УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФАКУЛТЕТ ЗА ОБРАЗОВАЊЕ УЧИТЕЉА И ВАСПИТАЧА

Ивана З. Веселиновић

СТРАТЕГИЈЕ МНОЖЕЊА У ФУНКЦИЈИ РАЗВОЈА МУЛТИПЛИКАТИВНОГ МИШЉЕЊА

докторска дисертација

Београд, 2024.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF EDUCATION

Ivana Z. Veselinović

MULTIPLICATION STRATEGIES IN THE FUNCTION OF DEVELOPING MULTIPLICATIVE THINKING

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2024.

Ментор:

Ментор: проф. др Маријана Зељић, редовни професор, ужа научна област: Методика наставе математике, Факултет за образовање учитеља и васпитача, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

проф. др Оливера Ђокић, редовни професор, ужа научна област: Методика наставе математике, Факултет за образовање учитеља и васпитача, Универзитет у Београду

проф. др Јасмина Милинковић, редовни професор, ужа научна област: Методика наставе математике, Факултет за образовање учитеља и васпитача, Универзитет у Београду

проф. др Александра Михајловић, ванредни професор, ужа научна област: Методика наставе математике, Факултет педагошких наука у Јагодини, Универзитет у Крагујевцу

доц. др Милана Дабић Боричић, доцент, ужа научна област: Методика наставе математике Факултет за образовање учитеља и васпитача, Универзитет у Београду

Датум одбране:

СТРАТЕГИЈЕ МНОЖЕЊА У ФУНКЦИЈИ РАЗВОЈА МУЛТИПЛИКАТИВНОГ МИШЉЕЊА

САЖЕТАК

Предмет истраживања у дисертацији су менталне стратегије множења у функцији развоја мултипликативног мишљења. Мултипликативно мишљење се одређује као способност препознавања и представљања различитих мултипликативних ситуација, разумевања операција множења и дељења, као и способност примене флексибилних стратегија множења и дељења, у нашем случају стратегија множења. У теоријском делу рада анализирали смо разлику између алгоритамског и креативног приступа настави математике и значај менталне аритметике. Фокус рада јесте на разматрању методичких процедура и приступа множењу једноцифрених бројева усмерених на развијање значења операције множења и флексибилних стратегија множења.

Посебна пажња посвећена је значају и улози репрезентација које подстичу развој мултипликативног мишљења ученика. Као значајну претпоставку за развој мултипликативног мишљења видимо и начин структурисања садржаја и улогу правила аритметике као основе на којој се развијају стратегије рачунања.

На основу формулисаних закључака и теоријског дела рада креиран је емпиријски део истраживања у циљу утврђивања и анализирања ефеката два Модела систематске обраде множења једноцифреним бројевима, осмишљених за потребе дисертације. Модел 1 се заснивао на примени аритметичких правила и развоју стратегија које се темеље на њиховој примени, а Модел 2 на коришћењу задатака различите семантичке структуре и иконичких репрезентација као основе за развијање значења и стратегија операције множења. У истраживању је коришћен метод експеримента са две експерименталне и једном контролном групом.

Резултати истраживања су показали да креирани модели значајно утичу на развој флексибилних стратегија множења једноцифрених бројева и разумевање задатака различите семантичке структуре. Након примене модела ученици су развили различите стратегије множења, пре свега мултипликативне стратегије, и показали способност флексибилне употребе истих, постојање трансфер знања који се огледа у коришћењу флексибилних стратегија множења двоцифрених и једноцифрених бројева, пре њихове систематске обраде. Ученици су развили знања и способности које посматрамо као индикаторе развоја мултипликативног мишљења.

На основу резултата истраживања можемо рећи да примена креираних модела обраде множења једноцифрених бројева омогућава развој мултипликативног мишљења и концептуалног разумевања множења једноцифрених бројева, као и двоцифрених и једноцифрених бројева.

Кључне речи: мултипликативно мишљење, менталне стратегије множења, флексибилност, множење, семантичка структура, математичка креативност, аритметичка правила, ментална аритметика

Научна област: Дидактичко-методичке науке

Ужа научна област: Методика наставе математике

УДК:

MULTIPLICATION STRATEGIES IN THE FUNCTION OF DEVELOPING MULTIPLICATIVE THINKING

ABSTRACT

The subject of research in the dissertation is the mental strategies of multiplication in the function of the developing multiplicative thinking. Multiplicative thinking is defined as the ability to recognize and represent different multiplicative situations, understand multiplication and division operations, as well as the ability to apply flexible multiplication and division strategies, in our case multiplication strategies. In the theoretical part of the research, we analyzed the difference between algorithmic and a creative approaches to mathematics teaching and the importance of mental arithmetic. The focus of the research is on the consideration of methodical procedures and approaches to the multiplication of single-digit numbers aimed at developing the meaning of the multiplication and flexible multiplication strategies.

The importance and role of representations that foster the development of students' multiplicative thinking is given special attention. As an important assumption for the development of multiplicative thinking, we see the way of structuring the content and the role of the law of arithmetic as the basis on which strategies of calculation are developed.

Based on the formulated conclusions and the theoretical part of the research, an empirical part of the research was created in order to determine and analyze the effects of two Models of systematic learning of multiplication by single-digit numbers, designed for the purposes of the dissertation. Model 1 was based on the application of arithmetic laws and the development of strategies based on their application. Model 2 was based on the use of tasks a different semantic structure and iconic representations as a basis for developing the meaning and strategies of the multiplication. The research used an experimental method with two experimental groups and one control group.

The research results showed that the created models significantly influence the development of flexible strategies of multiplying single-digit numbers and the understanding of the tasks of different semantic structures. Students were able to develop different multiplication strategies, primary multiplicative strategies, and demonstrate the ability to use them flexibly and the transfer of knowledge after using the model, which is reflected in the use of flexible strategies for multiplying two-digit and single-digit numbers, before their systematic learning. We see students' development of knowledge and abilities as a sign of their progress in multiplicative thinking.

Based on the results of the research, we can say that the multiplicative thinking and conceptual understanding of the multiplication of single-digit numbers, as well as two-digits and single-digits numbers, can be developed by using the created models of learning for the multiplying single-digit numbers.

Key words: multiplicative thinking, mental strategies of multiplication, flexibility, multiplication, semantic structure, mathematical creativity, properties of arithmetic, mental arithmetic

Scientific field: Didactic-methodological sciences

Scientific subfield: Methodology of mathematics teaching

UDC number:

САДРЖАЈ

I УВОД

У приложеној докторској дисертацији бавили смо се различитим методичким аспектима обраде множења једноцифрених бројева у циљу развоја мултипликативног мишљења. У последњих неколико деценија пажња истраживачке заједнице усмерена је на уочавање проблема који се односе на разумевање значења операција и стратегија рачунања, као и проналажење начина решавања уочених проблема (Pesek and Kirshner, 2000; Hiebert, 2003; Anghileri, 2000). Стандардни алгоритам рачунања се дефинише као низ појединачних корака који су правилно и стриктно одређени, при чему је тачан резултат очекиван (Zeljić, Dabić Boričić and Đokić, 2019), а у педагошкој пракси у Србији се најчешће користи термин поступак рачунања. С обзиром на недостатке стандардног алгоритма, пре свега учење алгоритма напамет, све више се тежи креативном приступу настави математике, који подразумева лично проналажење продуктивних решења независно од способности ученика (Ervynck, 1991). Ово подразумева способност ученика да математичке проблеме решавају тачно и ефикасно уз употребу одговарајућих стратегија и репрезентација (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), што се у литератури дефинише као флексибилност и адаптивност.

Рачунање применом стандардних алгоритама најчешће захтева коришћење папира и оловке за рачунање, а често је потребно извршити усмено рачунање које ствара тешкоће, јер не разумеју значење операције и бројеве. Све значајније место у настави математике заузима ментално рачунање, које подстиче развој вештина решавања проблема, развија способност процене и доприноси концептуалном разумевању броја. Главне карактеристике менталног рачунања су: рачунање са бројевима, а не цифрама, постојање више могућих поступака рачунања и мање ослањање на писане записе (Linsen et al., 2015). У литератури је најчешће стављен фокус на испитивање следећих поступака рачунања: стандардни алгоритам, подстицање развоја менталних интуитивних стратегија и менталне стратегије које су резултат подучавања.

У бројним истраживањима докуменотоване су тешкоће при учењу множења (Baroody, 2006; Downton, 2008 и др.). Прелазак са адитивног на мултипликативно мишљење је важно питање којим су се бавили многи истрживачи (Vergnaud, 1983; Clark and Kamii, 1996; Bakker et al., 2014 и др.). Адитивно мишљење подразумева разумевање бројева у контексту „део−део−целина и најчешће се везује се за разумевање и извођење операција сабирања и одузимања без примене алгоритма (Fennema and Carpenter, 1992; Malola and Stephens, 2020), док мултипликативно мишљење обухвата флексибилно и ефикасно рачунања производа или количника бројева применом различитих стратегија множења и дељења, препознавање и представљање различитих мултипликативних ситуација (Siemon et al., 2005). Развој мултипликативног мишљења се одвија постепено и утиче на развој других математичких појмова.

Множење једноцифрених бројева обухвата четири важне теме, а то су: репрезентације множења, семантичка структура задатака, менталне интуитивне стратегије, стандардни алгоритми и флексибилна и адаптивна примена стратегија које омогућавају ефикасно и тачно одређивање производа (Sherin and Fuson, 2005: 348).

У литератури се издвајају следеће семантичке структуре текстуалних задатака које се односе на множење: једнакобројни скупови, проиизвод мера, мултипликативно поређење, пропорција, правоугаоне схеме и Декартов производ (Greer, 1992). У наставној пракси је најзаступљенија идеја једнакобројних скупова која се ослања на посматрање множења као поновљеног сабирања (Fischbein et al., 1985; Izsak, 2004, Watanbe, 2003), при чему не ствара довољну основу за развој мултипликативног мишљења. Истраживања су показала да структура текстуалних задатака утиче на избор стратегија и репрезентација које ће ученици користити (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Larsson, 2017), као и да ученици успешно решавају задатке множења различите семантичке структуре пре формалне обраде множења (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Marojoke and Beker, 2014).

Менталне стратегије множења можемо поделити у две групе: менталне инутитивне стратегије и менталне стратегије које су резултат поучавања. Менталне интуитивне стратегије се дефинишу као интерне менталне структуре које одговарају класи стратегија рачунања, те постоји директна веза између стратегија рачунања и семантичке структуре задатка (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Уколико се стратегије заснивају на примени аритметичких правила или репрезентацији реч је о менталним стратегијама које су резултат поучавања (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Истраживања показују да је поучавање деце стратегијама менталног рачунања ефикасније од прекомерног понављања алгоритма (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006), као и да ученици ефикасно рачунају користећи менталне интуитивне стратегије за множење вишецифрених бројева пре увођења формалних инструкција (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003). На основу различитих истраживања издвајамо следеће стратегије множења: стратегије пребројавања (појединачно и ритмичко), поновљено сабирање, дуплирање, мултипликативне стратегије које се заснивају на примени познатих производа и неке од претходних стратегија, стратегије засноване на процени и примени аритметичких правила (Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Downton and Sullivan, 2017). Развој стратегија се одвија постепено, а њихов избор је условљен семантичком структуром задатка, заступљеним стратегијама у настави, бројевима и репрезентацијама које се користе у задатку (Sherin and Fuson, 2005, Downton and Sullivan, 2017).

Употреба различитих иконичких репрезентација за представљање множења доприноси разумевању различитих значења множења и развоју стратегија множења. У нашем раду обухватићемо пре свега две врсте иконичких репрезентација множења: правоугаоне схеме и репрезентације са декадном основом. Представљање множења преко правоугаоне схеме је кључно за развој мултипликативног мишљења, јер омогућава представљање задатака различитих семантичких структура и подстиче развој различитих стратегија рачунања (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014). Репрезентације са декадном основом су у складу са нашим Наставним планом и програмом, јер се скуп бројева до 10 упознаје кроз употребу ових репрезентација. У овом случају акценат се ставља на десетице, што је важно за разумевање стандардног алгоритма за множење двоцифрених бројева (Марјановић, 1997).

Неке стратегије множења се развијају на основу научених правила аритметике, док неки аутори наводе да се аритметичка правила инуитивно развијају кроз развој стратегија множења (Larsson, 2015; Ambrose et al., 2003). Без обзира који је приступ заступљен у настави, треба тежити постизању концептуалног раумевања аритметичких правила, која се користе, а значајна су за многобројне математичке садржаје, нарочито за аритметичке операције и развој флексибилних стратегија рачунања.

У нашем раду приказаћемо на који начин различити приступи обради множења једноцифреног броја утичу на развој стратегија множења, значења операције множења и уопште на развој мултипликативног мишљења. Сматрајући да разумевање множења као једнакобројних скупова, инсистирање на разумевању множења као поновљеног сабирања и памћење производа напамет, не доприноси разумевању значења операције множења, које је кључно за разумевање и других математичких садржаја (пропорција, производ мера и сл.) развили смо два модела обраде множења једноцифреним бројевима, којима смо се бавили у емпиријском делу истраживања. Први модел се заснива на примени аритметичких правила и развоју стратегија које се темеље на аритметичким правилима. Други модел обухвата обраду множења једноцифрених бројева заснованих на значењу операције множења и примени различитих иконичких репрезентација. Циљ нашег рада је био утврђивање и анализирање ефеката уведених Модела на развој менталних стратегија множења и мултипликативног мишљења.

Рад завршавамо са резултатима нашег истраживања, које смо анализирали са становишта теоријског дела рада. У овом делу рада истакли смо да ли систематско подучавање множења једноцифрених бројева води ка развоју мултипликативног мишљења, које се огледа у флексибилном избору менталних стратегија множења и разумевању различитих иконичких и конкретних репрезентација множења. Поред наведног, бавили смо се и анализом менталних стратегија множења које ученици користе за множење двоцифрених и једноцифрених бројева у скупу бројева до 100, чиме смо испитали да ли се врши трансфер поучаваних стратегија множења једноцифреним бројевима на стратегије множења двоцифрених и једноцифрених бројева.

II ТЕОРИЈСКИ ДЕО ИСТРАЖИВАЊА

1. Алгоритамски и креативни приступ настави математике

Настава математике у млађим разредима основне школе треба да буде усмерена на развој математичких компетенција кроз концептуално разумевање математичких садржаја који се усвајају. Често се обрада одређених математичких појмова своди на усвајање правила и процедура без концептуалног разумевања истих (Hiebert, 2003). Знања стечена на тај начин су краткотрајна и не стварају основу за трансфер знања и повезивање математичких садржаја, који се логички, кроз основну и средњу школу надовезују и проширују.

У математици алгоритам се односи на низ поступака у рачунању. Може се дефинисати као низ појединачних корака који се спроводе у циљу решавања задатака (Anderson et al., 2007). Употреба алгоритама у настави омогућава брзо и поуздано рачунање. Предности коришћења алгоритма су транспарентност, ефикасност, општост, прецизност и једноставност (Kilpatrick et al., 2001). Транспарентност чини алгоритам лаким за разумевање и употребу, а само његово потпуно разумевање омогућава ученицима да га успешно користе и после периода у коме нису примењивали алгоритам. Уколико је алгоритам веома једноставан и ефикасан може се десити да није довољно трансапарентан и то онемогућава његово дугорочно коришћење (Kilpatrick et al., 2001), јер га ученици заборављају уколико се не користи. Учење засновано на алгоритмима може бити веома тешко и представљати кочницу за развој концептуалног разумевања значења алгоритма (Pesek and Kirshner, 2000), уколико је оно резултат механичког учења (Hiebert, 2003). Многи наставни планови и програми, као и уџбеници који се користе у настави математике акценат стављају на учење стандардних алгоритама (Brayer Ebby, 2005). С друге стране, Национални савет наставника математике (NCTM, 2000) наводи да су стандардни алгоритми аритметичких операција само средство за постизање брзине и тачности у решавању задатака, али ако су они последица разумевања значења операција и бројева. Наставним планом и програмом у Србији предвиђена је употреба усмених поступака рачунања уз записивање израза, али и усмено рачунање без записивања до трећег разреда. У трећем разреду се уводе стандардни алгоритми, односно писмени поступци рачунања који се изводе кроз записивање бројева у форми збира вишеструких декадних јединица, коришћење таблице месних вредности или скраћено, кроз потписивање у циљу разумевања значења стандардног алгоритма. Тешкоће у разумевању алгоритама се јављају као последица неразумевања броја и значења месне вредности цифре у броју што је од суштинске важности за разумевање значења алгоритма. Како би се избегло наведено, усвајање алгоритма треба да буде последица разумевања значења операције и примене низа стратегија рачунања, чиме се истиче значење сваког корака алгоритма. На овај начин ученици ће разумети значења аритметичких операција, месну вредност цифре, а стечена знања ће моћи да примене и на другим математичким садржајима.

Насупрот алгоритамском приступу учењу, истиче се креативни присту настави математике. У данашње време креативност се дефинише као когнитивна способност предлагања могућег решења проблема или проналажење нечег новог и корисног за решавање проблема (Hwang et al., 2007: 193). Деца су природно креативна бића, те њихову креативност треба подстицати и развијати, јер само креативни људи могу створити нешто ново и донети одговарајуће одлуке у неочекиваним ситуацијама.

Природа математике као науке и наставног предмета у школи је веома погодна за подстицање и развој креативности. Математичка креативност се односи на откривање непознатих веза између математичких појмова, обраду математичких појмова и решавање задатака на другачији начин, као и откривање нечег новог у математичким идејама које су већ познате (Nadjafikhah et al., 2012: 290). Скемп (Skemp, 1989: 77) креативност посматра као менталну креативност, односно употребу постојећих знања за откривање нових знања. Он истиче да се креативност заснива на структурисаном знању, те да треба тежити ка томе да деца поседују различите структуре знања које ће им омогућити повезивање научених чињеница и бирање адекватних знања која ће представљати базу за стицање нових знања. Сличан став заступа и Силвер (Silver, 1997) који сматра да се у школској пракси математичка креативност односи на успостављање везе између постављања и решавања проблема на различите начине, уз стварање нових, оригиналних и иновативних решења. Према Ервинку (Ervynck, 1991) математичка креативност обухвата индивидуално проналажење флексибилног и ефикасног решења независно од математичких способности ученика уз способност прилагођавања проблему и примене дедукције у закључивању. Слично наведним ауторима и други аутори дефинишу математичку креативност као проналажење оригиналног решења проблема и посматрање познатих проблема из нове перспективе (Sriraman and Liljedahl, 2006), као и формирање нових знања уз флексибилно решавање математичког проблема (Kwon et al., 2006). У складу са тим Срираман (Sriraman, 2006) истиче да математичка креативност представља процес проналажења нових и необичних решења проблема с једне стране, док се с друге стране односи на формулисање нових питања, који подстичу посматрање датог проблема на другачији начин. Лајкок (Laycock, 1970) дефинише математичку креативност као способност анализирања датог проблема из различитих перспектива, проналажење одређених образаца, сличности и разлика и бирање различитих начина решавања уз избор најприкладније методе за решавање непознатог проблема, док Михајловић (Mihajlović, 2014) истиче да се она мери преко флексибилности, флуентности и оригиналности одговора ученика на постављен проблем.

Често коришћен термин у литератури када је у питању настава математике јесте и математичко резоновање. Резоновање се посматра као способност разумевања математичких садржаја које обухвата истраживање идеја, феномена, процењивање резултата и употребу математичких знања у процесу усвајања математичких садржаја, као и решавање математичких проблема, али тако да решења достижу све већи степен софистицираности (NCTM, 2000). Посматрано заједно са математичком креативношћу, можемо закључити да једно без другог не може и да се суштина учења са разумевањем огледа у способности повезивања математичких знања и откривања нових знања на темељу постојећих. У складу са наведеним можемо рећи да креативно математичко резоновање утиче на ефикасније и квалитетније стицање математичких знања и концептуално разумевање математичких појмова (Jonsson et al., 2014). Математичко резоновање обухвата:

1. Креативност – нови начини резоновања или продубљивање већ постојећег начина резоновања;
2. Веродостојност – изношење аргумената који подупиру одабир одговарајуће стратегије;
3. Аргументе који су утемељени у математичким својствима која су укључена у решавање проблема. (Lithner, 2008)

Већина аутора на сличан начин посматра математичку креативност и креативно математичко резоновање, те и кад је у питању њен развој, аутори имају слична мишљења. Развој математичке креативности се најбоље подстиче решавањем нестандардних математичких проблема, а пре свега задатака отвореног типа, јер се на тај начин ученици суочавају са новим, непознатим ситуацијама. Овакве ситуације подстичу концептуално разумевање и развој дечје креативности која доводи до откривања нових математичких идеја (Aizikovitsh Udi, 2014: 229). Како би ученици развили математичку креативност потребно је да самостално истражују, претпостављају, испитују, прилагођавају стратегије, осмишљавају нове стратегије и праве план решавања проблема, закључују, образлажу своје закључке и сл. (Nadjafikhah et al., 2012: 289).

Ервник (Ervynck, 1991) посматра три степена математичких компетенција која су неопходна за развој математичке креативности:

1. Примена правила и процедура интуитивно;
2. Примена стандардних алгоритама уз познавање правила;

3. Индивидуално и креативно, концептуално решавање математичких задатака без примене алгоритама.

У складу са наведеним могу се разликовати три нивоа математичке креативности. Први се односи на алгоритамско решавање проблема у зависности од контекста задатка. Други ниво обухвата моделовање проблема и примену одређених репрезентација за решавање математичког проблема. Трећи ниво карактеришу софистициранији начини решавања проблема који захтевају анализирање свих компоненти математичког проблема на основу чега се бира најефикаснији начин решавања (Ervynck, 1991).

Тал (Tall, 1991) истиче да усвајање математичких појмова кроз низ математичких дефиниција, теорема и доказа указује на логичку структуру математике, али не дозвољава психолошки раст и развој људског, односно дечјег ума, који је битан предуслов за развој математичке креативности. Охрабривање деце да се мање придржавају научених алгоритама и уопште математичких правила, а да теже флексибилном и дивергентом мишљењу је основа за развој математичке креативности.

Развијање математичке креативности подстиче и развој флексибилности. Проналажењем различитих начина решавања, анализирањем проблема из различитих перспектива ученици развијају нове идеје и оспособљавају се за различито посматрање математичких садржаја и прилагођавање стратегија решавања карактеристикама задатог проблема, што је основа за развој флексибилности у рачунању. Знања које се стичу кроз активан рад ученика и захтевају мисаону ангажованост у проналажењу решења су основа за развој концептуалног разумевања математичких појмова.

Како бисмо у потпуности разумели креативни приступ настави математике, односно креативно математичко резоновање потребно је да анализирамо значај учења са разумевањем и различите нивое математичког знања, без којих не можемо говорити о креативном математичком резоновању.

Најзаступљенија подела математичког знања јесте према Скемповој теорији. Он разликује инструментално и релационо разумевање. Инструментално разумевање подразумева знање правила и чињеница, просту примену истих и увежбавање научених правила, док релационо разумевање подразумева да је ученик у стању да вешто барата са појмовима користећи њихова својства и међусобне релације између њих и успешно их примењује у новим и сложенијим ситуацијама (Skemp, 1993: 10). Насупрот овим појмовима, често се говори о концептуалном и процедуралном знању (Hiebert, 2003). Знања која се повезују током изучавања Хиберт (Hiebert, 2003) назива концептуалним знањима, под којима се подразумева разумевање концепата и односа међу њима и примену процедура (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick et al., 2001; Rittle-Johnson and Schneider 2015). Основна одлика концептуалног знања јесте повезаност знања, а то подразумева да сваки појам настаје из других појмова и доприноси формирању следећих појмова. За ова знања су битна сва знања са којима су се ученици некада и негде срели. Насупрот концептуалном знању јавља се процедурално знање, које се односи на учење готових дефиниција, процедура, симбола, без претходног осмишљавања значења појмова и поседовање знања о начину коришћења и флексибилном извршавању процедура, како би се проблем тачно и ефикасно решио (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick et al., 2001; Rittle-Johnson and Schneider 2015). Процес учења математичког садржаја треба да се заснива на интеграцији процедуралног и концептуалног знања, односно на уопштавању процедуралних поступака које воде формирању система знања у коме су знања хијерархијски организована и повезана (Baroody et al., 2007; Schneider & Stern, 2009). Та повезаност процедуралног и концептуалног знања чини математичке процедуре лакшим за усвајање, обезбеђује флексибилније рачунање, утиче на смањење броја грешака, а тако усвојена знања постају трајнија (Baroody et al., 2007). Повезаност знања подразумева повезивање различитих математичких идеја, јер таква математичка знања омогућавају ученицима да схвате и измене стандардне начине учења или развију нове ефикасне стратегије решавања математичких проблема (Baroody et al., 2007).

Учење са разумевањем доприноси дугорочнијем памћењу и повезивању математичких садржаја. Килпатрик и остали (Kilpatrick et al., 2001) наводе пет кључних фактора неопходних за правилно усвајање математичких знања која доприносе учењу математичких садржаја са разумевањем:

1. Концептуално разумевање;
2. Процедурална флуентност;
3. Стратегијске компетенције;
4. Адаптивно резоновање;
5. Став о математици.

У овом делу рада највише пажње ћемо посветити разумевњу флексибилности, која је саставни део процедуралне флуентности и адаптивности, као и концепуталном разумевању бројева, док ћемо за остале нивое математичког знања дати кратак преглед, јер ће они бити детаљније разматрани у контексту менталних стратегија множења и мултипликативног мишљења, који представљају срж овог рада.

1.1. Флексибилно и адаптивно резоновање

Флексибилност и адаптивност су важни аспекти математичког знања и основа за разумевање процедуралних знања. Решавање математичких задатака не подразумева само брзину и тачност, већ захтева способност решавања математичких задатака флексибилном употребом различитих стратегија и репрезентација у зависности од типа и карактеристика задатка, као и личности појединца (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick et al., 2001; Verschaffel et al., 2007).

Адаптивно резоновање се односи на способност успостављања везе између математичких идеја и ситуација. То значи да ученици треба да познају велики број чињеница, процедура, математичких идеја и стратегија решавања задатака како би могли да успоставе везу између свега наведеног у циљу проналажења најефикаснијих начина решавања задатка (Kilpatrick, 2001: 129). Поседовање адаптивног резоновања огледа се у способности ученика да износе своје мишљење о математичким идејама и процедурама и објасне своје начине размишљања, као и да изаберу најприкладније начине решавања задатка, а све ово посматрано заједно подстиче концептуално разумевање (Kilpatrick, 2001: 130). Према неким ауторима адаптивност се односи на способност:

- коришћења различитих метода у зависности од карактеристика задатка (Blöte, van der Burg and Klein, 2001);
- брзог избора одговарајуће методе решавања задатка (Torbeyns et al., 2005; Verschaffel et al., 2009);
- прилагођавања стечених знања новим математичким проблемима (Rathgeb-Schnierer and Green, 2013; Threlfall, 2002, 2009).

Други аутори сматрају да адаптивност подразумева мање или више сажети избор најприкладније стратегије за решавање одређеног математичког проблема, која је индивидуална или је условљена социокултурним контекстом појединца (Verschaffel et al., 2009). Према Селтеру (Selter, 2009) адаптивност подразумева способност употребе прикладне, флексибилне стратегије коју је појединац одабрао у складу са математичким проблемом или је сам развио нову стратегију, што је последица развијене математичке креативности.

Флексибилност се огледа и у ефикасном и адаптивном прилагођавању стратегија конкретном контексту задатка (Van der Heijden, 1993). Стар и Ритле-Џонсон (Star and Rittle-Johnson, 2008) под флексибилношћу подразумевају следеће компоненте: познавање вишеструких стратегија, избор и вредновање ефикасних стратегија рачунања, откривање и употребу вишеструких стратегија, избор адекватне стратегије и индивидауалан одабир и употребу ефикасних стратегија. Битно је напоменути да флексибилност захтева успостављање везе између претходних знања ученика и нових знања, као и препознавање различитих метода решавања, вредновање нестандардних метода, развој и избор различитих ефикасних метода у циљу развоја што ефикаснјих метода рачунања (Newton et al., 2019). Ранија истраживања (Newton et al., 2019) су показала да ученици који поседују концептуално разумевање математичких појмова ефикасније проналазе различите начине решавања нових математичких проблема, употребљавају ефикасније методе и могу да користе више од једне методе решавања.

