеност од тачака нивелмана високе тачности, долази до веома неповољних оцена иницијалних и преосталих резидуала на тачкама читавог грида.

Због овог проблема, оцењене вредности иницијалних и преосталих резидуала на тачкама грида се не могу предиктовати путем интерполације, већ само екстраполацијом, што изазива велика међусобна одступања између моделиране и референтне површи квазигеоида. Ово је главни разлог за развијање другог и трећег начина спољашње провере како би се побољшала тачност модела и даље унапредила методологија.

Само 4,83% коначних разлика на тачкама грида је у распону  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ , а још мањи проценат од 2,50% је у распону  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ , односно 1,12% у распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ , што указује на врло ниску тачност и конзистентност модела.

Модел локалних квазигеоида за подручја Р. Србије и региона Оверња показују највећи степен тачности и конзистентности, са већином тачака унутар свих распона коначних разлика. Разлог за то је пре свега добар просторни распоред тачака нивелмана високе тачности. Модел је генерално добар, али постоје одређена одступања која треба анализирати и кориговати.

На крају, може се констатовати да модел који је развијен за подручје државе Колорадо има озбиљне недостатке због лошег просторног распореда тачака у нивелманској мрежи, због чега је било потребно овај случај сагледати детаљније преко додатних провера.

### 7.7.2 Други начин спољашње провере

Као што је наглашено, **други и трећи начин спољашње провере** резултата су предложени због веома неповољних резултата који су добијени за подручје државе Колорадо, а који су изазвани неравномерним распоредом тачака нивелмана високе тачности. Ове тачке су кључне за рачунање параметара трансформације у **првом начину спољашње провере**.

Због тога је у **другом начину спољашње провере** резултата, овај проблем решен потпуним одбацивањем тачака нивелмана високе тачности. Уместо у односу на њих, параметри трансформације су директно одређени у односу на тачке грида.

Односно, иницијални резидуали овде нису одређени у односу на тачке нивелмана и **GPS/dh** мерених аномалија висине на њима, већ у односу на аномалије висине референтног квазигеоида моделираних на тачкама грида. Тако добијени иницијални резидуали су коришћени за **МНК** оцену параметара трансформације.

Овај поступак суштински одговара свим корацима који су направљени на тачкама нивелмана високе тачности у првом начину спољашње провере. Једино што се у другом начину поступак разликује по томе што се одвија на тачкама грида без потребе према **GPS/dh** мереним вредностима аномалија висине.

Коначне разлике добијене у другом начину спољашње провере су приказане у табели 7.60.

Табела 7.60: Групе распона коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – други начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,15 \text{ m} < \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$	4295	100,00%	1152	100,00%	1159	100,00%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta > 0,10 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,10 \text{ m} < \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$	4295	100,00%	1152	100,00%	1159	100,00%
$\Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$\Delta\zeta > 0,05 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
$-0,05 \text{ m} < \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	4295	100,00%	1152	100,00%	1159	100,00%
$\Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%

На основу резултата из табеле 7.60 може се закључити да се у свим подручјима не примећује ни један случај коначних разлика  $\Delta\zeta$  чија је вредност ван распона  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ , што упућује на потпуно отсуство тачака са таквим разликама у другом начину спољашње провере.

Насупрот резултата који су добијени у првом начину спољашње провере, овде су све вредности коначних разлика унутар распона  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ . Такође, на основу хистограма расподела коначних разлика (слике 7.61, 7.64 и 7.67) види се да је постигнуто одлично поклапање са нормалном расподелом.

Резултати указују на значајну разлику у тачности и конзистентности између ова два начина спољашње провере. Други начин представља значајан напредак у провери моделираних аномалија висине локалних модела квазигеоида пошто се у овом случају, за рачунање иницијалних резидуала користе референтне вредности уместо **GPS/dh** мерених вредности.

### 7.7.3 Трећи начин спољашње провере

На крају, у **трећем начину спољашње провере** коначних разлика, тачке нивелмана високе тачности поново су укључене у поступак провере са том разликом да се **GPS/dh** мерене вредности аномалија висине на тим тачкама не користе. Уместо њих, за рачунање иницијалних резидуала који су неопходни у **МНК** оцени параметара трансформације, користе се вредности референтних аномалија висине.

Дакле, трећи случај у извесном смислу представља комбинацију првог и другог поступка спољашње провере резултата.

Табела 7.61: Групе распона коначних разлика  $\Delta\zeta$  на тачкама грида – трећи начин спољашње провере

Распон разлика	Р. Србија		Оверња		Колорадо	
	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]	Број тачака	[%]
$\Delta\zeta > 0,15 \text{ m}$	24	0,56%	1	0,09%	1116	96,29%
$-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$	4105	95,58%	1150	99,83%	40	3,45%
$\Delta\zeta < -0,15 \text{ m}$	166	3,86%	1	0,09%	3	0,26%
$\Delta\zeta > 0,10 \text{ m}$	85	1,98%	15	1,30%	1128	97,33%
$-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$	3782	88,06%	1125	97,66%	27	2,33%
$\Delta\zeta < -0,10 \text{ m}$	428	9,97%	12	1,04%	4	0,35%
$\Delta\zeta > 0,05 \text{ m}$	274	6,38%	117	10,16%	1137	98,10%
$-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$	2841	66,15%	957	83,07%	13	1,12%
$\Delta\zeta < -0,05 \text{ m}$	1180	27,47%	78	6,77%	9	0,78%

На основу резултата у табели 7.61 може се закључити да су постигнута извесна побољшања у поређењу са првим начином спољашње провере у подручју региона Оверња. Такође, уочава се стабилност и поновљивост резултата за подручје Р. Србије. Ипак, и даље су присутни одређени изазови, посебно у подручју државе Колорадо.

Закључци на основу резултата из табеле 7.61 су:

- као и у првом начину спољашње провере, за подручје Р. Србије велика већина тачака (95,58%) је у распону  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ , што указује на високу тачност и конзистентност модела. У мањим распонима, утврђено је да се 88,06% тачака налази у распону  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$ , док 66,15% тачака припада распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$ , што недвосмислено потврђује закључке донесене на основу првог начина спољашње провере.
- за подручје региона Оверња у овом случају спољашње провере уочава се извесно побољшање. Односно, у распону  $-0,15 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,15 \text{ m}$ , сада се налази 99,83% уместо 99,13% тачака што је проценат побољшања приближно 0,71%. Затим број тачака који сада припадају распону  $-0,10 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,10 \text{ m}$  је 97,66% уместо 92,01%, што представља приближно побољшање од 6,14%. На крају, у распону  $-0,05 \text{ m} \leq \Delta\zeta < 0,05 \text{ m}$  сада је груписано 83,07% тачака уместо 63,80%, што

представља приближно побољшање од 30,20%. Може се закључити да се приближно трећина тачака сада налази у најужем распону коначних одступања.

3. резултати коначних разлика у подручју државе Колорадо поново указују на значајан утицај неповољног, тј. неравномерног просторног распореда тачака нивелмана високе тачности на резултате. Велика одступања између моделиране и референтне површи квазигеоида се јављају без обзира на то да ли се на тачкама нивелмана високе тачности користе **GPS/dh** мерене или референтне аномалије висине. Дакле, просторни распоред тачака на којима се рачунају иницијални резидуали има примарну улогу у односу на то да ли се користе **GPS/dh** мерене аномалије висине или референтне аномалије висине за рачунање иницијалних резидуала.

Што значи без обзира на „извор“ и квалитет коришћених аномалија висине, уколико су тачке неравномерно просторно распоређене у поступку предикције, екстраполација ће бити учесталија у односу на интерполацију података, што ће довести до значајних одступања.

Резултати указују на значајну разлику у тачности и конзистентности између различитих подручја у трећем начину спољашње провере. Док Р. Србија и Оверња показују високу тачност модела, Колорадо и даље представља значајан изазов због неравномерног распореда тачака нивелмана високе тачности.

Укључивање референтних аномалија висине уместо **GPS/dh** мерених вредности у трећем начину спољашње провере допринело је бољем груписању резултата, поготово унутар најужег распона коначних одступања у подручју региона Оверња.

У исто време, потврђени су закључци из првог начина спољашње провере за подручје Р. Србије. Ипак, и даље су неопходна додатна унапређења за подручја са специфичним распоредом тачака као што је у случају државе Колорадо. Управо једно такво унапређење спољашње провере демонстрирано у другом начину.

## 8. ЗАКЉУЧАК

### 8.1 УСПЕШНОСТ МЕТОДОЛОГИЈЕ

Развијена методологија комбинује јавно доступне изворе података у рачунању укупне вредности аномалије висине  $\zeta^{LMQG}$  за потребе моделирања површи локалног квазигеоида **LMQG**. Одређивање дуготаласне карактеристике аномалије висине  $\zeta^{EGM2008}$  постигнуто је на основу глобалног геопотенцијалног модела **EGM2008**, а краткоталасна карактеристика  $\zeta^{RTM}$  је одређена из резидуалног модела топографије **RTM** који је изведен из дигиталног модела терена **DTM** одређеног на основу података мисије **SRTM**. Трећи параметар који је био неопходан за одређивање укупне вредности аномалије висине, је елипсоидна корекција **EK** која је срачуната у односу на референтни елипсоид **GRS80**. Сумирањем ових параметара на свакој тачки, да ли то била (реална) тачка нивелмана високе тачности или (аналитичка) тачка грида, срачунате су дискретне вредности укупних аномалија висине  $\zeta^{LMQG}$ .

Као што је било наглашено у раду, циљ методологије био је да се постигне центиметарска тачност моделираних аномалијских висина, а да се у исто време избегну веома захтевна терестричка мерења, која су неопходна за одређивање средњеталасне карактеристике, због чега је и средњеталасна карактеристика изостављена из поступка.

Примера ради, коначне разлике  $\Delta\zeta$  између моделираног **LMQG** и референтног **RMQG** квазигеоида у првом начину спољашње провере на тачкама нивелмана високе тачности (табела 7.34) показују да је успешно постигнута центиметарска тачност у поступку моделирања површи локалних квазигеоида у свим подручјима.

Постигнути су следећи резултати:

- за Р. Србију:  $\Delta\zeta_{min}=-0,099$  m,  $\Delta\zeta_{max}=0,100$  m,  $\Delta\zeta_{average}=0,018$  m и  $\sigma_{\Delta\zeta}=0,038$  m,
- за регион Оверња:  $\Delta\zeta_{min}=-0,072$  m,  $\Delta\zeta_{max}=0,118$  m,  $\Delta\zeta_{average}=0,031$  m и  $\sigma_{\Delta\zeta}=0,048$  m и
- за државу Колорадо:  $\Delta\zeta_{min}=-0,060$  m,  $\Delta\zeta_{max}=0,069$  m,  $\Delta\zeta_{average}=0,016$  m и  $\sigma_{\Delta\zeta}=0,026$  m.

Такође је утврђено да је просторни распоред тачака нивелмана високе тачности који служи као основа за оцену параметара трансформације, веома битан у поступку предикције.

Може се закључити да је методологија, предложена у оквиру ове дисертације, успешно испунила постављене захтеве као и услове ефикасности и тачности.

### 8.2 ПРЕПОРУКЕ ЗА ДАЉА ИСТРАЖИВАЊА

Препоручује се коришћење геодетских подака из различитих извора који су јавно доступни на интернету. Ова методологија је показала значајне предности у односу на традиционалне методе, посебно у погледу флексибилности и способности да се обраде велики скупови података.

Препоручују се даља истраживања у следећим правцима:

1. **Интеграција додатних извора података** – укључивање података из нових сателитских мисија и других извора може допринети побољшању тачности модела.
2. **Примена у различитим регионима** – испитивање применљивости методологије у различитим географским регионима са различитим топографским специфичностима и геофизичким карактеристикама.
3. **Аутоматизација процеса** - развој аутоматизованих система за обраду и анализу података могу омогућити бржу и једноставнију примену методологије у пракси.
4. **Развитак и оптимизација алгоритама машинског учења** – укључивање у методологију алгоритама машинског учења и истраживање нових архитектура неуронских мрежа ради побољшања тачности и ефикасности методологије.

### **8.3 ПОТЕНЦИЈАЛ МЕТОДОЛОГИЈЕ ЗА ПОТРЕБЕ МОДЕЛИРАЊА ЛОКАЛНИХ КВАЗИГЕОИДА**

Методологија има велики потенцијал за тачно моделирање локалних квазигеоида, што је кључно за бројне инжењерске пројекте и геодетске радове. Резултати анализе показују да је могуће постићи центиметарску тачност у одређивању локалних квазигеоида, што је у складу са захтевима за прецизност у инжењерским пројектима и топографском премери.

Приказани резултати указују на то да је методологија способна да достигне центиметарску тачност. Ово је значајан успех, јер омогућава примену методологије за одређивање локалног квазигеоида за потребе у геодетским радовима, као што су:

- инжењерски пројекти који захтевају центиметарску прецизност у одређивању висинских разлика,
- топографски премери где је неопходна тачна и детаљна картографска подлога и
- други геодетски радови који захтевају центиметарски ниво тачности и поузданости.

На основу добијених резултата, може се закључити да је предложена методологија веома обећавајућа и да има потенцијал за широку примену у различитим областима геодезије и премера. Наставак истраживања и даље усавршавање методологије ће допринети њеном још већем успеху и примени у пракси.

## ЛИТЕРАТУРА

Barthelmes, F., 2014. Global Models. У: *Encyclopedia of Geodesy*. s.l.:Springer International Publishing, pp. 120-128.

Barzaghi, R., 2016. The Remove-Restore Method. У: М. G. Sideris, ур. *Encyclopedia of Geodesy*. s.l.:Springer International Publishing, pp. 57-60.

EARTHDATASEARCH, 2024. *NASA-EARTHDATASEARCH*. [На мрежи]

Available at: <https://search.earthdata.nasa.gov/search?q=SRTM>

[Последњи приступ 10 април 2024].

Farr, T. G. & Kobrick, M., 2000. The Shuttle Radar Topography Mission. *EOS American Geophysical Union - Advancing Earth and Space Sciences*, 28 November, 81(48), pp. 583-585.

Farr, T. G. и други, 2007. The Shuttle Radar Topography Mission. *Reviews of Geophysics - American Geophysical Union*, 19 May .Том 45.

Forsberg, R., 1985. Gravity field terrain effect computations by FFT. *Bulletin géodésique*, 1 December, 59(4), p. 342–360.

Forsberg, R. & Tscherning, C. C., 1981. The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 10 September, 86(B9), pp. 7843-7854.

Fu, L.-L., 2014. Ocean Surface Topography. У: E. G. Njoku, ур. *Encyclopedia of Remote Sensing*. New York, NY: Springer New York, pp. 455-461.

Goiginger, H. и други, 2011. *The combined satellite-only global gravity field model GOCO02S. Presented at the 2011 General Assembly of the European Geosciences Union*. Vienna, Austria, s.n.

Gorokhovich, Y. A. & Voustianiouk, A., 2006. Accuracy assessment of the processed SRTM-based elevation data by CGIAR using field data from USA and Thailand and its relation to the terrain characteristics. *Remote Sensing of Environment*, 104(4), pp. 409-415.

Heiskanen, W. A. & Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. 1st ур. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company.

Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H., January 2006. *Physical Geodesy*. 2nd, corrected ур. Wien - NewYork: Springer.

ICGEM, 2024. *ICGEM - International Center for Global Gravity Field Models*. [На мрежи]

Available at: <https://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/longtime?modelid=3b3a7e227093cbad89bbe33f515c3f2d762b24392b64cabffd890cc016293526>

[Последњи приступ 7 мај 2024].

ICGEM, 2024. *ICGEM - International Centre for Global Earth Models*. [На мрежи]

Available at: <https://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/longtime?modelid=c50128797a9cb62e936337c890e4425f03f0461d7329b0>



9a8cc8561504465340

[Последњи приступ 27 април 2024].

ICGEM, 2024. *ICGEM - International Centre for Global Earth Models*. [На мрежи]

Available at: [https://icgem.gfz-potsdam.de/tom\\_longtime](https://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime)

[Последњи приступ 27 април 2024].

Jekeli, C., 2007. Potential Theory and Static Gravity Field of the Earth. *Treatise on Geophysics - Geodesy*, Том 3, pp. 11-42.

Johannessen, J. A. и други, 1999. *The four candidate Earth explorer core missions : reports for mission selection*. Noordwijk, the Netherlands: ESA Publications Division.

Kenyeres, A., 2016. GPS/Leveling. У: M. G. Sideris, ур. *Encyclopedia of Geodesy*. s.l.:Springer International Publishing, pp. 129-131.

Liang, W. и други, 2020. A High-Resolution Earth's Gravity Field Model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, Satellite Altimetry, and EGM2008. *Engineering*, 6(8), pp. 860-878.

Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kurtenbach, E. & Ilk, K.-H., 2010. ITG-GRACE: Global Static and Temporal Gravity Field Models from GRACE Data. У: F. M. Flechtner, и други уредници *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 159-168.

Moritz, H., 1980. *Advanced Physical Geodesy*. Karlsruhe (DE) / Royal Tunbridge Wells, Kent (GB): Herber Wichmann Verlag (DE) / Abacus Press (GB).

Mukul, M., Srivastava, V., Jade, S. & Mukul, M., 2017. Uncertainties in the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Heights: Insights from the Indian Himalaya and Peninsula. *Scientific Reports*, 8 February .7(1).

NASA-Earthdata, 2024. *NASA Earthdata GCMD*. [На мрежи]

Available at:

[https://gcmd.earthdata.nasa.gov/KeywordViewer/scheme/instruments/0287b3bd-ed50-4662-96e9-7f7469179344?gtm\\_keyword=SRTM&gtm\\_scheme=instruments](https://gcmd.earthdata.nasa.gov/KeywordViewer/scheme/instruments/0287b3bd-ed50-4662-96e9-7f7469179344?gtm_keyword=SRTM&gtm_scheme=instruments)

[Последњи приступ 25 април 2024].

NASA-SRTM, 2024. [На мрежи]

Available at: <https://science.nasa.gov/mission/srtm>

[Последњи приступ 25 април 2024].

NOAA, N. G. S., 2024. [На мрежи]

Available at: [https://www.ngs.noaa.gov/PUBS\\_LIB/Geodesy4Layman/TR80003D.HTM](https://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/Geodesy4Layman/TR80003D.HTM)

[Последњи приступ 7 Jun 2024].

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C. & Factor, J. K., 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117(B4).