Тешко је успоставити јасну границу између флексибилности и адаптивности, те се тако у бројној литератури ови појмови посматрају као синоними, те их већина аутора на тај начин и дефинише. Они се могу дефинисати као познавање и разумевање различитих стратегија, при чему се бирају најприкладније за дати проблем (Rittle-Johnson, et al., 2012; Star and Newton, 2009; Verschaffel et al. 2009, Rathgeb-Schnierer & Green, 2013; Verschaffel et al., 2009). Даље, могу се посматрати као вештине које се развијају постепено током школовања, кроз повећања броја познатих стратегија и могућност избора најадекватније стратегије, при чему употреба различитих стратегија доприноси повећању концептуалног разумевања математичких садржаја (Blote et al. 2001; Hiebert and Wearne, 1996; Resnick, 1980; Rittle-Johnson and Star, 2007). Према Торбејнсу и другим ауторима (Trobeyns et al., 2008) адаптивност се односи на способност решавања математичких задатака ефикасно, креативно и флексибилно употребом различитих стратегија. Блоут и остали (Blote et al., 2001) под овим подразумевају смишљање и флексибилну употребу различитих процедура за решавање задатака.

Како би се развила математичка флексибилност и адаптивност важно је да ученици:

- разумеју и примењују више различитих метода решавања задатака (Rittle-Johnson et al., 2012);
- пореде различите примере (Newton et al., 2010; Rittle-Johnson and Star, 2007);
- добијају адекватне инструкције које ће их усмеравати ка ефикасним решењима (Star and Rittle-Johnson, 2008);
- учествују у дискусији са другим ученицима из одељења у циљу проналажења што адекватнијег начина решавања задатка, као и да уочавају грешке и разлоге због којих су исте настале (Mercier and Higgins, 2013).

Када је реч о извођењу аритметичких операција, односно менталном рачунању, флексибилност се односи на анализирање стратегија, адекватан избор и разумевање коришћених стратегија рачунања уз акценат на оне које омогућавају брзо, тачно и ефикасно рачунање. Уопштено гледано, флексибилно и адаптивно коришћење стратегија подразумева свестан или несвестан избор и употребу најприкладнијих стратегија рачунања у зависности од типа и контекста задатка, бројева у задацима, као и индивидуалних карактеристика појединца и научених стратегија које поседују (Shrager and Siegler, 1998; Siegler, 1998, 2000; Verschaffel et al., 2009; Threlfall, 2009).

Насупрот овом ставу, други аутори (Heinze et al., 2009) који наведене појмове посматрају одвојено, истичу да се флексибилност односи на избор између различитих стратегија, али тај избор не подразумва нужно употребу најприкладније стратегије, док адаптивност подразумева избор и употребу најприкладније стратегије (Heinze et al., 2009: 536). Употреба и избор ефикасних стратегија је основа за успешно решавање задатака и уопште за концептуално разумевање математичких појмова. Како би се ученици оспособили да бирају прикладне стратегије потребно их је упознати са различитим стратегијама, јер на тај начин ученици успостављају везу између научених метода и стандардних алгоритама, те се оспособљавају за ефикасан избор менталних стратегија рачунања, при чему је битно напоменути да разумевање различитих стратегија које се ефикасно примењују у решавању задатака захтева постепено увођење истих (Newton et al., 2019: 12). Уопштено гледано, адаптивност и флексибилност стварају добру основу за развој математичке креативности (Ambrose et al., 2003; Baroody, 2003). Организовање наставе која подстиче повезивање свакодневних ситуација са математичким садржајима и подстиче ученике да размишљају, откривају и смишљају ефикасније и флексибилније начине решавања чини основу креативног приступа настави матеаматике, а то води развоју креативног математичког резоновања.

На основу различитих дефиниција, под флексибилношћу и адаптивношћу ћемо подразумевати разумевање различитих стратегија решавања задатака и избор најприкладније стратегије која појединцу омогућава брзо, тачно и ефикасно решавање задатка. Даље, сматрамо да ови појмови подразумевају прилагођавње и одабир стратегија у зависности од конкретног математичког проблема који је потребно решити.

Пошто смо акценат ставили на избор различитих стратегија анализирали смо шта су други аутори подразумевали под флексибилним и адаптивним избором стратегија. Ово подразумева:

1. Прикладан избор стратегије условљен контекстом задатка (Blöte et al. 2000; Klein et al. 1998; Star and Newton2009);
2. Брзину и тачност у решавању задатка (Torbeyns et al. 2009);
3. Бирање стратегија на основу бројева у задатку, односно коришћење знања о бројевима и аритметичким правилима за решавање задатка, као и активирање свих претходних знања ученика (Threlfall, 2002).

Разумевање флексибилног избора стратегија је најшире обухваћено трећим ставом, јер захтева повезивање индвидуалних знања појединаца и карактеристика задатка. Уопштено гледано, флексибилност у рачунању подразумева успостављање везе између карактеристика математичког проблема, бројева у задатку (Baroody and Tillikainen, 2003), као и разумевања везе између бројева и аритметичких операција (Vershaffel et al. 2009). На флексибилну употребу стратегија, поред наведеног, утиче и познавање математичких идеја, што се огледа у способности представљања тих идеја различитим иконичким репрезентацијама и успостављању везу између њих, јер само целокупно познавање садржаја и њихово међусобно повезивање доприноси могућности флексибилног рачунања (Wearne, 1996; Blote et al., 2000). Све наведене компоненте су показатељи развијене флексибилности у менталном рачунању (Rathgeb-Schnierer and Green, 2013). Како би ученици могли да рачунају флексибилно и примењују ефикасне менталне стратегије потребно је да пре свега поседују концепутално разумевање броја, о чијем значају ћемо говорити у следећем поглављу, као и концептуално разумевање својстава аритметичких операције. Уопштено гледано, избор стратегије понекада није условљен свим наведеним компонентама, јер неки ученици бирају стратегије на основу избора које врше други ученици или бирају стратегије у које су они сигурни или их најчешће користе, јер су резултат честе употребе у настави или резултат поучавња. Уколико говоримо о оваком избору стратегија, не можемо тврдити нужно да је овакав избор стратегија флексибилан, јер често постоје флексибилнији начини рачунања. У овом случају реч је о прикладном избору стратегија, односно прикладном за особу која врши рачунање. Истраживања су показала да је за флексибилно ментално рачунање веома важно и памћење, јер одређене стратегије рачунања захтевају памћење делова процедуре рачунања, односно делова коначног резултата (DeStefano and LeFevre, 2004). Поред наведеног, битно је напоменути да постоје деца која у одређеним фазама развоја менталних стратегија рачунања, бележе делове резултата, што им олакшва ментално рачунање и примену одређене флексибилне стратегије рачунања, и ово не треба мешати са писаним алгоритмом рачунања (Ruthven, 1998; Threlfall, 2009). Када је у питању подучавање стратегија, уколико се ученицима понуди широк спектар могућих стратегија, они ће тежити употреби само коришћених стратегија, а неће трагати за новим (Heirdsfield et al., 2007; Beishuizen, 2001). Приликом развоја менталних стратегија треба пажљиво осмислити наставни процес и прецизно одредити циљеве и исходе, јер само инсистирање на тачности ученике усмерава ка коришћењу сигурних стратегија које ће им обезбедити тачан одговор (Hiebert and Wearne, 1996; Heirdsfield et al., 2007). У том случају ученици не трагају за флексибилним стратегијама.

Посматрајући наведене ставове аутора, можемо закључити да развој менталних стратегија рачунања није једноставан. То је заправо дуг и сложен процес, који обухвата велики број математичких садржаја, који треба да буду међусобно повезани у одговарајуће математичке схеме, али на начин који ће обезбедити ученицима развој математичке креативности без које се не може говорити о развоју флексибилних стратегија рачунања и уопште о развоју способности ученика за самостално проналажење и откривање нових идеја и процедура.

1.2. Концептуално разумевање бројева

Концептуално разумевање у математици се односи на повезивање и функционално разумевање математичких идеја (Kilpatrick et al., 2001). Стицање математичких знања на овакав начин доприноси повезивању изолованих чињеница и знања, односно организовању математичких знања у повезане целине, које омогућавају успостављање везе између нових знања са већ стеченим знањима. Ученици који повезују математичка знања остварују дуготрајније памћење стечених знања, те лакше прилагођавају сва своја знања новим ситуацијама (Hiebert and Carpenter, 1992). Ово доприноси развоју индивидуалних стратегија и начина решавања математичких проблема. Значајан показатељ концептуалног разумевања је и способност представљања математичких идеја на различите начине и разумевање значења различитих репрезентација којима се приказује иста математичка идеја (Kilpatrick et al., 2001: 119). Учење са разумевањем ствара основу за обраду нових математичких садржаја и решавање нестандардних и непознатих математичких проблема (Bransford et al., 1999).

Пре увођења аритметичких операција ученици упознају бројеве у скупу природних бројева до 10 и до 20, најчешће кроз скуповни и бројевни приступ, који подразумевају издвајање заједничких особина свих једнакобројних скупова, придруживање елемената једног скупа елементима другог скупа, упоређивање скупова, као и разне активности бројања (Дејић и Егерић, 2010). Кардинали број скупа означава број елемената тог скупа. Разумевање основних бројева кроз кардиналност скупа елемената и редних бројева се јавља пре поласка у школу и у првом разреду основне школе и представља основу за концептуално разумевање броја, што обухвата и развијање осетљивости за број, именовање бројева, разумевање значења броја, као и способност флексибилне употребе бројева и уопште учење аритметичких садржаја (Berch, 2005; Gersten & Chard, 1999; Griffin et al., 1994). Уколико се тада подстакне концептуално разумевање бројева ствара се основа за концептуално разумевање аритметичких операција. С обзиром да се све аритметичке операције заснивају на својствима и карактеристикама бројева потребно је објаснити значај концептуалног разумевања бројева и развијене осетљивости за број.

Различити аутори дефинишу осетљивост за број на различите начине. Ховден (Howden, 1989) је дефинише као добру интуицију за бројеве и везе између њих, која се развија постепно кроз истраживање карактеристика бројева, визеулно представљање бројева на различите начине и проналажење веза између њих. Грино (Greeno, 1991) сматра да развијена осетљивост за бројеве подразумева успешно повезивање различитих знања, односно употребу знања која поседујемо за проналажење нових знања. У нашем раду, тај термин ћемо користити као основу концепуталног разумевања броја, која обухвата концептуално разумевање аритметичких операција (Young-Loveridge et al., 2008), процену (Kim et al., 2013), тачност и флексибилност у извођењу аритметичких операција са бројевима, као и способност менталног рачунања и упоређивања вредности бројева (Berch, 1998).

Ужа дефиниција концептуалног разумевања броја се односи на разумевање бројева и аритметичких операција у циљу коришћења наведених знања за решавање проблемских задатака (Burton, 1993). Ширу дефиницију дају други аутори (McIntosh et al., 1992), који сматрају да концептуално разумевање бројева и аритметичких операција омогућава коришћења својстава бројева и развој менталних стратегија рачунања. Национални савет наставника математике (NCTM, 2000) сматра да концептуално разумевање броја обухвата способност растављања бројева и решавање задатака кроз успостављање везе између аритметичких операција и знања о својствима бројева, као и развијену способност процене. Они даље наводе, да концептуално разумевање бројева обухвата: разумевање величине бројева, способност различитог представљања бројева и разумевање утицаја аритметичких операција на вредност бројева и обрнуто. Сличан став заступају и други аутори (Dyson et al., 2015; Schneider and Thompson, 2000) који наводе да концептуално разумевање броја обухвата упостављање везе између бројева и аритметичких операција. Два битна сегмента концепуталног разумевања броја истиче Девлин (Devlin, 2000), а то су: способност поређења бројности два скупа и способност памћења бројности наведених скупова.

Берх (Berh, 2005) посматра концепутално разумевање броја као сложен концепт који је резултат учења, а обухвата интуитивна знања о бројевима и садржајима аритметике, као и способност: препознавања промене бројности неког скупа, представљања бројева на бројевној правој, поређења и растављања бројева, развоја флексибилних менталних стратегија рачунања, успостављања везе између аритметичких операција, процене тачности при рачунању, успостављања везе између нових и претходно стечених знања; разумевање утицаја аритметичких операција на бројеве, тачног и флексибилног рачунања, препознавања грешака и проналажења ефикасних начина решавања задатака.

Према другим ауторима (Ghazali et al., 2020) концептуално разумевање броја обухвата:

- Разумевање значења бројева и растављања бројева на различите начине;
- Способност препознавања и представљања бројева визуелно, вербално и симболичко;
- Разумевање редних бројева, упоређивање бројева и разумевање месне вредности цифре;
- Примена својстава бројева у аритметичким операцијама у циљу развијања способности менталног рачунања;
- Способност процене.

Слично наведеним мишљењима, Сенгул (Sengul, 2013) под концепуталним разумевањем бројева подразумева разумевање значења и величине бројева, аритметичких операција и утицаја бројева у задацима на коначан резултат; растављање бројева на различите начине у циљу уочавања еквивалентних израза; флексибилно рачунање и примену менталних стратегија рачунања.

Мекинтош и остали (McIntosch et al., 1992) наводе три аспекта када је у питању концепутално разумевање броја: појам броја (кардиналност бројева, основни и редни бројеви, различите репрезентације бројева), аритметичке операције (разумевање својстава операција и веза између операција) и анализирање својстава бројева у аритметичким операцијама у циљу решавања сложенијих математичких проблема.

Према Вершафелу и осталим ауторима (Verschaffel et al. 2007) разумевање значења броја обухвата следеће компоненте:

- коришћење различитих репрезентација бројева;
- идентификовање релативне и апсолутне величине бројева;
- употребу више различитих јединица пребројавања;
- састављање и растављање бројева;
- концептуално разумевање аритметичких операција;
- процену величине;
- ментално рачунање и
- расуђивање о тачности резултата.

Истраживања (Case, 1990) су показала да деца која поседују концепутално разумевање броја успешно упостављају везу између реалног и математичког контекста у задацима, бирају индивидуалне процедуре за решавање проблема, представљају бројеве на различите начине, разумеју структуру бројева и поседују развијену осетљивост за вредност бројева.

Енгел и други (Engel et al., 2013) истичу да 95% деце разуме основне концепте броја, као што је пребројавање и записивање броја још у вртићу, а да деца са 4 и 5 година почињу да препознају бројност скупа без пребројавања (Secada et al., 1983), као и да разумеју основне математичке процедура везане за пребројавање, сабирање и одузимање, али да још увек не врше генерализацију математичких појмова (Kilpatrick, 2001: 170). Насупрот наведеном, Пијаже (Piaget, 1952, 1954) је сматрао да се концепт броја развија постепено и да деца осетљивост за број развијају тек око 5 године, а да се концепутално разумевање аритметичких операција не дешава пре 7 или 8 године живота.

Разумевање природних бројева се постепено развија кроз различите активности које обухватају пребројавање, упоређивање, придруживање и дељење скупова елемената (Baroody, 2000; Clements & Sarama, 2014), представљање бројева на различите начине и упостављање везе између бројева кроз решавање задатака применом различитих стратегија рачунања (Howden, 1989). Један од важних активности која доприноси концептуалном разумевању бројева јесте и визуелно препознавање бројности неког скупа, што претходи пребројавању и процени, које се заснива на когнитивним процесима мозга, а поткрепљене су одговарајућим репрезентацијама (Sousa, 2007). Клементс (Clements, 1999) истиче да визуелно препознавање бројности помаже деци да посматрају скупове као засебне целине, као и сваки елемент скупа појединачно. С друге стране, она истиче да временом деца препознају и скупове са истом бројем елемената, што представља основу за апстраховање појма броја и подстиче развој менталних стратегија рачунања (Clements, 1999; Steffe and Cobb, 1988). Све наведено доприноси бољем концепуталном разумевању бројева, што је основа за развој менталних стратегија рачунања које се заснивају на својствима бројева, а развијају се постепено.

На основу изнетих ставова бројних аутора, под концептуалним разумевањем броја подразумеваћемо способност познавања својстава бројева и коришћење тих својстава у различитим аритметичким операцијама у циљу што ефикаснијег рачунања. Даље, сматрамо да концептуално разумевање бројева обухвата и способност употребе различитих репрезентација за приказивање бројева, што захтева развијену осетљивост за број и способност процене. Концептуално разумевање броја се развија постепено и подразумева разумевање значења броја и његове структуре, упостављање веза између бројева, флексибилно извођење аритметичких операција, а све ово заједно ствара основу за ефикасно ментално рачунање. Даље, под концептуалним разумевањем броја подразумевамо следеће аспекте:

- Уочавање бројности скупа елемената;
- Упоређивање скупова по бројности и упоређивање бројева;
- Коришћење различитих менталних стратегија за појединачно и групно пребројавање унапред и уназад;
- Процена величине скупа и вредности израза;
- Разумевање значења аритметичких операција и прилагођавање начина решавања задатка бројевима и својствима операције;
- Представљање бројева и структуре бројева на различите начине употребом различитих репрезентација (иконичке, симболичке и реторичке);
- Одабир прикладне стратегије и начина решења математичког проблема у зависности од бројева у задацима.

Када су у питању аритметичке операције концепутално разумевање бројева оспособљава ученике за проналажење флексибилних стратегија рачунања, као и способност уочавања грешака насталих при решавању и утиче на развој способности процене. Флексибилан избор стратегија рачунања захтева концептуално разумевање аритметичких операција и бројева, што омогућава разумевање структуре броја, односа између бројева, као и извођење аритметичких операција применом стратегија које се заснивају на својствима бројева и аритметичких операција (Bobis, 1996).

Учењу аритметичких операција претходи формирање скупа бројева до 10 у првом разреду основне школе, те је у овим првим фазама учења потребно инсистирати на употреби различитих репрезентација, модела и манипулативних материјала у циљу представљања бројева на различите начине, чиме се утиче на разумевање структуре броја. Како би се постигло концепутално разумевање бројева битно је да ученици могу да представе бројеве на различите начине (Greeno, 1991). Представљањем бројева на различите начине утиче се на развој бројних стратегија бројања које нису ограничене само на просто пребројавање (Presmeg, 2002; Mason, 1992), већ имају адитивни карактер, а деца се временом оспособљавају да уоче бројност скупа елемената без пребројавања што је основа за развој различитих менталних стратегија рачунања. Те почетне стратегије пребројавња се темеље на употреби манипулативних материјала што подстиче разумевање бројности, али није довољно за концептуално разумевање броја (Sousa, 2007), јер је оно шире од наведног, као што смо навели.

Концептуално разумевање бројева је од суштинске важности за следеће математичке садржаје:

- ментално рачунање (Hope and Sherrill, 1987; Trafton, 1992);
- стицање и развијање способности процене (Bobis,1991),
- разумевање релативне вредности броја (Sowder, 1988);
- препознавање односа дела и целине и разумевање месне вредности цифре у броју (Fischer, 1990; Ross, 1989) и
- решавање проблема (Cobb et al., 1991).

Разумевање структуре броја је значајно за разумевање месне вредности цифре. Број треба посматрати као структуру састављену од мањих структура, што подразумева способност растављања бројева на различите начине. Како би се постигло наведено потребно је да се ради на развијању способности растављања и састављања бројева у делове и целину (Wright et al. 2012: 4). У настави је потребно спроводити активности које ученицима дају прилику да истраже и открију везе и односе између бројева (Baroody, 2006: 29). Фусон (Fuson et al., 1997) истиче да када деца савладају вишецифрене бројеве треба да буду оспособљена да разумеју број као збир вишеструких декадних јединица и као производ једноцифреног броја и одговарајуће декадне јединице. У циљу испитивања разумевања месне вредности цифре Доналд и други аутори (Donald et al.) су користили различите типове задатака: бројање, груписање од 10, растављање, прегруписавање, упостављање везе између месне вредности цифре и броја и поређење бројева. На основу резултата установљено је да деца имају потешкоћа са вишецифреним бројевима у одсуству конкретног материјала, односно да не разумеју месну вредност цифара у тим бројевима (Donald et al., 2006), што је у складу са ранијим истраживањима (Fuson et al, 1997) која потврђује значај коришћења конкретних материјала приликом формирања скупа природних бројева (Vright et al, 2012). Разумевања односа између десетица и јединица или других декадних јединица је важно за разумевање „дописивања или прецртавања нула” при множењу и дељењу декадним јединицама. Битно је напоменути да је у различитим земљама другачији приступ аритметичким операцијама условљен и различитом приступом бројевима. У Енглеској разумевање броја се темељи на разумевању месне вредности цифре, а након тога се почиње са аритметичким операцијама (SCAA, 1997) које се заснивају на примени алгоритма. Насупрот томе, у Холандији се разумевање броја и месне вредности цифре развија постепено кроз извођење аритметичких операција и употребу различитих стратегија рачунања, односно различитих менталних модела (Beishuizen and Anghileri, 1998; Thompson, 1997), чиме се акценат стаља на структуру броја.

Сви аритметички садржаји су повезани и представљају корак ка увођењу и разумевању алгебре. Како би ученици развили математичку флексибилност, која је посебно важна за аритметичке операције потребно је подстицати креативан приступ математичким садржајима од најранијих узраста. То подразумева употребу конкретних модела, цртежа и дијаграма који мисаоно ангажују децу и подстичу их да проблем посматрају на различите начине. Даље, важан аспект развоја алгебарског мишљења јесте и формирање појма броја. При формирању појма броја акценат треба ставити на његову структуру која ће се представљати кроз репрезентације засноване на декадној основи, али и кроз друге репрезентације које истичу структуру броја. Све то заједно треба да доприноси развоју концептуалног разумевања броја, које је неопходно за флексибилно ментално рачунање.

1.3. Процедурална флуентност

Процедурална флуентност се односи на познавање процедура, њихову правилну примену и способност употребе процедура флексибилно, тачно и ефикасно (Kilpatrick, 2001: 121). Овај аспект математичког знања је веома важан за концептуално разумевање месне вредности цифре, значења бројева и анализирање сличности и разлика између стратегија рачунања. Без развијене процедуралне флуентности нема развијања ефикасних и тачних менталних стратегија рачунања. Циљ је да се код ученика постигне флексибилна употреба стратегија рачунања, што је од кључног значаја за успешно решавање стандардних и нестандардних задатака, као и одабир одговарајућих стратегија у односу на постављени математички проблем (Kilpatrick, 2001: 122). Како би се постигло наведено потребно је да се обезбеди релационо разумевање математичких идеја које се усвајају. Такође, потребно је да се нови садржаји усвајају тако што ће се користити већ стечена знања. Уколико деца не савладају процедуру рачунања у скупу бројева до 100 и усвоје аритметичке операције без разумевања, имаће потешкоћа приликом примене процедуре рачунања и усвајања аритметичких операција са вишецифреним бројевима (Kilpatrick, 2001: 122).

Према Руселу (Russell, 2000) тачност у решавању задатака обухвата следеће компоненте:

- Ефикасну примену стратегија рачунања;
- Тачно решење;
- Флексибилност која се односи на адекватан избор стратегије, као и коришћење других стратегија за проверу добијеног резултата.

Стицање наведеног се одвија постепено и потребно је да се прође кроз неколико фаза:

1. Разумевање и употреба различитих стратегија;
2. Релативно тачан избор стратегија за решавање задатка;
3. Тачност и брзина при употреби одређене стратегије;
4. Флексибилност и адаптивност при избору стратегије (Siegler, 1996).

Када је у питању процедурална флуентност закључујемо да се она односи на тачност у решавању задатака, али да исто тако подразумева флексибилно и ефикасно рачунање и проналажење одговарајућих стратегија. Можемо рећи да ова компонента математичког знања заправо подразумева флексибилност у рачунању, о којој смо говорили у претходом поглављу.

1.4. Стратегијске компетенције

Стретегијске компетенције представљају способност формулисања математичких проблема, њихово представљање и решавање (Kilpatrick, 2001: 124). Ово захтева од ученика да добро познају стратегије решавања проблема и успешно их примењују у различитим задацима, односно прилагођавају их структури задатка. Успешно решавање математичких задатака подразумева неколико корака. Први корак подразумева издвајање кључних компоненти у задатку, односно уочавање познатих и непознатих елемената у задатку. Следећи корак се односи на различито представљање проблема: нумерички, симболички, реторички или графички. Даље, стратегијске компентенције подразумевају и способност проналажења и уочавање сличности између математичких проблема. Како би се постигло наведено потребно је да ученици поседују развијену флексибилност (Kilpatrick, 2001: 126).

Ученици који поседују стратегијске компетенције успешно формулишу математичке задатке и решавају задатаке из различитих области математике (аритметика, алгебра, геометрија, мерење, вероватноћа, статистика и сл.). Како би се све наведено постигло потребно је да ученици имају развијену способност логичког повезивањња математичких појмова, као и способност примене стечених математичких знања за решавање нових проблема (Kilpatrick, 2001: 142).

Овде смо дали кратак теоријски преглед који се односи на стратегијке компетенције. Овај појам се односи на способност формулисања, решавања и проналажења адекватних решења која одговарају структури проблема, а подразумевају и флексибилност. Суштина нашег рада заправо су стратегија множења које су у основи развоја мултипликативног мишљења, те ћемо се детаљанијом анализом стратегија множења и уопште развојем флексибилности бавити кроз остатак рада анализирајући мултипликативно мишљење, као и стратегије множења.

1.5. Став о математици

Мишљење и став ученика о математици у великој мери утиче на њихову активност у настави и уопште на жељу за улагањем „напора" у циљу постизања бољих резултата. Уколико ученици током школовања развију концептуално разумевање, процедуралну флуентност, стратегијске компетенције и адаптивно резоновање и то им омогућава да лакше усвајају математичке садржаје и тако постижу боље резултате, вероваће да је математика корисна и да се може учити са разумевањем (Kilpatrick, 2001: 131). Тек у таквим околностима ученици ће постати активни учесници у процесу учења (Resnick, 1987). Процедурална флуентност и адаптивно резоновање се развија као последица свесности ученика о њиховим способностима и могућностима да успешно усвоје математичке садржаје и употребе своја знања за решавање математичких проблема. Истраживања су показала да у Америци дечаци имају позитивнији став према математици у односу на девојчице (Stigler and Hiebert, 1999), што није у потпуности повезано са њиховим постигнућима (Strutchens and Silver, 2000). С друге стране, испитивањем деце откривено је да деца узраста од 4. до 8. разреда сматрају да је математика корисна за решавање свакодневних животних проблема, али није утврђено да сматрају да је корисно да они знају математику (Strutchens and Silver, 2000).

Сматрамо да је веома важно да се математички садржаји у млађим разредима основне школе заснивају на принципу очигледности који ће пратити употреба различитих репрезентација. На тај начин садржаји постају јаснији, ученици постају активни учесници наставе, а сам процес учења постаје занимљивији. У том периоду потребно је користити и структурисане и добро осмишљене математичке игре, које ће омогућити деци да развију или утврде математичка знања. На тај начин математички садржаји постају занимљивији, а став ученика о математици позитиван, што води ка већој ангажованости ученика, а затим и ка већем степену разумевања математичких садржаја.

Сви наведени аспекти математичког знања су међусобно повезани и неопходни су за успешно формирање математичких појмова. Како би се постигло концепутално разумевање математичких садржаја потребно је пре свега усмерити пажњу на адекватну организацију и планирање наставе математике, чији основни циљ треба да буде креативно математичко резоновање. Оно се може остварити само ако се ученицима већ од првих година учења математике пружи очигледна настава уз употребу различитих репрезентација и кретивног приступа настави, које ће их подстаћи да мисле и развију флексибилност и адаптивност, као и концептуално разумевање математичких појмова што доприноси формирању позитивног става о математици.

2. Ментална аритметика и стандардни алгоритми рачунања

Поступци рачунања и тачност и ефикасност у рачунању важне су теме математичког образовања. Алгоритам представља низ јасно дефинисаних корака, који се употребљавају правилно и одговорајућим редоследом, а воде ка тачном одговору (Baranes et al., 1989). У математици алгоритам се односи на низ писаних корака у рачунању. Дефинише се као низ појединачних корака који су правилно и стриктно одређени, при чему је тачан резултат очекиван (Zeljić i dr., 2019). Даље, Килпатрик (Kilpatrick, 2001) истиче да су алгоритми процедуре које се могу применити за решавање различитих задатака који укључују различите бројеве. Он наводи три важне карактеристике алгоритма:

1. Алгоритми су јединствена процедура које се могу примењивати на различитим проблемима.
2. Помоћу алгоритма структура проблема се апстрахује и врши се једноставно поређење сличности између проблема.
3. У основној школи, научени алгоритми, који се изводи тачно, доприносе добрим постигнућима те се добија време за напредовање у другим математичким областима. (Kilpatrick, 2001).

Извођење стандардног алгоритма се темељи на растављању бројева на вишеструке декадне јединице у циљу једноставнијег извршавања аритметичких операција, што заправо представља једну врсту цифарског рачунања (Fuson and Beckmann, 2012). Ови аутори (Fuson and Beckmann, 2012) наглашавају да је у прошлости учење стандардног алгоритма посматрано као усвајање тачног редоследа поступака који су се изводили без разумевања и објашњавања истих. Овакво схватање алгоритама подразумева да се свако рачунање своди на растављање бројева на десетице и јединице, што подразумева познавање и разумевање месне вредности цифре у бројевима и механичко извођење операција, без стављања акцента на структуру броја, односно у том случају свака цифра у броју се посматра као посебна целина (Kamii, 1994; McNeal, 1995). У наставној пракси се често тежи увежбавању стандардних алгоритама рачунања, како би се постигла тачност и брзина у решавању, што је пример процедуралног разумевања, при чему недостаје разумевање значења алгоритма и аритметичке операције. Овако стечена знање онемогућавају флексибилно решавање задатака и повезивање различитих репрезентација и математичких садржаја (Anghileri, 1995; Siemon et al., 2008). Цифарско рачунање, односно примена стандардног алгоритма писменог рачунања, није погодна без употребе папира и оловке и због тога се често јављају грешке, те истраживања (Илић и Зељић, 2017; Зељић и др., 2017) показују да успешност коришћења стандардних алгоритама значајно опада када се рачунање врши без записивања, што је показатељ одсуства процедуралне флуентности (Kilpatrick et al., 2001; Torbeyns et al., 2009). Стандардни алгоритми могу бити веома тешки за учење и не омогућавају развој релационог разумевање (Pesek and Kirshner, 2000). Увођење стандардног алгоритма обезбеђује много формалније структуре и погодно је за стварање грешака, јер је у супротности са интуитивним стратегијама рачунања (Anghileri, 2000). Сличан став заступају и други аутори (Ellis and Yeh, 2008), који наводе да учење стандардних алгоритама обезбеђује брзо и ефикасно рачунање, али без јасног приказивања и разумевања значења појединачних корака алгоритма. Насупрот мишљењу наведених аутора, Фусон и Бекман (Fuson and Beckmann, 2012) наглашавају да се стандардни алгоритми аритметичких операција генерализују временом кроз постепено развијање значења алгоритама употребом репрезентација, а оне се постепено напуштају и прелази се на симболичке записе. У Холандији се приликом обраде аритметичких операција полази од интуитивних стратегија рачунања и постепено долази до формалних стратегија рачунања, а затим и до стандардног алгоритма, јер прерано учење стандардног алгоритма спречава разумевање аритметичких операција (Fishbein et al, 1985; Beishuizen and Anghileri, 1998). Уколико је алгоритам усвојен на начин који омогућава разумевање његовог значења, као и значења бројева, онда је то показатељ процедуралне флуентности (Kilpatrick, 2001). С друге стране, уколико ученици не разумеју значење алгоритма, долази до грешака, што показује одсуство концептуалног разумевања одређених математичких садржаја. Концептуално разумевање алгоритма постиже се употребом различитих репрезентација (нпр. правоугаона схема) које наглашавају значење алгоритма, примера из реалног окружења, као и менталних стратегија које ученици самостално или уз помоћ наставника развијају (Baroody, 1990; Fuson, 190, Resnick, 1983; Verchaffel et al., 2007). При учењу стандардних алгоритама потребно је да ученици разумеју значење и улогу месне вредност цифре у броју при извођењу алгоритма, растављање бројева на збир прозвода вишеструких декадних јединица, као и својства одређене аритметичке операције. Ово је веома важно када су у питању алгоритми који се користе за рачунање са вишецифреним бројевима, јер су они ученицима тежи за усвајање. Из тог разлога, разумевање стандардних алгоритама за вишецифрене бројеве у великој мери зависи и од инструкција наставника (Beishuizen, 1993). Разумевање стандардног алгоритма треба да прати употреба манипулативног материјала и репрезентација које позитивно утичу на повећање степена разумевања бројева, симбола и процедура алгоритма (Fuson, 2003). Даље, неки аутори (Carpenter et al., 1998; Cobb and Wheatley, 1988; Fuson and Burghardt, 1993; Hiebert et al., 1997; Kamii, 1989; Nunes, 1992) су уочили да деца могу да осмисле и своје алгоритме за рачунање, што омогућава повезивање математичких знања, а праћено је разумевањем. Ово је могуће, уколико обраду математичких садржаја прати употреба различитих репрезентација, као и адекватне инструкције од стране наставника (Carpenter et al., 1998; Fuson and Briars, 1990; Hiebert and Wearne, 1993, 1996), јер добре репрезентације истичу карактеристике математичког појма, у овом случају стандардног алгоритма рачунања.

Традиционално учење наставе математике, пре свега учење стандардних алгоритама аритметичких операција све више замењује неалгоритамски приступ, односно примена менталне аритметике, која се темељи на релационом разумевању математичких појмова, пре свега аритметичких операција и бројева. Ментално рачунање је процес у којем нумерички рачун може бити изведен брзо и прецизно уз коришћење одређених стратегија рачунања (Maclellan, 2001). Оно је важно средство у промовисању математичког мишљења, при чему се базира на концептуалном разумевању, а не на учењу правила и инструкција напамет (Reys and Barger, 1994: 31). Ментално рачунање се може посматрати као низ активности чији се развој подстиче током школовања, а његова сврха према Томпсону (Thompson, 1999) је:

- Оспособљавање ученика за ментално рачунање изван наставног процеса;
- Развој осетљивости за број;
- Оспособљавање ученике за решавање проблемских задатака;
- Стварање основе за учење алгоритама са разумевањем.

Према Томпсону (Thompson, 1999), ментално рачунање се односи на примену стратегија које се заснивају на примени познатих чињеница или стратегија брзог рачунања, а оне су засноване на употреби специфичних својстава бројева. Основна карактеристика менталног рачунања јесте стратешка флексибилност која подразумева флексибилно прилагођавање структури проблема (Verschaffel et al., 2010; Blöte et al., 2001). Даље, оно представља основу за развој способности процене величине бројева, као и основу за разумевање значења аритметичких операција и њихових својстава (Kilpatrick, 2001), јер се акценат ставља на флексибилно рачунање које се заснива на примени познатих чињеница, аритметичких правила и знања о бројевима. Ментално рачунање подстиче: резоновање о проблемској ситуацији и бројевима које оно укључује, концептуално разумевање аритметичких операција и правила аритметике, проналажење и примену стратегија решавања задатака које су прилагођене конкретном математичком проблему (Kilpatrick, 2001). Ментално рачунање захтева и подстиче развој процене. Процена је основа флексибилног рачунања које нагласак ставља на адаптивно резоновање и стратегијске компетенције, а све заједно је веома важно за концептуално разумевање бројева и аритметичких операција (Kilpatrick, 2001), као и за развој флексибилних менталних стратегија рачунања.

За разлику од алгоритамског приступа менталне стратегије рачунања карактерише рачунање са бројевима, а не цифрама, постојање неколико различитих исправних поступака рачунања, а бројеви се обично налазе у хоризонталном запису и приликом рачунања се у мањој мери користе писани записи (Linsen et al., 2015). Менталне стратегије се развијају на темељу претходних знања ученика, али доприносе и развоју осталих математичких идеја, као што је разумевање месне вредности цифре, односно растављање бројева на десетице и јединице, што су потврдила бројна истраживања (Carpenter et al., 1996; Cobb & Wheatley, 1988; Fuson, 1990). Оне подразумевају ефикасно и флексибилно рачунање засновано на разумевању карактеристика бројева, аритметичких операција и развијене осетљивости за бројеве (Verschaffel et al., 2007) уз развијену способност растављања и састављања бројева на различите начине (Behr, 1989; Trafton, 1989). Ово потврђује и истраживање уличних продаваца у Бразилу које је показало да они приликом рачунања користе својства бројева и у складу са тим примењују менталне стратегије рачунања (Carraher and Schliemann, 1985) без прављења грешака у рачуну, за разлику од ученика који користе научене стандардне алгоритме рачунања и чешће праве грешке. Даље, менталне стратегије рачунања најчешће служе као олакшице, али такође могу да убрзају рачунање и у неким примерима је њихова примена погоднија у односу на коришћење стандардних алгоритама (Илић и Зељић, 2017). Менталне стратегије доприносе развијању интуитивних модела рачунања и стварају основу за разумевање значења стандардног алгоритма. Оне су показатељ разумевања значења броја, концептуалног разумевања декадног система и аритметичких операција, па ученици који поседују то разумевање бирају стратегије менталног рачунања (Зељић и др., 2017). Интуитивне стратегије рачунања које се постепено развијају омогућавају тачно решавање сложенијих математичких проблема истичући специфичне карактеристике проблема, више него у ситуацијама када се користе наметнути модели (Mulligan and Watson, 1998).

Може се закључити да ментално рачунање представља „откривање и примену стратегија прикладних за одређени проблем, базираних на разумевању основних карактеристика бројевног система и аритметичких операција" (Verschaffel and De Corte, 1996: 120). Флексибилно ментално рачунање подразумева прилагођавање стратегија структури задатка (Зељић и др., 2017) и посматра се као индивидуална, субјективна реакција на одређени проблем при чему се успоставља веза између постојећих знања и конкретних карактеристика проблема, што зависи и од искуства ученика (Threlfall, 2006). Истраживања су показала да деца рачунају на основу познатих чињеница и на њима темеље примену нових стратегија. Заступљеност стандардних алгоритама у настави подстиче њихово коришћење без разумевања и у случајевима када деца поседују боље менталне стратегије (Cooper et al., 1996). Овакви налази истраживања аутора показују да прерано увођење и инсистирање на употреби стандардног алгоритма ограничава развој дечјих менталних стратегија и концептуално разумевање аритметичких операција. Инсистирање на брзој употреби алгоритма подстиче учење напамет, које гуши дечју математичку креативност, а она је неопходна за учење математике са разумевањем. Како би ученици могли да врше ментално рачунање потребно је да развију неколико вештина, а то су:

- познавање карактеристика бројева;
- употреба познатих чињеница за откривање нових и непознатих;
- употреба познатих менталних стратегија рачунања и њихово прилагођавање новим математичким проблемима;
- разумевање веза између аритметичких операција и примена тих знања;
- процена тачности добијеног резултата;
- примена различитих начина за решавање математичких задатака (DfES, 2001: 136)

Без обзира која је аритметичка операција у питању дечји развој стратегија рачунања према Барудију (Baroody, 2006) прати кретање кроз три фазе, а то су:

1. Стратегије пребројавања употребом прстију, конкретних објеката или реторички уз именовање сваког елемента;
2. Стратегије резоновања засноване на коришћењу познатих чињеница у циљу одређивања непознатих чињеница;
3. Ефикасне стратегије које карактерише брзина и флексибилност.

Менталне стратегије рачунања подразумевају ментално рачунање које прати низ акција и радњи које су смислене и могу се објаснити и поновити, јер су чин свесних активности, које прати мисаона ангажованост (Threlfall, 1998: 75). Потребно је истаћи разлику између менталних интуитивних стратегија и менталних научених стратегија. Прве стратегије ученици развијају самостално на бази постојећих знања, као што је структура броја, тип проблема, примена аритметичких правила интуитивно, употреба различитих репрезентација и слично. Самостално осмишљавање менталних стратегија је показатељ концептуалног разумевања броја и значења аритметичких операција. С друге стране, менталне научене стратегије су резултат поучавања у настави и њихова примена се у великој мери заснива на растављању бројева на различите начине, што захтва концепутално разумевање бројева и аритметичких операција. Заступљеност одређених стратегија у настави усмерава децу на њихово коришћење. Разумевање стратегија које наставник користи у настави, а пре свега активно учествовање деце у осмишљавању стратегија у процесу учења и развоја стратегија, подстиче развој ефикасних стратегија које се веома успешно користе и за аритметичке операције са вишецифреним бројевима пре формалног увођења у наставу (Anghileri, 1989; Carpenter et al., 1993; Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997). Нека деца интутивно развијају стратегије менталног рачунања, док их друга развијају и уче у наставном процесу, при чему је избор стратегије у оба случаја условљен вредностима бројева у задатку, типом и контекстом задатка (Sherin and Fuson, 2005), као и већ постојећим интуитивним стратегијама ученика (Mulligan and Watson, 1998:62). Ученике треба охрабрити да развијају сопствене стратегије, експериментишу и пореде различите стратегије у циљу избора и примене најадекватнијих (Heirdsfield, 1999: 1). Како би се то постигло битно је да ученици разумеју значај посматрања бројева на различите начине и та знања искористе за избор стратегија (Threlfall, 1998). Из наведених разлога потребно је усмеравати децу на широк спектар стратегија и подстаћи развој концептуалног разумевања броја, јер ће им то посматрано заједно омогућити флескибилно рачунање. Као што је наведено, избор стратегија претежно зависи од бројева у задацима, што показује да концептуално разумевање бројева и својстава аритметичких операција у великој мери утиче на флексибилан избор стратегија рачунања (Heirdsfield et al, 1999).

У литератури се могу издвојити три приступа (Kamii, 1994; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al., 1999; Sherin and Fuson 2005; Downton and Sullivan, 2017) која су заступљена у наставној пракси при обради аритметичких операција: увођење стандардних алгоритама, подстицање развоја менталних интуитивних стратегија и поучавање менталним стратегијама. На основу спроведеног истраживања, Селтер (Selter, 2009) истиче да најмањи степен адаптивности, када се говори о избору стратегија, показују деца која су при обради аритметичких операција усвајала стандардни алгоритам, док ученици који су били поучавани стратегијама или су их интуитивно развили, у већој мери стратегије прилагођавају конкретном задатку. У складу са тим сматрамо да је у почетним фазама обраде аритметичких операција значајно проверити менталне интуитивне стратегије које ученици поседују, како би оне представљале основу за развој и упознавање ученика са другим флексибилним стратегијама. Менталне стратегије, било да су резултат поучавања или да их деца самостално развијају, треба да буду засноване на својствима аритметичких операција, карактеристикама задатка и врстом бројева који се јављају у задацима.

Већина класификација дечјих поступака за рачунање може се класификовати у три групе које су уско повезане са начином разумевања бројева (Carpenteretal., 1993; Baek, 1998; Fuson et al., 1997; Ambros et al., 2003; Verschaffel et al. 2007; Peltenburg et al.; 2012; Selter etal., 2012; Schulz & Leuders, 2018):

1. Стратегије у којима се бројеви првенствено посматрају као предмети који се броје и стратегије се ослањају на бројање;
2. Секвенционалне стратегије у којима се бројеви повезују са декадним јединицама и у којима се аритметичке операције врше у односу на декадне јединице, односно растављање бројева на десетице и јединице;

3. Различите стратегије засноване на аритметичким правилима.

У овом раду се разматра питање да ли је развој стратегија интуитиван или се подстиче у процесу наставе и да ли треба да буде предмет поучавања у школи. Овакви приступи нису део нашег Наставног плана и програма, те једна група аутора (Sherin and Fuson 2005) сматра да су менталне стратегије множења једноцифрених бројева резултат систематског поучавања. Даље, истиче се да је разумевање аритметичких правила веома битно за развој менталних стратегија множења, односно изградњу таблице множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013), те је потребно да деца првобитно усвоје аритметичка правила. Друго виђење аутора (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al, 1999) јесте да увођење аритметичких правила пре развоја стратегија множења није нужно, већ да и млађа деца могу равијати стратегије (интуитивно) на задацима различите семантичке структуре.

3. Множење једноцифрених бројева

3.1. Мултипликативно мишљење

Мултипликативно мишљење представља важан аспект у развоју математичких појмова и аглебарског мишљења (Brown and Quinn, 2006). Дефинише се као способност флексибилног рада са различитим појмовима, стратегијама и репрезентацијама које се односе на множење и дељење (Siemon et al., 2005: 2). Множење представља одређивање укупног броја елемената код више једнакобројних скупова, а дељење се односи на одређивање броја елемената сваког подскупа, а када је број подскупова познат (Дејић и Егерић, 2010). Мултипликативно мишљење се односи на могућност различитих менталних приступа математичким проблемима множења и дељења уз коришћење различитих метода и процедура (Singh, 2012) и од кључног је значаја за разумевање месне вредности цифре, пропорционалног резоновања, производа мера, мерења, разломака, функција, статистике и уопште за развој алгебарског мишљења (Mulligan and Watson, 1998; Siemon et al., 2006). Тешкоће са разумевањем математичких појмова у вишим разредима су последица ограниченог разумевања и развијености мултипликативног мишљења (Virgona, 2006; Sing, 2012).

У овом контексту битно је прво објаснити адитивно мишљење, које претходи мултипликативном мишљењу, а формира се постепено током школовања уз адекватне инструкције. Адитивно мишљење подразумева разумевање бројева у контексту „део−део−целина”, као и месне вредности цифре. Везује се за разумевање и извођење операција сабирања и одузимања без примене алгоритма (Fennema and Carpenter, 1992). На овом нивоу мишљења одређивање укупног броја елемената се врши пребројавањем, односно кретањем од појединачног пребројавања укупног броја елемената, као почетних фаза адитивног мишљења, и постепено долази до развоја адитивних стратегија које укључују пребројавање препознавањем бројности скупа и бројање са прескакањем (Milola and Stephens, 2020). Адитивно мишљење је мање апстрактно у односу на мултипликативно мишљење, али му претходи. Развој мултипликативног мишљења се дешава постепено и њему претходи формирање и разумевање премултипликативних схема које подразумевају самостално проналажење начина груписања елемената у једакобројне групе у циљу одређивања бројности једног скупа уз коришћење манипулативних материјала или иконичких репрезентација (Steffe, 1994).

Анализирајући мишљења различитих аутора (Siemon et al., 2005; Breed et al., 2006; Siemon et al., 2012) издвајамо кључне елементе мултипликативног мишљења:

1. Способност флексибилног и ефикасног рачунања;
2. Способност препознавања и решавања задатака који укључују множење и дељење у скупу природних, рационалних и целих бројева;
3. Концептуално разумевање различитих мултипликативних ситуација и способност њиховог представљања на различите начине (текстуални задаци, иконичке репрезентације и симболички записи) уз адектватну употребу математичког језика;
4. Концептуално разумевање мултипликативних ситуација, везе множења и дељења, идеје једнакобројних скупова, значења чинилаца и производа и других својстава операције множења.

Разумевање мултипликативног мишљења на овај начин наводи на посматрање мултипликативног мишљења као способности препознавања мултипликативних схема у различитим контекстима и успешно решавање задатака применом одговарајућих стратегија, при чему је потребно инсистирати да се избор стратегија образложи, како би се разумео њихов избор, односно на чему се он темељи.

Мултипликативно мишљење обухвата препознавање различитих величина и разумевање односа између њих, што је кључна разлика у односу на адитивно мишљење (Bakker et al., 2014). На млађем школском узрасту мултипликативно мишљење се односи на множење и дељење, али шире гледано оно обухвата: линеарне функције, векторе, разломке, пропорције, рационалне бројеве и множење и дељење (Vergnuad, 1983, 1988). Разумевање мултипликативног мишљења подразумева разумевање значења трансформација величина у самој операцији множења или дељења (Vergnaud, 1983). На пример, множењем дужина оне се трансформишу у површину, а множењем броја колача са појединачном ценом колача добија се укупна цена свих колача (Vergnaud, 1983).

Мултипликативно мишљење захтева посматрање две врсте релација, односно разумевање израза $m \cdot n$ на два начина: на m места по n елемената и на n места по m елемената, односно разумевање разлике између n групе састављене од по m јединица и m група коју чини n јединице (Clark and Kamii, 1996: 43). Ови аутори (Clark and Kamii, 1996) су својим истраживањем утврдили да се развој мултипликативног мишљења код деце дешава постепено и да постаје све потпунији са повећањем узраста. Деца се до осме године налазе на нивоу адитивног мишљења када се постепено почиње са преласком на мултипликативно мишљење, које је заступљено на узрасту од 9 до 11 година. У малом проценту мултипликативно мишљење се јавља већ у седмој години, али тек у 10 години постаје доминантније (49% ученика). Недостатак мултипликативног мишљења се дешава и као последица пренаглашености адитивног мишљења у настави, од кога се деца тешко удаљавају. Како би се подстакао развој мултипликативног мишљења треба охрабрити самостално решавање задатака уз коришћење ситуација које подстичу мисаоне процесе, односно захтевају размишљање о одговору и упоређивање различитих могућности решавања истог задатка (Clark and Kamii, 1996).

Постоји неколико фаза према Јакобу и Вилису (Jacob and Willis, 2003) које прате развој од адитивног до мултипликативног мишљења, а то су:

1. Појединачно пребројавање сваког елемента скупа, уз чињеницу да последњи број који се изговори представља укупан број елемената;
2. Адитивно разумевање броја уз акценат на број елемената у сваком скупу, док се број скупова занемарује или се број скупова обележава тако што се употребљавају прсти;
3. Постепено разумевање значења множења и дељења кроз пребројавање укупног броја елемената на различите начине;
4. Мултипликативне релације које карактерише разумевање значења чинилаца и производа бројева код множења, односно дељеника, делиоца и количника код дељења;
5. Мултипликативно мишљење које карактерише примена адекватних (флексибилних) стратегија множења и дељења.

На основу истраживања са ученицима од 7 до 9 година у Аустралији у циљу уочавања разлике између адитивног и мултипликативног мишљења уочено је да ученици који поседују адитивно мишљење се претежно фокусирају на број елемената у сваком скупу, а затим додавањем одређују укупан број елемената. Ученици који су достигли ниво мултипликативног мишљења уочавају структуру, односно број група и елемената у свакој групи, разликују први и други чинилац, разумеју везу између множења и дељења и примењују наведена знања у решавању задатака. Потпуна развијеност мултипликативног мишљења је достигнута тек када су ученици способни да решавају задатке множења и дељења, без присуства различитих репрезентација и конкретних текстуалних задатака (Jacob and Willis, 2001).

Према Коску (Kosko, 2020) развој мултипликативног мишљења код деце пролази кроз неколико фаза:

1. Појавно мултипликативно резоновање засновано на појединачном пребројавању;

2. Први ниво мултипликативног мишљења који карактерише комбиновање адитивног и мултипликативног мишљења, као и разумевање разлике и сличности измеђуна *m* места по *n* елемената и на *n* места по *m* елемената уз одређивање производа два броја бројањем са прескакањем ($3 \cdot 6=3+3+3+3+3+3$);
3. Други ниво мултипликативног мишљења карактерише способност растављања чиниоца на различите начине, као и примена познатих производа и поновљеног сабирања за одређивање производа ($3 \cdot 16 = 3 \cdot 6 + 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3+ 3 + 3$);
4. Трећи ниво мултипликативног мишљења карактерише ефикасност и флексибилност у рачунању уз примену аритметичких правила ($3 \cdot 16 = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 10$).

Развој мултипликативног мишљења се најчешће везује за увођење множења и дељења у другом разреду. На овом узрасту деца већ имају формирана интуитивна знања о наведеним аритметичким операцијама које се постепено проширује (Lu and Richardson, 2018: 240) и могу бити добра полазна основа за развој мултипликативног мишљења. На основу истраживања уџбеника у Србији, Зељић и Дабић (Зељић и Дабић Боричић, 2020) истичу је да је доминантни циљ у уџбеницима усмерен на меморисање правила, односно меморисање таблице множења и употребу неефикасних стратегија које не подстичу развој мултипликативног мишљења. Заступљеност само једне структуре текстуалних проблема при обради множења и стратегија које се заснивају на сабирању и пребројавању спречава разумевање свих значења операције множења, онемогућава развој различитих флексибилних и ефикасних стратегија множења (Зељић и Дабић Боричић, 2020). Употреба неефиксних стратегија, као што је поновљено сабирање и примена познатих производа без проверавања тачности резултата, односно смањена употреба олакшица у рачунању су показатељи адитивног мишљења (Zeljić et al., 2019). Уколико се инсистира само на употреби поновљеног сабирања, односно на адитивном карактеру множења долази до развоја неефикасних стратегија множења које не воде разумевању ефикасних стратегија, а тако ни развоју мултипликативног мишљења (Siegler, 1998; Steel and Funnell, 2001). Кретање од адитивног до мултипликативног мишљења је процес и може трајати неколико година (Clark and Kamii, 1996; Simom and Blume, 1994; Thompson and Saldanha, 2003; Sherin and Fuson, 2005), те због тога треба да буде праћен одговарајућим инструкцијама (Sowder et al., 1998). Развој мултипликативног мишљења утиче и на развој других математичких појмова и уопште важан је за разумевање алгебре и функција (Downton and Sullivan 2017; Pohler and Prediger 2015; Prediger, 2019; Siemon, 2019), односно разумевање математичких садржаја у вишим разредима основне школе, као и у средњој школи (Lesh et al., 1988). Из тог разлога, мултипликативне структуре треба да заузму централну улогу у наставном плану и програму у млађим разредима основне школе, јер оне укључују процесе понављања, груписања, дељења, уочавања бројности неког скупа и темеље се на просторном резоновању, визуелизацији и организовању структура (Mulligan and Mitchelmore 2009: 38).

Већ при формирању основних значења множења ученике треба подстицати да мисле мултипликативно, уочавају једнакобројне скупове, односе између скупова елемената и сл. Како би се то постигло потребно је у уџбеницима користити задатке који описују мултипликативну ситуацију, одговарајуће иконичке репрезентације које описују ту структуру, као и развијати флексибилне стратегије множења (Зељић и Дабић Боричић, 2020).

На основну наведеног може се закључити да се мултипликативно мишљење развија постепено и да му претходи адитивно мишљење, те да се проширивањем знања о бројевима и аритметичким операцијама повећава и број могућих метода и начина решавања. Све наведено утиче на развој мултипликативног мишљења. Како би ученици развили адекватно адитивно мишљење које служи као основа за развој мултипликативног мишљења, при формирању појма броја потребно је инсистирати на различитим начинима представљања бројева и стратегијама пребројавања укупног броја елемената неког скупа у циљу концептуалног разумевање бројева. Обрада сабирања и одузимања треба да буде усмерена на примену и развој различитих менталних стратегија рачунања, које акценат стављају на структуру бројева, јер само свеобухватним приступом настави аритметике у млађим разредима основне школе се може утицати на развој мултипликативног мишљења, који почиње обрадом множења и дељења у другом разреду, а наставља се кроз целу основну и средњу школу. Као што је истакнуто, мултипликативно мишљење је саставни део множења и дељења и потребно је при обради наведених садржаја обухватити сва значења операција употребом различитих репрезентација и контекстуалних задатака. Употребом различитих значења ствара се основа за посматрање множења и дељења на различите начине и развој адекватних стратегија рачунања. Све наведено заједно утиче на развој мултипликативног мишљења, чија је основна карактеристика флексибилна примена разноврсних метода за решавање различитих задатака и разумевање многобројних математичких садржаја у чијој основи је множење и дељење.

3.2. Значење операције множења

Множење и дељење представљају изузетно важне теме елементарне аритметике и основа су за разумевање других математичких појмова, као што су разломци, однос, пропорција и функције (Vergnaud, 1983, 1994; Thompson, Saldanha, 2003; Bakker & Van den Heuvel Panhuizen, 2013). Множење у математици представља једну од четири основне рачунске операције. Ово су инверзне аритметичке операције и многи аутори сматрају да их не треба посматратити одвојено, већ их усвајати истовремено уз осврт на разумевање идеје једнакобројних скупова, јер она омогућава разумевање значења и множења и дељења (Ambrose et al., 2003: 305). Ово потврђују Мулиган и Мишелмор (Mulligan and Mitchelmore, 1997) који су истакли да деца инутитивно повезују множење и дељење, а тако и стратегије за рачунање.

С обзиром да је и у Наставном плану и програму Републике Србије предвиђена одвојена обрада множења и дељења у скупу бројева до 100, ми смо се и у нашем раду определили за истраживање стратегија множења једноцифрених бројева, те смо ове две аритметичке операције посматрали одвојено. Из наведеног разлога, у овом раду ћемо пажњу посветити множењу.