Saberi, A., Kabolizadeh, M., Rangzan, K. & Abrehdary, M., 2023. Accuracy assessment and improvement of SRTM, ASTER, FABDEM, and MERIT DEMs by polynomial and

- optimization algorithm: A case study (Khuzestan Province, Iran). *Open Geosciences*, 27 February .
- Sansò, F., Reguzzoni, M. & Barzaghi, R., 2019. *Geodetic Heights - Series: Springer Geophysics*. Cham: Springer International Publishing.
- Sansò, F. & Sampietro, D., 2022. *Analysis of the Gravity Field - Direct and Inverse Problems - Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing*. Cham: Birkhäuser.
- Vaníček, P., Kingdon, R. & Santos, M., 2012. Geoid versus quasigeoid: a case of physics versus geometry. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 42(1), pp. 101-117.
- Vaníček, P. & Krakiwsky, E. J., 1982. *Geodesy: The Concepts*. 1st. yr. North-Holland, Amsterdam: s.n.
- Webster, A. G., 1927. *Partial differential equations of mathematical physics*. Leipzig: G.E. Stechert & Co., B. G. Teubner.
- what-when-how, 2024. *what-when-how*. [На мрежи]  
Available at: <https://what-when-how.com/remote-sensing-from-air-and-space/radar-interferometry-radar-and-lidar-remote-sensing/>  
[Последњи приступ 25 април 2024].
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T. & Oikonomidou, X., 2020. The combined global gravity field model XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94(article number 66).
- Благојевић, Д., 2014. *Увод у сателитску геодезију*. 1 ур. Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- Грекуловић, С. М., 2014. *Моделирање густине Земљине коре при решавању проблема граничних вредности потенцијала Земљине теже (докторска дисертација)*. Београд: s.n.
- Наод, С. М., 2021. Значај одређивања апсолутне вредности убрзања силе теже у геодезији. *Техника - Наше грађевинарство*, 19 јануар, 76(1), pp. 17-24.
- Наод, С. М., 2022. *Моделирање вертикалног градијента силе Земљине теже (докторска дисертација)*. Београд: s.n.
- Одаловић, О., 2000. *Одређивање локалног геоида високе резолуције применом модела интегралне геоидезије (магистарска теза)*. Београд: s.n.
- Одаловић, О., 2005. *Методологија одређивања геоида високе резолуције центиметарске тачности за територију Републике Србије (докторска дисертација)*. Београд: s.n.
- Одаловић, О., 2009. *Прелиминарни геоид Србије (технички извештај)*. Београд: s.n.
- Одаловић, О., 2010. *Физичка геодезија*. прво ур. Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- Одаловић, О., 2024. *Грађевински факултет Универзитета у Београду*. [На мрежи]  
Available at: [https://www.grf.bg.ac.rs/p/learning/fizicka\\_ppt\\_1584464243781.pdf](https://www.grf.bg.ac.rs/p/learning/fizicka_ppt_1584464243781.pdf)  
[Последњи приступ 24 мај 2024].

## Литература

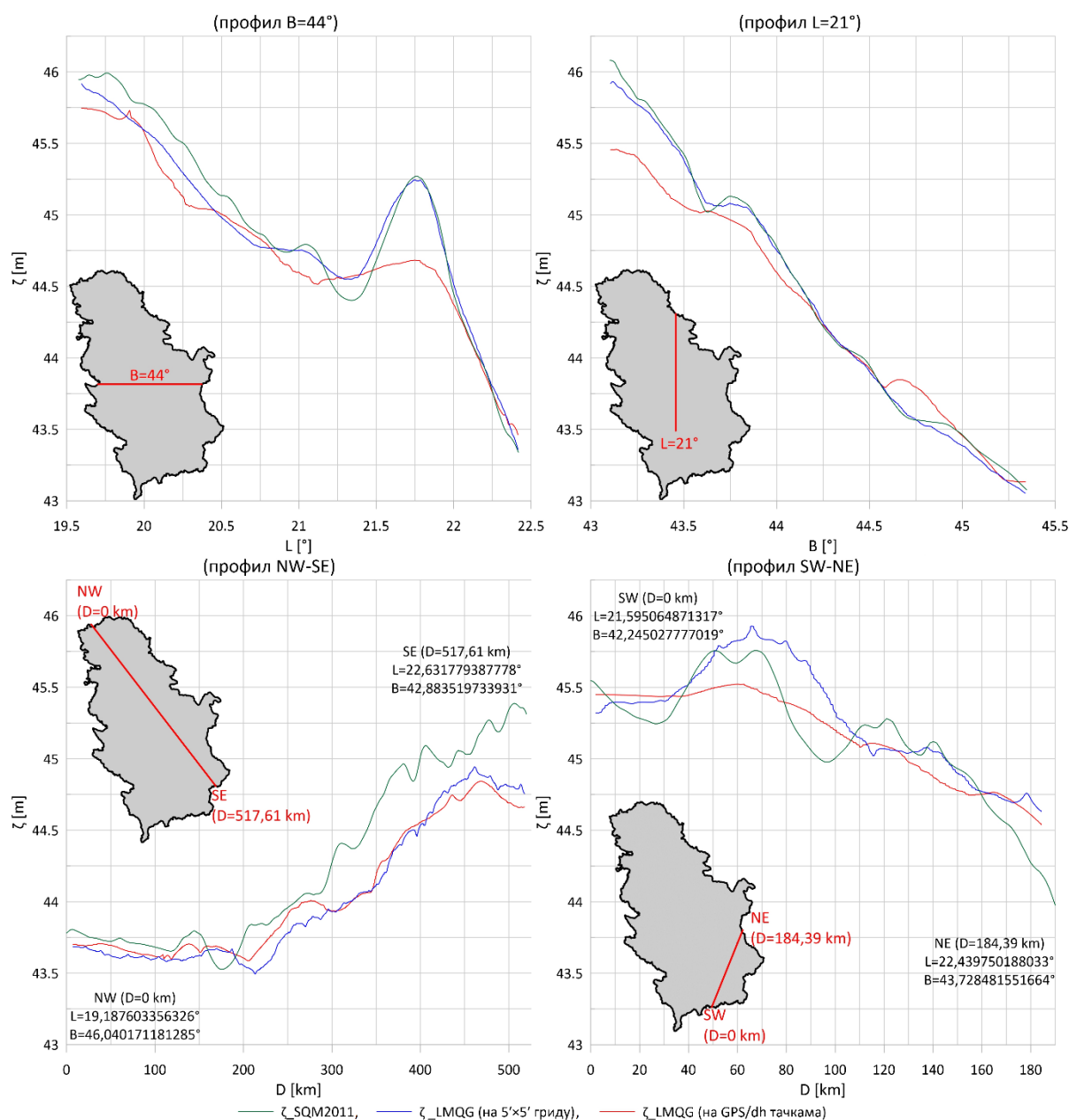
Одаловић, О., Грекуловић, С. & Васиљевић, И., 2018. *Глобални геопотенцијални модели*. Београд: Грађевински факултет, Одсек за геодезију и геоинформатику.

## 9. ПРИЛОЗИ

### 9.1 РЕПУБЛИКА СРБИЈА

**Прилог 1:** Профили референтне површи квазигеоида **SQGM2011** и локалног модела квазигеоида **LMQG**.

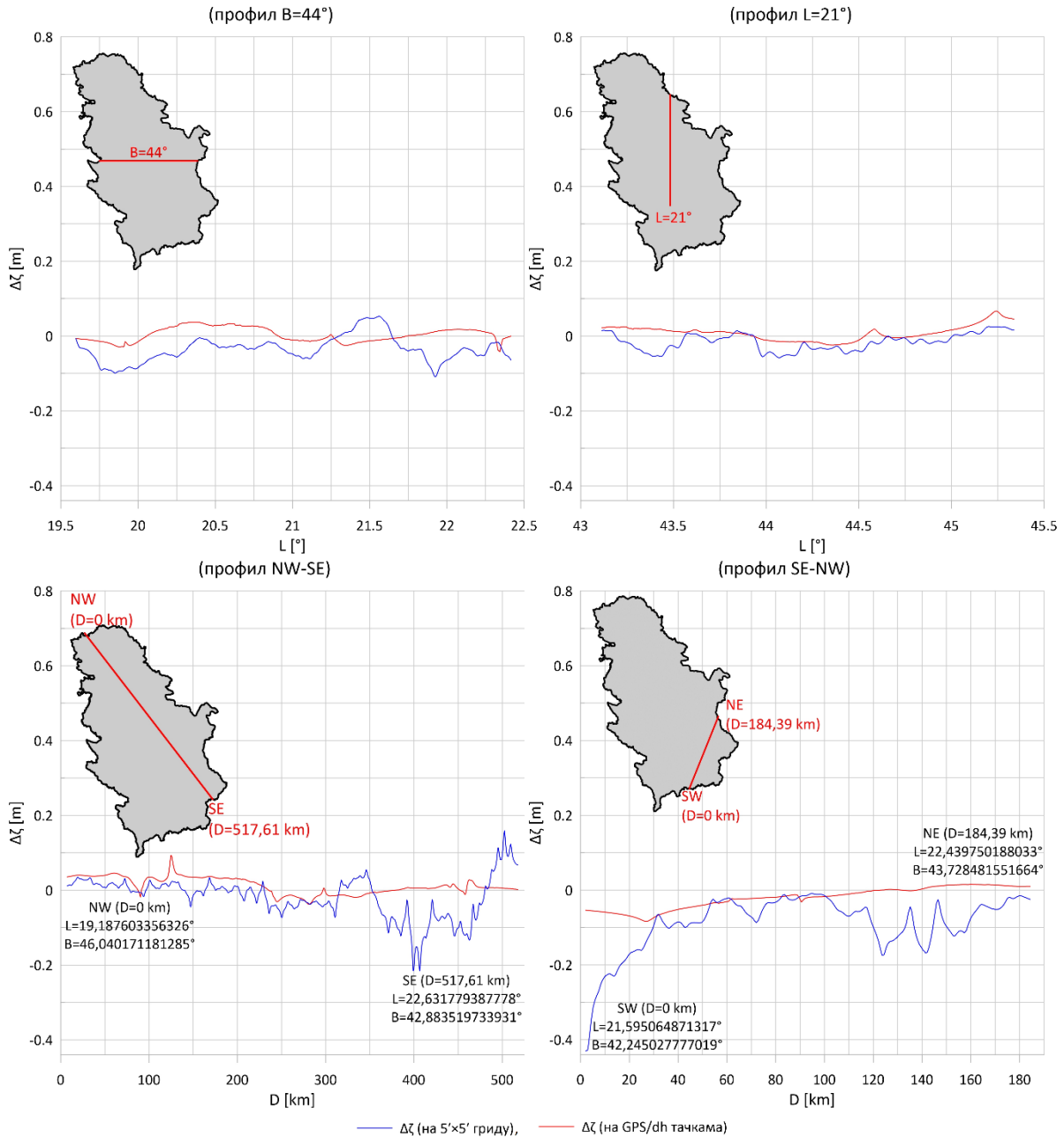
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **SQGM2011**;
- плава функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



9.1.1 Први начин спољашње провере резултата

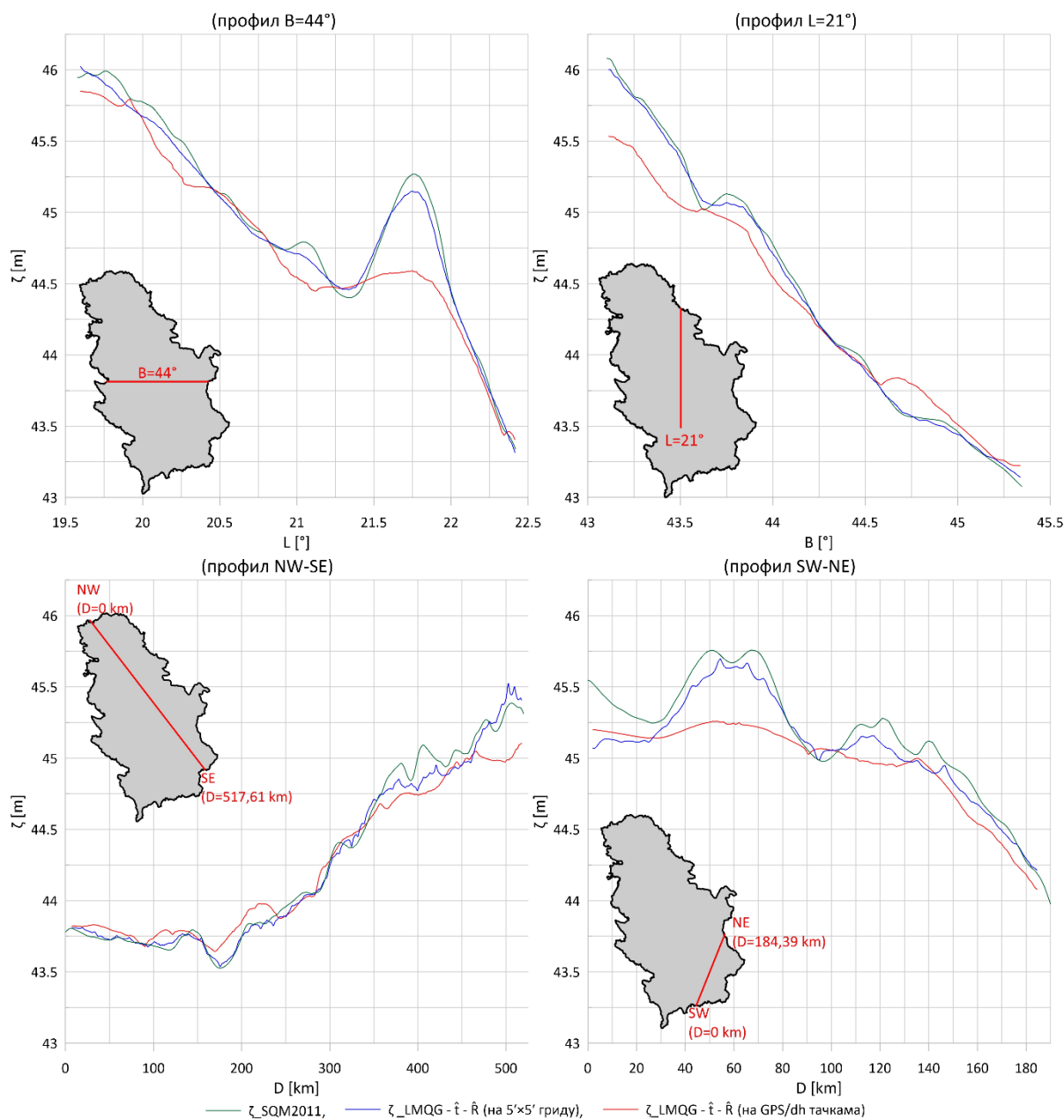
**Прилог 2:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **SQGM2011**.

1. **плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **SQGM2011** и
2. **црвена функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** одређене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и референтне површи **SQGM2011**.



**Прилог 3:** максималне translacije површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{t}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **SQGM2011**.

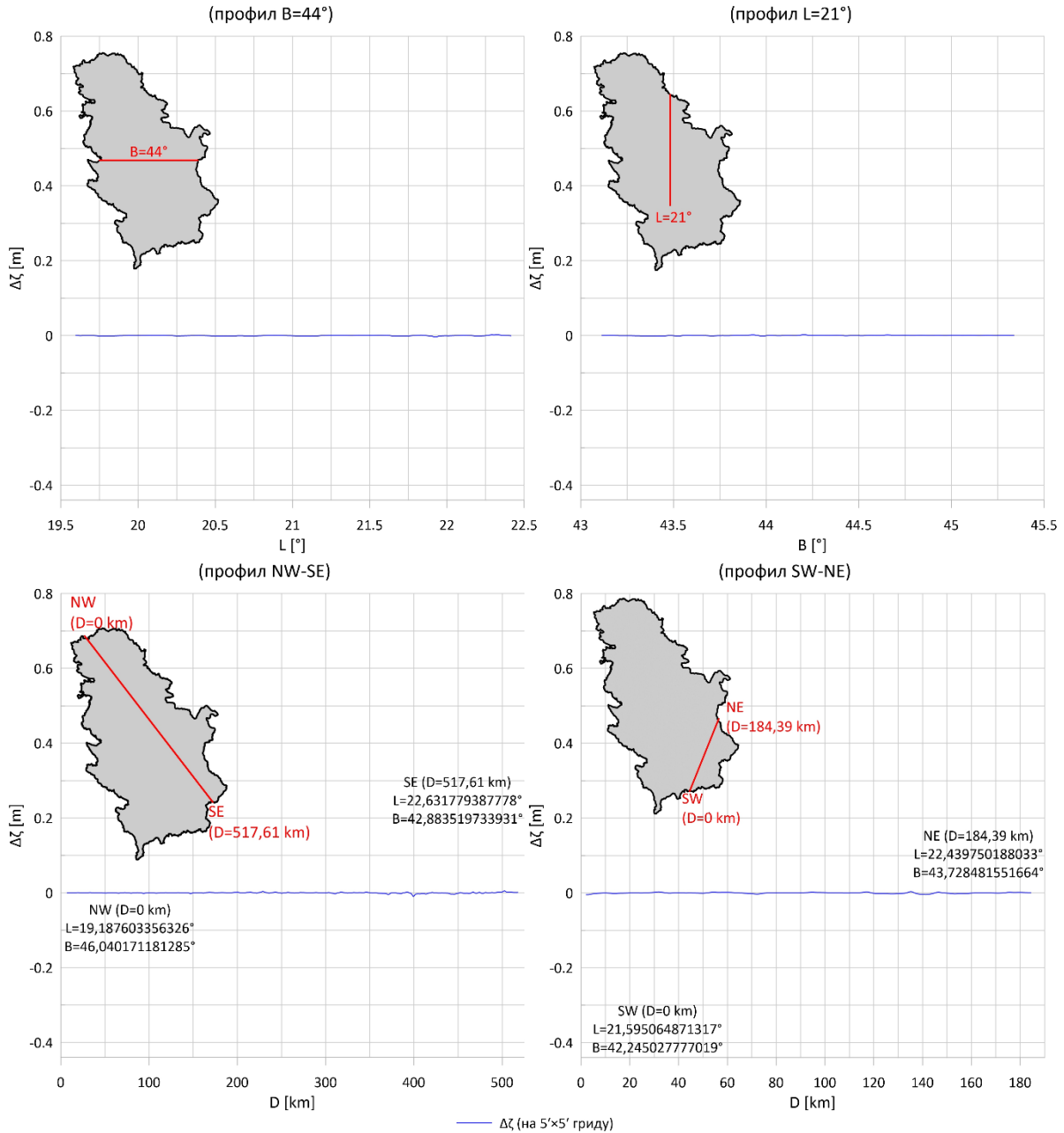
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **SQGM2011**;
- плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**), одређеног на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



9.1.2 Други начин спољашње провере резултата

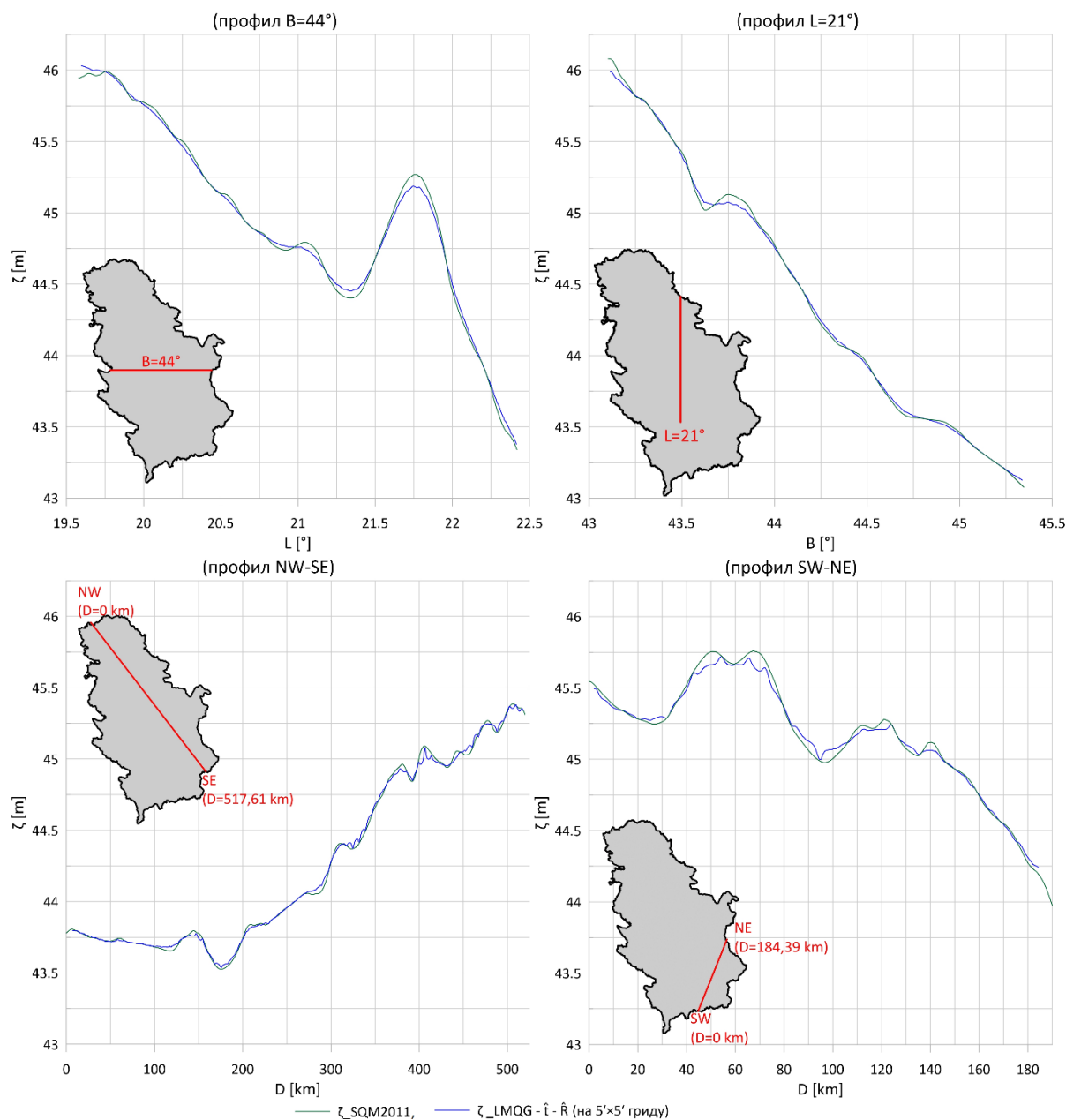
**Прилог 4:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **SQGM2011**.