Пре дефинисања операције множења битно је дефинисати бинарну релацију. У математици бинарна релација дефинише на следећи начин: Ако су A *и* B два непразна скупа, бинарна релација у скупу $A \times B$ је сваки њихов подскуп. Ако је $A=B$, релација у скупу $A \times B = A \times A$ зове се и релација у скупу A. Бинарну релацију најчешће означавамо са ρ. Пошто је бинарна релација подскуп Декартовог производа $A \times B$ можемо писати $\rho \subset A \times B$. Ако је $\rho \subset A \times B$ и ако $(a, b) \in \rho$, где је $a \in A$ и $b \in B$, онда се каже да су елементи a и b у релацији ρ и пишемо $a\rho b$, а ако a и b нису у релацији ρ и пишемо $\neg(a\rho b)$, (може и $a\neg\rho b$) или $(a, b) \notin \rho$. Бинарну релацију симболички пишемо:

$$\rho = \{(a,b) \in \mathrm{A} \times B : a \in A \wedge b \;\; B\}$$

Множење представља бинарну аритметичку операцију коју можемо дефинисати за природне бројеве као поновљено сабирање:

$$\overbrace{b + b + b + \ldots + b}^{a \text{ сабирака}} = a \cdot b \text{ (Милинковић, 2011)}$$

Овакво посматрање множења је погодно само за ученике млађих разреда основне школе, али проширивањем скупа бројева на скуп рационалних бројева оваква дефиниција постаје нетачна, јер доводи до погрешног закључка, а то је да се множењем резултат увек повећава. У ситуацијама када се множење уведе само као поновљено сабирање долази до мешања између нпр. $\frac{1}{4} \times 3$ и $\frac{1}{4}$ од 3, јер одређивање $\frac{1}{4}$ од броја 3 заправо представља дељење, а не множење. Из наведеног разлога битно је посматрати множење и на друге начине, што ћемо истаћи кроз остале делове нашег рада.

Други начин дефинисања множења иде преко скупова, где операцију множења два броја дефинишемо на следећи начин:

Нека су A и B два коначна дисјунктна скупа, $A \cap B = \emptyset$ и $A \times B$ Декартов поизвод скупова A и B. Ако је $a = n(A)$ и $b = n(B)$, тада је:

$$a \cdot b = n\,(A \times B).$$

$a \cdot b$ је производ бројева a и b, а бројеви a и b чиниоци. За било која два природна броја постоји јединствени природни број који представља производ бројева a и b. Скуп природних бројева је затворен у односу на операцију множења (Милинковић, 2011).

Даље, битно је напоменути да за операцију множења важи:

- закон комутативности: $a \cdot b = b \cdot a$
- закон асоцијативности: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- закон дистрибутивности: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Значајем и употребом ових закона за развој стратегија множења у млађим разредима основне школе ћемо се бавити у поглављу 3.6.

Ангилери (Anghileri, 2000) истиче следеће важне аспекте множења: множење као поновљено сабирање, односно умножавање једнакобројних скупова, множење као бинарна операција, комутативност операције множења и дистрибутивност множења у односу на операцију сабирања и одузимања. Рано разумевање множења и дељења у скупу целих бројева захтева разумевање значења три величине: број скупова, број елемената у сваком скупу и укупан број елемената. Множење се односи на додавање једнакобројних скупова неколико пута, док деца дељење посматрају као разбијање једног скупа на једнакобројне скупове (Vula and Berdynaj, 2011: 9). Повезивање идеје једнакобројних скупова и поделе укупног броја елемената у једнакобројне скупове помаже ученицима да успоставе везу између множења и дељења, што је важно за флексибилно извођење операције множења (Wills et al., 2004: 52) и успостављање везе између ове две аритметичке операције.

Многи аутори посматрају множење само кроз једнакобројне скупове и поновљено сабирање, док Фишбеин (Fsichbein, 1985) сматра да разумевање множења као поновљеног сабирања представља имплицитни, несвесни и примитивни модел множења (Fischbein et al., 1985), те да је он непотпун и да су потребне значајне промене у погледу значења операције множења како би се достигло мултипликативно мишљење (Baroody, 2006). Битно је нагласити да ученици множење и дељење могу посматрати кроз адитивно мишљење (као поновљено сабирање или одузимање), али сматрамо да то није довољно. Овакво посматрање не обухвата сва значења множења и дељења и не ствара основу за разумевање других значења можења и дељења, као и алгебарских садржаја, што истичу и други аутори (Vergnuad, 1993; Steffe, 1998; Watson, 2015).

С обзиром да се стратегије множења често заснивају на растављању броја на различите начине и примени аритметичких правила (Anghileri 2000; Barmby et al., 2009; Larsson 2016; Downton and Sullivan, 2017) множење треба посматратити на два начина:

1. Разумевање различитих значења чинилаца и координација између њих, што се посебно истиче у задацима одређене семантичке структуре (Downton and Sullivan 2017, Gotze 2019);
2. Разумевање множења кроз стратегије које се заснивају на растављању чинилаца применом аритметичких правила (Van der Ven et al. 2012; Gaidoschik 2015; Downton and Sullivan 2017; Baiker and Gotze 2019).

У складу са наведеним, можемо закључити да је разумевање множења вишеслојно. Оно укључује способност мултипликативног резоновања, рачунања, избора одговарајуће стратегије, успостављања везе са осталим аритметичким операцијама, примену аритметичких правила и процењивање ситуације у којој је потребно извршити множење

(Greer, 1992; Clark & Kamii, 1996; Kilpatrick et al., 2001; Park & Nunes, 2001; Carpenter et al., 2003; Verschaffel et al., 2007; Young-Loveridge & Mills, 2009; Nunes et al., 2009; Van Dooren et al., 2010; Siemon et al., 2012). Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005: 348) истичу четири важне теме у истраживању множења и сагледавању проблема множења које карактеришу множење једноцифрених бројева, а то су:

1. Семантичка структура задатка;
2. Менталне интуитивне стратегије;
3. Стандардни алгоритми и
4. Флексибилна и адаптивна примена стратегија које омогућавају ефикасно и тачно одређивање производа два броја.

У складу са наведеним, сматрамо да су четири теме које истичу наведени аутори веома важне за разумевање значења множења и да при обради множења треба посветити пажњу свакој, како би се омогућило концептуално разумевање множења и створила основа за развој мултипликативног мишљења.

Различити аутори на различите начине посматрају појам множења. Једна група аутора се залаже за разумевање множења као поновљеног сабирања, односно истичу да је инутитивни модел на који се ослања множење као поновљено сабирање (Fishbein et al., 1985), што потврђује и Стефе (Steffe, 1994), истичући значај разумевања композитне јединице, односно пребројавања или поновљеног сабирања. Друга група аутора (Anghileri, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Siemon et al., 2008) сматра да први приступ не промовише разумевање значења појма множења, те да је потребно вишеслојно разумевање множења, које обухвата разумевање различитих значења операције множења, као што је правоугаона схема, мултипликативно поређење, Декартов производ и слично. Сматрамо да је други приступ свеобухватнији и да обрада множења у основној школи треба да се темељи на оваквом посматрању множења, које утиче на развој свих значења наведене аритметичке операције. За разумевање значења множења и развој мултипликативног мишљења потребно је да се посматрају различита значења, кроз употребу задатака различите семантичке структуре, о којима ће бити речи у следећем поглављу.

3.3. Семантичка структура текстуалних задатака множења

Разумевање математичких садражаја, а у нашем случају множења, треба заснивати на употреби задатака различитих семантичких структура, која истичу различита значења операције множења. Контекст задатка у великој мери утиче на начин решавања задатка, али и разумевање математичких садржаја који су њиме представљени. Функција задатка је да помогне ученицима да разумеју одређене математичке садржаје и да изврше математизацију контекста задатка. Приликом састављања текстуалних задатака који се користе при обради нових математичких појмова треба бирати контексте који су искуствено блиски ученицима, јер то код ученика ствара пријатан доживљај учења, спремност за учење, доводи до учења са разумевањем и повећава активност ученика у настави (Đokić, 2019).

Као што је речено, развој мултипликативног мишљења почиње при развијању значења множења и дељења у другом разреду и из тог разлога потребно је да ученици разумеју сва значења операције множење. Ово се постиже упознавањем различитих семантичких структура задатака, које истичу та значења, при чему се ствара основа за разумевање различитих математичких појмова, који у основи имају мултипликативни карактер. С друге стране, истраживања су показала да ученици решавају разноврсне текстуалне задатке који се односе на множење пре него што им се дају формалне инструкције о операцији (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Донтонова (Downton, 2017) истиче да је ученицима потребно богато искуство са различитим семантичким структурама и контекстима како би у потпуности разумели операције множења и дељења.

Мултипликативне структуре се односе на све ситуације које захтевају множење или дељење, што обухвата на млађем нивоу препознавање различитих значења множења и дељења и пропорционално резоновање, а на вишем нивоу: линеарне функције, векторе, разломке, производ мера, рационалне бројеве и множење и дељење (Vergnuad, 1983). Разумевање појма множења и уопште мултипликативних ситуација се огледа у спосбности ученика да објасне значење множења и примене знања на задацима различите семантичке структуре уз употребу различитих репрезентација.

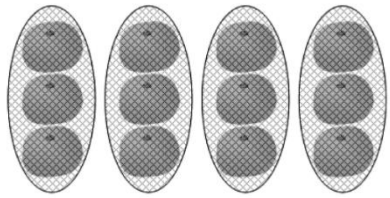
Ангилери (Anghileri, 1989) је обухватила шест категорија семантичких структура задатака: једнакобројни скупови, производ мера, правоугаона схема, бројевна полуправа, мултипликативно поређење и Декартов производ. Куба (Kouba, 1989) је издвојио три категорије: Декартов производ, мултипликативно поређење и једнакобројни скупови. Насупрот наведеним ауторима, Грир (Greer, 1992) обухвата следеће семантичке структуре: једнакобројни скупови (једнака мерења и производ мера), мултипликативно поређење, правоугаона схема, Декартов производ, мерење укупне количине/дужине и однос мерних јединица (претварање из једне у другу мерну јединицу), док је Вергнуад (Vergnuad, 1988) обухватио три семантичке структуре: правоугаона схема, Декартов производ и производ мерења. Он истиче (Vergnuad, 1983) три групе мултипликативних структура: изоморфизам мерења (директна пропорција између две величине, однос непроменљивих и променљивих величина (нпр. *маса јабука по гајбици (непроменљива) и број гајбица (променљива величина), као и укупан број јабука*), производ мерења (производом две величине настаје трећа величина – разумевање множења као површине правоугаоника и Декартов производ) и производ три или више чиниоца (*Четворочлана породица је провела 13 дана у одмаралишту. Један дан по особи кошта 35 долара. Колико их је коштао цео одмор?*).

Анализирајући поделе различитих аутора, може се закључити да се у литератури најчешће наводе следеће семантичке структуре:

1. Једнакобројни скупови
   Пример: *У четири корпе се налази по 3 јабуке. Колико јабука има укупно?*
2. Производ мера
   Пример: *За прање једног тањира је потребно 2 минута. Колико минута је потребно да би се опрало 10 тањира?*
3. Мултипликативно поређење
   Пример: *Јана има 8 пута више бомбона него Уна. Колико бомбона има Јана, ако Уна има 4 бомбоне?*
4. Пропорционално резоновање
   Пример: *У одељењу има 35 ђака. На свака 3 дечака у одељењу има 4 девојчице? Колико има дечака, а колико девојчица у том одељењу?*
5. Правоугаона схема
   Пример: *Учитељица је поставила у 6 редова по 5 клупа. Колико клупа је учитељица поставила?*
6. Декартов производ
   Пример: *Симона има 4 мајице и 2 сукње. Колико одевних комбинација може да направи Симона од своје одеће?*

У литератури производ мера, пропорционално резоновање и мултипликативно поређење представљају централне проблеме мултипликативног мишљења (Ben-Chaim et al., 1998; Shield and Dole, 2013: 19) и из наведеног разлога потребно их је користити у настави множења. Према Гриру (Greer, 1992) семнатичке структуре множења можемо поделити у две групе. Прву групу чине оне семантичке структуре у којима чиноци немају исто значење, а значење замене места чинилаца је прикривено (Lo et al., 2008; Schliemann et al., 1998), као што су једнакобројни скупови, производ мера и мултипликативно поређење. У другу групу спадају оне семантичке структуре у којима чиниоци имају исто значење, те представљају добру основу за разумевање замене места чинилаца, која је очигледнија него у првој групи задатака. Ова група обухвата разумевање множења као Декартовог производа и правоугаоне схеме (Greer, 1992; Schliemann et al., 1998, Larsson, 2016: 10). Рад са наведеним семантичким структурама треба да прате добро структурисани текстуални задаци, при чему треба бирати оне контексте који су ученицима искуствено блиски, те у том случају они врло рано могу разумети и задатке са сабирањем и одузимањем, као и са множењем и дељењем (Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1993).

Идеја једнакобројних скупова укључује три аспекта: број група, број елемената у сваком скупу и укупан број елемената, при чему чиниоци имају различиту улогу коју деца треба да разумеју. Њен значај истичу и Мулиган, Мичмор и Ватсон (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Mulligan and Watson, 1998). Разумевање множења на овај начин треба да оспособи ученике за различито формирање и именовање једнакобројних скупова, поготово у почетним фазама обраде множења, јер се интутитивно ствара основа за различито посматрање производа два броја (Siemon et al., 2008). Како би се то постигло потребно је да при обради множења и дељења пажња ученика буде усмерена на каркатеристике бројева у задатку при извођењу наведених аритметичких операција, како би се ученици оспособили за различито посматрање производа бројева, као везе множења и дељења (Hurst and Hurell, 2016). Разумевање множења као једнакобројних скупова најчешће се ослања на посматрање множења као поновљеног сабирања, јер најчешће коришћене репрезентације подстичу употребу поновљеног сабирања (Слика 1). Ово ограничава операцију множења на скуп природних бројева.



Слика 1. *Репрезентација за приказ идеје једнакобројних скупова*

Разумевањем множења само као поновљеног сабирања, односно идеје једнакобројних скупова, не обухватају се сва значење множења, те се може рећи да је употреба ове семантичке структуре оправдана у почетним фазама обраде (Larsson, 2017: 11), али је пожељно истовремено користити и задатке других семантичких структура. Приликом коришћења ове семантичке структуре за множење једноцифрених бројева битно је употребљавати различите репрезентације, односно различите манипулативне материјале (перле, коцкице, штапиће), који ће јасно истаћи поделу у једнакобројне скупове која омогућава ученицима да разумеју различита значења чинилаца и изврше њихово прегруписавање. Предност ове семантичке структуре огледа се у разлици између бројања елемената групе и бројања броја група, што је пре свега важно за разумевање и разликовање дељења и садржавања (Harris, 2001: 11). С обзиром на предности и недостатке идеје једнакобројних скупова, сматрамо да она треба да буде присутна приликом обраде множења, али не и да буде једина заступљена семантичка структура. Важно је уводити и друга значења множења у почетним фазама обраде множења, јер она проширују и продубљују значења операције множења, а ученици их могу разумети уз одговарајуће инструкције.

У литератури поред једнакобројних скупова често се истиче и значај правоугаоне схеме за разумевање множења. Разумевање множења на овај начин помаже у разумевању површине правоугаоника, а погодно је за разумевање и обраду аритметичких правила везаних за множење, што представља основу за разумевање множења у скупу рационалних бројева (Barmby et al., 2009). Разумевање структура једнакобројних скупова и правоугаоне схеме је веома важно за разумевање мултипликативних ситуација које омогућавају ученицима да разумеју и аритметичка правила (замена места чинилаца, множење збира и разлике бројем) и везу множења и дељења, што истичу и други аутори (Young-Loveridge, 2005; Matney and Daugherty, 2013; Jacob and Mulligan, 2014; Hurst and Hurrell, 2016). Разумевање множења као правоугаоне схеме омогућава растављање чинилаца на различите начине, те се ученици оспособљавају да и једнакобројне скупове представљају преко правоугаоне схеме, а елементи постају боље структурисани и групе се лакше уочавају, а таква структура подстиче ученике да развијају различите менталне стратегије множења. Кроз употребу правоугаоне схеме ствара се основа за разумевање везе између множења и дељења, односно разумевање дељења као инверзне операције у операцији множења (Hrust, 2017).

Правоугаона схема се користи приликом обраде множења у циљу разумевања стандардног алгоритма, односно начин на који се користи стандардни алгоритам, као и значења појединачних корака алгоритма (Young-Loveridge, 2005a, 2005b; Davis, 2008), а утиче и на развој мултипликативног мишљења (Young-Loveridge, 2005; Vale & Davies, 2007; Booker et al., 2010; Siemon et al., 2011). Истраживања потврђују да коришћење правоугаоне схеме приликом обраде множења једноцифреним бројевима доприноси лакшем разумевању алгоритма множења двоцифрених бројева (Young-Loveridge and Mills, 2009) који се своди на растављање бројева (Siemon et al., 2005). На млађем школском узрасту растављање бројева на чиниоце се своди на проналажење бројева чији је производ једнак траженом броју, а истраживања показају да само 31,4% ученика на узрасту од 9, 10 и 11 година може успешно да растави бројеве 24 и 30 на чиниоце (Warren and English, 2000). Ово указује на значај употребе правоугаоне схеме и других семантичких структура, које ће подстаћи развијање способности растављања бројева на чиниоце. У Кини се систематско поучавање множења једноцифрених бројева уводи кроз разумевање значења и растављање чинилаца ($3{\cdot}2$ се посматра као део $n{\cdot}2$), те овакав начин учења доводи до већег степена разумевања значења множења једноцифрених бројева (LeFevre and Lui, 1997) и растављања чинилаца, нарочито ако је праћено употребом одговарајућих репрезентација, а пре свега правоугаоне схеме.

Одређени текстуални задаци својом структуром подстичу на приказ решења преко правоугаоне схеме, што указује директно на разумевање множења на овај начин. Графичко приказивање множења преко правоугаоне схеме у скупу природних бројева до 100 ствара основу за развој флексибилних стратегија рачунања које се примењују за множење и дељење у скупу природних бројева, али и на осталим скуповима бројева (Lorraine and Mulligan, 2014: 39).

Употреба репрезентација које представљају правоугаону схему у почетним фазама учења треба да буде усмерене на именовање и уочавање три кључне величине (број група, број елемената у сваком скупу и укупан број елемената), као и правилну употребу математичког језика, али уз истовремено истицање замене места чинилаца, односно посматрања редова и колона. Када се „објекти” организују у правогуаону схему, при чему су редови и колоне јасно структурисани пажња ученика треба да буде усмерена на:

- различито посматрање укупног броја елемената и
- број скупова, број елемената у сваком скупу и укупан број елемената (Lorraine and Mulligan, 2014: 37).

Деца која поседују концептуално разумевање броја на млађем узрасту успешно користе правоугаоне схеме за представљање производа два броја, при чему воде рачуна о томе да су све јединце међусобно једнаке, што указује на успостављену везу између нумеричке и просторне структуре. Пребројавањем укупног броја елемената неког скупа се уочава број квадрата у једном реду, у једној колони, као и укупан број квадрата (Mulligan et al., 2006). Редови се могу посматрати као групе, а број елемената у сваком реду, као бројност сваке групе и обрнуто, колоне се могу посматрати као групе, што истиче својство наведеног аритметичког правила, а и повезују се различита значења множења. Разумевање наведеног је битно за разумевање аритметичких правила, карактеристика бројева, мерења и других математичких појмова (Mulligan and Mitcelmore, 2009: 44). Коришћење различитих материјала за представљање производа два броја преко правоугаоне схеме ученике подстиче на уочавање кључних карактеристика, повезивање репрезентација са математичким садржајима и развијање тачности рачунања уз концептуално разумевање значења множења као правоугаоне схеме (Day and Hurrel, 2015: 21). Посматрање множења преко правоугаоне схеме је битан сегмент у развоју концептуалног разумевања множења, способности растављања бројева на просте чиниоце (Siemon et al., 2008), као и аритметичких правила

(Carpenter et al, 2003, Fuson, 2003), што су потврдили и други аутори (Young-Loveridge and Mills, 2008). Употреба квадратне мреже ствара основу за различито растављање бројева у циљу што ефикаснијег рачунања. Концептуално разумевање множења и дељења као правоугаоне схеме у скупу природних бројева подстиче развој флексибилних стратегија множења, ствара основу за разумевње разломака, аритметичких операција на разломцима и децималним бројевима и обезбеђују трансфер знања на друге математичке области (Loveridge, 2005: 38), а све ово доприноси развоју мултипликативног мишљења.

Декартов производ се посматра као производ два скупа, која имају одређену вредност, односно подразумева операцију на елементима два скупа, при чему се врши упаривање елемената једног скупа са елементима другог скупа (Larsson, 2016: 9). У математици се Декартов производ дефинише на следећи начин:

Декартов производ два скупа A и B је скуп C чији су елементи уређени парови са првом компонентом из скупа A и другом из скупа B, тј.

$$C = A \times B = \{ (a, b) : a \in A \land b \in B \}$$

Ако скуп A има m елемената, а скуп B има n елемената, онда скупови $A \times B$ и $A \times B$ имају по $m \cdot n$ елемената (или ако је $card\ A = m$ и $card\ B = n$, онда је $card\ A \times B = m \cdot n$).

У нашем раду појам Декартовог производа третирамо кроз текстуалне задатке који подразумевају одређивање броја различитих уређених парова који се могу формирати када први члан пара припада скупу A, а други члан скупу B (иако то није експлицитно изражено у тексту проблема). Циљ је интуитивно разумевање реалних ситуација које се формално математички могу описати као Декартов производ два скупа, а на које ученици реагују пишући одговарајуће производе.

Разумевање Декартовог производа је битно због разумевања комбинаторике у старијим разредима и средњој школи и сматрамо да ово значење множења не сме бити занемарено у млађим разредима основне школе.

Разумевање множења као производа мера је много апстрактније него разумевање множења као једнакобројних скупова, јер захтева од ученика да успоставе однос између две величине које су дате и да тај однос прикажу бројчано. У овој семантичкој структури чиниоци имају различита значења, као и код мултипликативног поређења, те је важно та значења и истаћи. Ранија истраживања су показала да је разумевање множења као једнакобројних скупова и правоугаоне схеме много једноставније него мултипликативно поређење и Декартов производ (Greer, 1992; Mulligan, 1992). Овакви налази су у складу са наставном праксом, која показује да је најчешће заступљена идеја једнакобројних скупова која се користи приликом увођења операције множења што потврђују и многобројни аутори (Fischbein et al., 1985; Watanbe, 2003; Izsak, 2004), док су остале семантичке структуре заступљене у мањој мери, али су и оне веома важне. Разумевање множења као мултипликативног поређења, односно разумевање појма „толико пута већи број" заправо захтева пропорционално повећавање одређене величине, односно пропорционално повећање броја елеменета једног скупа у односу на дати скуп (Confrey, 1990). Ово указује да је изучавање ове семантичке структуре значајно за касније разумевање пропорција, као и за развој пропорционалног резоновања. Даље, разумевање ове семантике структуре ствара основу за разумевање множења у скупу рационалних бројева, а пре свега децималних бројева, док идеја једнакобројних скупова није погодна за разумевање тих садржаја (Larsson, 2016).

Разумевањем наведених значења множења ученици развијају основу за разумевање множења у скупу целих и рационалних бројева. Уколико би се разумевање множења ограничило само на једнакобројне скупове истакло би се да се множењем резултат увек повећава, што није случај у скупу рационалних бројева. Те посматрање множења на овај начин ствара тешкоће за разумевање множења у скупу рационалних бројева (Larsson et al. 2017: 2). Употреба правоугаоне схеме је значајна за разумевање множења вишецифрених бројева и развој ефикасних стратегија рачунања. При множењу на овај начин истиче се растављање производа два броја на неколико производа мањих бројева, као и растављање бројева на вишеструке декадне јединице (Young-Loveridge and Mills, 2008). Коришћење квадратне мреже за представљање производа два броја омогућава кретање од познатог ка непознатом растављањем бројева на неколико сабирака, односно од познатих производа у оквиру множења једноцифреним бројем до самосталног откривања новог траженог производа (Loveridge, 2005: 38). На тај начин долази до развоја мултипликативног мишљења, односно развоја стратегија множења које се базирају на растављању бројева (Loveridge, 2005).

Истраживање Маројоке и Бекера (Marojoke and Beker, 2014) показало је ученици могу успешно да решавају задатке множења различите семантичке структуре пре обраде множења уколико су им дате одговарајуће иконичке репрезентације и контексти задатка блиски њиховом искуству. На успешност у решавању задатака различите семантичке структуре утиче употреба репрезентација које дају могућност појединачног пребројавања елемената или примене неке друге менталне интуитивне стратегије (Mulligan and Mitchelmore 1997; Marojoke and Beker, 2014). Истраживање је показало да деца не морају да поседују експлицитно разумевање структуре једнакобројних скупова како би успешно решили остале мултипликативне проблеме, што показује да се и друге семантичке структуре задатака могу увести у почетним фазама обраде множења. Слажемо се са мишљењима различитих аутора који указују на важност примене различитих мултипликативних ситуација, које истичу значења множења уз акценат на прилагођеност контекста задатка узрасту ученика, као и употребу одговарајућих репрезентација за приказ мултипликативних ситуација.

3.4. Менталне стратегије множења

Деца поседују интуитивна знања о множењу која се могу успешно искористити као основа за формалну обраду множења једноцифреним бројем (Lorraine and Mulligan, 2014: 36). У неформална и интутивна знања спадају сва математичка знања стечена ван школе, као и математичка знања стечена кроз обраду других математичких садржаја (Marjoke and Beker, 2014: 118). Када су у питању аритметичке операције, менталне стратегије се изводе директно из појмова бројева и разумевања декадне основе, темељних принципа операција и односа између операција (Зељић, 2021: 53). Истраживања показују да је поучавање деце стратегијама менталног рачунања ефикасније од прекомерног понављања алгоритма (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006), као и да ученици веома ефикасно рачунају користећи менталне интуитивне стратегије за множење вишецифрених бројева пре увођења формалних инструкција (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003). Како би деца развила ефикасне менталне стратегије рачунања потребно је да пре свега разумеју структуру броја и имају развијено разумевање значења броја, те да на основу тих знања развију способност растављања бројева на различите начине. Ово је основа за примену различитих стратегија рачунања, које се заснивају на већ постојећим, али и новим знањима. Менталне стратегије рачунања захтевају резоновање о бројевима, њиховим својствима, математичким знањима које треба да буду у почетку поткрепљене адекватним менталним репрезентацијама (Baroody, 1985). Менталне стратегије рачунања се првобитно развијају за операције сабирања и одузимања, а затим долази до развоја стратегија множења и дељења.

Према неким ауторима менталне стратегије множења се могу поделити у две групе: стратегије рачунања и стратегије моделовања. Стратегије рачунања обухватају појединачно пребројавање, ритмичко бројање, бројање са прескакањем, адитивне и мултипликативне стратегије (Kouba 1989; Mulligan, 1992). С друге стране, стратегије моделовања укључују употребу физичких објеката (Kouba 1989), као што су прсти, цртежи или нека врста обележивача група елемената.

Употреба различитих стратегија у извођењу аритметичких операција се темељи на карактеристикама задатака и бројева у задатку, као и на интуитивној примени аритемтичких правила. Уколико ученици самостално примењују стратегије пре формалног увођења, реч је о интуитивним менталним стратегијама. С друге стране, уколико је у настави заступљена примена аритметичких правила или репрезентација на основу којих се бирају стратегије, реч је о менталним стратегијама које су резултат поучавања (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Развој стратегија множења се одвија постепено, крећући се од директног моделовања, које подразумева употребу прстију и цртеже у циљу пребројавања укупног броја елемената или њиховог разврставања у групе и постепено се иде ка развоју комплетних стратегија множења, стратегија дељења и компензације (Ambrose et al., 2003). Када је у питању развијање стратегија, битно је напоменути да стална примена различитиих стратегија уз нагласак на размишљање о њима доприноси већем степену разумевања стратегија и аритметичких операција (Rathmell, 1978; Thornton, 1978; Cook and Dossey, 1982), као и развоју флексибилних стратегија множења.

Мулиган и Мичмор (Mulligan and Mitchelmore, 1997) менталне интуитивне стратегије дефинишу као интерне менталне структуруе које одговарају класи стратегија рачунања, те постоји директна веза између стратегија рачунања и семантичке структуре задатка (Mulligan and Mitchelmore, 1997: 312). Стратегије множења и дељења се постепено развијају од неформалних ка формалним стратегијама, при чему постепено долази до употребе познатих производа множења једноцифреним бројем и примене стандардног алгоритма множења и дељења. Они (Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997) разликују неколико стратегија множења:

1. Стратегије директног моделовања – појединачно бројање елемената, пребројавање дуплирањем и прескакањем уз употребу конкретних модела и цртежа;
2. Стретегије допуњавања које су засноване на ефикасним техникама пребројавања и сабирања и обухватају ритмичко пребројавање, пребројавање са прескакањем, поновљено сабирање и дуплирање;
3. Стратегије које се темеље на употреби познатих производа множења једноцифрених бројева.

Посматрајући наведене стратегије може се закључити да се постепено прелази на ментално рачунање без употребе цртежа и конкретног материјала. Мулиган (Mulligan, 1992) истиче да је висок ниво заступљености адитивних стратегија код множења оправдан, јер деца стратегије овог типа користе и када у потпуности усвоје множење једноцифреним бројем. Кретање од пребројавања, преко менталних стратегија до познавања свих производа у оквиру множења једноцифреним бројевима према мишљењу наведених аутора мора да буде праћено радом на задацима различите семантичке структуре. Како би се постигао развој менталних стратегија множења наставни процес треба да подржи и уважи развој менталних интуитивних стратегија. Почетне фазе обраде множења треба да прати рад са конкретним моделима, цртежима и дијаграмима, уз употребу адекватног математичког језика, као и текстуалних задатака који омогућавају ученицима да успешно реше задатке без употребе конкретних материјала (Bakker et al., 2014). Употреба менталних интутивних стратегија, као што су поновљено сабирање и пребројавње група елемената, може позитивно утицати на развој других стратегија, као и усвајање других математичких појмова.

Наведени аутори (Mulligan and Mitchelmore, 1997) су истраживали употребу менталних инутивних стратегија множења на задацима различите семантичке структуре (једнакобројни скупови, правоугаона схема, Декартов производ и мултипликативно поређење). Обухватајући наведене семантичке структуре и стратегије множења и дељења наведени аутори су спровели истраживање са децом првог разреда у скупу природних бројева до 40 пратећи везу између семантичке структуре задатака и менталних интуитивних стратегија које користе. Резултати су показали да деца поседују интуитивна знања и да самостално формирају стратегије множења и дељења, те да могу да решавају задатке са множењем пре формалног увођења ове операције. Са узрастом знање о бројевима, семантичким структурама се проширује те деца у складу са њима бирају стратегије множења и дељења. Поновљено сабирање се као стратегија успешно примењује у задацима различитих семантичких структура, сем код задатака мултипликативног поређења. Успешно коришћење менталних интуитивних стратегија множења у скупу бројева до 20 не значи и њихово успешно коришћење у скупу бројева до 40. Резултати су показали да чак 75% ученика успешно решава задатке множења и дељења у скупу бројева до 20 без инструкција, што је показатељ присуства неформалних знања о множењу и дељењу. Када је у питању скуп бројева од 20 до 40 ученици претежно користе стратегије директног моделовања и стратегије пребројавања, а тек у вишим разредима долази до коришћења познатих чињеница за решавање задатака. Примећено је да се проширивањем скупа бројева ученици враћају на почетне стратегије. Са повећањем узраста расте употреба софистициранијих стратегија множења, док се употреба осталих стратегија, нарочито оних које се заснивају на пребројавању смањује (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Интуитивна знања и неформалне стратегије деца стичу током свакодневног искуства и успешно их користе за решавање задатака. Усвајањем формалних знања, односно стандардних алгоритама они престају да анализирају задатке (Carpenter and Moser, 1982), што често доводи до грешака. С друге стране, учење стандардних алгоритама не треба занемарити, али је битно да то учење прати објашњење начина на који алгоритми функционишу, јер се на тај начин доприноси развоју стратегијских компетенција и адаптивног резоновања (Rathmell, 1978). Алгоритми треба да се усвајају као последица примене и разумевања различитих стратегија рачунања и својстава аритметичких операција.

Употреба нестандардних алгоритама, односно менталних стратегија рачунања може помоћи ученицима да разумеју значења стандардних алгоритама (Day and Hurrell, 2015: 21) и аритметичких операција. Истраживања Мулигана и Мишелмора (Mulligan and Mitchelmore, 1997) су показала да семантичка структура задатка утиче на избор стратегије, те се задаци који се односе на Декартов производ и мултипликативно поређење најчешће решавају стратегијама пребројавања уз примену конкретних модела, док је бројање са прескакањем заступљено у задацима свих семантичких структура, с тим да су ученици показали слабо разумевање Декартовог производа (Mulligan, 1992). С друге стране, задатке који се односе на разумевање множења као производа мера деца најчешће решавају стратегијама које се заснивају на поновљеном сабирању. Када је у питању решавање задатака са једнакобројним скуповима истраживања у Америци (Steffe, 1994; Mulligan and Mitchelmore, 1997) су показала да деца најчешће користе поновљено сабирање и бројање са прескакањем (ритмичко пребројавање) користећи прсте, који служе као помоћно средство које означава број група који се пребројава.

Куба (Kouba, 1989) је анализирајући семантичку структуру једнакобројних скупова издвојио следеће стратегије множења:

1. Стратегије пребројавања укупног броја елемената уз коришћење конкретних модела или цртежа (појединачно пребројавање, пребројавње дуплирањем и бројање по секвенцама, односно групно пребројавање када је број елеманата групе познат, а акценат се ставља на број група);
2. Поновљено сабирање уз коришћење цртежа лишених шума или без цртежа;
3. Примена научених производа.

Баек (Baek, 1998) наводи следеће менталне стратегије множења:

1. Стратегије које се базирају на употреби конретних материјала и њиховој манипулацији;
2. Стратегије пребројавања које обухватају поновљено сабирање, дуплирање и др. стратегије;
3. Компензационе стратегије које подразумевају прилагођавање бројева (растављањем или допуњавањем) у циљу флексибилног рачунања.

Сличну поделу стратегија наводи и Харис (Harris, 2001) који даје заједнички приказ стратегија множења и стратегија дељења:

1. Поновљено сабирање или одузимање;
2. Дуплирање или половљење;
3. Растављање чинилаца/дељеника/делиоца;

4. Примена везе множења и дељења;
5. Растављање бројева на просте чиниоце;
6. Дељење или множење сваке цифре са делиоцем или чиниоцем, уз употребу познатих производа;
7. Употреба стратегија које се заснивају на примени аритметичких правила.

За развој менталних стратегија множења и дељења битно је да се разуме дуплирање, половљење, множење и дељење бројевима 2, 5 и 10, као и множење и дељење декадним јединицама и вишеструким декадним јединицама (Harris, 2001: 20). Ови производи се користе као полазна основа, односно као познати производи, на основу којих се одређују производи других бројева, употребом аритметичких правила. Концептуално разумевање множења подразумева способност ученика да један или оба чиниоца раставе на друге чиниоце у циљу олакшавања процеса рачунања, при чему долази до интуитивне примене множења збира бројем што је веома значајно у процесу усвајања стандардног алгоритма множења (Larsson et al. 2017: 2).

Истраживања су показала да ученици из Кине и Америке користе различите менталне интуитивне стратегије како пре увођења операције множења, тако и након увођења. Пре увођења множења амерички ученици користе поновљено сабирање, али и појединачно пребројавање уз цртање контекста задатка, што није случај са ученицима из Кине. Уопштено гледано, ученици из Америке теже коришћењу репрезентација које прате одређене стратегије (поновљено сабирање и дуплирање). Насупрот њима, ученици из Кине се брзо удаљавају од конкретних репрезентација и прелазе на употребу симболичких репрезентација, а рачунање везују за структуру бројева. Они користе стратегије дуплирања, допуњавање до 10 што указује да ученици поседују концептуално разумевање броја, као и артиметичких операција, што је кључно за развој алгебарског мишљења (Lianfang-Fu and Richardson, 2018). Разлика у приступима произилази и из различитог увођења појма бројева у ове две земље. За разлику од Америке, у Кини акценат се ставља на концептуално разумевање броја и логичко резоновање, те се бројеви и аритметичке операције, поготово сабирање, уводе кроз стратегије допуњавања до 10 чиме се ствара основа за разумевање везе између сабирања и множења и уопште значења множења (Lianfang-Fu and Richardson, 2018).

Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005) су се бавили испитивањем менталних стратегија множења после обраде множења једноцифреним бројем. Они истичу да су почетне стратегије множења и дељења адитивне, односно множење се посматра као поновљено сабирање. У првим фазама ученици се везују за конкретне објекте, цртеже и употребу прстију. Временом долази до развоја концептуалних структура, као и одговарајућих математичких образаца који су неопходни за развој и примену одговарајућих стратегија множења и дељења. Ови аутори (Sherin and Fuson, 2005) сврставају стратегије множења у неколико група:

1. Стратегије које се темеље на бројању појединачних елемената и директном моделовању чија је карактеристика употреба иконичких репрезентација, односно цртежа и употреба прстију за рачунање. У ове стратегије спадају следеће стратегије:
   - Цртање цртежа са доста шума који одговара контексту и пребројавање свих елемената појединачно, при чему је математички контекст занемарен;
   - Цртање примитивних математичких цртежа који воде математизацији појма и примена знања чињеница;
   - Пребројавање уз помоћ прстију уз бројање група једном руком, а елемената сваке групе другом руком;
   - Ритмичко бројање са прстима;
2. Стратегије засноване на разумевању множења као поновљеног сабирања
   - Поновљено сабирање;
   - Формирање група дуплирањем и поновљено сабирање које се примењује на резултате добијене дуплирањем.

3. Стратегије засноване на групном пребројавању при чему је бројност скупа позната, а акценат се ставља на пребројавање група.
   - Пребројавање уз помоћ цртежа који приказују мултипликативну структуру проблема;
   - Пребројавање уз помоћ идеограма;
   - Пребројавање уз помоћ прстију, при чему прсти означавају број групе;
4. Стратегије засноване на примени правила множења бројевима 0, 1, 10 и 9.
5. Знање чињенице, настало као последица памћења производа једноцифрених бројева;
6. Хибридне стратегије
   - Стратегије засноване на појединачном и групном пребројавњу укупног броја елемената;
   - Примена познатих производа и стратегија пребројавања;
   - Примена познатих производа и поновљеног сабирња;
   - Примена аритметичких правила и стратегија прилагођених бројевима.

Њихово истраживање је показало да у периоду поучавања множења једноцифреним бројевима промене које се дешавају у погледу коришћења флексибилнијих стратегија множења су резултат систематског поучавања (Sherin and Fuson, 2005). Поучавање ученика различитим стратегијама је важно, јер употреба флексибилних стратегија има позитиван утицај на учење и постигнућа ученика и то је неопходан услов за одржавање и проширивање претходног знања ученика (Lui, Ding, Gao and Zhang, 2015).

Бројеви у задатаку у великој мери утичу на избор стратегија. Познати производи у оквиру множења једноцифреним бројевима се користе када су у питању производи мањих бројева и за множење два иста броја (квадрати бројева). Шерин и Фусон (Sherin and Fuson, 2005) истичу да ученици у највећој мери користе поновљено сабирање за проналажење тачног одговора приликом множења мањих једноцифрених бројева. Резултати њиховог истраживања су показали да за множење са 0 или 1 ученици обично користе научена правила, док за множење бројем 2 користе поновљено сабирање. Пребројавање група се најчешће користи за множење бројевима 3, 4 или 5, док за множење са већим бројевима ученици користе стратегије које комбинују са познатим производима (Sherin and Fuson, 2005: 380). Наведени аутори истичу и значај утицаја инструкција наставника на избор стратегија. Уколико се у настави користе репрезентације или прсти и деца ће користити стратегије које се заснивају на томе, што важи и за примену аритметичких правила и научених алгоритама без разумевања истих (Sherin and Fuson, 2005: 382). Све наведено указује на специфичности стратегија у зависности од конкретног проблема и бројева у оквиру проблема, те се у складу са тим стратегије не могу генерализовати. Слично наведеним ауторима, Килпатрик (Kilpatrick, 2001) наводи да се стратегије множења бирају у зависности од вредности чинилаца. Он истиче да се множење бројем 5 заснива на множењу бројем 10, а затим се резултат дели бројем 2. Множење бројем 6 се заснива на множењу бројем 5, а множење бројем 4 на дуплираном множењу бројем 2. Све ове стратегије које наводи Килпатрик се темеље на примени аритметичких правила.

Уопштено гледајући мишљења наведених аутора (Kilpatrick, 2001; Sherin and Fuson, 2005) сматрамо да је потребно сталним вежбањем на часовима математике подстакнути децу да уочавају односе између бројева, својства аритметичких операција и да наведена знања примењују за развој менталних стратегија множења и дељења, а у основи ових стратегија је концептуално разумевање бројева и операције множења, а не меморисање научених чињеница. Учење са разумевањем доприноси да деца временом користе познате чињенице за проналажење непознатих, те у складу са тим бирају адекватне методе, размишља се о могућим начинима решавања задатака који доприносе повећаном степену тачности (Siegler and Jenkins, 1989; Kilpatrick, 2001).

На основу истраживања менталних стратегија које деца узраста од 8 до 11 година користе за множења и дељења, Амброс и други аутори (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001) истакли су следеће категорије менталних стратегија множења:

1. Стратегије директног моделовања које су засноване на коришћењу конкретних модела и цртежа;
2. Стратегије допуњавања које су засноване на поновљеном сабирању и дуплирању и примени аритметичких правила.

   Пример: $47 \cdot 34$

   $$48 = 16 + 32$$
   $$= (32+16-1) \cdot 34$$
   $$= ((2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) + (2\cdot2\cdot2\cdot2) - 1) \cdot 34$$
   $$= (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) \cdot 34 + (2\cdot2\cdot2\cdot2) \cdot 34 - 1 \cdot 34$$
   $$= 2(2(2(2(2\cdot34)))) + (2(2(2(2\cdot34))) - 34$$
3. Менталне инутитивне стратегије које су засноване на растављању чиниоца на збир неколико сабирака и примени аритметичких правила.
4. Стратегије компензације које су засноване на прилагођавању стратегија структури бројева уз примену аритметичких правила као олакшица у рачунању.

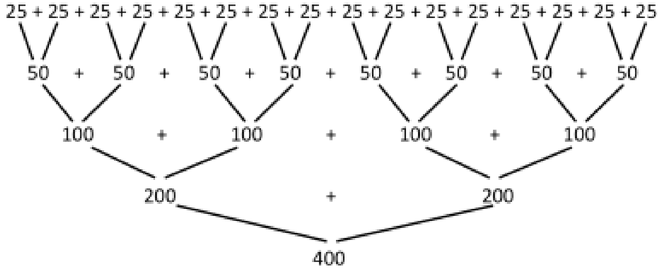
   Пример: $43 \cdot 24 = 24 \cdot 10 \cdot 4 + 24 \cdot 3$

Хаирдшфајлд и др. (Heirdsfield et al, 1999) истичу три категорије менталних стратегија множења:

1. Стратегије које се темеље на пребројавању (пребројавање са прескакањем, поновљено сабирање и одузимање, дуплирање и дељење у групе);
2. Множење једноцифреним бројем и примена познатих производа при рачунању;
3. Холастичке стратегије (прилагођавање стратегија бројевима у задатку и растављање бројева на различите начине).

Истраживање Хаирдшфајлда и других аутора (Heirdsfield et al, 1999) испитивало је употребу менталних интуитивних стратегија пре увођења множења једноцифреним бројем и менталних интутивних стратегија за множење двоцифреним бројем после увођења множења једноцифреним бројем. Утврђено је да деца интуитивно пре увођења множења једноцифреним бројем користе прву групу стратегија, а затим како се уводи множење једноцифреним бројем постепено прелазе на примену познатих производа и теже употреби холастичких стратегија. Уопште гледано, са повећањем узраста расте и ефикасност стратегија које се примењују. Када је у питању множење једноцифреног и двоцифреног броја ученици пре систематске обраде тих садржаја интуитивно примењују стратегије дуплирања и стратегије које се заснивају на примени аритметичких правила, као што је множење збира и разлике бројем, множење декадним јединицама, везу множења и дељења, као и растављања бројева на различите начине, а затим постепено крећу ка примени холастичких стратегија, док за множење два двоцифрена броја деца најбоље резултате постижу коришћењем стратегија које се темеље на пребројавању с обзиром да ти садржаји нису обрађени у настави. Холастичке стратегије су много погодније за ментално рачунање, подстичу процену, која се постепено усавршава кроз грешке и покушаје и оспособљавају ученике за успешно множење и дељење у скупу природних бројева применом аритметичких правила и својстава операција и бројева (Heirdsfield et al, 1999). С друге стране, истраживања су показала да уколико ученици усвајају множење кроз адитивни приступ, поседују малу стопу флексибилности када је у питању множење двоцифрених и једноцифрених бројева или само двоцифрених бројева (Ligouras, 2012).

У зависности од начина на који ученици врше рачунање, Ларсон (Larsson, 2015) истиче три групе стратегија: поновљено сабирање, стандардни алгоритам и менталне интуитивне стратегије. Разумевање множења као поновљеног сабирања базира се на кореспонденцији укупног броја скупова и елемената у сваком скупу, односно пребројавању укупног броја елемената (Thompson and Saldanha, 2003), што је уско повезано са структуром једнакобројних скупова. Пример приказан на Слици 2. показује комбинацију поновљеног сабирања и дуплирања (Larsson, 2016: 21).



Слика 2. *Примена стратегија поновљеног сабирања и дуплирања (Larsson, 2016)*

Поновљено сабирање не истиче све структуре множења, али се може користити као стратегија у почетним фазама обраде множења и као прелазна основа за примену стратегија дуплирања.

У Аустралији је спроведено истраживање са ученицима трећег разреда у циљу испитивања мултипликативног мишљења, кроз праћење коришћених стратегија у задацима различитих семантичких структура (Downton and Sullivan, 2017). Наведени аутори истичу да је већина приступа множењу конципирана тако да се почиње са једноставним примерима, а да се затим прогресивно уводе софистицираније стратегије, али је могућ и обрнут пут. Они истичу следеће менталне стратегије множења: стратегије које се заснивају на употреби конкретних модела и цртежа, односно визуелизацији; стратегије засноване на пребројавању (појединачно пребројавање, дуплирање или бројање група елемената); стратегије мултипликативног рачунања, односно ослањања на знање познатих производа и стратегије које се заснивају на процени и примени аритметичких правила, карактеристика бројева и својстава операције множења, те аутори ове стратегије именују као стратегије засноване на холастичком мишљењу. Последњу групу стратегија ови аутори сматрају софистицираним стратегијама рачунања. Утврђено је да већина ученика користи стратегије које се заснивају на знању познатих производа, затим стратегије дуплирања и стратегије засноване на холастичком мишљењу при чему је последња група стратегија била најзаступљенија. Њихови разултати показују да употреба различитих репрезентација при обради множења подстиче дубље разумевање множења и примену стратегија заснованих на холастичком мишљењу, које одликује флексибилност у размишљању и примена софистициранијих стратегија множења. Задаци у њиховом истраживању су били подељени по семантичким структурама (једнакобројни скупови, производ мера, правоугаона схема, мултипликативно поређење и Декартов производ) и по сложености у зависности од бројева у задатку. Резултати су показали да семантичка структура утиче на избор стратегије. Ученици за решавање задатака који истичу идеју једнакобројних скупова без обзира на бројеве у задатку теже коришћењу стратегија пребројавања и стратегија које се заснивају на познатим производима. Када је у питању разумевање множења као праовугаоне схеме ученици претежно користе стратегије које се заснивају на познатим производима, јер се кроз ово значење множења јасно истиче структура реда и колоне, те је погодно за дељење производа на неколико производа, односно груписање познатих производа и осмишљавање ефикасних стратегија множења. Разумевање множења као производа мера, мултипликативног поређења и Декартовог производа представља сложеније ситуације множења те ученици теже коришћењу холастичких стратегија и стратегија заснованих на познатим производима које им омогућавају флексибилније проналажење решења. Без обзира на семантичку структуру задатака, ученици су тежили решавању сложенијих задатака. Резултати су показали да баш решавање таквих задатака подстиче размишљање о значењу множења и развој нових, ефикаснијих и флексибилнијих стратегија множења (Downton and Sullivan, 2017).

Развој флексибилних стратегија множења условљен је и стратегијама које се примењују у почетним фазама обраде множења. У Србији је спроведено истраживање (Зељић и др., 2019) са ученицима другог разреда у циљу испитивања менталних стратегија множења. Истраживање је обављено након обраде замене места чинилаца и множења збира и разлике бројем. Током обраде множења ученици су у највећој мери користили поновљено сабирање, док друге стратегије нису биле заступљене. Циљ је био да се испита које стратегије ученици користе, да ли могу да користе више од једне стратегије и да ли флексибилно бирају стратегије. Истраживање је показало да је само мали број ученика користио флексибилне и адаптивне стратегије и то најчешће стратегије дуплирања. Стратегије дуплирања и мултипликативног рачунања су коришћене у малом проценту. Заступљеност наведених стратегија показује да ученици поседују адитивно мишљење, што се посебно истиче при множењу бројем 9, при чему не користе множење бројем 10, као олакшицу. Већина ученика је корстила поновљено сабирање и пребројавање са прескакањем, не примењујући својства бројева и аритметичких операција. На основу овог истраживања утврђено је да ученици 2. разреда након обраде множења једноцифрених бројева не показују флексибилност у рачунању, што се огледа у начину на који одређују производ два броја, као и немогућности уочавања грешака у наученим производима. Даље, нефлексибилност се огледа у занемаривању научених аритметичких правила, која се могу користити као олакшице у рачунању. Резултати овог истраживања су показали да ученици имају тенденцију да употребљавају само оне стратегије које су научили, као што је поновљено сабирање или нека од стратегија бројања, а пре свега знање чињеница. На основу овог истраживања (Zeljić et al., 2019) можемо закључити да разумевање множења као поновљеног сабирања, односно обрада множења једноцифреним бројем кроз овакав приступ негативно утиче на развој флексибилних стратегија множења. Ученици који множење усвоје на наведен начин најчешће примењују само једну стратегију и научене производе, без проверавања тачности и не теже развоју флексибилних менталних стратегија. Може се рећи да усмереност на једну стратегију множења онемогућава развој других, ефикаснијих стратегија множења у каснијим фазама обраде множења, што уопште утиче и на разумевање операције множења, што истичу остали аутори који су се бавили анализирањем ефикасних менталних стратегија множења (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001; Downton and Sullivan, 2017).

На успешност решавања задатака у великој мери утиче контекст задатка, вредности бројева и скуп бројева којем припадају бројеви (Fischbein et al., 1985: 5). Уколико је контекст задатка близак искуству ученика, без обзира која семантичка структура је у питању, ученици интуитивно користе неформална математичка знања (Koedinger and Nathan, 2004) и примењују одговарајуће менталне интуитивне стратегије (Van de Heuvel-Panhuizen, 2005). Поред наведеног, избор стратегија је условљен и приступом који је заступљен у настави математике, пре свега аритметике. Уколико се настава организује на начин који подстиче употребу менталних стратегија рачунања, ученици се оспособљавају за избор ефикаснијих и прикладнијих стратегија рачунања у зависности од математичког проблема, при чему постепено повећавају брзину и тачност (Opfer and Siegler, 2007; Fazio et al., 2016). Стар и Невтон (Star and Newton, 2009) истичу да ученици са добрим математичким знањем теже проналажењу ефикаснијих стратегија. Даље, уочено је и да талентованија деца теже повећању флексибилности и адаптивности при избору стратегија, што се огледа у бољој процени и избору прикладнијих стратегија (Star et al., 2009). Невтон и остали (Newton et al., 2019) истичу да знање и употреба већег броја стратегија је основа за употребу и одабир најефикаснијих стратегија. Они истичу да се развој великог броја стратегија и ефикасних стратегија не може одвојити, односно да се повећањем броја стратегија развија способност одабира и примене адекватнијих. Употреба већег броја различитих стратегија позитивно утиче на учење и постигнућа ученика и представља неопходан услов за трајност и проширивање претходних знања ученика (Liu et al., 2015). У складу са наведеним, сматрамо да је важно децу постепено упознати са различитим стратегијама како би они временом бирали флексибилније и прилагођавали их структури проблема.

Уопште гледано, сва ранија истраживања (Steffe, 1988; Anghileri, 1989; Kouba, 1989; Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Downton and Sullivan, 2017) на сличан начин врше категоризацију менталних сратегија множења и показују постепен напредак од мање ефикасних до ефикаснијих стратегија. Може се закључити да се развој менталних стратегија одвија постепено, почевши од директног моделовања које подразумева употребу конкретних модела, стратегија појединачног пребројавање, преко бројања са прескакањем, дуплирања, поновљеног сабирања и одузимања до примене стратегија заснованих на аритметичким правилима, наученим производима и својствима операције множења. Већина стратегија се у почетним фазама обраде множења везује за употребу конкретних модела и цртежа, који се постепено напуштају и прелази се на ментално рачунање. Примећено је да разумевање аритметичких правила ствара добру основу за увођење стандардних алгоритама и уопште развој менталних стратегија множења. Упознавањем различитих значења множења кроз текстуалне задатке различите семантичке структуре и задатке са иконичким репрезентацијама утиче на развој менталних интуитивних стратегија, као и менталних стратегија које су резултат поучавања. Кроз употребу ових, као и других стратегија ученици се оспособљавају за флексибилно рачунање уз активирање свих претходно стечених знања о бројевима и односима између бројева, као и аритметичким операцијама што је суштина флексибилног менталног рачунања (Verchaffel et al., 2007).

3.5. Значај, улога и врста репрезентација у обради множења једноцифреним бројем

Математичке репрезентације представљају конкретизације апстрактног појма или структуре (ЛОТ, 2014: 676). Оне представљају начин приказа математичких идеја вербално, писмено, симболима, сликама, моделима, дијаграмима или физичким материјалима (Goldin, 2002). Неки аутори (Hiebert and Wearne, 1996) их дефинишу као симболе, слике, објекти или активности који представљају средство за математичку комуникацију, размишљање и рачунање и на тај начин потпомажу процес разумевања и усвајања математичких појмова, а уже гледано оне потпомажу процес разумевања стандардних алгоритама рачунања.

Коришћење математичких модела и репрезентација у циљу визуелизације математичких идеја је веома важно, јер доприноси развоју визуелних регија нашег мозга (Boaler et al., 2020: 7). Оне су веома важне у развоју структура математичких појмова (Sfard, 1991; Presmeg, 1997; Mulligan et al., 2005), а њиховом употребом апстрактне математичке идеје постају очигледније. Репрезентације омогућавају конкретизацију апстрактних математичких концепата или структура. Циљ коришћења репрезентација јесте упознавање својстава математичког појма или поступка, али се могу користити и као олакшица за решавање задатака. Абрамс (Abrams, 2001) наглашава да репрезентације представљају везу између реалног света и математичких идеја. Оне треба да помогну ученицима да самостално открију и истраже математичке структуре и да пронађу значења математичких појмова и повежу карактеристике различитих репрезентација које се односе на исти појам (Woleck, 2001).

Репрезентације коришћене у настави математике доприносе разумевању математичких својстава и веза између математичких појмова, као и развоју математичког мишљења, који је кључан за проналажење адекватног приступа задатку (Fennal and Rowan, 2001), а с друге стране показују чврсту везу између математичких структура (Goldin and Shteingold's, 2001). Математички односи, принципи и идеје се могу изразити у више структурално еквивалентних репрезентација укључујући објекте из реалног окружења, визуелне представе (тј. слике и дијаграме), вербалне представе (писани и говорни језик) и симболичке репрезентације (бројеви, слова) (Зељић, 2021: 76). Успостављање везе између два система или више репрезентација омогућава ученицима да развију значења математичких појмова поредећи их међусобно (Steinbring, 1997: 79) што утиче на повећање разумевања математичког појма и помаже ученицима у формирању апстрактних појмова. У раном школском узрасту неопходно је користити конкретне репрезентације или пиктограме који олакшавају увођење концепата и метода рачунања (Milinković and Dabić, 2015). Употребом таквих репрезентација ученици постепено формирају менталне моделе, који представљају посебну врсту менталних репрезентација, а приказују својства апстрактних математичких појмова и омогућавају употребу и разумевање математичког појма који представљају боље него апстрактне чињенице о њима (Greero, 1991).