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **SQGM2011**.



**Прилог 5:** максималне translacije површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{\tau}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **SQGM2011**.

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **SQGM2011**;
- плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .

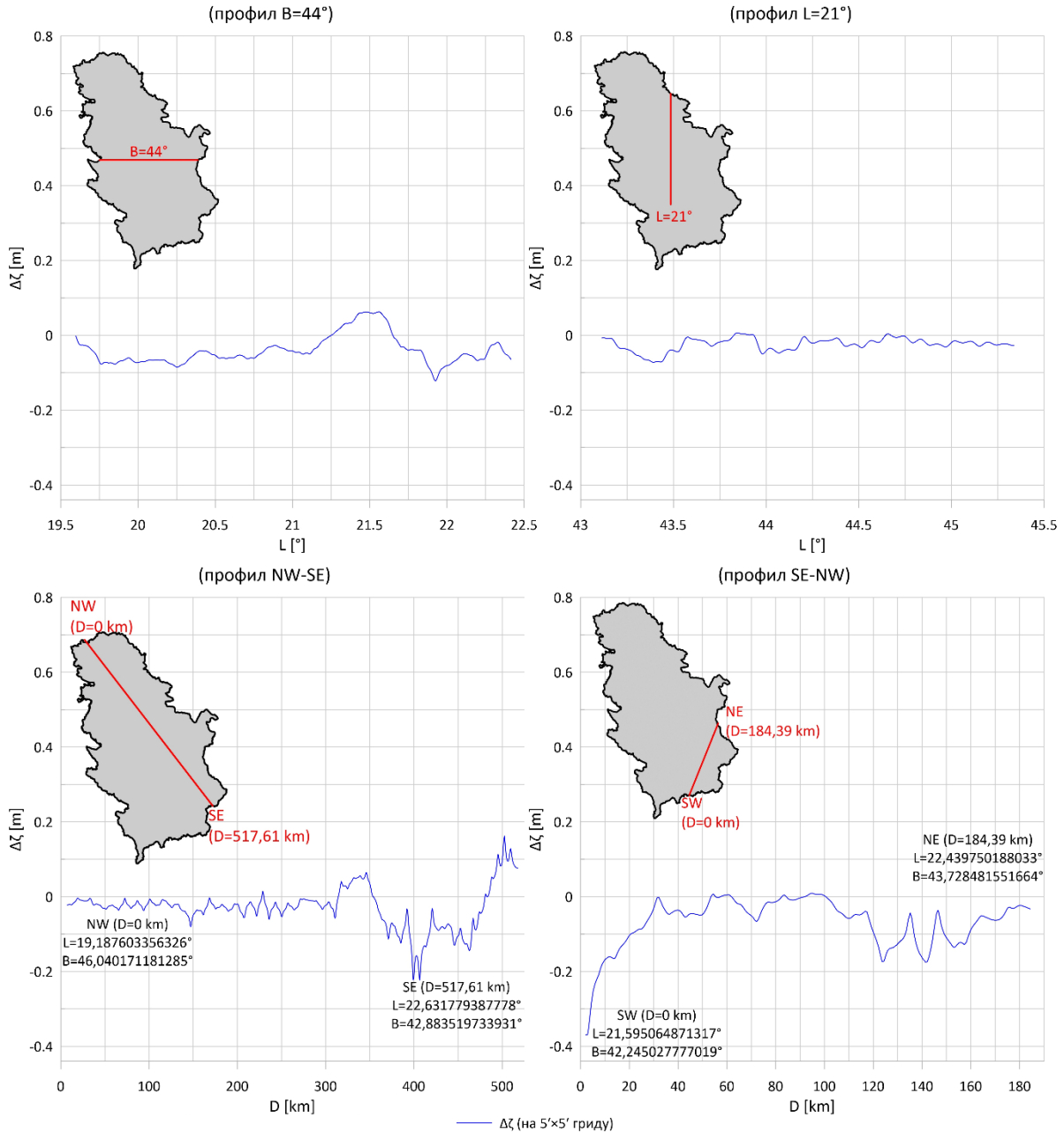




9.1.3 Трећи начин спољашње провере резултата

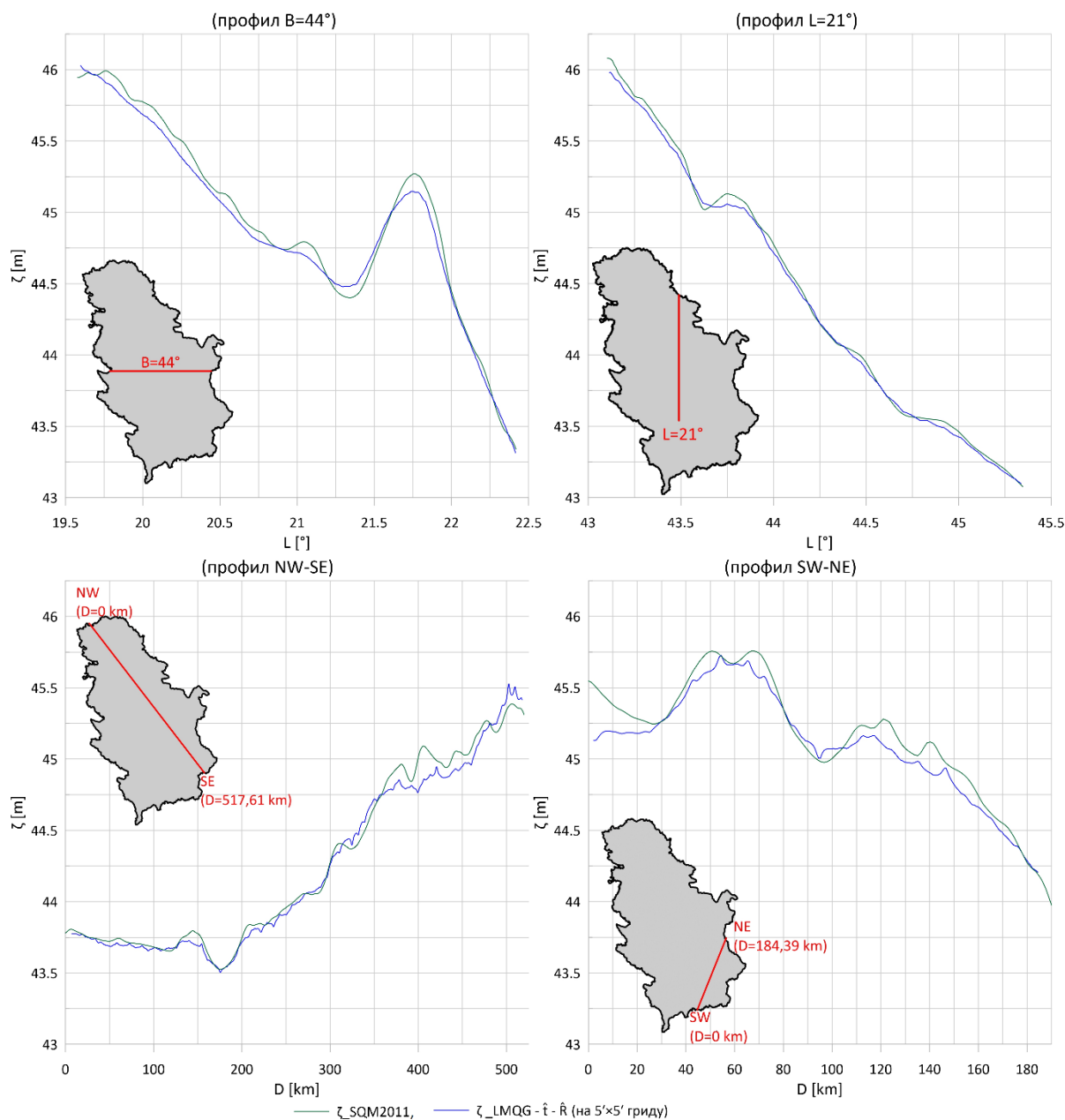
**Прилог 6:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **SQGM2011**.

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **SQGM2011**.



**Прилог 7:** Профили максималне трансације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **SQGM2011**.

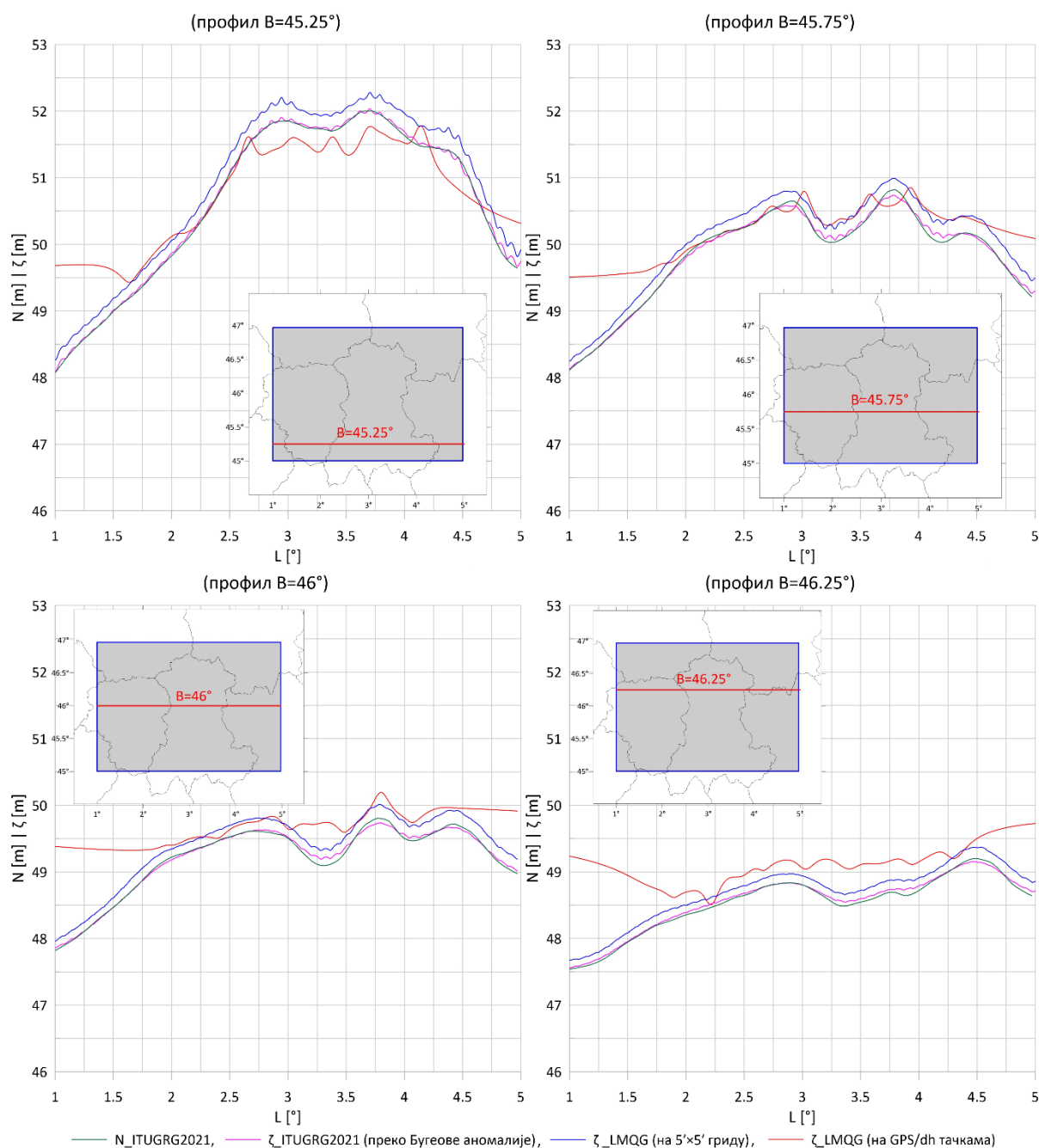
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **SQGM2011**;
- плава функција:** профил трансациране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



## 9.2 РЕГИОН ОВЕРЊА

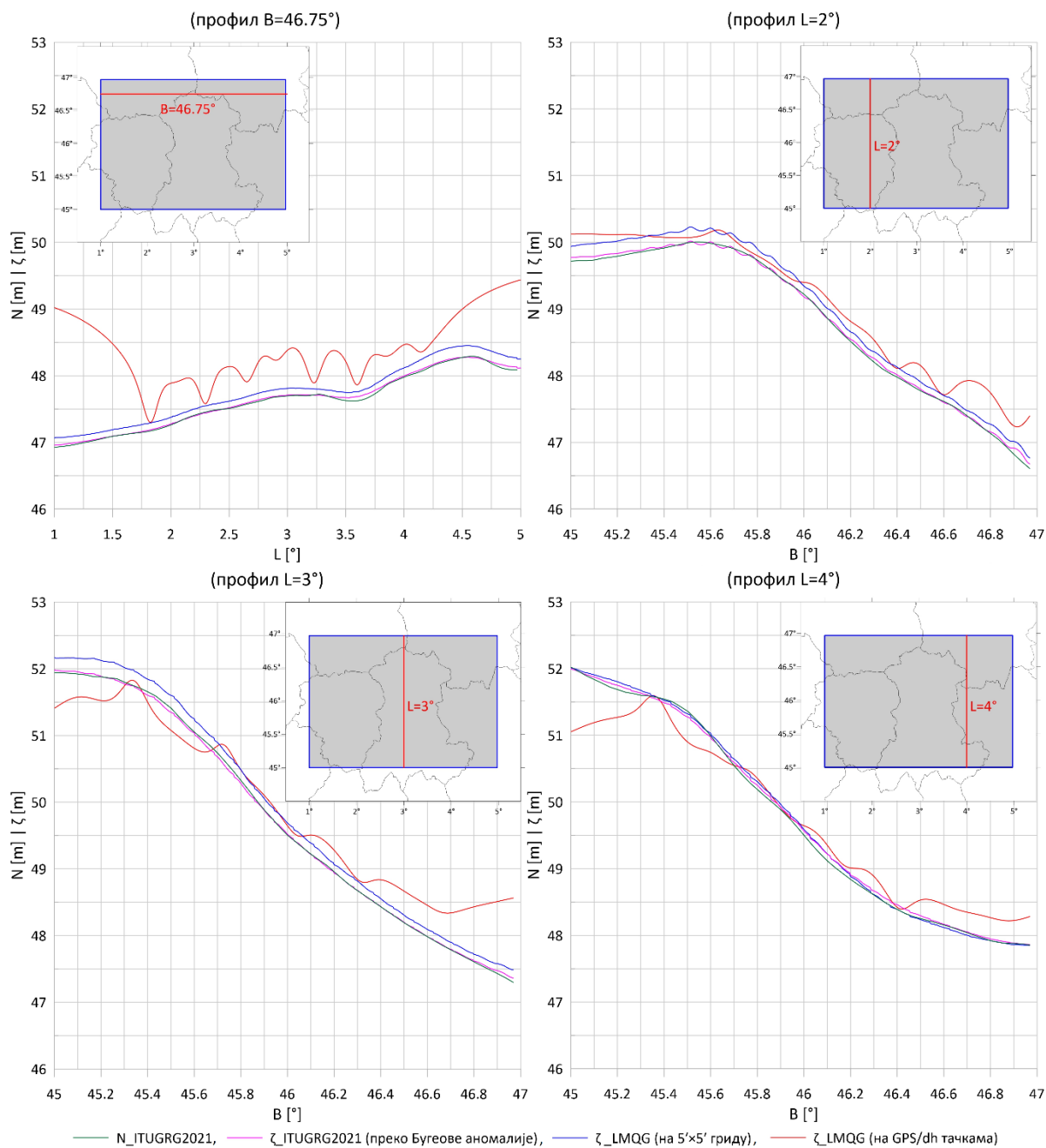
**Прилог 8:** Профили референтне површи геоида **ITUGRG2021** и локалног модела квазигеоида **LMQG**, (први део).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида који је срачунат преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
- плава функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



**Прилог 9:** Профили референтне површи геоида **ITUGRG2021** и локалног модела квазигеоида **LMQG**, (други део).

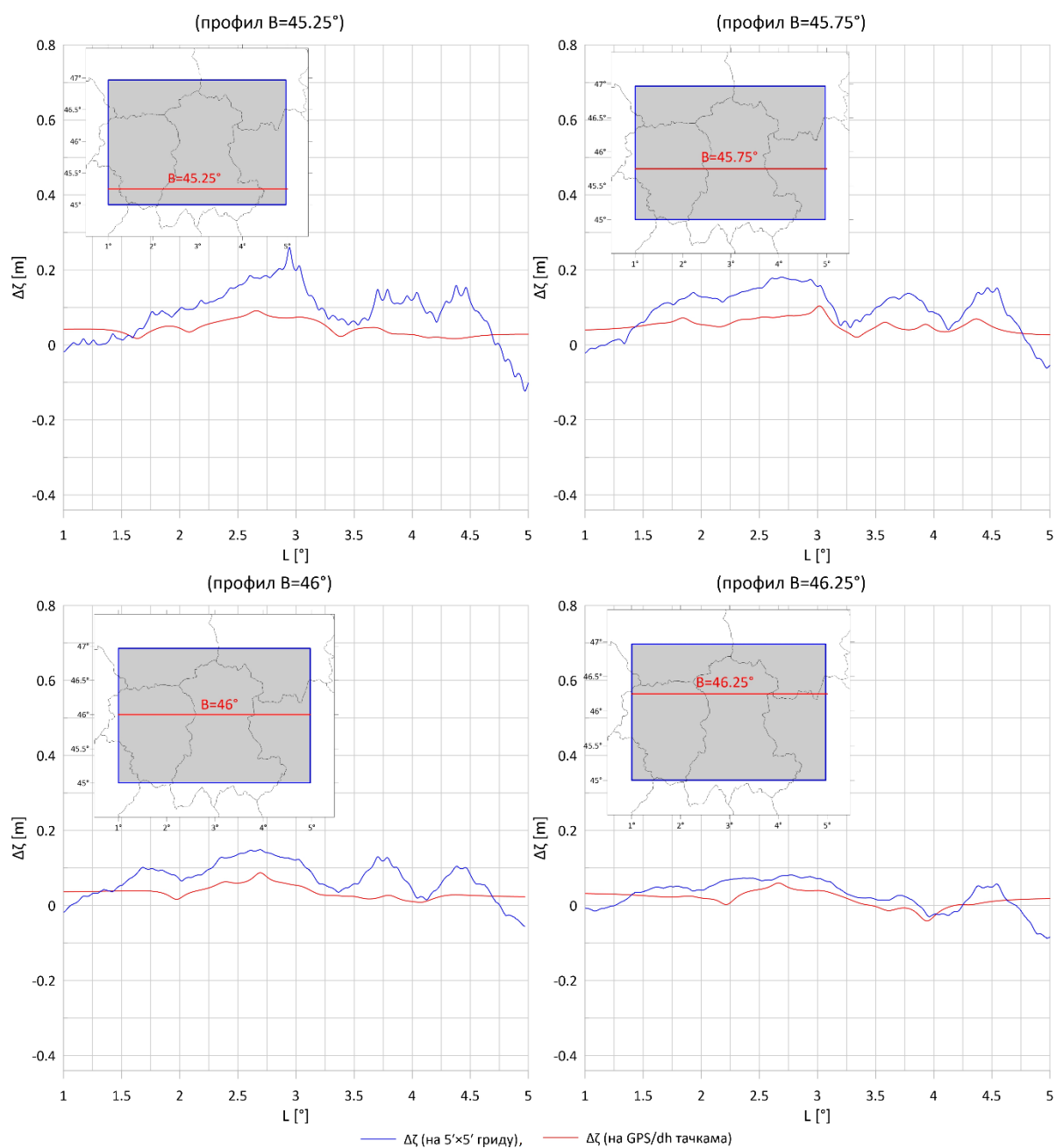
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида који је срачунат преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
- плава функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



### 9.2.1 Први начин спољашње провере резултата

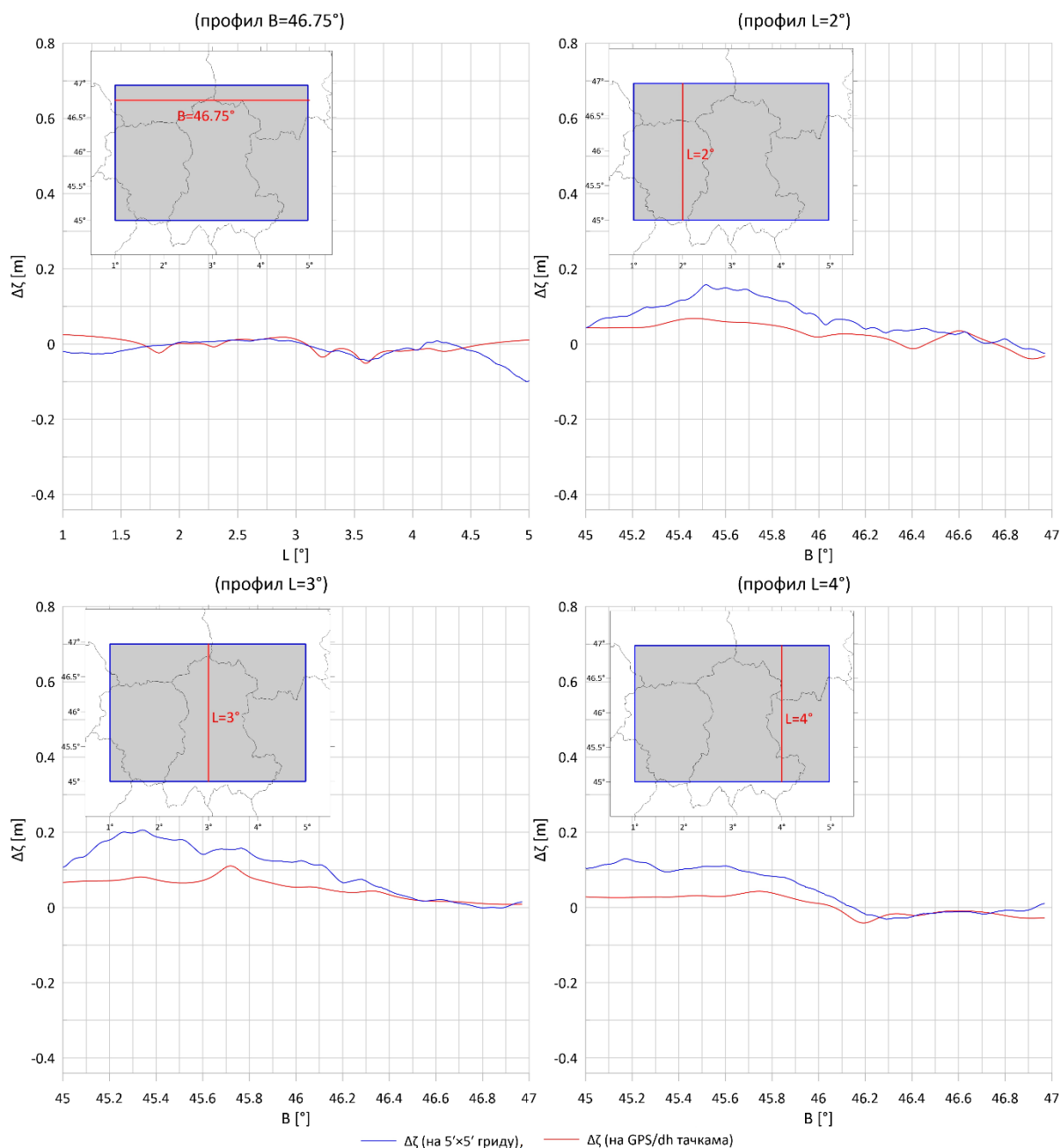
**Прилог 10:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (први део).

- плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021** и
- црвена функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** одређене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и референтне површи **ITUGRG2021**.



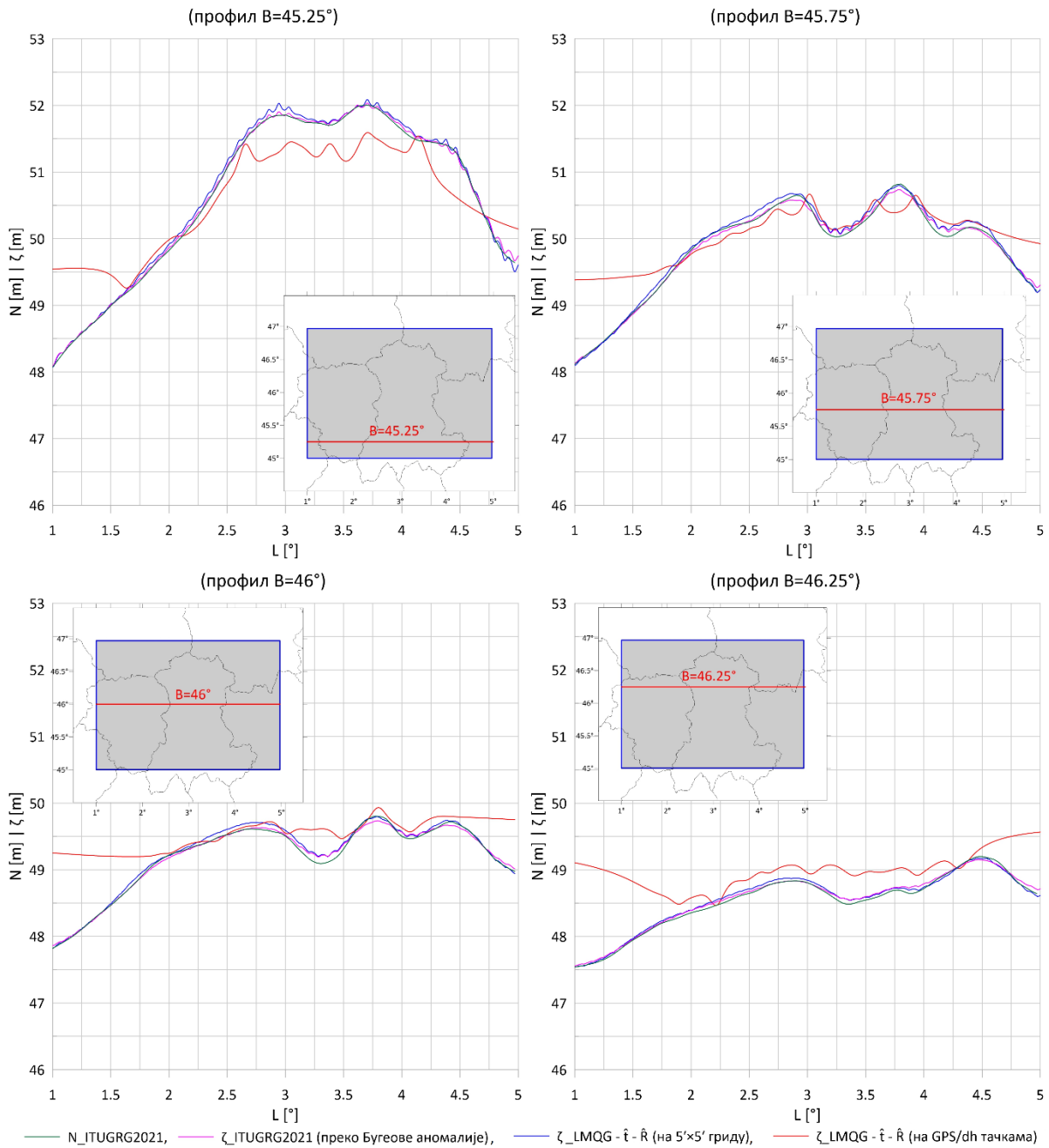
**Прилог 11:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (други део).

- плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021** и
- црвена функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** одређене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и референтне површи **ITUGRG2021**.



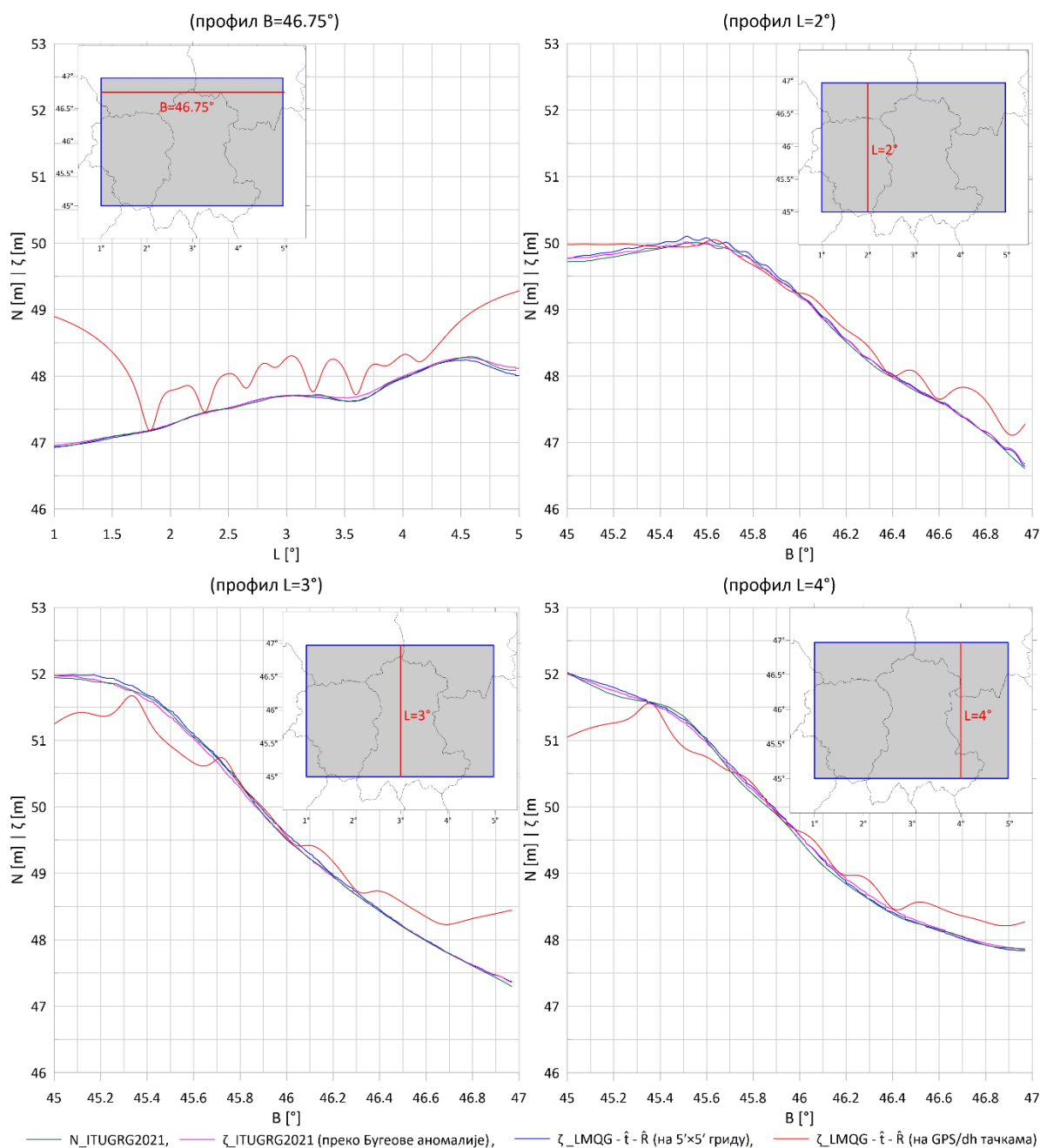
**Прилог 12:** Профили максималне транслације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (*први део*).

1. **зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
2. **магента функција:** профил површи квазигеоида израчунатог преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
3. **плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
4. **црвена функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**), одређеног на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



**Прилог 13:** Профили максималне транслагације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (други део).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида израчунатог преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
- плава функција:** профил транслагације површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил транслагације површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**), одређеног на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.

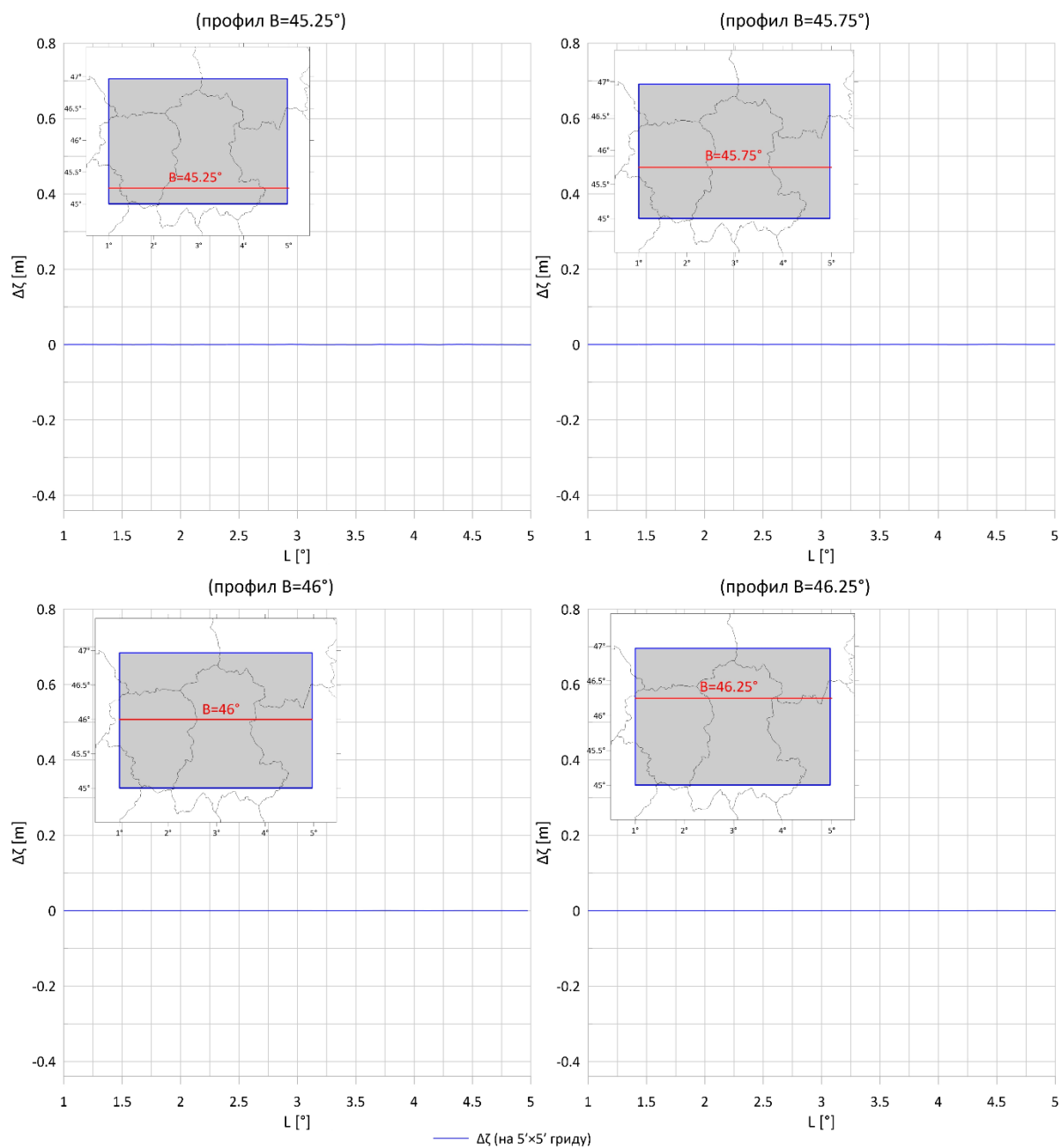




## 9.2.2 Други начин спољашње провере резултата

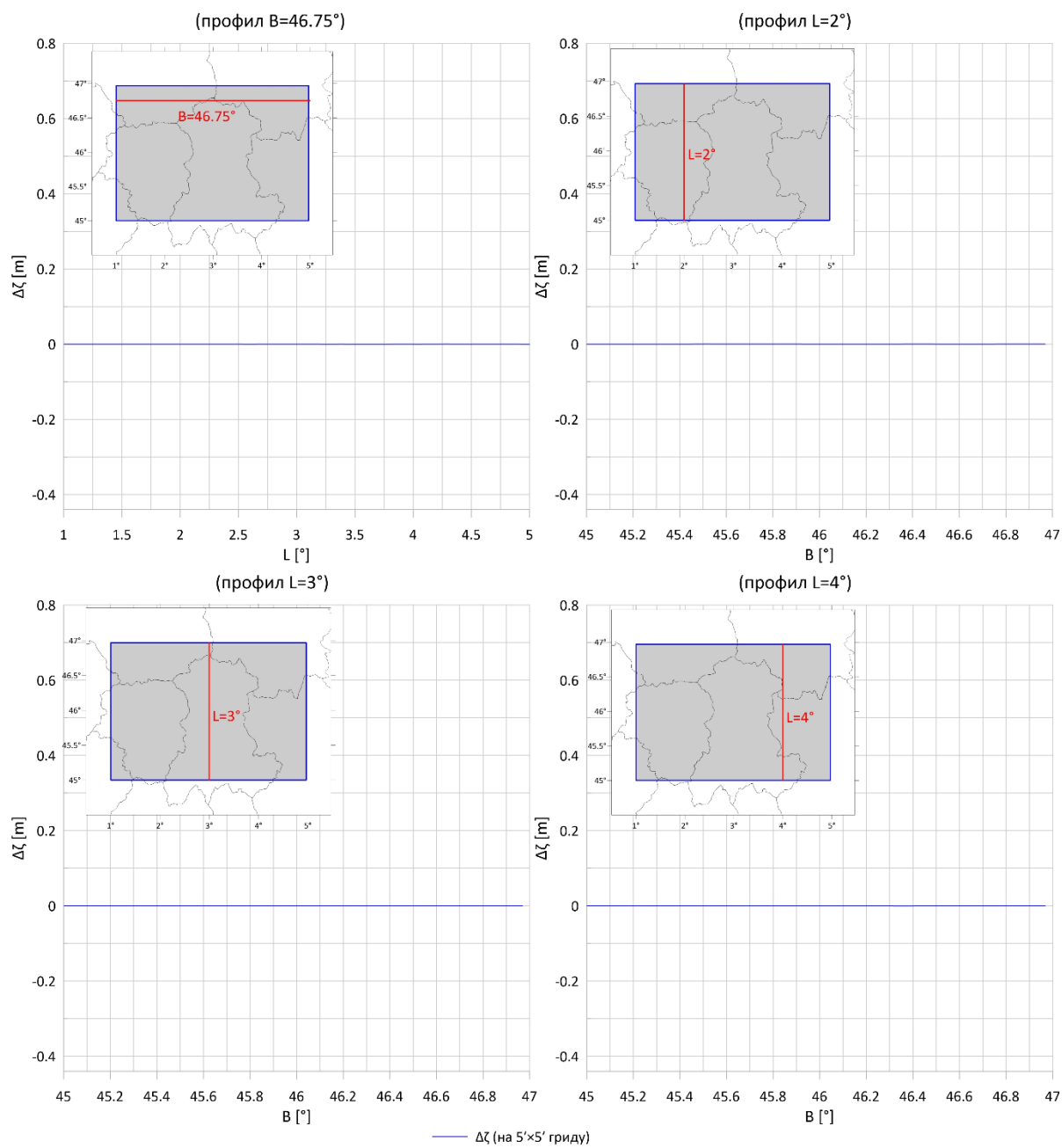
**Прилог 14:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (први део).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021**.