Репрезентације које се користе за представљање математичких идеја треба јасно и очигледно да приказују одређену математичку идеју, да буду ефикасно математичко средство које повећава степен разумевања, недвосмислене, прецизне и приступачне за већи број деце, тако да очигледно приказују одређене математичке идеје (Kilpatrick et. al, 2001). У настави математике постоје различите врсте репрезентација, те се тако може говорити о математичким репрезентацијама које приказују математичке проблеме визуелно, симболичко или текстуално (Long et al., 2015). Ове репрезентације могу бити различитог степена апстрактности. Те се у складу са тим симболичке репрезентације посматрају као апстрактне, док се физички објекти са којима је могуће манипулисати, слике, дијаграми или текстуални задаци посматрају као конкретне репрезентације (Zeljić i dr., 2016). Наведени аутори (Zeljić i dr., 2016) на основу истраживања истичу да у Србији учитељи не врше избор репрезентација на основу узраста деце и математичких садржаја, те да се ни при обради апстрактнијих математичких садржаја не бирају репрезентације које би те појмове представиле на очигледнији начин. Те се може приметити да су најзаступљеније апстрактне репрезентације, односно симболичке репрезентације, чак и у првом разреду основне школе, поготово када су у питању садржаји из области аритметике и алгебре. Употреба конкретних репрезентација присутнија је у садржајима из области геометрије и мерења. Генерално гледано ови аутори (Zeljić i dr., 2016) истичу да је у Србији најзаступљенија употреба симболичких репрезентација и текстуалних задатака, док је коришћење шема, дијаграма и других иконичких репрезентација занемарено. Ученици треба да познају различите врсте репрезентација како би могли да бирају оне које на најбољи начин представљају математички појам и одговарају њиховим способностима. Приликом одабира репрезентација треба тежити употреби једне репрезентације у првим фазама учења, а затим ићи ка флексибилној употреби више репрезентација (Dreyfus, 1991), јер у том процесу долази до постепеног развоја од конкретних математичких појмова до апстрактних што је веома важно при обради математичких садржаја (Hiebert and Carpenter, 1992; Sfard, 2000; Goldstone and Son, 2005). Поред тога, избор треба вршити у складу са математичким садржајем који се жели представити и развојним карактеристикама ученика (Ball, 1993).

На млађем школском узрасту треба тежити употреби конкретних репрезентација, као што су манипулативни материјали, слике, речи и на крају уводити симболе (Kilpatrick et. al 2001: 94), као и при обради нових математичких појмова и постепено прелазити на употребу апстрактних репрезентација, које су веома корисне за решавање сложенијих математичких проблема (Radford, 2000; Cai, 2004). Употреба и избор различитих стратегија и репрезентација је веома важна за концептуално разумевање математичких појмова (Kaput, 1989; Griffin and Case, 1997; Duval, 2002), а код ученика се подстиче флексибилно математичко мишљење, које се огледа у способности проналажења различитих начина решавања задатка (De Jong et al., 1998; Star and Seifert, 2006). На тај начин се деца оспособљавају за имагинацију и визуелизацију мултипликативних процеса (Loveridge, 2005: 37) и развој математичког језика (Prediger and Wessel 2013; Gotze, 2019). У процесу учења креће се од једног типа репрезентација, при чему се постепено уводе и други начини представљања појмова да би у завршним фазама учења дете могло флексибилно да бира репрезентације које одговарају конкретној математичкој ситуацији. Репрезентације омогућавају разумевање везе између саме репрезентације и проблема који она представља (Loveridge, 2005: 35). У складу са претходним, можемо закључити да се представљање математичких идеја може вршити преко манипулативних модела, иконичких репрезентација, текстуалних проблема који исказују животну ситуацију, говорног и писаног језика. Употреба слика, дијаграма и текстуалног контекста за представљање математичких појмова је веома важна стратегија у млађим разредима (Russell et al., 2011). Прве репрезентације које се користе за обраду математичких појмова на млађем узрасту су конкретне и са много детаља, али битне су за формирање апстрактних математичких појмова (Brown et al., 2009). Временом ученици прелазе на коришћење апстрактних репрезентација, које истичу структуру проблема и односа и корисније су за решавање сложенијих проблема (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008). Овај прелазак са конкретних на апстрактне репрезентације омогућава математизацију и формирање математичких појмова. Сликовне репрезентације обухватају слике и објеката и њих може да прати вербални опис, док су иконичке репрезентације апстрактније и обухватају кругове, квадрате и сл.

Марјановић (Марјановић, 2016) истиче разлику између пиктограма и идеограма. Сликовне репрезентације које приказују феномене из реалног света означава као пиктограме, а за иконичке знаке којима представљамо појмове и њихово значење уз помоћ различитих геометријских фигура лишених шума користимо појам идеограм. У нашем раду ће бити заступљени и пиктограми и идеограми, који се бирају у складу са тежином наставних садржаја.

Репрезентације у настави математике треба користити као средство за разговор о математичким идејама, подстицање математичког мишљења и рачунање, све то заједно доприноси усвајању математичких појмова и развоју индивидуалних начина решавања математичких проблема који су важни елементи математичког резоновања и концептуалног разумевања (Kilpatrick et. al 2001: 94). Када су у питању аритметичке операције, математички модели који се користе за решавање задатака укључују рад са репрезентацијама бројева на којима су јасно истакнута својства аритметичких операција што олакшава процес рачунања. Из наведених разлога, битно је да математичке репрезетнације које се односе на бројеве истичу својства аритметичке операције, утицај операције на бројеве, као и вредност бројева (Greero, 1991).

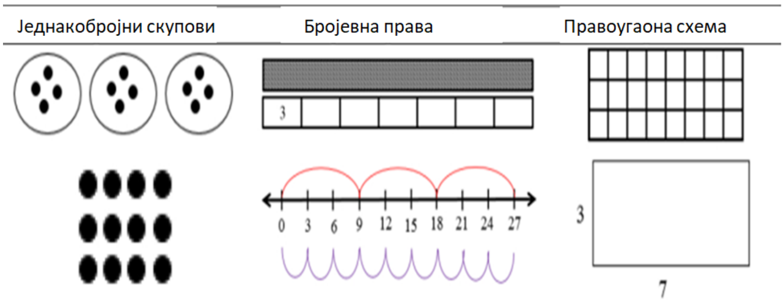
Обрада појма множења и упознавање свих значења ове аритметичке операције захтева коришћење различитих репрезентација које подстичу разумевање значења множења, различитих семантичких структура, као и развој стратегија множења. Учење аритметике, у нашем случају множења, треба да буде засновано на проблемским ситуацијама које воде ка симболизовању. У процесу обраде аритметичких поступака и генерализација важно је развијање њиховог значења, што се постиже коришћењем различитих репрезентација, а оне се развијају од представљања ситуација у реалном свету до апстрактних симбола (Зељић и Дабић, 2014). Операција множења је тежа за представљање репрезентацијама у односу на операцију сабирања (Confrey, 1990; Greer, 1992; Barmby et al., 2009), јер множење има различита значења и због тога треба тежити да избор репрезентација буде у складу са значењем множења које је истакнуто. Наведени аутор (Confrey, 1990) истиче да су модели (примери) из реалног света блиски искуству ученика (зграда на спратове, воз, чоколада) битне почетне репрезентације, јер истичу елементарна својства операције множења.

Харис и Бармби (Harries and Barmby, 2007) наводе следеће карактеристике репрезентација које се користе при обради множења:

1. Јасно и прецизно приказивање једнакобројних скупова при чему је понављање једнакобројних скупова очигледно, што је кључни аспект операције множења;
2. Два елемента репрезентације: један елемент који приказује број скупова и други елемент који приказује број елемената у сваком скупу (нпр. редови и колоне, тањири и јагоде);
3. Коришћење различитих репрезентација;
4. Коришћење правоугаоне схеме у циљу разумевања својстава операције множења;
5. Употреба репрезентација као помоћног средства у коришћењу различитих стратегија рачунања.

Различити аутори су се бавили испитивањем употребе различитих репрезентација у операцији множења. Препознавање сличности и разлика у математичким репрезентацијама које се односе на исти математички појам представља кључну улогу за развој комплексних математичких идеја и уопште концептуално разумевање и повезивање целокупних садржаја наставе математике. Ван де Вале (Van de Walle, 2006) истиче да се сваки математички задатак може представити на више начина. Када је у питању множење, на избор репрезентација у великој мери утиче и сам контекст задатка. Даље, овај аутор (Van de Walle, 2006) наглашава да је избор стратегија множења условљен одабиром репрезентација и да употреба различитих репрезентација помаже ученицима у разумевању значења множења и развоју менталних стратегија множења.

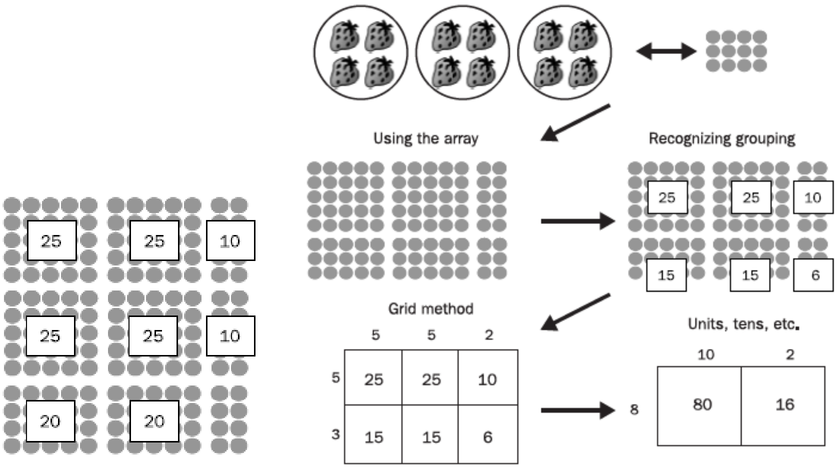
Највећи број аутора (Greer, 1992; Battista et al., 1996; Anghileri, 2000; Kosko, 2020) истиче једнакобројне скупове и представљање множења преко правоугаоне схеме, чиме ћемо се бавити и у овом раду. У нашем раду користили смо два типа репрезентација: конкретне и иконичке репрезентације. Текстуалне задатке различитих семантичких структура посматрамо као конкретне репрезентације, о чему смо већ говорили поглављу 3.3. Ови задаци се могу решавати применом неформалних математичких знања и користити као основа за формирање одређених математичких појмова (Treffers, 1991; Resnick et al., 1992), јер дозвољавају прилагођавање контекста задатка искуству ученика. Када су у питању иконичке репрезентације у бројној литератури се срећу различите врсте репрезентација. Тако Коско (Kosko, 2020) разликује три врсте репрезентација (Слика 3): једнакобројни скупови, бројевну полуправу и правоугаоне схеме.



Слика 3. *Примери репрезентација за множење и дељење (Kosko, 2020: 3)*

Бројевна полуправа представља веома изазовни модел који се успешно може примењивати како за представљање бројева, тако и као репрезентација за извођење аритметичких операција. Она истиче карактеристике ритмичког пребројавања, што позитивно утиче на ментално рачунање (Beishuizen, 1993; Gravemeijer, 1994; Octavarulia Shanty and Wijaya, 2012; Larsson, 2015;) и развој менталних стратегија множења.

Употреба правоугаоних схема је веома корисна репрезентација за развој стратегија множења, јер истиче многобројна значења операције множења (Skemp, 1993; Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009). Уколико се користи као почетна репрезентација за увођење множења, она треба да истакне кључне компоненте ове аритметичке операције, структуру операције множења и повеже се са другим репрезентацијама, јер само ће се на тај начин у потпуности допринети разумевању множења (Barmby et al., 2009). Таква употреба репрезентација подстиче и разумевање композитних јединица, значења чинилаца и производа и кључна је за развој мултипликативног мишљења, јер оспособљава ученике за флексибилну поделу бројева и разумевање множења збира/разлике бројем (Young-Loveridge, 2005; Siemon et al., 2011; Jacob and Mulligan, 2014). Даље, употреба правоугаоне схеме оспособљава ученике да самостално цртају правоугаоне схеме и користе их као олакшице у рачунању, али и као подршку за развој личних стратегија рачунања (Young-Loveridge, 2005). Коришћење правоугаоне схеме помаже у визуелизацији производа, те одређене стратегије постају очигледније, зато што се кроз директну поделу цртежа врши растављање чинилаца (Kling and Bay-Williams, 2015: 553) (Слика 4). Коришћење оваквих репрезентација омогућава разумевање значења множења и успостављање везе између различитих репрезентација. Уз овакве репрезентације ученици се могу ослонити на знање познатих чињеница за одређивање производа два броја (Barmby et al., 2009).

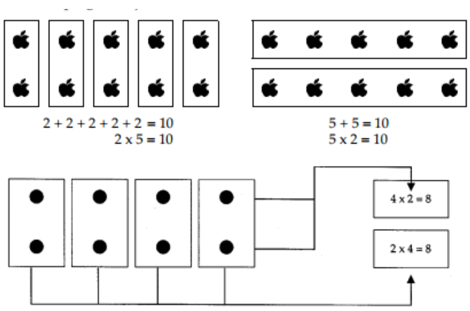


Слика 4. *Примери репрезентација за правоуагаону схему (Barmby et al., 2009)*

Обрада множења на основу значења правоугаоне схеме је веома важна за разумевање множења. Одређивање производа бројева 3 и 5 коришћењем правоугаоне схеме подстиче децу на пребројавање укупног броја елемената уз прескакање (*3, 6, 9, 12, 15*). Пребројавањем на наведени начин ученици интуитивно проналазе све бројеви чији је садржалац број 3 (Warren and Cooper, 2006).

Разумевање наведеног води ка разумевању свих аритметичких правила, структуре бројева, површине и других математичких појмова (Mulligan and Mitcelmore, 2009: 44), те деца која развију ову способност немају потешкоћа у кретању од конкретног ка апстрактном математичком мишљењу (Mulligan et al., 2006: 382).

На Слици 5. је дат приказ увођења множења у италијанским школама, који показује кретање ка симболичком запису и употреби све апстрактнијих репрезентација. Обрада множења на овај начин ствара основу за разумевање различитих значења множења, аритметичких правила, као и везе множења и дељења. За разумевање Декартовог производа погодно је користити табеле које јасно приказују новодобијене комбинације. Идеја једнакобројних скупова се на очигледан начин може представити преко правоугаоне схеме и на тај начин ученици се постепено воде ка разумевању различитих значења операције множења (Слика 5). Употреба оваквих репрезентација је погодна за разумевање замене места чинилаца.



Слика 5. *Пример репрезентације множења у италијанским школама (Warren and Cooper, 2006)*

На Новом Зеланду школски курикулум захтева обавезно коришћење конкретних материјала, као врсте репрезентације у циљу развијања концептуалног разумевања математичких појмова. Они нагласак стављају на коришћење штапића и „аритметичких блокова” за представљање декадних јединица (Hurst and Linsell, 2020: 6). Коришћење штапића утиче на концептуално разумевање разломака, односа и пропорција и за разумевање месне вредности цифре. С друге стране, употреба „аритметичких блокова” јасно истиче јединице, десетице и стотине што је веома важно при усвајању ових математичких појмова и с те стране погодни су за обраду аритметичких операција у скупу природних бројева до 1000 (Hurst and Linsell, 2020). Истраживање са децом од 4. до 5. разреда уз употребу конкретних материјала (штапића) за множење и дељење показало је да деца успешније решавају задатке множења (78% у односу на 34%). Резултати су показали да само половина ученика при множењу успешно раставља бројеве и то на десетице и јединице, док је само 38% ученика успешно приказивало множење уз помоћ конкретног материјала. Овакви одговори сугеришу да су ученици развили процедурално разумевање стандардног алгоритма (Hurst and Linsell, 2020: 6) и да не разумеју улогу и значај репрезентације, јер при обради множења нису користили репрезентације за представљање множења. У наведеном случају употреба штапића сугерише једнакобројне скупове, док се употребом „аритметичких блокова” акценат ставља на разумевање множења као правоугаоне схеме, при чему се јасно истиче подела бројева на вишеструке декадне јединице и примена и значење аритметичких правила за ефикасно рачунање.

Можемо закључити да се при обради множења могу користити аритметички блокови, односно коцкице за разумевање множења као правоугаоне схеме. Поред наведног, употреба ових манипулативних материјала води ка иконичком представљању, које је апстрактније и лишено је шума. Они омогућавају структурисање по редовима и колонама, груписање у једнакобројне скупове или структурисање по десетицама, што се постиже различитим слагањем коцкица. На овај начин деца истим материјалом на различите начине приказују исти производ, што их подстиче да цртају различите репрезентације, а оне их подстичу на коришћење различитих стратегија. Постепено долази до упознавања широког спектра репрезентација и развоја стратегија које оспособљавају ученике за флексибилан и адаптиван избор најприкладније стратегије множења. Када је у питању структурисање производа два броја преко правоугаоне схеме, можемо рећи да је она корисна у свим семантичким структурама, јер на веома јасан начин истиче структуру реда или колоне, као и једнакобројне скупове, производ мера и мултипликативно поређење. Сматрамо да је веома важно користити правоугаону схему као репрезентацију за обраду множења, јер временом она постаје све сложенија и лишена шума.

На почетку обраде множења почиње се са издвајањем визуелних представа за које везујемо записе у виду производа два броја (Марјановић, 2014) кроз одређене текстуалне проблеме (на 2 руке по 5 прстију, 1 аутомобил са 4 точка и сл.). У почетку је корисно користити и домине, које су искуствено блиске ученицима, а инутитивно их могу подстицати на различите начине одређивања укупног броја тачкица. Употреба репрезентација захтева и неку врсту пребројавања по скуповима. Истиче се да структура репрезентације треба да буде таква да се јасно уочава који број представља, односно бројност скупа (Marjanović i Mandić, 2009). Марјановић (Марјановић, 2014) за представљање бројева, као и за аритметичке операције користи структурисане схеме које имају декадну основу. Репрезентације са декадном основом акценат стављају на десетице, што је битно за разумевање стандардног алгоритма за множење двоцифрених бројева, а блиско је искуству ученика, јер се скуп бројева до 10 у нашем Наставном плану и програму упознаје баш кроз репрезентације са декадном основом. Како Марјановић (Марјановић, 1997) истиче циљ је да ученици коришћењем манипулативног материјала јасно уочавају значење операције множења ($m \cdot n$), као и резултат који сагледавају на основу репрезентације, при чему су јасно истакнуте десетице и јединице. С друге стране, на овај начин структурисане репрезентације и репрезентације као правоугаоне схеме су структурално сличне, те код деце истичу значај правилног структурисања елемената скупа у циљу ефикасног рачунања. Такође, употребом наведених репрезентација деца се оспособљавају да бирају прикладнију у зависности од ситуације и структуришу елементе на начин који ће им омогућити флексибилно одређивање производа бројева. Временом деца прелазе на коришћење апстрактних репрезентација и ментално рачунање користећи све научене стратегије ефикасног и флексибилног рачунања.

Уопште гледано, добро одабране репрезентације које истичу различита значења множења подстичу развој концептуалног разумевања множења што је основа за дуготрајно учење и развој мултипликативног мишљења (Gotze and Baiker, 2020).

Све ове репрезентације су значајне за развој мултипликативног мишљења и одликује их кретање од мањег ка већем степену апстрактности. Употреба правоугаоне схеме утиче на развој мултипликативног мишљења, као и разумевање алгебарских закона како у скупу природних бројева, тако и у скупу рационалних бројева (Loveridge, 2005: 37, Larsson, 2016). Изсак (Izsak, 2004) истиче да употреба правоугаоне схеме подстиче разумевање множења збира бројем, као и употребу овог аритметичког правила за одређивање производа два броја, што је одлика мултипликативних стратегија множења. Такође, употреба прикладних репрезентација доприноси развоју флексибилних стратегија множења, као и постепеном прелажењу на формалне методе рачунања и стандардне алгоритме уз разумевање значења истих.

3.6. Значај и улога аритметичких правила за разумевање стратегија множења једноцифреним бројем

Разумевање својстава аритметичких операција и њихова употреба у артиметичким релацијама је неопходна за рано учење алгебре, која се односи на продубљивање већ стечених знања, схватање структура и општости у математици, односно на грађење, изражавање и тумачење математичких генерализација (Дабић, 2019: 12). Већина аритметичких стратегије се заснива на примени аритметичких правила, односно на замени места чинилаца, здруживању чинилаца и множењу збира и разлике бројем када је у питању операција множења. Учење свих артиметичких правила треба да обухвати и разумевање значења операције на коју се односе.

Аритметичка правила се могу интуитивно развити кроз употребу мултипликативних стратегија. Разумевање множења збира бројем оспособљава ученике за растављање бројева на вишеструке декадне јединице и на растављање бројева према својствима бројева, што је битна одлика менталних интуитивних стратегија које се развијају (Larsson, 2015). Према неким ауторима здруживање чинилаца и множење збира бројем се имплицитно развијају без формалних инструкција, кроз развијање стратегија множења, док се замена места чинилаца теже усваја на наведени начин (Ambrose et al., 2003).

У нашем Наставном плану и програму замена места чинилаца се односи на множење са два броја, а здруживање чинилаца на множење три броја.

Замена места чинилаца се односи на разумевање значења операције множења истакнуте бројевним изразима, а не предметним (скуповним) ситуацијама, где се мора знати шта означава сваки број у запису производа (Дејић и Егерић, 2010: 117). Разумевање замене места чинилаца подразумева могућност менталне реорганизације чинилаца и разумевање непромењљивости коначног резултата (Butterworth et al., 2003). Налази истраживања (Ambrose et al., 2003; Warren and English, 2000) су показали да мање од трећине испитане деце може да објасни замену места чинилаца, што може бити и последица неадекаватног процеса учења. Истраживања показују да неразумевање замене места чинилаца показује да ученици нису успоставили везу између разумевања значења контекста и математичког записа (Ambrose et al., 2003), односно не уочавају сличности и разлике између n група од m елемената и m група од n елемената, што се манифестују и приликом дељења. Овакви налази потврђују да се замена места чинилаца не може обрадити кроз задатке који се односе на једнакобројне скупове, јер чиниоци у том контексту имају другачија значење. За разумевање значења замене места чинилаца погодније је користити разумевање множења као правоугаоне схеме и Декартовог производа (Ambrose et al., 2003), где чиниоци имају иста значења.

Употреба правоугаоне схеме за разумевање замене места чинилаца на веома очигледан начин приказује својства наведеног аритметичког правила. Битно је да се разумевање темељи на јасној употреби математичког језика чиме се ствара контекст за разумевање замене места чинилаца. Шифлтер (Schiflter, 2009) исказује важност објашњења примера који се односе на разумевање замене места чинилаца, нарочито када се ово аритметичко правило представља преко правоугаоне схеме, односно потребно је инсистирати на разумевању значења редова и колона и начина њиховог посматрања у различитим ситуацијама. Циљ је да ученици уоче да се правоугаоник може окренути и да га можемо посматрати и хоризонтално и вертикално, као и да зависи да ли ћемо прво узимати у обзир редове или колоне.

У Србији је спроведено истраживање будућих учитеља, као и ученика, у циљу испитивања репрезентација које би они користили за увођење замене места чинилаца, као и на који начин ученици препознају замену места чинилаца исказану одређеном репрезентацијом и да ли је уопште препознају (Milinković and Dabić, 2015). Резултати истраживања су показали да су најчешће заступљене следеће репрезентације: подела конкретних материјала у једнаке групе, структурисање елемената у редове и колоне, бројевна права, представљање множења као површине, и комбинација површине и правоугаоне схеме. Репрезентације у којима су елементи структурисани у редове и колоне, правогауона схема и површина правоугаоника су једине репрезентације од наведених које истичу својство замена места чинилаца на очигледан начин (Milinković and Dabić, 2015). Највећи број ученика је користио репрезентацију правоугаона схема, затим скупове и приказивање множења преко површине. Чак половина ученика је наведено својство на најлакши начин препознала у репрезентацији правоугаона схема. Поред ове репрзеентације и употреба површине правоугаоника се показала као добра репрезентација, док структура редова и колона се показала као веома сложена за разумевање. Ученици не уочавају замену места чинилаца на репрезентацијама које приказују идеју једнакобројних скупова. Када су у питању наставници, истраживањем је утврђено да будући наставници познају репрезентације које се могу користити за множење, али да не издвајају оне које на адекватан начин приказују замену места чинилаца (Milinković and Dabić, 2015). Ови аутори истичу да су апстрактније репрезентације боље средство у писаној комуникацији између наставника и ученика, када је у питању разумевање замене места чинилаца, те да је већина наставника користила једнакобројне скупове и површину правоугаоника што је већина ученика успешно и препознала (Milinković and Dabić, 2015).

Концептуално разумевање аритметичких правила подразумева познавање истог на начин који омогућава његово представљање на различите начине уз могућност давања адекватног објашњења, као и његову примену у различитим ситуацијама. Уочавање израза у којима је примењена замена места чинилаца или здруживање чинилаца у циљу ефикасног рачунања су показатељи концепуталног разумевања како правила тако и аритметичких операција, што и јесте један од циљева обраде ових аритметичких правила у млађим разредима основне школе. Истраживања показују да старији ученици поседују већи степен концептуалног и процедуралног разумевања, али је корелација између примене аритметичких правила у циљу ефикасног рачунања и концептуалног разумевања слаба (Anthony and Walshaw, 2002). Овакви резултати показују да усвајањем правила ученици нагласак стављају на процедуру и њихову примену, а не и на концептуално разумевање и примену истих. Истраживања су показала да повезаност између концептаулног и процедуралног разумевања здруживања чинилаца се повећава повећањем узраста и да млађи ученици интуитивно делимично разумеју ово аритметичко правило (Ritle-Johson et al., 2001). Ранија истраживања (Carraher and Schliemann, 1985) су показала да нешколовани бразилски продавци примењују и интуитивно разумеју замену места чинилаца, као и друга својства бројева која користе за ментално рачунање. Насупрот њима, енглески ученици који усвајају замену места чинилаца независно од појма множења показују тешкоће у његовом разумевању, а за рачунање користе научене стандардне алгоритме (Schliemann et al., 1998). Слични резултати потврђени су и код нас. Истраживање у Србији је показало да без обзира што се у другом разреду врши формално увођење здруживања чинилаца и множења збира и разлике бројем, множење једноцифрених бројева се своди на стратегије поновљеног сабирања, док су остале стратегије занемарене (Zeljić et al., 2019).

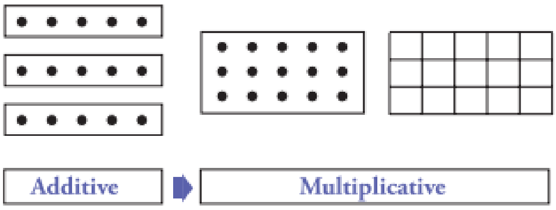
Множење збира и разлике бројем представља једно од веома важних аритметичких правила, зато што омогућава флексибилно рачунање, стварајући основу за разумевање алгебарских једнакости и извођење генерализација и доказе (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Његова примена јавља се приликом учења бинома и линеарних функција. Ранија истраживања су показала да ученици цртањем једнакобројних скупова, односно применом стратегије поновљеног сабирања интуитивно примењују множење збира бројем при множењу вишецифрених бројева (Schliemann et al., 1998; Ambrose et al., 2003; Baek, 2008; Schifter et al., 2008).

У анализи кинеских уџбеника који се користе у 3, 4. и 6. разреду пронађени су различити начин увођења множења збира бројем у млађе разреде основне школе. У већини уџбеника полази се од примера из реалног контекста, где је проблем представљен речима или речима и сликом, а постепено се уводе схематски дијаграми (Ding and Li, 2010). Уочено је да у уџбеницима није заступљен приступ увођења множења збира бројем преко модела правоугаоне схеме који је предложило Национално веће наставника математике (NCTM) 2000. године. Други уочен приступ подразумева коришћење текстуалних задатака, уз одсуство конкретних репрезентација. Веома значајно у овом приступу је постепено увођење овог аритметичког правила кроз рад на задацима блиским искуству ученика, преко рада на трансформацији израза до симболичког записа. Трансформација израза је значајна због поређења два начина записа израза који представљају множење збира или разлике бројем и воде ка генерализацији. Репрезентације коришћене за обраду множења збира и разлике бројем у овом уџбенику су лишене шума и као такве постепено воде ка симболичком запису аритметичког правила. Акценат је стављен на ментално рачунање, које подстиче ученике да размишљају о задатом проблему и успостављају везу између перцепције и унутрашње визуелизације.

Како су деца старија тако се повећава и употреба апстрактнијих репрезентација и текстуалних задатака без слике као визуелне подршке (Ding and Le, 2010). Може се уочити да су у кинеским уџбеницима заступљени конкретни проблеми као полазне основе, које помажу ученицима да схвате апстрактне идеје блиске реалном окружењу у коме се математика на овом узрасту и развија (Gerofsky, 2009). Недостатак овог приступа јесте усмереност на адитивно значење операције множења, односно репрезентације једнакобројних скупова. С друге стране, предност оваквог учења јесте кретање кроз различите репрезентације и поређења израза и репрезентација који олакшавају овај процес. Рад са различитим манипулативним материјалима је неопходан како би ученици разумели множење збира и разлике бројем одвојено од контекста и генерализовали га као аритметичко правила. Овај став заступају и други аутори који су истакли важност учења аритметичких правила за разумевање аритметике, а касније и алгебре (Malara and Navarra, 2005).

Концептуално разумевање појма множења подразумева и разумевање аритметичких правила, што се огледа у способности ученика да један или оба чиниоца раставе на друге чиниоце у циљу ефикасног рачунања, при чему долази до имплицитне примене множења збира бројем што може бити веома функционално у процесу усвајања стандардног алгоритма множења (Larsson et al. 2017: 2).

Разумевање множења збира бројем преко правоугаоне схеме је веома значајно за разумевање алгебре, а најчешће је анализирано кроз истраживања које се баве множењем и мултипликативним мишљењем, али не и одвојено. Хурст (Hurst, 2015) анализирајући развој мултипликативног мишљења даје предлоге репрезентација (Слика 6) које су веома значајне за разумевање замене места чинилаца, као и за разумевање множења збира бројем, јер омогућавају ученицима да разумеју својства вишецифрених бројева и различите могућности растављања бројева, што је основа за разумевање алгоритма за множење и дељење (Kinzer and Stanford, 2014).



Слика 6. *Пример репрезентација за разумевање замене места чинилаца (Hrust, 2015)*

Представљање мултипликативних ситуација на овај начин (Слика 6) се може користити и за разумевање значења различитих семантичких структура, као што су и једнакобројни скупови, Декартов производ, производ мера и слично (Hrust, 2015: 15), што показује да се разумевање множења збира и разлике бројем може везивати за задатке различите семантичке структуре.

Разумевање и примена аритметичких правила је од великог значаја за развој ефикасних стратегија множења. Разумевање замене места чинилаца и здруживање чинилаца се најбоље подстиче кроз употребу правоугаоне схеме, која истиче сва битна својства ових аритметичких правила. Њих ученици користе за флексибилно множење у ситуацијама када је погодно један од чинилац раставити на неколико чинилаца, а затим извршити њихову замену и здруживање у циљу што ефикаснијег и флексибилнијег одређивања производа два броја. С друге стране, сматрамо да се једнакобројни скупови и правоугаона схема, уз употребу одговарајућих иконичких и конкретних репрезентација које истичу значење множења збира и разлике бројем, могу успешно користити за разумевање ових аритметичких правила.

III МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Предмет истраживања

У овом истраживању испитали смо карактеристике и ефикасност два модела обраде множења једноцифрених бројева у циљу развоја мултипликативног мишљења у другом разреду основне школе. Разумевање операције множења је основа за развој мултипликативног мишљења које је важан аспект развоја математичког мишљења, као и разумевања дељења, односа, пропорционалног резоновања, мерења, статистике и сл. С друге стране, оно утиче и на развој алгебарског мишљења и оспособљава ученике за разумевање свих значења операције множења и проналажење различитих приступа проблему. Множење једноцифрених бројева традиционално се уводи као унија једнакобројних скупова при чему се инсистира на меморисању таблице множења, а разумевање множења ограничено је на поновљено сабирање, што није довољно за потпуно разумевање значења множења, које је основа за усвајање других математичких појмова (Baroody, 2003). Увођење значења операције множења на наведен начин представља „пасивно складиштење”, односно ученици памете 100 одвојених чињеница и примењују их у решавању проблема (Зељић и Дабић Боричић, 2020). Даље, Баруди (Baroody, 2003) напомиње да овај приступ обраде множења негативно утиче на развој свих компоненти математичких способности. Битно је да ученици разумеју значење аритметичке операције и на основу тога развију способност различитог представљања операције множења коришћењем различитих репрезентација које ће омогућити развој менталних стратегија множења. С друге стране, ученици треба да се оспособе да повезују математичке садржаје и примењују их у различитим ситуацијама, како би се знања током школовања постепено надограђивала. Аритметичка правила се често обрађују изоловано од осталих математичких садржаја и усвајају се као посебна целина. Разумевање аритметичких правила је од суштинске важности за разумевање многих математичких појмова и природно се намеће њихова употреба као основе за примену флексибилних стратегија множења, те са те стране је неоправдано обрађивати аритметичка правила одвојено од осталих садржаја која се односе на множење. Њиховом разумевању претходи разумевање значења и структуре броја, што је од суштинске важности за адекватну примену аритметичких правила у циљу флексибилног рачунања, у нашем случају множења. На млађем узрасту циљ је да се ученици оспособе за иконичко представљање аритметичких правила у циљу њиховог разумевања, као и за процедурално и реторичко представљање како би их успешно користили при обради множења једноцфиреним бројевима.

Предмет овог истраживања је утврђивање и анализирање утицаја различитих приступа обради множења једноцифреним бројевима на разумевање значења множења, односно развој мултипликативног мишљења и развој менталних стратегија (научене и интуитивне стратегије).

Аритметичка правила су веома значајна и њихово разумевање омогућава развој флексибилних стратегија рачунања, стварајући основу за разумевање алгебарских једнакости (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003; Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013; Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005). Полазећи од става наведених аутора осмислили смо први модел који обухвата обраду множења једноцифреним бројевима заснованог на примени аритметичких правила, која се уводе одмах на почетку обраде множења. У Наставном плану и програму математике у Србији предвиђена је обрада аритметичких правила, тако да менталне стратегије множења могу бити подржане и засноване на примени ових правила. Одређени аутори истичу да је за разумевање значења множења и развој и флексибилно коришћење различитих стратегија множења значајно користити задатке различите семантичке структуре, као и различите иконичке репрезентације које утичу на разумевање наведених садржаја (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Marojoka and Beker, 2014). У складу са ставом ових аутора осмислили смо други модел који обухвата обраду множења једноцифреним бројевима засновану на значењу операције и примени репрезентација које посматрамо као основу значења поступака и стратегија рачунања.

У оквиру *Модела 1* аритметичка правила (замена места чинилаца, здруживање чинилаца и множење збира или разлике бројем/множење броја збиром или разликом) су обрађена након увођења знака пута и множења бројем 2, 5 и 10 кроз различите облике представљања (текстуални проблеми, представљање иконичким репрезентацијама и процедурално представљање), што је представљало темељ на коме се обрадило множење осталим једноцифреним бројевима. Замена места чинилаца обрађена је одмах након обраде множења бројем 2. Множење збира и разлике једноцифреним бројем и здруживање чинилаца обрађено је после множења бројевима 5 и 10. За разумевање значења замене места чинилаца коришћени су текстуални задаци код којих је јасно истакнута структура реда и колоне, односно акценат је стављен на употребу правоугаоне схеме. За здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем користили смо текстуалне задатке различите семантичке структуре. Аритметичка правила смо представљали и пиктограмима и идеограмима, које су пратили одговарајући симболички записи, односно бројевни изрази.

У овом моделу множење једноцифреним бројевима је обрађено кроз задатке различитих семантичких структура и обрађено је кроз седам етапа:

- Множење бројем 2 и множење броја 2 које се заснива на стратегији дуплирања;
- Замена места чинилаца;
- Множење бројевима 5 и 10 и множење бројева 5 и 10 које се заснива на употреби репрезентација са декадном основом коју су ученици користили у првом разреду и замени места чинилаца, као и примерима који су искуствено блиски деци (број прстију на једној руци);
- Аритметичка правила: здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем;
- Множење бројевима 3, 4 и 6 и множење бројева 3, 4 и 6;
- Множење бројевима 1 и 0 множење бројева 1 и 0;
- Множење бројевима 7, 8 и 9 множење бројева 7, 8 и 9.

Множење бројевима 3, 4, 6, 7, 8 и 9 је обрађено кроз примену аритметичких правила које се односе на операцију множења и примену познатих производа који су резултат множења бројевима 2, 5 и 10. У овом моделу, поред наведеног акценат је стављен и на карактеристике бројева које су уско повезане са употребом аритметичких правила у циљу постизања ефикасности при рачунању и развоја флексибилних стратегија множења. Ученици из експерименталне групе 1 који су множење обрађивали кроз овај модел су мотивисани да чиниоце растављају на збир или разлику два броја или на производ два броја, како би своје менталне стратегије множења заснивали на примени аритметичких правила. На табли су приказиване правоугаоне схеме или репрезентације са декадном основом као додатна мотивација за проналажење могућег начина растављања бројева и начина на који се може одредити производ два броја, односно применити аритметичка правила и развити одговарајућа стратегија множења.

У *Моделу 2* користили смо текстуалне задатке различите семантичке структуре множења: једнакобројни скупови, производ мера, Декартов производ, мултипликативно поређење и правоугаону схему и три врсте иконичких репрезентација: правоугаона схема типа *n пута m*, репрезентације са декадном основом и у мањој мери доминске репрезентације како бисмо развој флексибилних менталних стратегија заснивали на значењу операције и репрезентацијама које се користе. С обзиром, да је у нашем наставном плану и програму предвиђено истовремено увођење множења броја и множење бројем и у овом моделу смо после множења броја и бројем 2 увели замену места чинилаца, како бисмо наведено својство користили за истовремену обраду и разумевање множења броја и множења бројем. У овом моделу, редослед обраде множења једноцифреним бројем се такође вршио у седам етапа:

- Множење бројем 2 и множење броја 2;
- Замена места чинилаца;
- Множење бројевима 5 и 10 множење бројева 5 и 10;
- Множење бројевима 3 и 4 множење бројева 3 и 4;
- Множење бројевима 1 и 0 множење бројева 1 и 0;
- Множење бројевима 6 и 7 множење бројева 6 и 7;
- Множење бројевима 8 и 9 множење бројева 8 и 9;
- Аритметичка правила: здруживање чинилаца и множење збира и разлике једноцифреним бројем.

У првим фазама обраде множења једноцифреним бројевима (множење бројевима 2, 5 и 10) ученике смо упознали са свим типовима репрезентација. Циљ је био да у наредним етапама обраде множења ученици самостално теже ка избору прикладније репрезентације у зависности од вредности чинилаца. За множење бројем 5 и 10 користили смо репрезентације са декадном основом, као и за множење бројем 8 и 9, јер се множење бројем 8 и 9 своди на множење бројем 10 и умањивање резултата за вредност једног односно два чиниоца. Множење бројем 8 смо увели кроз растављање броја 8 на збир бројева 5 и 3 и разлику бројева 10 и 2. За обраду множења бројевима 3 и 4 користили смо обе врсте репрезентација у зависности од семантичке структуре задатка, јер различите репрезентације усмеравају ученике на различите менталне стратегије множења. Задаци који се односе на правоугаону схему и Декартов производ својом струкутуром усмеравају на коришћење правоугаоне схеме, што смо и користили. С друге стране, једнакобројни скупови, производ мера и мултипликативно поређење се могу представити на оба начина у зависности од контекста задатка који усмерава ученике на одређену врсту репрезентација. Код репрезентација са декадном основом, које подстичу употребу различитих стратегија рачунања, очекивали смо да ће ученици успешно вршити и растављање другог чиниоца на збир два сабирка или представљање чиноца као разлике два броја и интуитивно користити множење збира и разлике бројем и познате производе. Употреба правоугаоне схеме истиче комутативност операције множења и њеном употребом смо акценат ставили на развој различитих менталних стратегија множења (стратегије допуњавања засноване на ефикасним техникама сабирања и дуплирања, растављање чиноца на два чиноца и интуитивна примена здруживања чинилаца). Суштинска разлика између *Модела 1* и *Модела 2* огледа се у самом приступу наставној јединици, односно начину на који су ученици подстицани да развију и примене одређену менталну стратегију множења. Сваки пример множења једноцифреним бројевима у *Моделу 2* пратила је употреба различитих иконичких репрезентација (декадне репрезентације, доминске репрезентације или правоугаона схема), као и конкретних репрезентација (текстуални задаци различитих семантичких структура).

Очекивали смо да ће здруживање чинилаца и множење збира и разлике бројем ученици интуитивно усвојити кроз рад са наведена два типа репрезентација, али смо их формално са њима упознали у последњој етапи обраде множења једноцифреним бројем.

Наставни материјал који смо користили у оквиру *Модела 1* и *Модела 2* је за одређене наставне јединице био идентичан. Главна разлика се огледала у обради множења једноцифреним бројевима. У оквиру *Модела 1* обрада множења једноцифрених бројева се заснивала на сталној примени аритметичких правила уз истовремено коришћење репрезентација, које су служиле као подршка ученицима за примену аритметичких правила. С друге стране, у *Моделу 2* ученици су били изложени различитим конкретним и иконичким репрзентацијама на основу којих су интуитивно на основу контекста текстуалних задатака и структуре иконичке репрезентације бирали и осмишљавали менталне стратегије множења.

Почетне наставне јединице (множење броја и бројем 2, замена места чинилаца, множење бројевима 5 и 10) су у оба модела обрађене на исти начин. У Прилогу 1. дат је преглед садржаја и начина обраде множења једноцифрених бројева за оба Модела која су коришћена у експерименталним групама. Даље, у оба модела, множење бројем 0 и 1 смо обрадили кроз задатке који се односе на једнакобројне скупове и правоугаону схему кроз серију примера у којима се смањује број места, односно на истом броју места се смањује број елемената.

Циљ различитог увођења множења једноцифреним бројевима јесте истраживање утицаја различитих приступа множењу на развој мултипликативног мишљења и менталних стратегија множења и испитивање у којој мери и да ли се оне успешно користе и преносе на множење двоцифрених бројева, односно да ли доприносе развоју и других менталних стратегија.

Насупрот наведеним моделима, *контролна група* ученика је множење једноцифреним бројевима обрађивала кроз адитивни приступ множењу, који је у највећој мери био заступљен у уџбенику који је ова група ученика користила (Математика 2, Едука). Анализирајући наведени уџбеник, почевши од прве наставне јединице везане за множење једноцифрених бројева, можемо приметити да се множење посматра пре свега кроз идеју једнакобројних скупова и поновљено сабирање, те да су остала значења множења заступљена у јако малој мери. Ученици из контролне групе су множење након обраде „знака пута” усвојили следећим редоследом:

- Множење броја 2;
- Нула и један као чиниоци;
- Замена места чинилаца;
- Множење броја 10 и бројем 10;
- За толико већи и толико пута већи број;
- Множење броја 5 и бројем 5;
- Множење броја 4 и бројем 4;
- Множење броја 3 и бројем 3;
- Здруживање чинилаца;
- Множење броја 6 и бројем 6;
- Множење броја 7 и бројем 7;
- Множење броја 8 и бројем 8;
- Множење броја 9 и бројем 9.

Битно је напоменути да ова група ученика није усвојила множење збира и разлике бројем током обраде множења једноцифреним бројевима. Ови садржаји су Наставним планом ове издавачке куће предвиђени тек након обраде дељења. Најзаступљенији су задаци који се односе на идеју једнакобројних скупова. У нешто мањој мери се јављају задаци типа производ мера, а затим и мултипликативно поређење, које је најзаступљеније током обраде наставне јединице „За толико већи и толико пута већи број” и у нешто мањој мери се јавља у другим наставним јединицама. У уџбенику ове издавачке куће пронашли смо само један задатак који се односи на правоугаону схему, при чему не постоји ниједан задатак где је ова врста репрезентације присутна у иконичком смислу. Генерално, можемо приметити да су у овом уџбенику иконичке репрезентације веома слабо заступљене и да је акценат у највећој мери стављен на разумевање множења као поновљеног сабирања, односно множење је усвојено кроз адитивни приступ.

2. Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања је утврђивање и анализирање ефеката различитих Модела обраде множења једноцифрених бројева на развој менталних стратегија и развој мултипликативног мишљења. Једно од основних питања на које ћемо одговорити јесте колика је улога правила аритметике и задатака различите семантичке структуре у развијању менталних стратегија множења. Један поглед истраживача је да ученици треба да буду упознати са аритметичким правилима чија примена омогућава обраду множења једноцифрених бројева и примену аритметичких правила као стратегија множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013). Друго виђење истраживача (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997 и др.) јесте да увођење аритметичких правила пре развоја стратегија множења није нужно, већ да и млађа деца могу равијати стратегије (интуитивно) на задацима различите семантичке структуре.

Друго питање се односи на систематско поучавање стратегијама. Истраживања (нпр. Sherin and Fuson 2005) показују да у периоду учења множења једноцифрених бројева промене у коришћењу стратегија првенствено треба да буду резултат систематског поучавања. Стил и Фунел (Steel and Funnell 2001) истичу да ученицима треба помоћ како би напредовали од коришћења мање ефикасних стратегија и процедура које су осетљиве на грешке до ефикаснијих стратегија. С обзиром да се множење обрађује у другом разреду, многи аутори сматрају да примена одговарајућих текстуалних задатака и иконичких репрезентација подстиче употребу менталних стратегија, које се са повећањем узраста развијају (Kouba, 1989, Mulligan, 1992, Carpenter et al., 1993). Хаирдшфајлд и др. (Heirdsfield et al, 1999) сматрају да деца у првим фазама обраде множења користе интуитивно стратегије пребројавања за множење, а са друге стране Мулиган и Ватсон (Mulligan and Watson, 1998) истичу да је избор менталних интуитивних стратегија условљен семантичком структуром задатка.

Треће питање се односи на коришћење иконичких репрезентација и текстуалних задатака различите семантичке структуре. Како би разумели сва значења операције множења и развили менталне стратегије множења ученицима је потребно искуство са различитим семантичким структурама и репрезентацијама (Anghileri, 1989, Carpenter et al., 1993, Kouba, 1989; Downton and Sullivan, 2017). Контекст задатка близак искуству ученика подстиче развој и примену менталних интуитивних стратегија (Koedinger and Nathan, 2004; Van de Heuvel-Panhuizen, 2005). Употреба добрих репрезентација које истичу структуру множења позитивно утиче на развој менталних стратегија множења (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Marojoke and Beker, 2014; Lorriane and Mulligan, 2014), те аутори истичу значај употребе правоугаоне схеме као репрезентације (Warren and Cooper, 2006; Fuson and Bekmann; Hurrest 2015; Schiflter, 2009) и репрезентација са декадном основом (Марјановић, 2014) за разумевање множења и развој менталних стратегија, као и значења операције множења, односно развој мултипликативног мишљења.

Разумевање значења операције множења и поседовање менталних интуитивних стратегија пре увођења Модела смо проверили кроз способност ученика да:

1. Састављају бројевне изразе који одговарају задатој репрезентацији и израчунавају њихову вредност;
2. Примене менталне интуитивне стратегије за одређивање вредности производа;
3. Избор стратегије врше у зависности од репрезентације која је дата и коришћених бројева.

Ефикасност Модела смо проверили кроз:

1. Препознавање различитих мултипликативних ситуација кроз задатке различите семантичке структуре (једнакобројни скупови, производ мера, мултипликативно поређење, Декартов производ и правоугаона схема);
2. Разумевање и креирање репрезентација за изражавање различитих мултипликативних ситуација;
3. Разумевање и креирање репрезентација које подстичу употребу одговарајућих стратегија рачунања и ефикасно рачунање;
4. Коришћење различитих стратегија множења у циљу постизања ефикасности у рачунању;
5. Флексибилност у избору стратегија множења и прилагођавање стратегија структури проблема;

6. Примена знања на проблемима множења двоцифрених и једноцифрених бројева и испитивање менталних интуитивних стратегија кроз текстуалне задатке различите семантичке структуре.
7. Примену аритметичких правила у циљу примене одговарајуће стратегије и ефикасног множења једноцифреним бројевима;
8. Решавање мултипликативних проблемских ситуација.

Задаци истраживања:

1. Испитати у ком степену ученици другог разреда интуитивно разумеју значење појма множења пре увођења Модела кроз иконичко представљање и примењују га за решавање задатака.
2. Испитати које менталне интуитивне стратегије ученици другог разреда користе пре увођења Модела.
3. Испитати различите нивое разумевања значења множења у зависности од семантичких структура задатака и њихов утицај на избор менталних интуитивних стратегија.
4. Испитати утицај поучавања аритметичких правила на развој менталних стратегија множења једноцифреним бројем.
5. Испитати утицај инструкција заснованих на значењу појма множења и употреби репрезентација на развој менталних стратегија множења једноцифреним бројем.
6. Испитати како примена наведених Модела утиче на развој менталних стратегија множења двоцифрених и једноцифрених бројева.
7. Испитати како примена наведених Модела утиче на разумевање мултипликативних проблемских ситуација.

3. Варијабле у истраживању

Зависна варијабла: Постигнућа ученика
Независна варијабла: Модел обраде множења једноцифреним бројем заснован на примени аритметичких правила и Модел обраде множења једноцфиреним бројем заснован на значењу и репрезентацијама

4. Методе, технике и инструменти истраживања

Истраживање је из области методике наставе математике и с обзиром на коришћену методологију оно је емпиријског карактера. Коришћен је метод експеримента са две експерименталне групе и једном контролном групом. У експерименталним групама поучавање по Моделу 1 и Моделу 2 спроведено је од стране аутора истраживања, намерним изазивањем и праћењем појава које се испитују, док контролна група није подвргнута утицају експерименталног фактора.

Од истраживачких техника коришћено је *тестирање* за утврђивање разумевања значења операције множења кроз задатке различитих семантичких структура и употребу различитих иконичких репрезентација и *интервју* за утврђивање коришћених менталних стратегија множења. За потребе истраживања конструисани су следећи мерни инструменти: Инцијални тест и интервју, завршни тест знања за анализу појава које се испитују и интервју (Завршни тест 1 и Завршни интервју 1) и завршни тест за испитивање трансфера знања и интервју (Завршни тест 2 и Завршни интервју 2).

4.1. Метријске карактеристике тестова

За утврђивање поузданости (интерне конзистентности) примењених тестова, рађен је Кронбахов алфа коефицијент (*Cronbach's alpha*) за сваки тест и интервју посебно, на сваком од тестирања.

1. Иницијални тест и интервју имају добру поузданост мерења. Кронбахов алфа коефицијент на Инцијалном тесту је 0,73, а на Инцијалном интервју 0,76. Просечан интер-ајтем корелација (хомогеност ставки) на Инцијалном тесту је 0,18, а на инцијалном интервју 0,38.
2. Завршни тест 1 има добру поузданост мерења. Кронбахов алфа коефицијент на Завршном тесту 1 је 0,82. С друге стране, Завршни интервју 1 има поузданост мерења мало испод препоручене вредности и она је 0,61. Просечан интер-ајтем корелација (хомогеност ставки) на завршном тесту 1 је 0,23, а на завршном интервјуу 1 је 0,21.
3. Завршни тест 2 има добру поузданост мерења. Кронбахов алфа коефицијент на Завршном тесту 2 је 0,88. С друге стране, Завршни интервју 2 има поузданост мерења мало испод препоручене вредности и она је 0,59. Просечан интер-ајтем корелација (хомогеност ставки) на Завршном тесту 2 је 0,40, а на Завршном интервјуу 2 је 0,20.

На свим тестовима добијени су задовољавајући коефицијенти интерне конзистентности, што говори о једнодимензионалности сваког од тестова.

Осетљивост тестова (да ли нам омогућавају да разликујемо испитанике по знању) проверавали смо преко утврђивања расподеле скорова тестова знања. За тестирање нормалности дистрибуција скорова са различитих тестова, коришћен је Колмогоров-Смирнов тест нормалности дистрибуције чија је нулта хипотеза да су дистрибуције нормалне. Колмогоров-Смирновљев тест показао је да дистрибуције на свим тестовима одступају од нормалне дистрибуције, што је показатељ смањене дискриминативности тестова у одређеним деловима дистрибуције. Скјунис на свим тестовима осим на Завршном тесту 2 показује да су дистрибуције позитивно искошене односно позитивно асиметричне, те да се највећи део резултата гомила на левом крају дистрибуције, односно да је дискриминативност у том делу дистрибуције нарушена. На завршном тестирању 2 скјунис показује блажу искошеност у истом смеру. Са друге стране, куртозис на свим тестовима, осим на Завршном тесту 2 показује да су дистрибуције лептокуртичне односно испупчене, односно да постоји високо гомилање сличних вредности у дистрибуцији. Обрнуто, на Завршном тесту 2, куртозис показује платикуртичну односно спљоштену дистрибуцију, где се резултати равномерно распоређују у више различитих вредности.

На основу наведених метријских карактеристика, закључак је да се можемо поуздати у резултате добијене на овако конструисаним тестовима.

5. Узорак истраживања

Узорак истраживања је обухватио три одељења другог разреда Основне школе „Бранко Радичевић” из Новог Београда. Једно одељење чини контролну групу, а два одељења чине експерименталне групе. У настави се користи уџбеник Математика 2 издавачке куће „Едука”, а настава се реализује према Плану реализације наставе у случају непосредне ратне опасности, ратног стања, ванредног стања или других ванредних ситуација и околоности за основну школу који издаје Завод за унапређење образовања и васпитања.

Тестирању је приступило укупно 89 ученика. С обзиром да су ученици други разред и да је истраживање вршено у првом полугодишту другог разреда, када ученици још увек нису оцењивани, уједначавање група је обављено на основу мишљења педагошко-психолошке службе, која је уједначила групе одељења приликом уписа ученика у први разред. Сваку групу ученика сачињавало је по једно одељење из наведене школе. У Експерименталној групи 1 био је 31 ученик из једног одељења, експерименталну групу 2 је сачињавало 28 ученика другог одељења, а контролну групу 30 ученика трећег одељења.

6. Начин статистичке обраде података

За статистичку обраду података коришћен је програм SPSS 26. Пре свега, коришћена је дескриптивна статистика и анализа поузданости тестова. За испитивање нормалности дистрибуција, коришћен је Колмогоров-Смирновљев тест.

Једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) коришћена је за сагледавање разлика између група у скоровима са тестова и интервјуа (Иницијалног теста, Завршног теста 1 или Завршног теста 2), где је независна променљива била припадност групи са 3 нивоа (контролна група, експериментална група 1 и експериментална група 2), а зависна просечни учинак на одређеном тесту. У накнадним (пост-хок) поређењима, односно приликом проверавања постојања разлика између конкретних група, коришћен је Turkey's HSD критеријум.

Такође, коришћена је и анализа варијансе за поновљена мерења у коме је непоновљени фактор била променљива припадност групи са 3 нивоа (контролна група, експериментална група 1 и експериментална група 2), док су два поновљена фактора била семантичка структура задатака (са 5 нивоа: једнакобројни скупови, производ мера, мултипликативно поређење, правоугаона схема и Декартов производ) и тестирање (са 3 нивоа: иницијално тестирање, завршно тестирање 1 и завршно тестирање 2). За накнадна поређења, односно поређења група, коришћена је Бонферонијева корекција. Приликом одлучивања о статистичкој значајности у свим тестовима коришћена је вредност од 0.05.

7. Структура и садржај тестова знања

Иницијални тест знања чини 14 задатака, који су подељени на две целине: разумевање значења множења кроз различите репрезентације и разумевање множења кроз задатке различитих семантичких структура.

- Први, други, трећи и четврти задатак проверавају колико ученици разумеју значење операције множење. Другим и трећим задатком се проверава које менталне интуитивне стратегије ученици поседују пре обраде множења једноцифреним бројем.
- Остали задаци (5 – 14) се односе на разумевање различитих значења множења који су исказани кроз различите семантичке структуре (Пети и шести задатак се односе на разумевање множења као једнакобројних скупова, седми и осми задатак се односе на разумевање множења као производа мера, девети и десети задатак се односе на мултипликативно поређење, а једанаести и дванаести на множење као правоугаону схему, док тринаести и четрнаести задатак обухватају Декартов производ).

Поред теста знања, иницијално тестирање обухвата и интервју којима смо испитали које менталне интуитивне стратегије множења ученици користе за множење једноцифреним бројевима у контексту и без контекста пре систематске обраде множења.

Завршни тест 1 чини 17 задатака, који су подељени на три целине: разумевање значења множења кроз репрезентације, разумевање множења кроз задатке различитих семантичких структура и разумевање и примена аритметичких правила у текстуалним задацима.