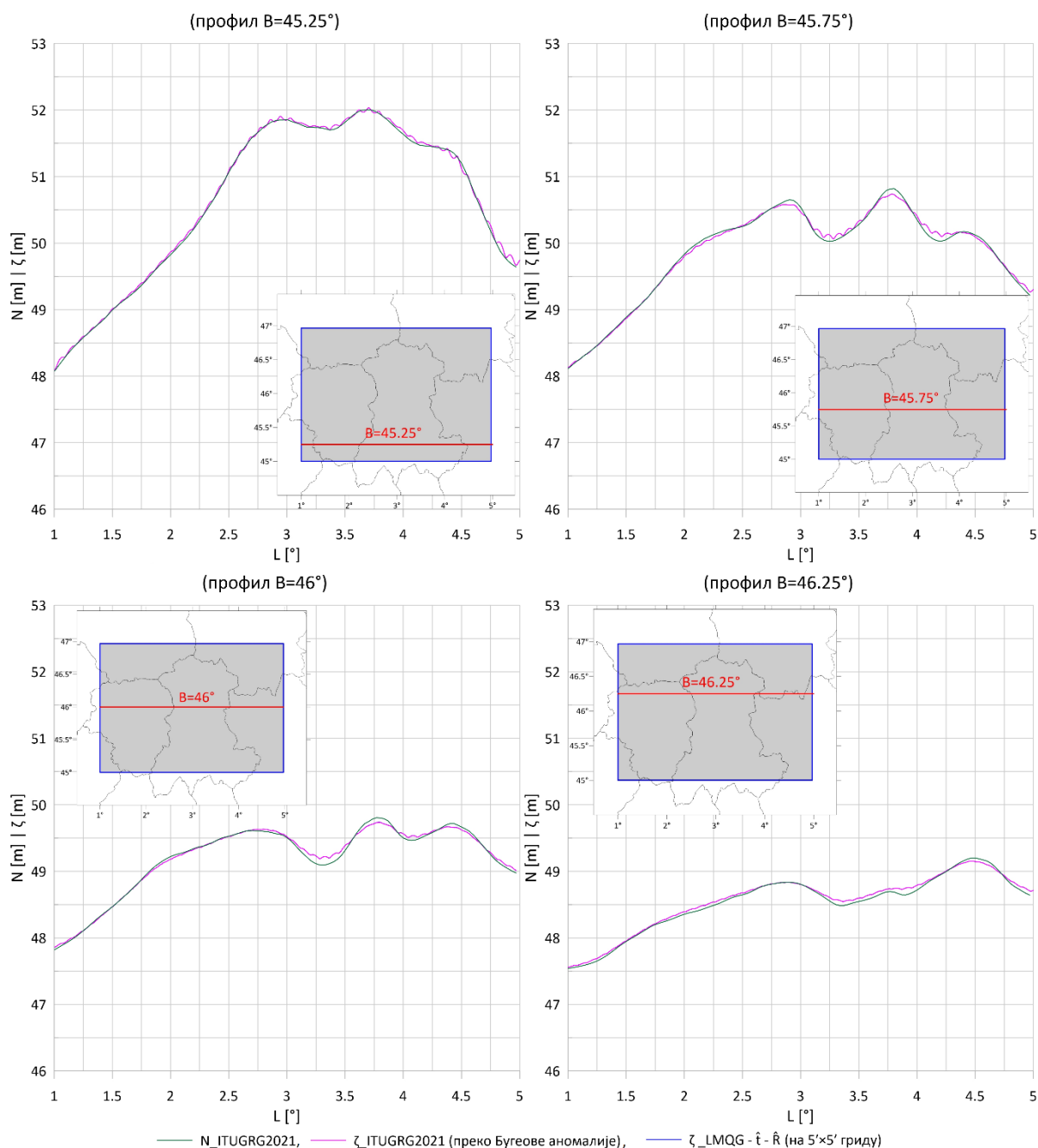
**Прилог 15:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (други део).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021**.



**Прилог 16:** Профили максималне транслагације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (*први део*).

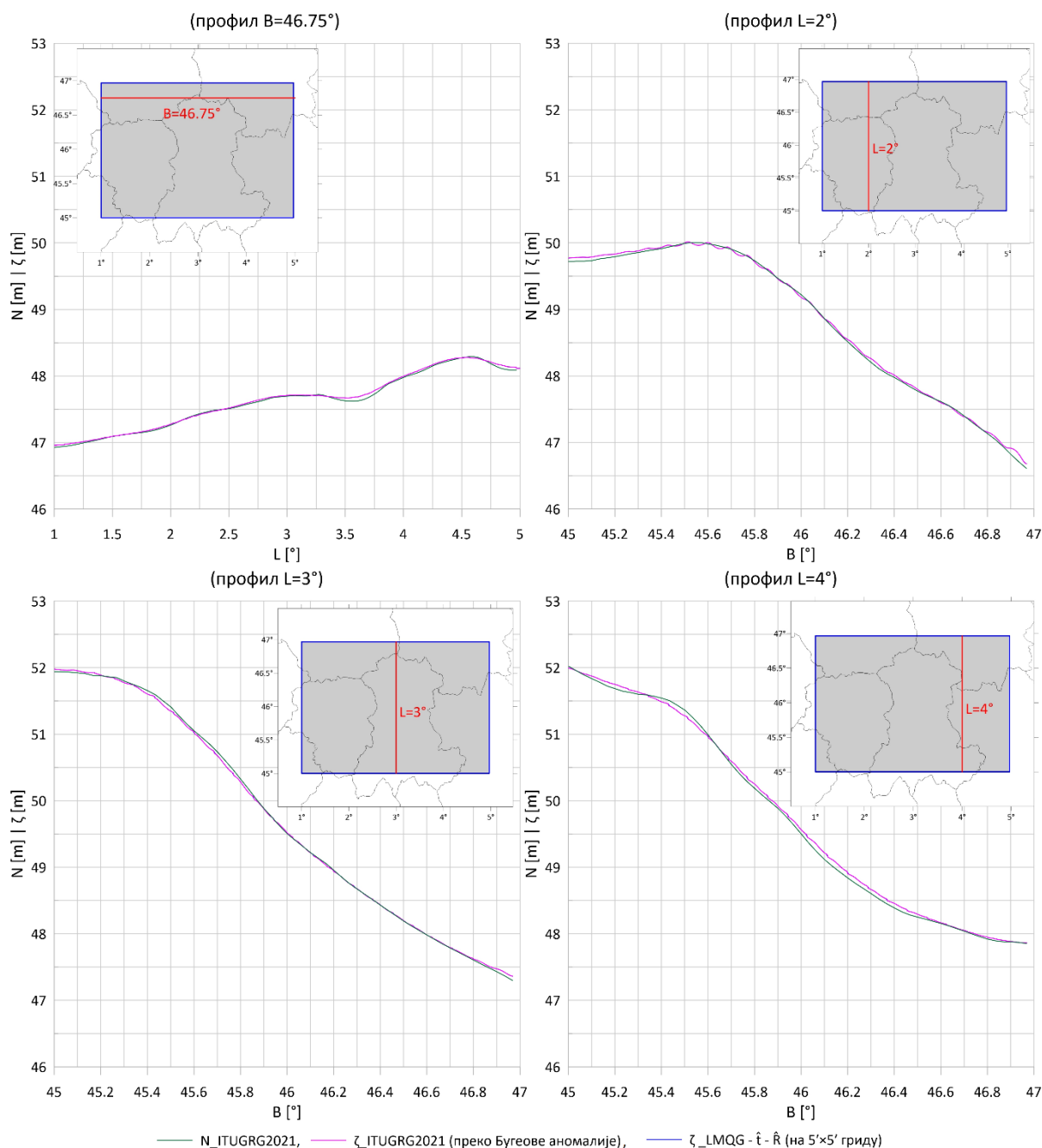
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида израчунаога преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије и
- плава функција:** профил транслагације површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



**НАПОМЕНА:** Транслагација површ локалног модела квазигеоида **LMQG** (плава функција) практично се поклапа са квазигеоидом израчунаога на основу референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије (магента функција).

**Прилог 17:** Профили максималне трансације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (*други део*).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида израчунатог преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије и
- плава функција:** профил трансациране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .

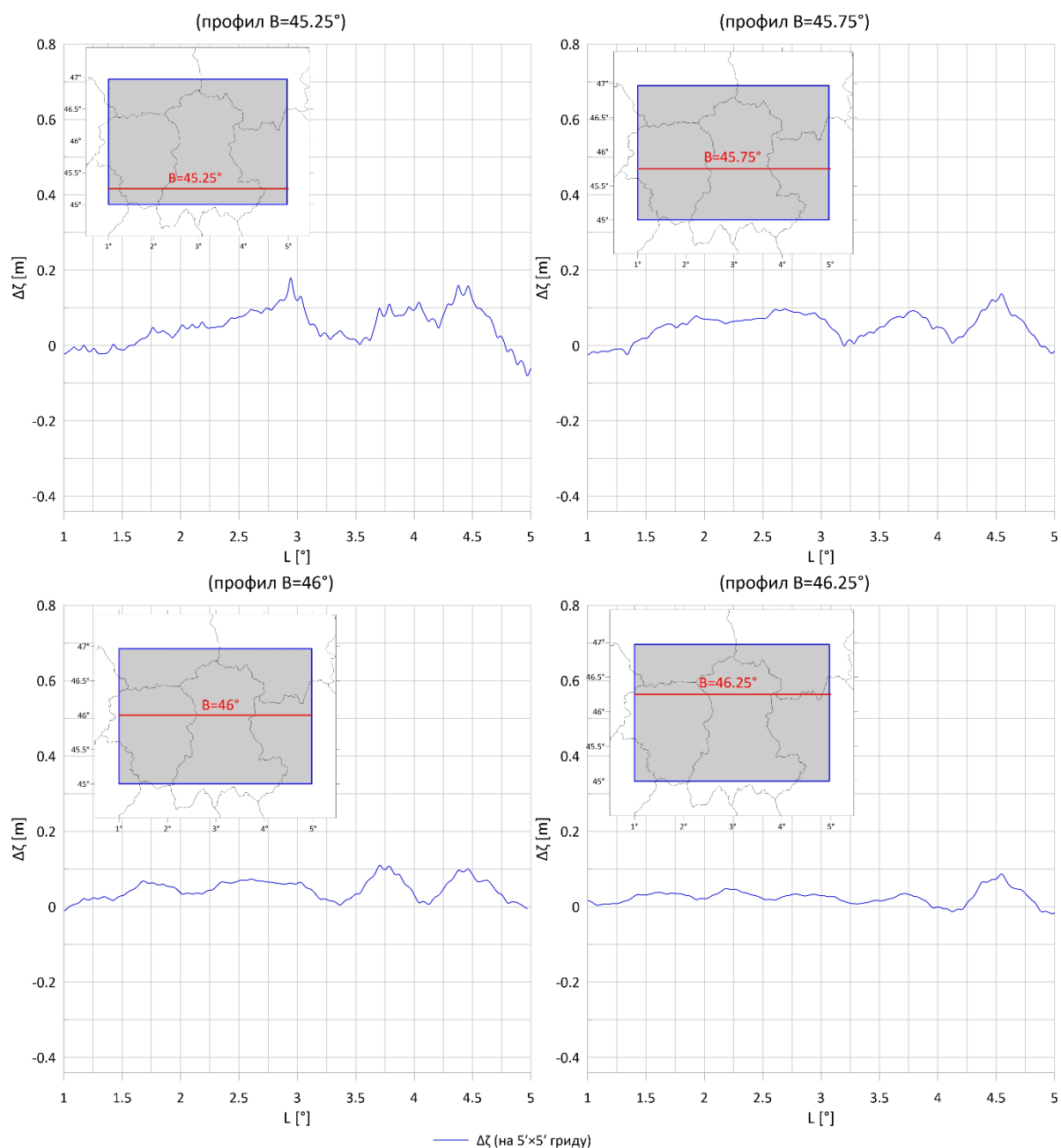


**НАПОМЕНА:** Транслирана површ локалног модела квазигеоида **LMQG** (плава функција) практично се поклапа са квазигеоидом израчунатим на основу референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије (магента функција).

### 9.2.3 Трећи начин спољашње провере резултата

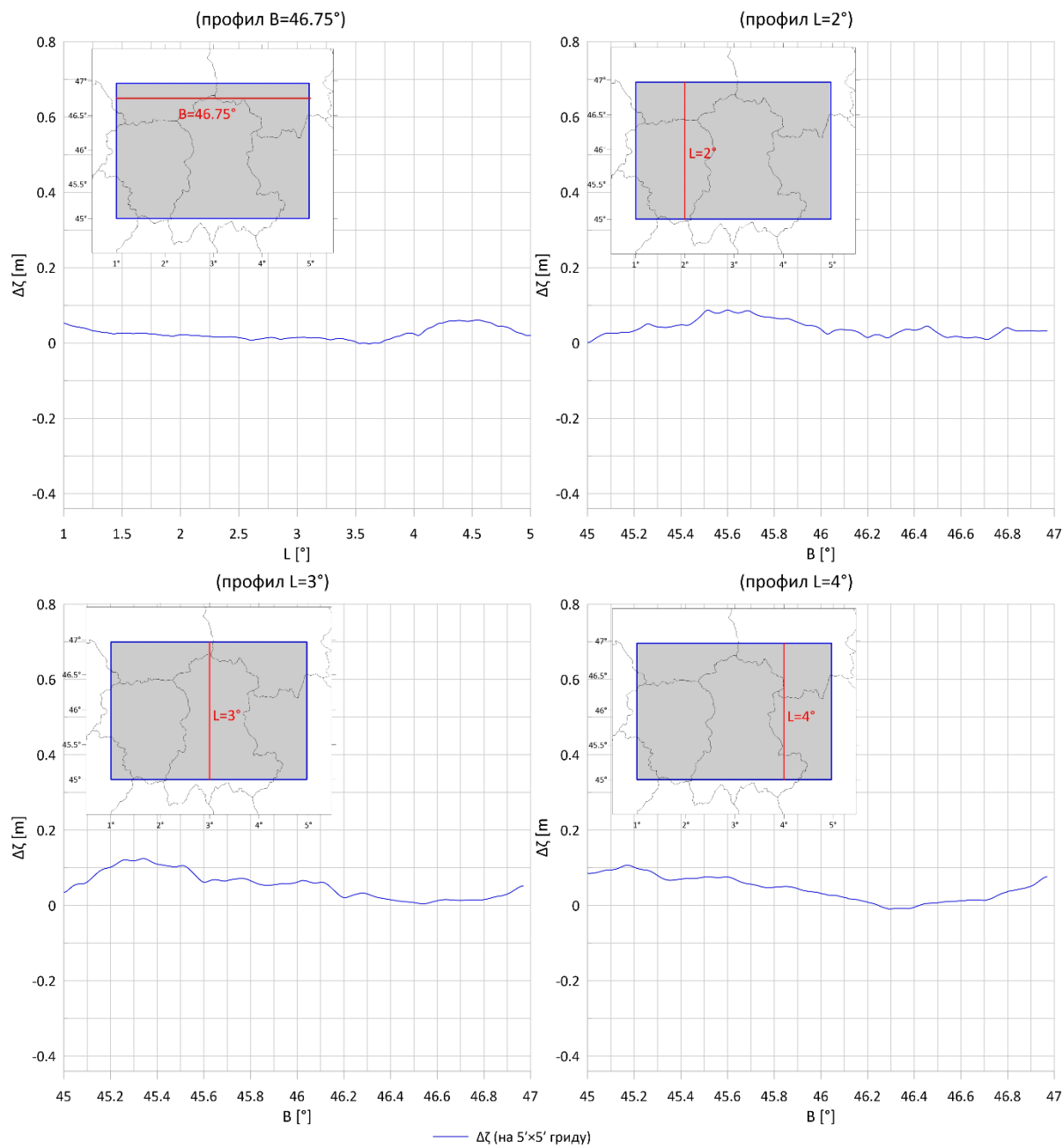
**Прилог 18:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (*први део*).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021**.



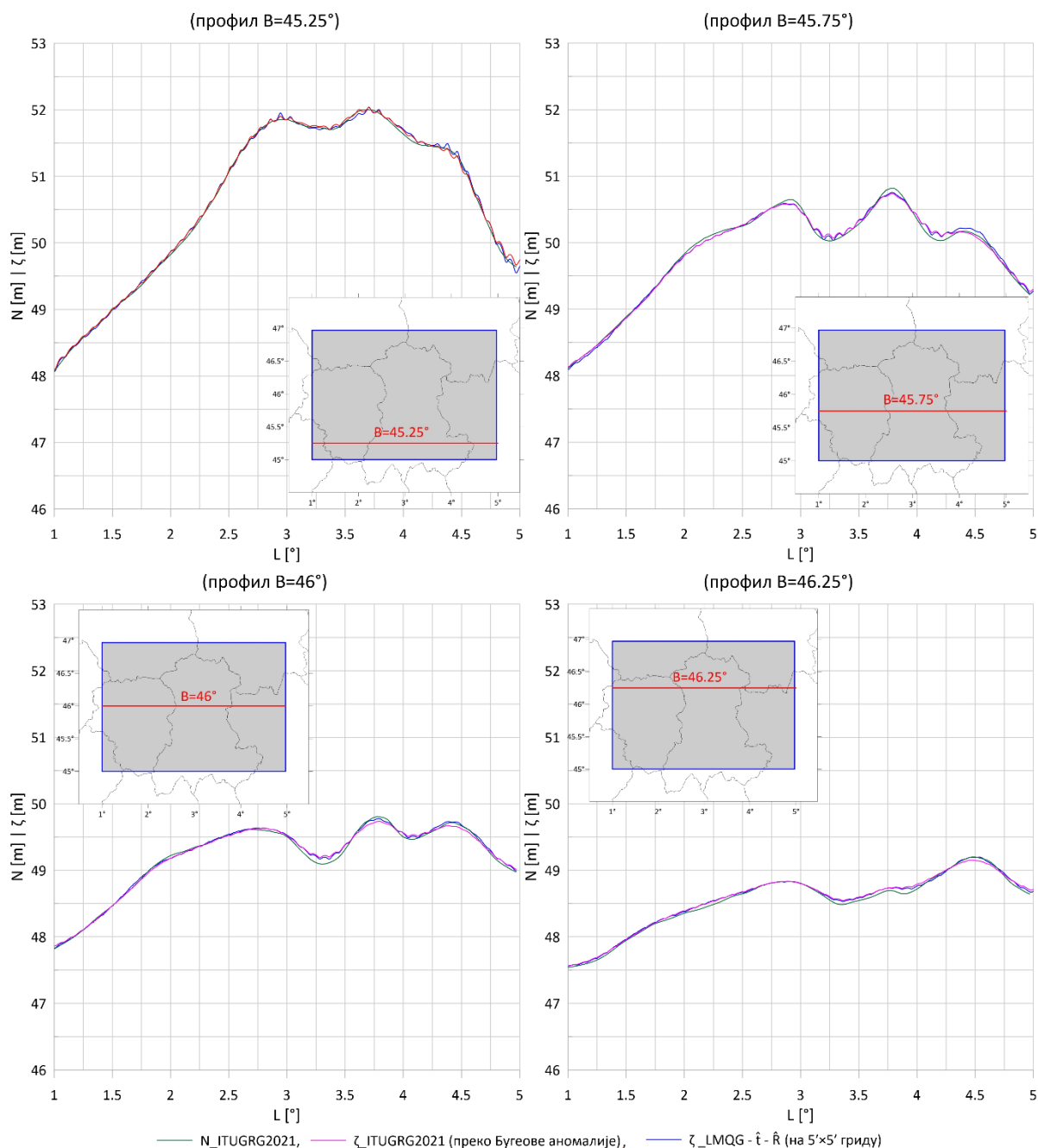
**Прилог 19:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи геоида **ITUGRG2021**, (други део).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **ITUGRG2021**.



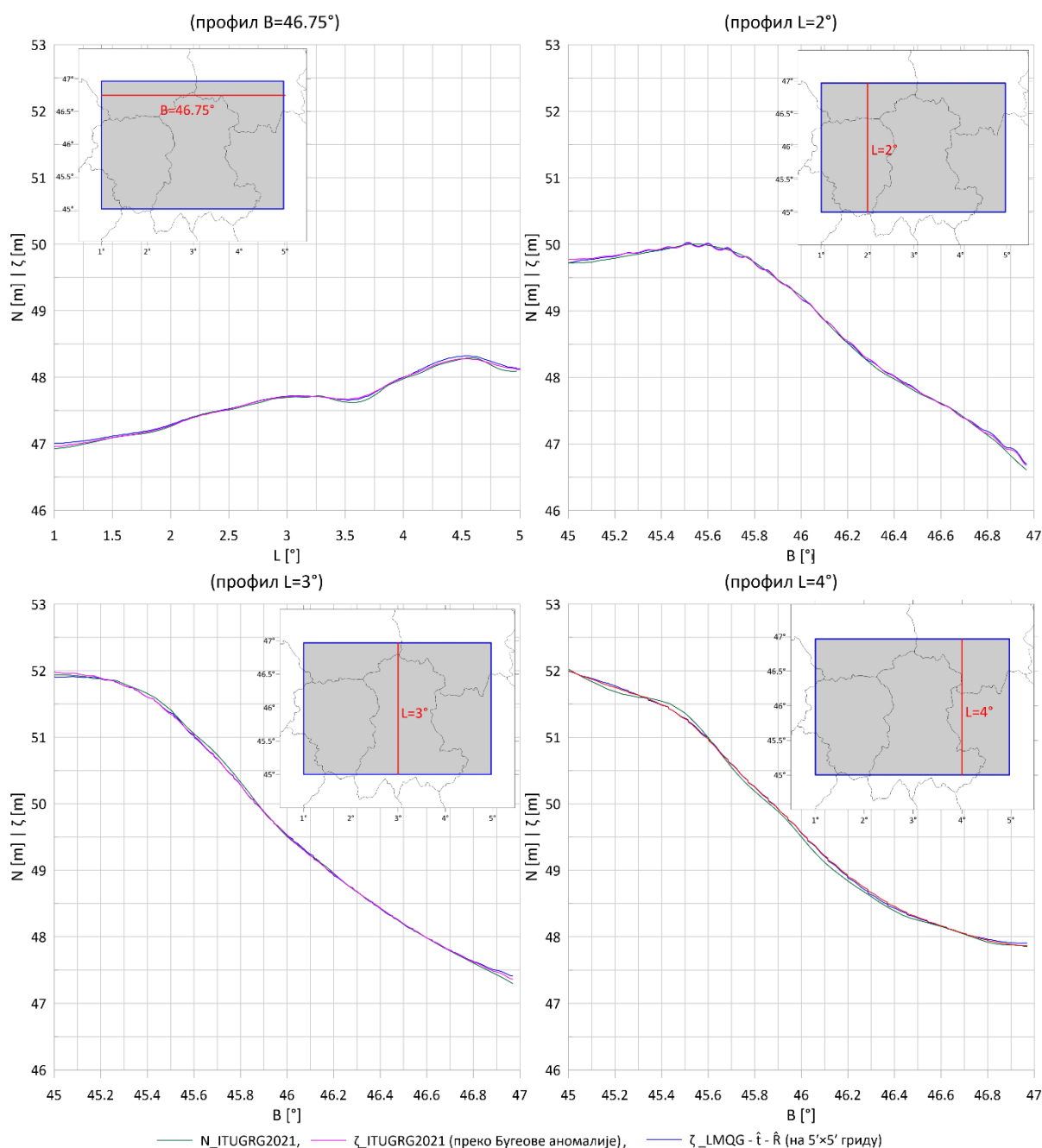
**Прилог 20:** Профили максималне translације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (*први део*).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида израчунатог преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
- плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



**Прилог 21:** Профили максималне транслагације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида одређеног из геоида **ITUGRG2021** путем Бугеове аномалије, (други део).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи геоида **ITUGRG2021**;
- магента функција:** профил површи квазигеоида израчунатог преко референтног геоида **ITUGRG2021** и Бугеове аномалије;
- плава функција:** профил транслагране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .

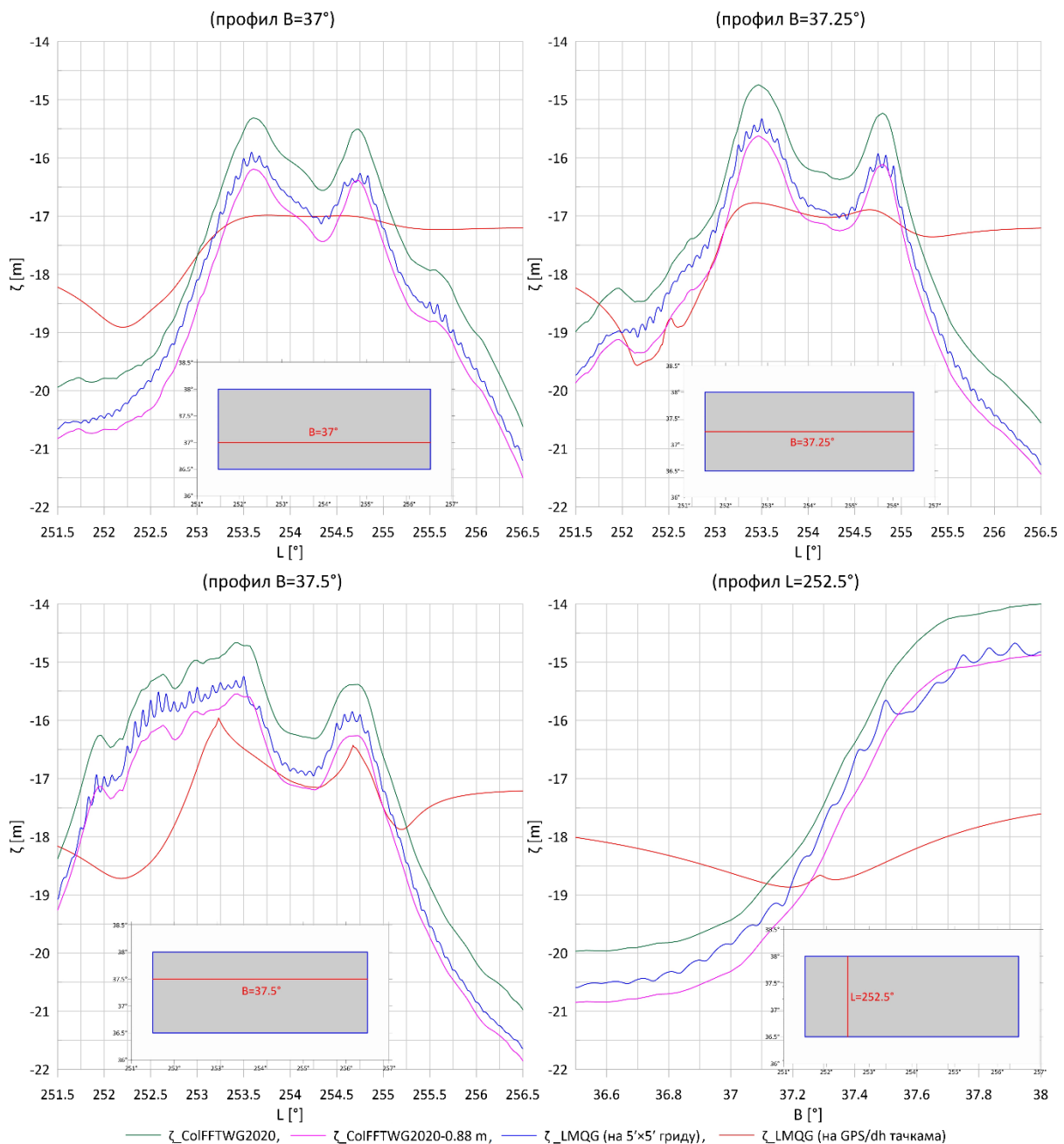




### 9.3 ДРЖАВА КОЛОРАДО

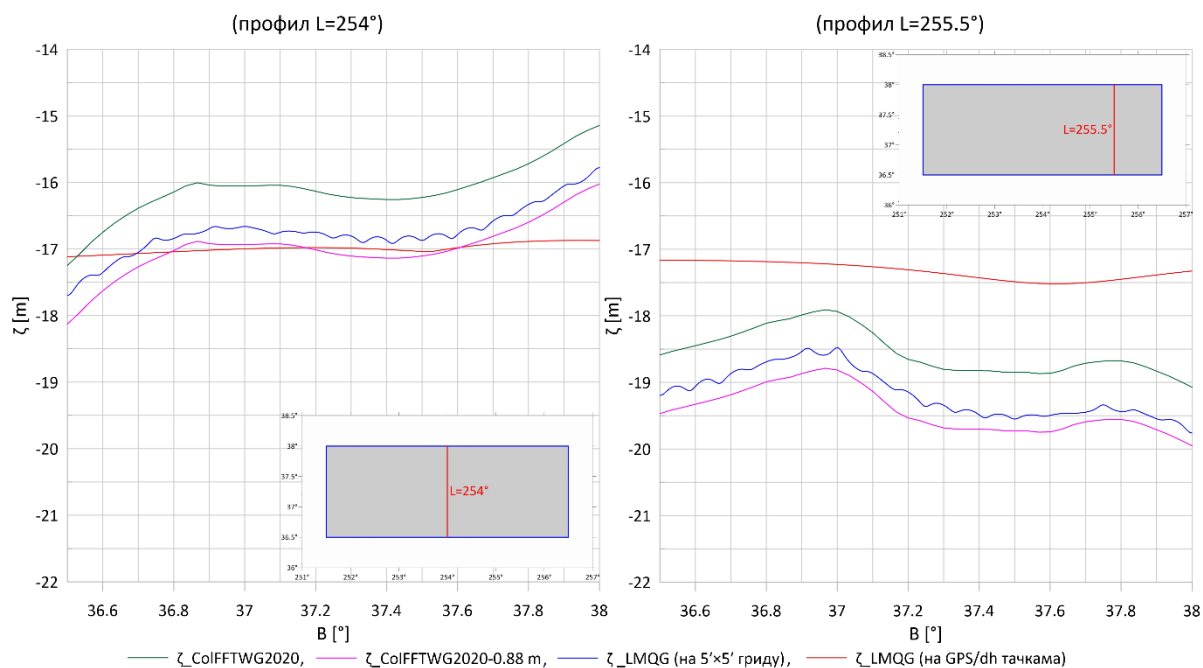
**Прилог 22:** Профили референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020** и локалног модела квазигеоида **LMQG**, (*први део*).

- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **CoIFFTWG2020**;
- магента функција:** профил кориговане површи **CoIFFTWG2020** за вредност одступања у висини ( $\Delta\zeta_{bias} = 0,88 \text{ m}$ ) између модела **CoIFFTWG2020** и анмалије висине **GSVS17**;
- плава функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



**Прилог 23:** Профили референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020** и локалног модела квазигеоида **LMQG**, (други део).

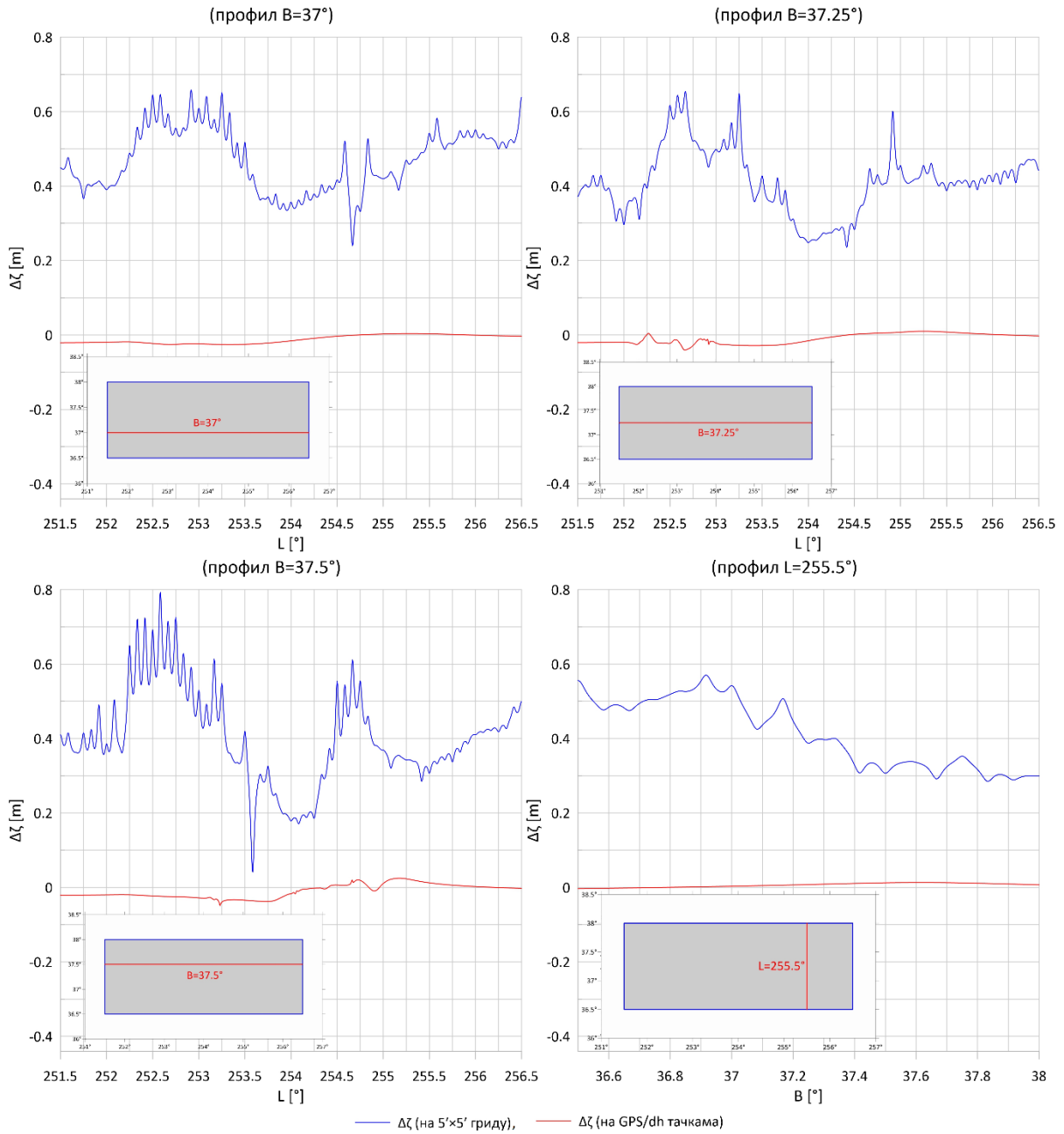
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **CoIFFTWG2020**;
- магента функција:** профил кориговане површи **CoIFFTWG2020** за вредност одступања у висини ( $\Delta\zeta_{bias} = 0,88 \text{ m}$ ) између модела **CoIFFTWG2020** и анмалије висине **GSVS17**;
- плава функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил локалног модела квазигеоида **LMQG**, одређен на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



9.3.1 Први начин спољашње провере резултата

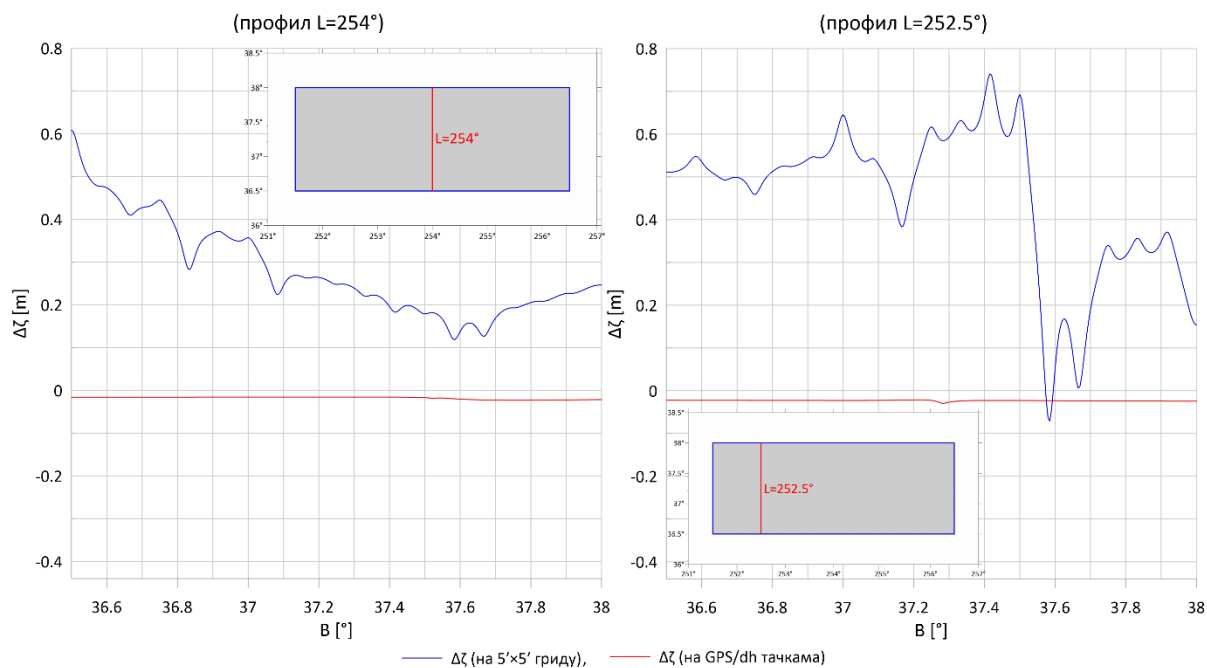
**Прилог 24:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTGW2020**, (први део).

1. **плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTGW2020**.
2. **црвена функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** одређене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и референтне површи **CoIFFTGW2020**.



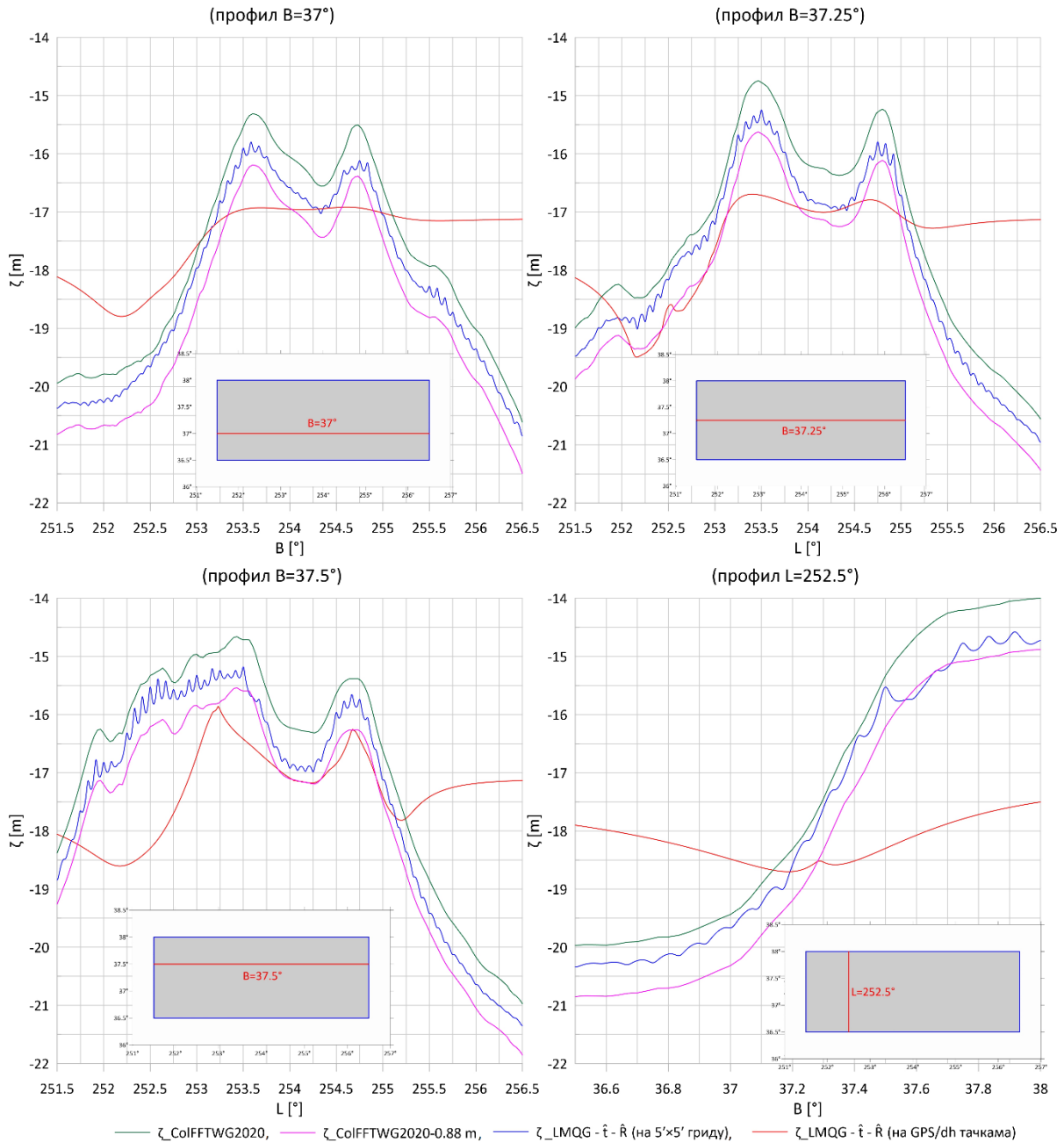
**Прилог 25:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (други део).

- плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTWG2020**.
- црвена функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** одређене на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности и референтне површи **CoIFFTWG2020**.



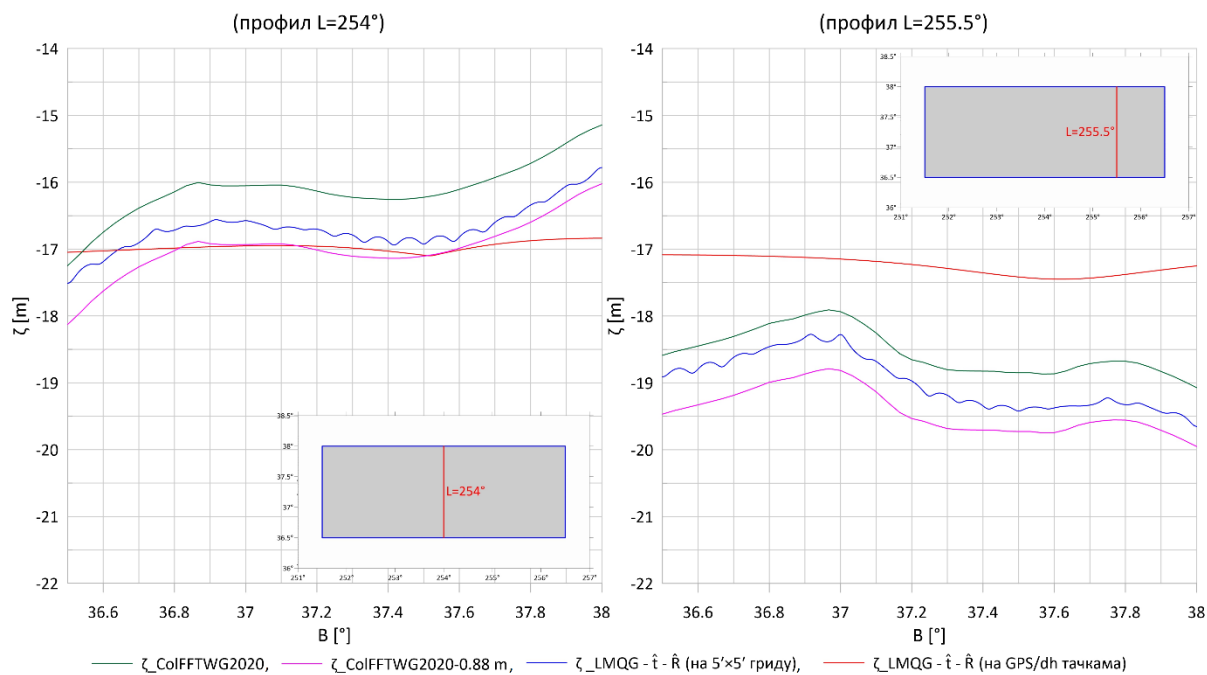
**Прилог 26:** Профили максималне translације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (*први део*).

1. **зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **CoIFFTWG2020**;
2. **плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
3. **црвена функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**), одређеног на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



**Прилог 27:** Профили максималне транслације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{t}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **ColFFTWG2020**, (*други део*).

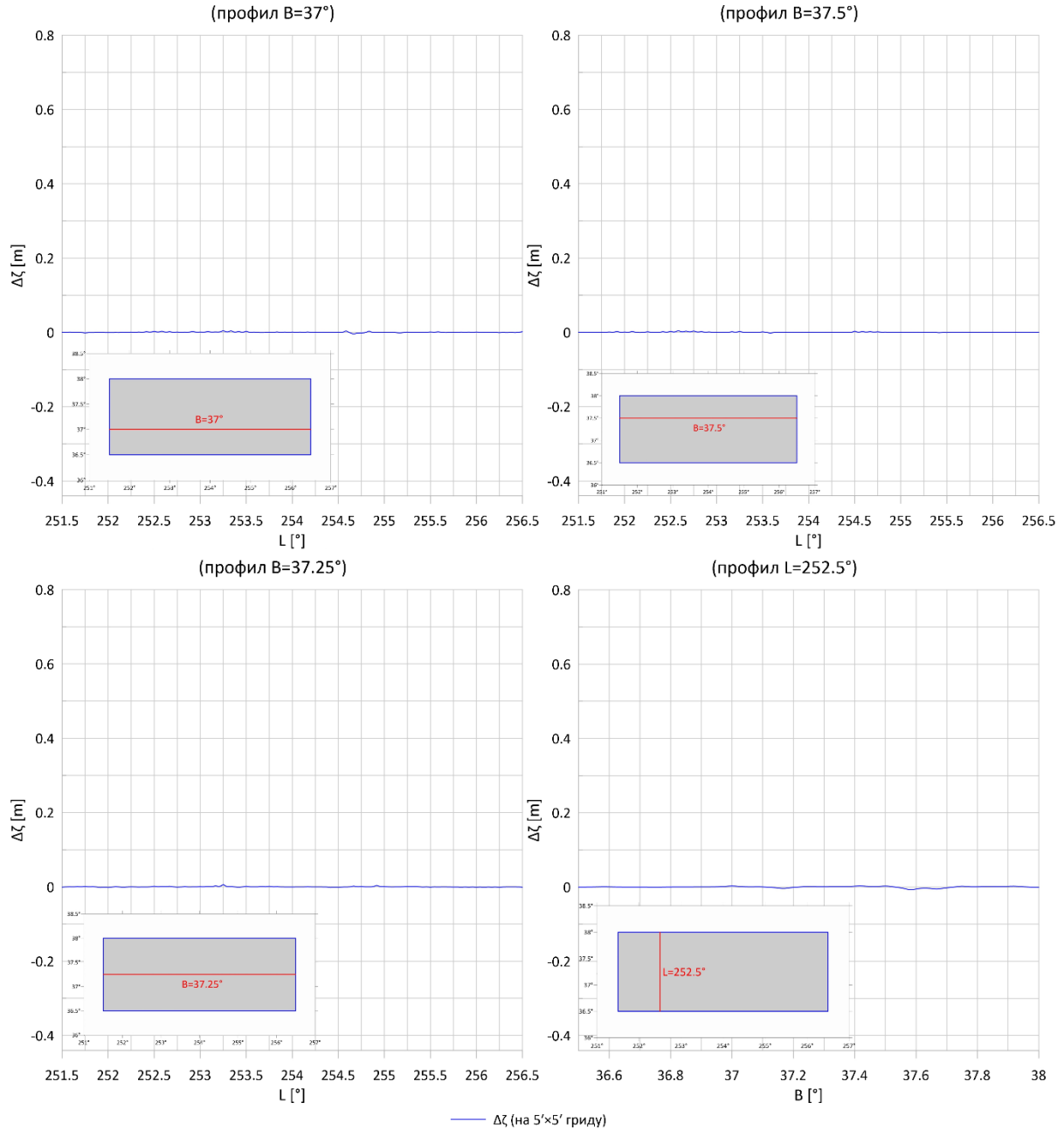
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **ColFFTWG2020**;
- плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$  и
- црвена функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**), одређеног на **GPS/dh** тачкама нивелмана високе тачности.



9.3.2 Други начин спољашње провере резултата

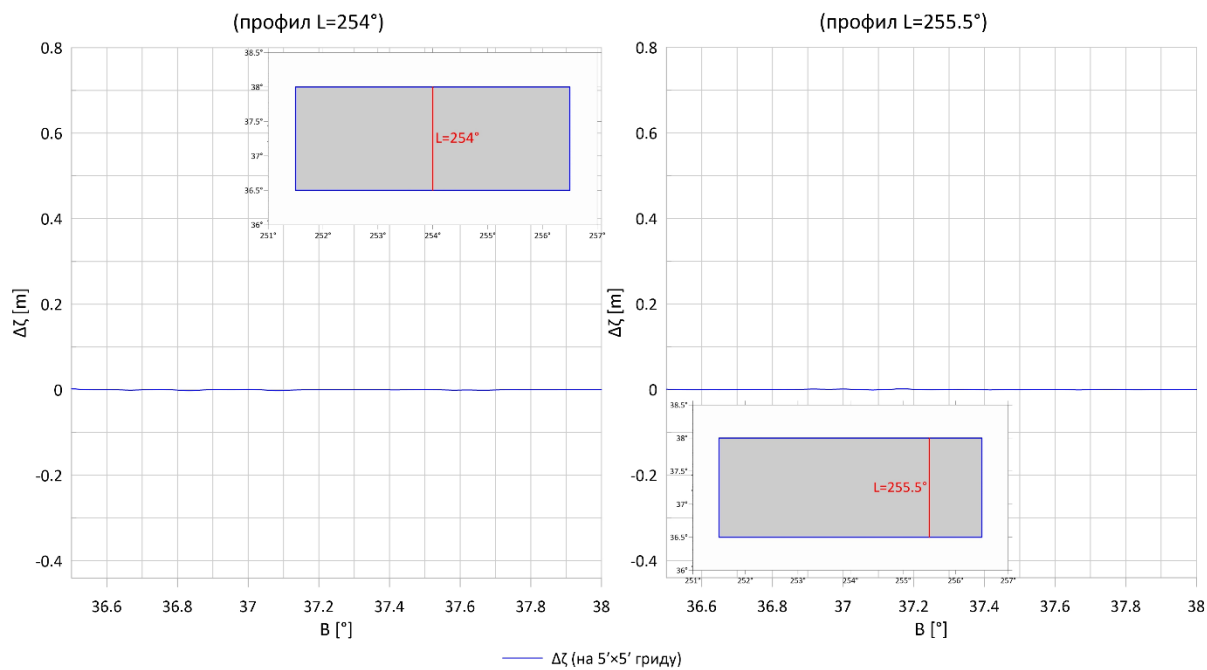
**Прилог 28:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTGW2020**, (*први део*).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTGW2020**.



**Прилог 29:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (други део).

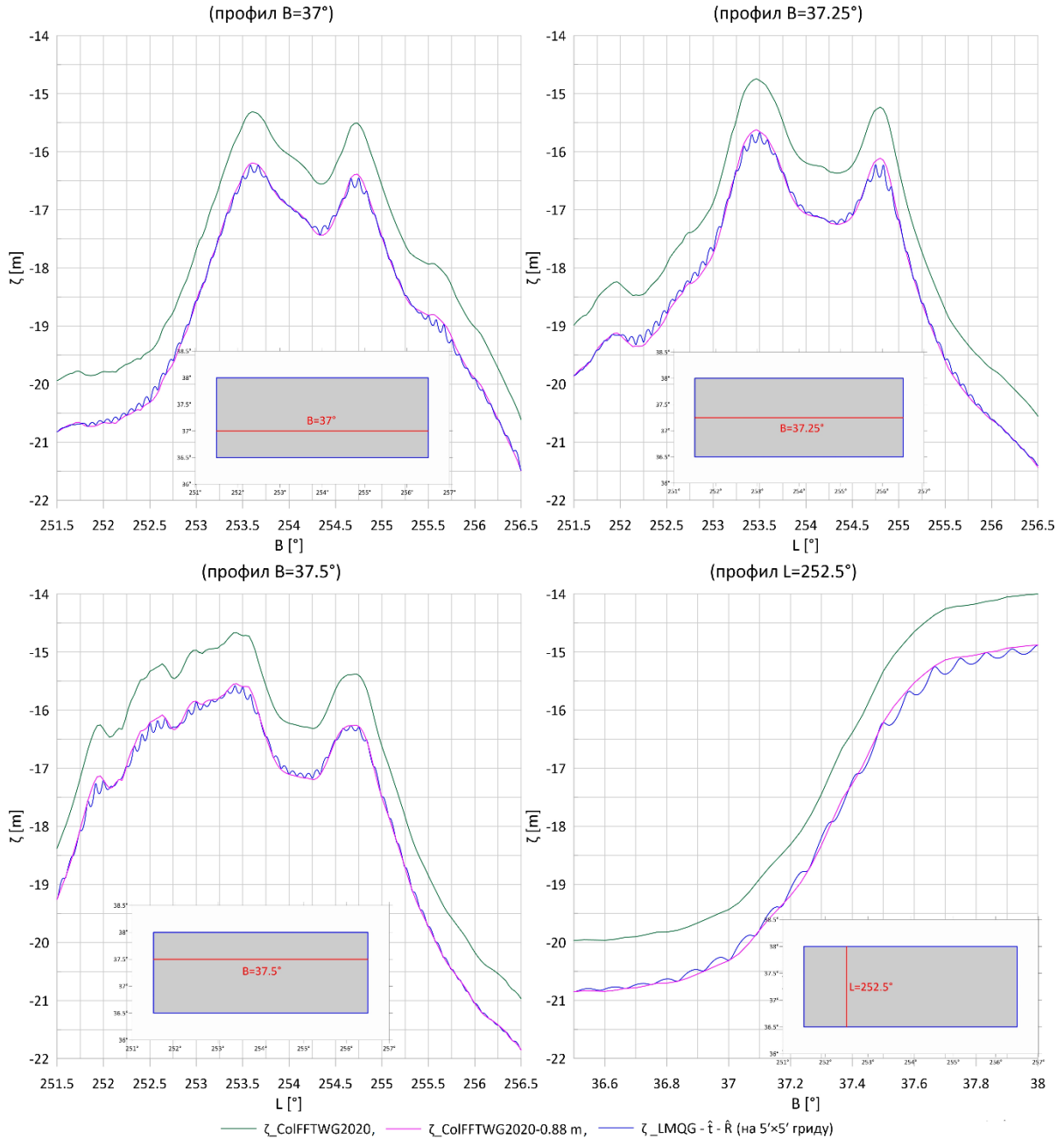
**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTWG2020**.





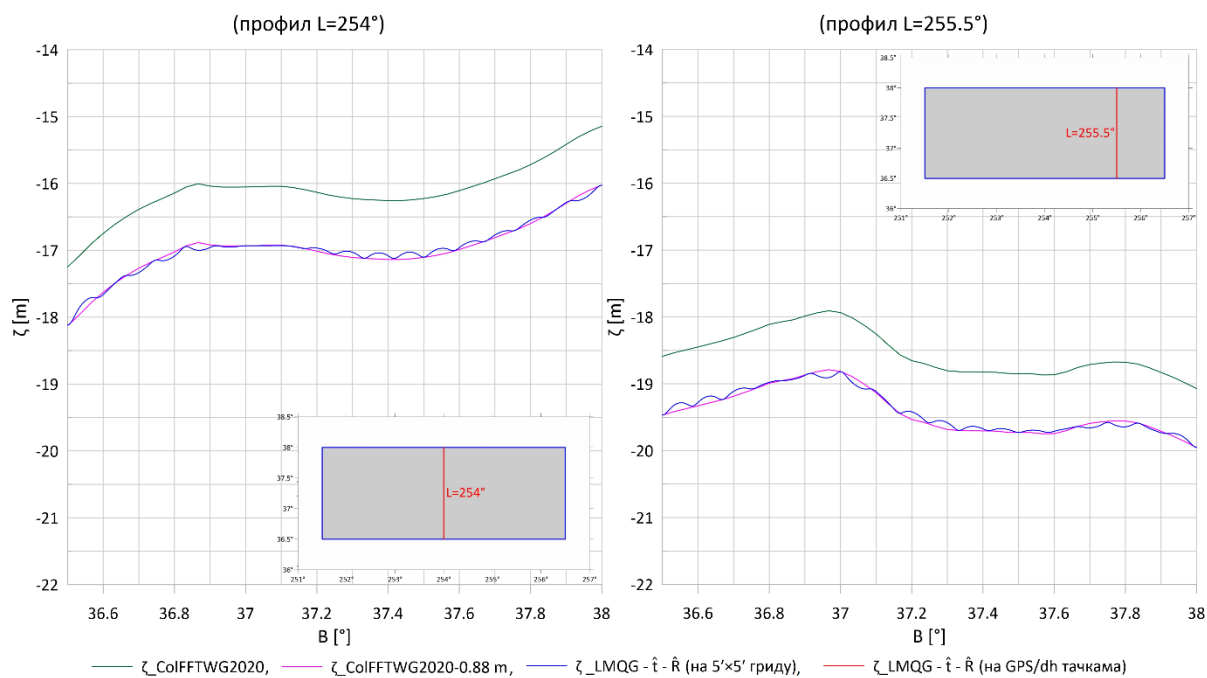
**Прилог 30:** Профили максималне translације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **ColFFTWG2020**, (*први део*).

1. **зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **ColFFTWG2020** и
2. **плава функција:** профил translиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



**Прилог 31:** Профили максималне транслације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **ColFFTWG2020**, (други део).

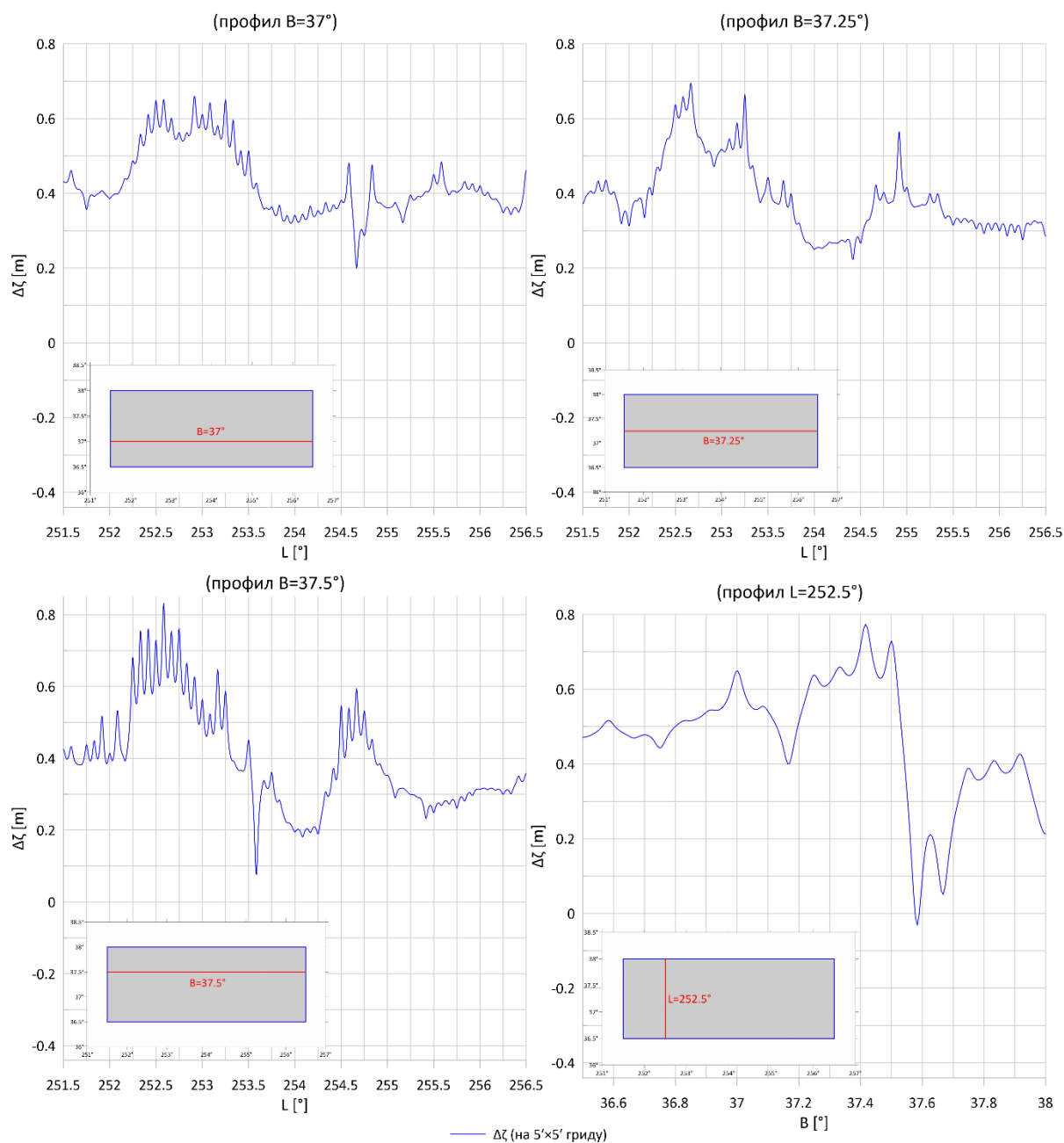
- зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **ColFFTWG2020** и
- плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



### 9.3.3 Трећи начин спољашње провере резултата

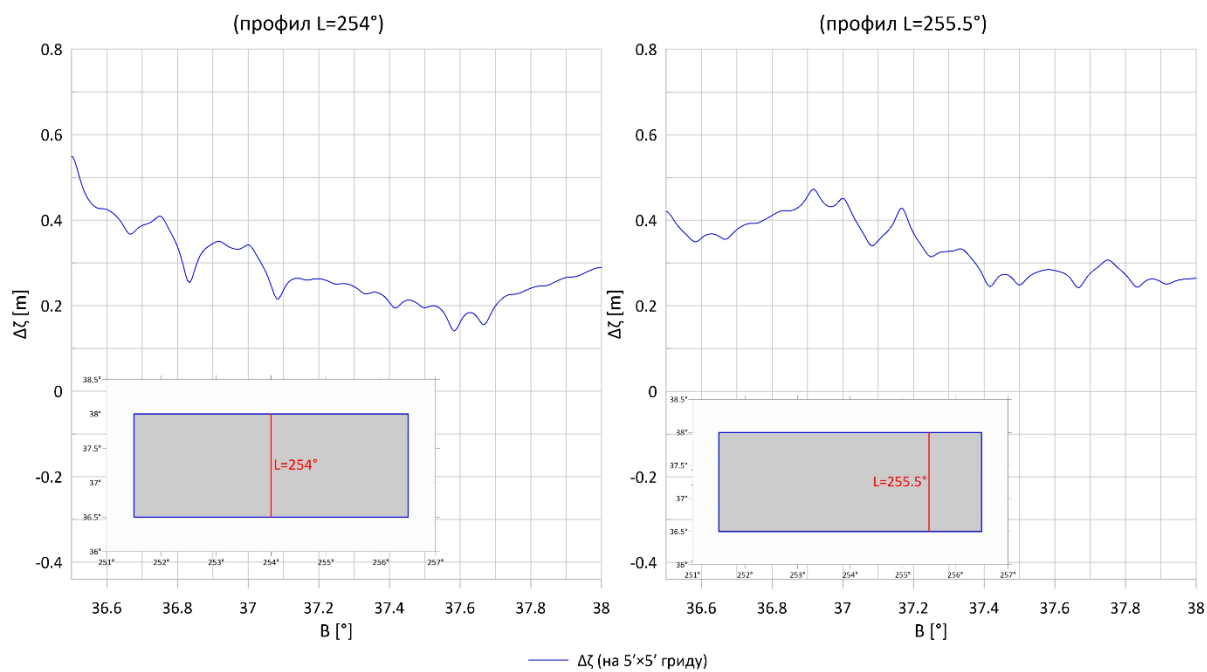
**Прилог 32:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (*први део*).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTWG2020**.



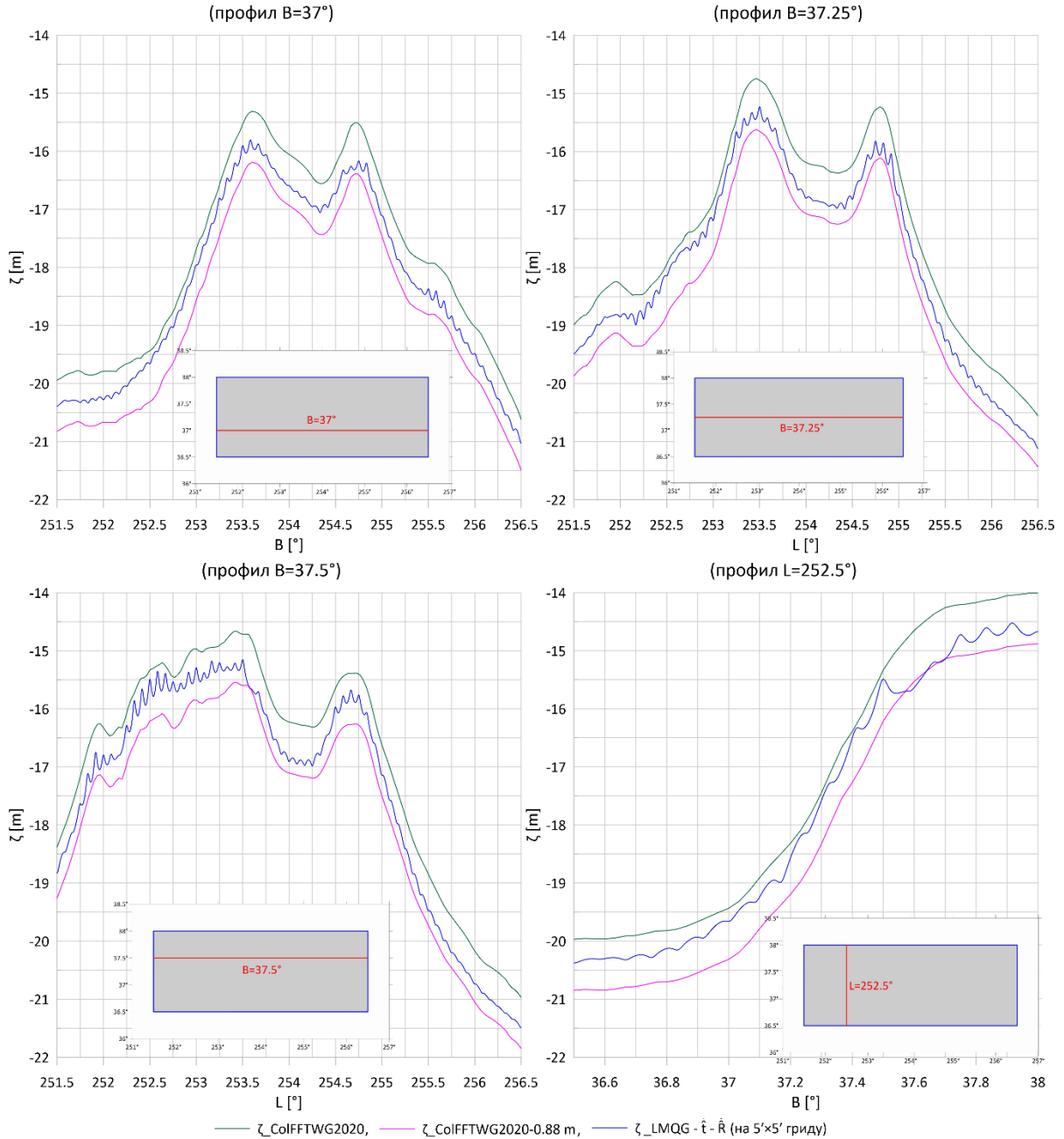
**Прилог 33:** Профили коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи локалног модела квазигеоида **LMQG** и референтне површи квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (други део).

**1. плава функција:** профил коначних разлика  $\Delta\zeta$  између површи **LMQG** дефинисане на гриду резолуције  $5' \times 5'$  и референтне површи **CoIFFTWG2020**.



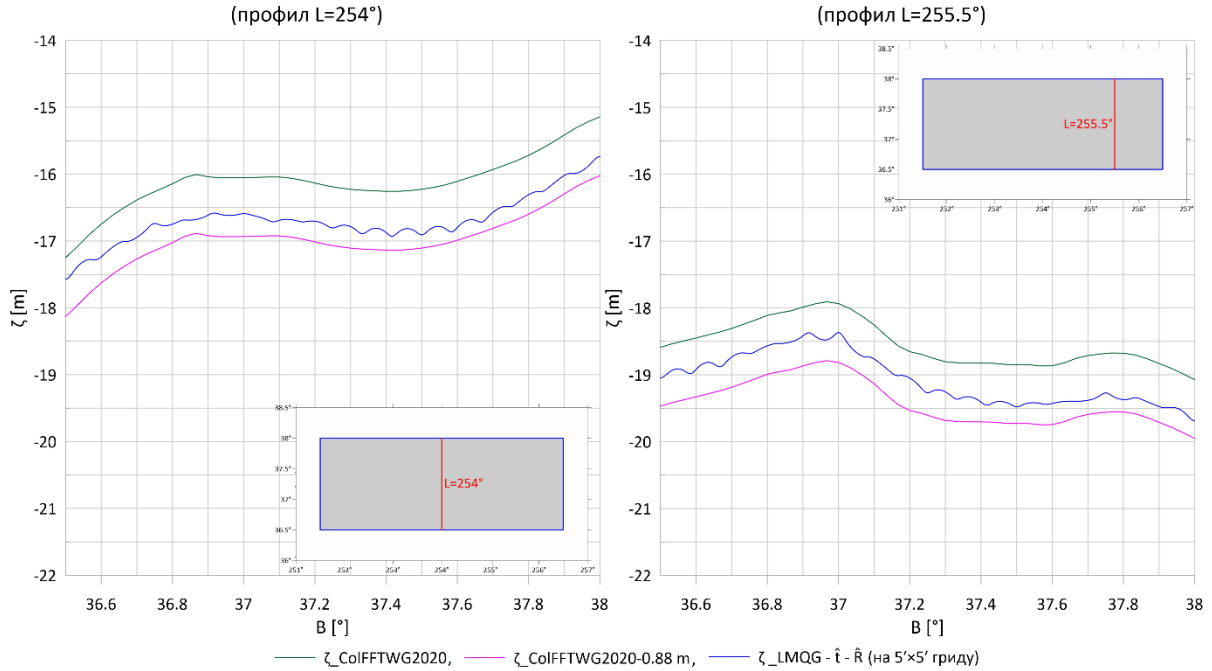
**Прилог 34:** Профили максималне translације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **ColFFTWG2020**, (*први део*).

1. **зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **ColFFTWG2020**;
2. **плава функција:** профил translиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



**Прилог 35:** Профили максималне translације површи **LMQG**, постигнуте помоћу  $\hat{i}$  и  $\hat{R}$ , у односу на површ референтног квазигеоида **CoIFFTWG2020**, (*други део*).

1. **зелена функција:** профил референтне (званичне) површи **CoIFFTWG2020**;
2. **плава функција:** профил транслиране површи локалног модела квазигеоида (**LMQG**) одређеног на тачкама грида резолуције  $5' \times 5'$ .



## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Марко (Драгољуб) Станковић рођен је 27. фебруара 1985. године у Београду, Република Србија, од мајке Анђелке и оца Драгољуба. Основну школу „Јован Цвијић“ у Београду завршио је 2000. године, а Геодетску техничку школу у Београду 2004. године, као одличан ученик. Током средњошколског образовања био је прималац државне и војне стипендије, намењене ученицима са изузетним успехом. У току завршне године средњошколског школовања, освојио је друго место у геодетским дисциплинама на „XV републичким сусретима грађевинских и геодетских школа Србије“, у организацији Министарства просвете и спорта Републике Србије и Заједнице грађевинских и геодетских школа Србије.

Године 2004. уписао је Одсек за Геодезију на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, где је дипломирао 2012. године са просечном оценом 8,71. Његов дипломски рад под насловом „Дугорочно праћење карактеристика кварцног осцилатора применом протокола за синхронизацију времена“ оцењен је оценом 10, чиме је стекао звање дипломираног геодетског инжењера.

Након дипломирања, 2013. године, запослио се у компанији „*Geo Info Strategies*“, где је радио на пројектима из области дигиталне аерофотограметрије, развоја **GIS** софтвера, као и на истраживању и развоју „*mobile mapping*“ и „*street view*“ технологија. Као члан тима, учествовао је на међународном пројекту „*Aerial Mapping of Kozani, Greece*“ који је подразумевао аероснимање префектуре Козани у Грчкој.

Године 2014. запослио се у Средњој геодетској техничкој школи у Београду, где ради као наставник геодетских предмета.

Докторске академске студије на Одсеку за Геодезију и геоинформатику Грађевинског факултета Универзитета у Београду уписао је 2015. године. Током докторских студија положио је све предмете са просечном оценом 9,89, укључујући додатни девети предмет, за који је добио одобрење након подношења молбе. У оквиру својих истраживања, аутор или коаутор девет научних радова. Два рада су објављена у међународним научним часописима на **SCI**<sup>1</sup> листи (категорија **M22** – рад у истакнутом међународном часопису и **M23** – рад у међународном часопису), шест радова су објављена у зборницима међународних научних скупова (категорија **M33** – саопштење са међународног скупа штампано у целини), док је један рад објављен у водећем националном часопису (категорија **M51** – рад у водећем часопису националног значаја).

Године 2018. завршио је обуку за стицање педагошких, психолошких и методичких компетенција у настави на Филозофском факултету Универзитета у Новом Саду. Овај програм обухвата педагошке и психолошке теорије у настави, методичку наставног рада, као и методичку праксу. Исте године је пред Комисијом за полагање испита за лиценцу Министарства просвете, науке и технолошког развоја положио испит за дозволу за рад наставника, васпитача и стручних сарадника, чиме је стекао право на самостално обављање образовно-васпитног рада у оквиру геодезије и геоинформатике.

Говори и активно користи српски и енглески језик.

---

<sup>1</sup> *Science Citation Index*

## ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Име и презиме аутора: Марко Станковић

Број индекса: 921/15

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

### **ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ МОДЕЛИРАНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду, 10.10.2024.

Потпис аутора

---



## **ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА**

Име и презиме аутора: Марко Станковић  
Број индекса: 921/15  
Студијски програм: Геодезија и геоинформатика  
Наслов рада: ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ  
МОДЕЛИРАНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА  
ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА  
Ментор: В. проф. др Олег Р. Одаловић, дипл. инж. геод.

### **Изјављујем**

да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**. Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада. Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 10.10.2024.

Потпис аутора

---

## ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### ОДРЕЂИВАЊЕ КВАЗИГЕОИДА ПРИМЕНОМ МОДЕЛИРАНИХ ВРЕДНОСТИ ПАРАМЕТАРА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање. Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, 10.10.2024.

Потпис аутора

---