- Први, други, трећи и четврти задатак проверавају разумевање значења операције множење. Другим и четвртим задатаком под а) се проверава које све менталне интуитивне стратегије ученици користе након обраде множења једноцифреним бројем и како репрезентације утичу на избор стратегије. Трећи задатак и четврти задатак под б) проверавају разумевање значења множења, али и примену множења збира бројем у циљу ефикасног рачунања.
- Остали задаци (5 – 14) се односе на разумевање различитих значења множења који су исказани кроз текстуалне задатке различите семантичке структуре (пети и шести задатак се односе на разумевање множења као једнакобројних скупова, седми и осми задатак се односе на разумевање множење као производа мера, девети и десети на мултипликативно поређење, једанаести и дванаести се односе на посматрање множења као правоугаону схему, а тринаести и четрнаести на Декартов производ). Ови задаци показују како значење утиче на разумевање множења, али испитују и њихов утицај на избор менталних стратегија множења. Пажљивим одабиром бројева циљ је да се испита и утицај бројева на избор менталних стратегија множења. Испитивањем разумевања множења кроз текстуалне задатке проверава се да ли ученици користе самостално репрезентације да би израчунали вредност израза или рачунање врше ментално.
- Трећу групу задатака (15 – 17) на овом тесту чине задаци који се односе на аритметичка правила. Петнаести задатак се односи на множење збира бројем, 16. задатак на множење разлике бројем, а 17. задатак на здруживање чинилаца. Циљ ових задатака нам је био да утврдимо да ли ће ученици примењивати својства аритметичких правила, као олакшицу у рачунању или ће рачунати без вођења рачуна о ефикаснијим начинима рачунања.

Завршни тест 1 обухвата и Завршни интервју 1, који је садржао исте примере као Инцијални интервју и додатна три примера која су се односила на аритметичка правила. Завршним интервјуом 1 смо испитали које менталне стратегије множења ученици користе за множење једноцифреним бројевима после обраде множења једноцифреним бројем у задацима без контекста и да ли примењују знања о аритметичким правилима у циљу ефикаснијег рачунања. Битно је да ученици израз посматрају као самостални објекат и да на основу својстава израза и бројева примене адекватну менталну стратегију множења.

Завршни тест 2 је подељен на две целине. Прва целина се односи на множење једноцифреним и двоцифреним бројевима, а друга целина на мултипликативне проблемске ситуације. Овај тест је конструисан да би се прикупили подаци о постојању трансфера знања о менталним стратегијама множења једноцифреним бројевима на менталне стратегије множења двоцифрених бројева. Овај тест садржи 10 задатака. Првих пет задатака се односи на множење једноцифрених и двоцифрених бројева и обухвата по један текстуални задатак сваке семантичке структуре. Циљ нам је био да испитамо у којој мери поучаване менталне стратегије множења једноцифреним бројем дају трансфер на развој и примену менталних стратегија множења двоцифрених и једноцифрених бројева. Осталих пет задатака су коришћени за испитивање разумевања сложених мутлипликативних проблемских ситуација, које показују на ком нивоу мултипликативног мишљења се налазе ученици након обраде множења једноцифреним бројевима. Шести задатак се односи на концептуално разумевање бројева. Седми, осми и девети на пропорционално резоновање, а десети задатак на разумевање множења као правоугаоне схеме.

Завршни тест 2 је обухватао и Завршни интервју 2 којим смо испитали које менталне стратегије множења ученици користе за множење једноцифрених и двоцифрених бројева након обраде множења једноцифреним бројем у задацима без контекста. Битно је да ученици израз посматрају као самостални објекат и да на основу својстава израза, бројева и менталних стратегија које поседују пронађу и примене адекватну менталну стратегију за множење двоцифрених и једноцифрених бројева.

Уопште гледано, кроз све наведене садржаје обухваћено је и испитивање развоја математичке креативности која се односи на откривање непознатог и приступање математичким проблемима на другачији начин, у циљу што флексибилнијег и ефикаснијег решавања математичких проблема.

8. Организација и ток истраживања

Истраживања је реализовано у периоду од децембра 2021. године до фебруара 2022. године. Спроведено је у неколико етапа:

1. Креирање два модела обраде множења једноцифреним бројевима;
2. Иницијално тестирање: Инцијални тест и Инцијални интервју;
3. Реализација наставних часова по моделима (*Модел 1* и *Модел 2*) обраде множења једноцифреним бројевима (укупно је реализовано 32 часа);
4. Завршно тестирање 1: Завршни тест 1 и Завршни интервју 1;
5. Завршно тестирање 2 (Завршни тест 2 и Завршни интервју 2) којим се испитује трансфер знања на множење једноцифрених и двоцифрених бројева и разумевање мултипликативних проблемских ситуација.

Узимајући у обзир теоријске оквире истраживања, развијена су два модела обраде множења једноцифреним бројевима, тако да обухватају:

1. Обрада множења једноцифреним бројевима засновано на разумевању и примени аритметичких правила;
2. Обрада множења једноцифреним бројевима кроз значење и примену репрезентација.

IV АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

1. Иницијално тестирање и уједначавање група

С обзиром да наш узорак истраживања обухвата ученике 2. разреда уједначавање група нисмо вршили на основу закључних оцена ученика, јер су у 1. разреду имали описно оцењивање. Један од начина уједначавања група био је иницијално тестирање.

Иницијално тестирање смо конструисали у сврху провере уједначености група и прикупљања података о разумевању значења операције множења и поседовање менталних интуитивних стратегија пре увођења Модела. Овим тестирањем смо проверили способност ученика да:

1. Састављају израз (производ) који одговара задатој репрезентацији;
2. Примене различите менталне интуитивне стратегије за израчунавање производа;
3. Избор стратегије рачунања врше у зависности од структуре израза (коришћених бројева у задатку), као и врсте репрезентације која је дата у задатку (текстуални задаци и различите иконичке репрезентације), као и коришћених бројева у задатку.

Задаци коришћени за иницијално тестирање дати су у прилогу (Прилог 2).

Једнострука анализа варијансе показала је да не постоје статистички значајне разлике у укупним скоровима на Инцијалном тесту између све три групе ученика ($F(2, 86) = 2.259$, $p = .111$), као и на Инцијалном интервју између све три групе ученика ($F(2, 86) = 0.076$, $p = .927$) и Инцијалном тесту и Инцијалном интервјуу између група ученика ($F(2, 86) = .982$, $p = .379$). Аритметичке средине и стандардне девијације група у тестовним скоровима налазе се у Табели 1.

Табела 1. *Дескриптивна статистика Инцијалног тестирања за све групе*

	Иницијални тест		**Иницијални интервју**		**Иницијални тест и Инцијални интервју**	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Контролна група	11.033	3.489	7.533	1.737	18.567	4.091
Експериментална група 1	12.839	3.484	7.355	2.360	20.194	5.486
Експериментална група 2	12.464	3.469	7.536	2.045	20.000	5.048
Цео узорак	12.112	3.531	7.472	2.045	19.584	4.912

2. Интуитивно разумевање значења множења

У овом делу рада представићемо најзначајније резултате инцијалног тестирања који су усмерени на испитивање интуитивног разумевања значења операције множења од стране ученика, као и њихових менталних – интуитивних стратегија рачунања. Знања ученика испитивали смо користећи Инцијални интервју, који садржи само изразе множења и Инцијални тест који обухвата два типа задатака: задаци у којима су мултипликативне ситуације представљене иконичким репрезентацијама и текстуални задаци различитих семантичких структура који се односе на множење једноцифреним бројевима. У нашем раду термин мултипликативне ситуације смо користили за различите задатке који се односе на множење – текстуални задаци различите семантичке структуре, задаци са иконичким репрезентацијама, односно сви задаци и ситуације на које ученици могу реаговати множењем.

С обзиром да смо утвррдили да не постоји статистички значајна разлика између група ученика на Инцијалном тесту, у овом делу рада анализираћемо општи успех свих група заједно.

Посматрањем успешности ученика на целом Инцијалном тесту (Табела 2) закључили смо да већина испитаника у свим групама даје тачне одговоре, што показује да ученици пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева разумеју значење операције множења, односно препознају мултипликативне ситуације које су представљене иконичким репрезентацијама, као и мултипликативне ситуације дате кроз текстуалне задатке. Анализирањем успешности ученика на Инцијалном интервју (Табела 2),у којој смо испитивали способност рачунања производа пре систематског поучавања множења једноцифрених бројева, као и њихове интуитивне менталне стратегије, показује да већина ученика у све три групе испитаника даје тачне одговоре у већини примера.

Табела 2. *Успешност свих ученика на Инцијалном тесту и Инцијалном интервју*

	Тачно урађен број задатака	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Иницијални тест	1078 (67.29%)	378 (23.6%)	146 (9.11%)
Иницијални интервју	665 (83.02%)	136 (16.98%)	/

2.1. Интуитивно разумевање мултипликативних ситуација кроз задатке са иконичким и текстуалним репрезентацијама

Један од индикатора за разумевање значења операције множења јесте и уочавање и разумевање мултипликативних ситуација које су различито представљене. У табели 3. приказана је успешност ученика на задацима са иконичким репрезентацијама (1, 2, 3. и 4. задатак) и текстуалним задацима различите семантичке структуре (од 5. до 14. задатка).

Табела 3. *Успешност свих ученика на задацима са иконичким репрезентацијама и тексуталним задацима*

	Тачно урађен број задатака	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Задаци са иконичким репрезентацијама	486 (68.29%)	173 (24.3%)	53 (7.44%)
Текстуални задаци	592 (66.52%)	205 (23.03%)	93 (10.45%)

Посматрајући табелу можемо уочити да су ученици били подједнако успешни у оба типа задатака, те је код текстуалних задатака уочено незнатно већи проценат неурађених задатака, што показује да употреба иконичких репрезентација очигледно представља математичке идеје (Kilpatrick et. al, 2001; Fennal and Rowan, 2001; Loveridge, 2005; Russell et al., 2011), а у нашем случају мултипликативне ситуације.

Интересовало нас је на који начин врста изабране репрезентације утиче на тачност у решавању задатака (Табела 4).

Табела 4. *Успешности ученика на задацима са иконичким репрезентацијама (1–4 задатак)*

Врсте репрезентације	**Тачно урађен број задатака**	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Правогуана схема	117 (65.74%)	55 (30.9%)	6 (3.37%)
Декадна репрезенатација	132 (74.16%)	32 (17.98%)	14 (7.87%)
Домине	237 (66.57%)	86 (24.16%)	33 (9.27%)

Резултати су показали да су ученици најуспешнији у решавању задатака са декадним репрезентацијама, што је очекивано с обзиром да се скуп бројева до 10 у нашем Наставном плану и програму упознаје кроз репрезентације са декадном основом. С друге стране, разумевање мултипликативних ситуација исказаних употребом домина или правоугаоном схемом је нешто слабије, што је очекивано с обзиром да анализа уџбеника „Едука“ који је коришћен у првом разреду показује заступљеност само репрезентација са декадном основом и бројевне полуправе у мањој мери. Истраживање које се бавило испитивањем компетенција учитеља за коришћење репрезентација у настави математике (Милинковић, 2016) показало је да наши учитељи не увиђају корисност визуелног представљања записа са променљивом и да је избор репрезентација повезан са нивоом апстрактности садржаја, а не са значењем појма.

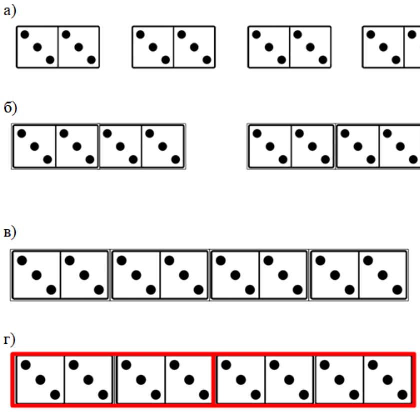
Како бисмо испитали утицај врсте иконичке репрезентације на начин рачунања, односно постављање израза, као и избор стратегије множења испитали смо да ли ученици у 2, 3. и 4. задатку при решавању задатака постављају и користе израз сабирања, израз множења или рачунају без постављања израза, односно пребројавају укупан број елемената или користе неку другу стратегију коју не записују. У Табели 5. дат је приказ начина решавања задатака за све групе ученика заједно.

Табела 5. *Начини решавања задатака са иконичким репрезентацијама (2 (а, б, в, г), 3 и 4 (а, б)) са тачним одговорима*

Врста репрезентације	**Операција сабирања**	**Операција множења**	**Без постављања израза**	**Т**
Домине (2. задатака)	20 (30.3%)	36 (54.5%)	10 (15.2%)	66
	15 (26.3%)	32 (56.1%)	10 (17.5%)	57
	18 (27.7%)	35 (53.8%)	12 (18.5%)	66
	18 (27.7%)	35 (53.8%)	12 (18.5%)	65
Правоугаона схема (3. задатак)	12 (17.1%)	53 (75.7%)	5 (7.1%)	70
Декадне репрезенатације	14 (18.7%)	54 (72.0%)	7 (9.3%)	75
	12 (15.4%)	58 (74.4%)	8 (10.3%)	78
Укупно	109 (22.9%)	303 (63.5%)	64 (13.4%)	477

Напомена.
Т – укупан број ученика који је тачно одговорио на задатак

Када говоримо о начинима решавања задатака са иконичким репрезентацијама (задаци 2, 3 и 4), у Табели 5. можемо видети да су ученици на Инцијалном тесту највише користили операцију множења, док су ређе користили операцију сабирања, а у најмањем проценту су одређивали вредност без постављања израза без обзира на различите врсте иконичких репрезентација које су коришћене на тесту (домине, декадне репрезентације и правоугаона схема). Овакви налази показују да највећи проценат ученика препознаје мултипликативне ситуације представљене иконичким репрезентацијама, што показује да репрезентације коришћене на тесту истичу кључне компоненте операције множења, те ученици на основу њих разумеју значења чиниоца и производа, што је кључно за развој мултипликативног мишљења (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014; Marjanović, Mandić, 2009). С обзиром да је 2. задатак на Инцијалном тесту садржао исту иконичку репрезентацију, структурисану на четири различита начина (Слика 7) анализирали смо за сва четири примера изразе множења које су ученици постављали (Табела5).



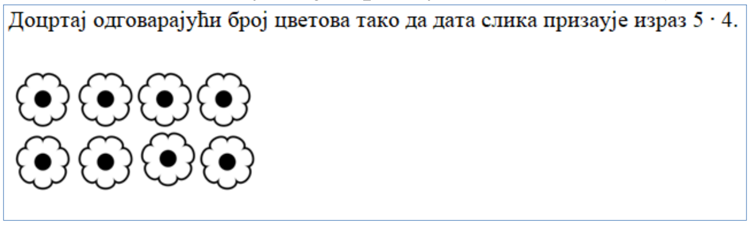
Слика 7. *Други задатак на Инцијалном тесту*

Табела 6. *Утицај структуре доминске репрезетације на решавање задатака за ученике који су тачно решили задатак*

	8·3/3·8	4·6/6·4	2·12/12·2	1·24/24·1	Т
Задатак 2а	10 (27.8%)	26 (72.2%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	36
Задатак 2б	6 (18.8%)	1 (3.1%)	25 (78.1%)	0 (0.0%)	32
Задатак 2в	10 (28.6%)	11 (31.4%)	2 (5.7%)	12 (34.3%)	35
Задатак 2г	12 (34.3%)	7 (20.0%)	7 (20.0%)	9 (25.7%)	35
Укупно	38 (27.5%)	45 (32.6%)	34 (24.6%)	21 (15.2%)	138

У Табели 6. дат је приказ бројевних израза који су ученици из узорка користили за примере у 2. задатку. Циљ овог задатка био је уочавање начина на који ученици посматрају исту репрзентацију која је структурисана на различите начине и да ли различита структура утиче на начин решавања задатка. Можемо приметити да су ученици у примеру под а) највише користили израз 4·6, што је потпуно очекивано с обзиром на структуру иконичке репрезентације. У примеру под б) ученици су највише користили израз 2·12, што је такође у складу са изгледом иконичке репрезентације. За ове примере можемо закључити да ученици у највећем проценту користе изразе који одговарају различитим структурама иконичких репрезентација. Коришћење израза 8·3 у овим примерима (а и б) показује да су неки ученици занемарили структуру репрезентација и водили се пребројавањем сваког „квадрата" посебно. Анализирањем примера под в) и г) показују да ученици занемарују црвену линију која истиче поделу на два дела, те посматрају ове две иконичке репрезентације као исте. Коришћење различитих израза множења у овим примерима показује да ученици посматрају изразе на различите начине, односно ментално их структуришу на начине који одговарају њима. Може се уочити и коришћење израза 1·24, што показује да ученици посматрају ову репрезентацију као целину, али и да уочавају мултипликативну ситуацију, али да не користе својства репрезентације како би записали одговарајући израз. Сагледавање мултипликативне ситуације на различите начине омогућава посматрање различитих својстава операције множења, као и интуитивну примену аритметичких правила, што је важно за развој и употребу флексибилних стратегија множења. Занимљиво је напоменути да је један део ученика који је тачно решио ове задатке користио изразе *3·8*, *6·4* и *12·2* што показује да ученици не разликују значење првог и друго чионица или на интуитивном нивоу разумеју и примењују замену места чинилаца, што у оба случаја показује делимично неразумевње мултипликативних ситуација. Наши резултати су показали да различито структурисање исте иконичке репрезентације утиче и на начин постављања одговарајућег израза множења, што потврђују и ранија истраживања (Van de Walle, 2006; Warren and Cooper, 2006).

Разумевање значења мултипликативних ситуација огледа се и у способности представљања производа два броја иконичким репрезентацијама (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008). Кроз 1. задатак на Инцијалном тесту испитали смо колико су ученици успешни у представљању мултипликативних ситуација правоугаоном схемом (Слика 8).



Слика 8. *Први задатак на Инцијалном тесту*

Табела 7. *Успешност ученика на 1. задатку*

	Тачно урађен број задатака	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
1. задатак	50 (56.18%)	38 (42.7%)	1 (1.12%)

Анализа наших резултата (Табела 7) показала је да више од 50% ученика успешно приказује мултипликативну ситуацију помоћу правоугаоне схеме пре систематског поучавања множења једноцифрених бројева, што показује да ученици у одређеној мери имају развијено мултипликативно мишљење, које се код деце развија постепено (Clark and Kamii, 1996).

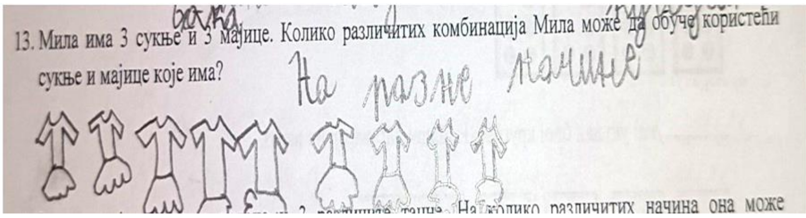
Други тип репрезентација који смо користили у истраживању су текстуални задаци, који смо поделили у пет семантичких структура (једнакобројни скупови, производ мера, мултипликативно поређење, правоугаона схема и Декартов производ). У Табели 8. дат је приказ успешности ученика на наведеном типу задатака.

Табела 8. *Успешност ученика на текстуалним задацима различите семантичке структуре*

Семантичка структура задатка	**Тачно урађен број задатака**	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Једнакобројни скупови	152 (85.39%)	23 (12.92%)	3 (1.69%)
Производ мера	133 (74.72%)	36 (20.22%)	9 (5.06%)
Мултипликативно поређење	125 (70.23%)	40 (22.47%)	13 (7.30%)
Правоугаона схема	112 (62.92%)	47 (26.40%)	19 (10.68%)
Декартов производ	70 (39.39%)	39 (33.15%)	49 (27.53%)

Семантичка структура задатка	Задатак
Једнакобројни скупови	*У три кутије се налази по 4 оловке. Колико има укупно оловака?* *Седам аутомбола вози децу на такмичење. У сваки аутомобил стане по троје деце. Колико деце иде на такмичење?*
Производ мера	*Јана је купила 3 бојице. Једну бојицу је платила 9 динара. Колико динара је Јана потрошила?* *Кувару је потребно 5 минута да направи један колач. Колико минута ће кувар правити 8 колача?*
Мултипликативно поређење	*Лука има 2 пута више кликера од Елене. Елена има 8 кликера. Колико Кликера има Лука?* *Маја и Ана имају 9 јабука. Њихова браћа имају три пута више јабука од њих. Колико јабука имају браћа?*
Правоугаона схема	*Павле је своје аутиће распоредио у 4 реда. У сваки ред је ставио по 8 аутића. Нацртај распоред Павлових аутића и израчунај колико аутића има укупно.* *Бака Милица је посадила купус у 3 реда. У сваки ред је ставила по 9 главица купуса. Нацртај бакину башту и израчунај колико главица купуса има бака Милица.*
Декартов производ	*Мила има 3 сукње и 3 мајице. Колико различитих комбинација Мила може да обуче користећи сукње и мајице које има?* *Јана има 4 различита колача и 3 различите тацне. На колико различитих начина она може сервирати колаче, ако на сваку тацну ставља по један колач?*

Основна претпоставка мултипликативног мишљења јесте препознавање мултипликативних ситуација и реаговање на њих састављањем одговорајућег израза множења (Clark and Kamii, 1996; Jacob and Willis, 2003; Siemon, Breed and Virgona, 2005). Наше истраживање је показало да ученици у великој мери разумеју значења мултипликативних ситуација исказаних кроз текстуалне задатке. Даље, можемо закључити да резултати нашег истраживња потврђују ранија истраживања (Greer, 1992; Mulligan, 1992), односно да врста семантичке структуре задатка утиче на успешност, јер су одређене семантичке структуре једноставније за разумевање. Анализирајући успешност ученика на појединачним групама текстуалних задатака закључили смо да су ученици били најуспешнији на задацима који се односе на једнакобројне скупове. Употреба ове семантичке структуре задатака истиче основне компоненте операције множења (број скупова, број елемената у скупу и укупан број елемената) (Muliligan and Mitchelmore, 1997; Mulligan and Watson, 1998) које су искуствено и блиско ученицима, те је потпуно очекивано да ученици интуитивно показују најбоља постигнућа на задацима ове семантичке структуре. С друге стране, пре систематске обраде множења једноцифреним бројевима ученици показују најслабије постигнуће на задацима са Декартовим производом, који захтевају упаривање елемената једног скупа са елементима другог скупа (Larsson, 2016: 9). Неколико ученика је успешно представило цртежом контекст задатка, издвајајући све комбинације (Слика 9), али нису успели да упоставе везу са својом репрезентацијом и коначним решењем задатка, што показује неразумевање значења овог типа задатка. С друге стране, овакви одговори показују да ученици интуитивно препознају Декартов производ и делимично разумеју његово значење.

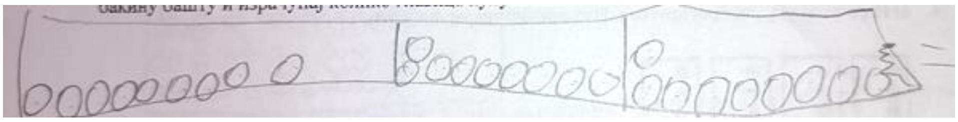


Слика 9. *Пример интуитивног разумевања Декартовог производа*

Резултати нашег истраживања потврђују и налазе ранијих истраживања, који истичу сложеност Декартовог производа (Greer, 1992; Mulligan, 1992). Даље, наши резултати су показали да су ученици успешнији на задацима са мултипликативним поређењем, него у задацима са правоугаоном схемом, што је у супротности са ранијим истраживањима, која су показала да је разумевање множења као правоугане схеме једноставније него мултипликатвно поређење (Greer, 1992; Mulligan, 1992). Битно је напоменути да је већина ученика који су успешно решили задатке са правоугаоном схемом цртала своје репрезентације (Слика 10), које су највећим делом биле правилно структурисане.

Слика 10. *Репрезентација ученика на задатке са правоугаоном схемом*

Ови резултати показују да ученици разумеју структуру реда и колоне, те да је то добра основа за коришћење овог типа репрезентације током обраде множења, јер она подстиче развој различитих стратегија множења, а ствара основу и за разумевање аритметичких правила и стандардног алгоритма (Davis, 2008; Young-Loveridge, 2005a, 2005b). Такође, у овим задацима ученици су користили и цртеже (Слика 11) који су више одговарали идеји једнакобројних скупова, али је битно и њих споменути, јер само овај тип задатака је пратила употреба репрезентација.



Слика 11. *Репрезентација ученика на задатке са правоугаоном схемом*

Добијени резултати нису изненађујући с обзиром да смо испитивали интуитивна знања ученика пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева. Ранија истраживања су показала да ученици решавају задатке множења различитих семантичких структура пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989; Marojoke and Beker, 2014), што је потврдило и наше истраживање. Разумевање мултипликативних ситуација на овом нивоу показује да се ученици налазе у почетним фазама развоја мултипликативног мишљења.

2.2. Врсте грешака пре систематске обраде множења једноцифрених бројева

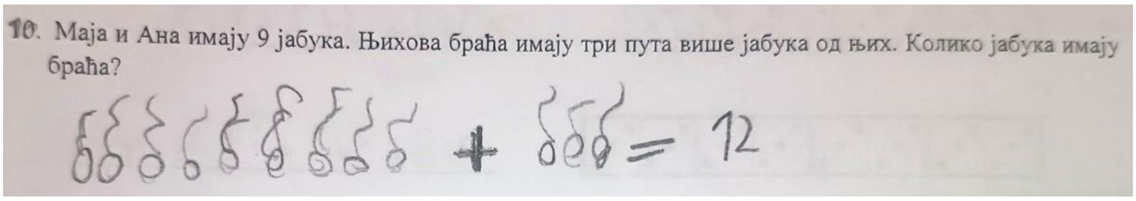
С обзиром да на Иницјалном тесту није било статистички значајних разлика између група ученика, као ни статистички значајних разлика у грешакама између група ученика, овде ћемо анализирати само грешке које су сви испитаници правили у задацима са различитим репрезентацијама.

Приликом анализе резултата истраживања уочили смо да ученици приликом решавања задатка и рачунања праве три врсте грешака: неразумевање структуре репрезентације, грешке у рачуну и мешање рачунских операција. Под неразумевањем структуре репрезентације смо сматрали неразумевање контекста и значења текстуалних задатака, као и значења и структуре иконичких репрезентација којима се изражавају мултипликативне ситуације. Прва и трећа врста грешака су показатељи неразумевања значења операције множења у различитим контекстима. Неразумевање структуре репрезентације показује да ученици делимично и разумеју операцију множења, али да у конктесту који им је дат не разумеју њено значење. С друге стране, мешање рачунске операције множења са другим рачунским операцијама показује потпуно одсуство интуитивног разумевања операције множења. Насупрот наведеним грешкама, јавља се и трећа група грешака (грешке у рачуну) које показује да ученици разумеју значење операције множења, али да неправилно примењују стратегије множења, односно праве грешке прликом рачунања. У Табели 9. дат је приказ грешака подељених према групама задатака.

Табела 9. *Приказ грешака на Инцијалном тесту за цео узорак*

Типови задатака	**Мешање рачунских операција**	**Грешке у рачуну**	**Неразумевање структуре репрезентације**	**У**
Иконичке репрезентације	5 (2.91%)	39 (22.67%)	128 (74.42)	172
Једнакобројни скупови	4 (17.39%)	13 (56.52%)	6 (26.09%)	23
Производ мера	9 (25.71%)	16 (45.71%)	10 (28.57%)	35
Мултипликативно поређење	19 (47.5%)	19 (47.5%)	2 (5%)	40
Правоугаона схема	4 (8.51%)	23 (48.94%)	20 (42.55%)	47
Декартов производ	10 (16.95%)	3 (5.08%)	46 (77.97%)	59
УКУПНО	51 (13.56%)	113 (30.05%)	212 (56.38%)	376

На Инцијалном тесту већина ученика је правила грешке које се односе на неразумевање структуре репрезентације, док су се у нешто мањем проценту биле заступљене грешке у рачуну, што је и очекивано с обзиром да смо испитивали интуитивна знања ученика. Овакви резултати сугеришу да при давању систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева пажњу треба усмерити на значење операције множење и развој флексибилних стратегија множења, пре него на меморисање производа и проналажење вредности израза.Посматрајући посебно иконичке репрезентације и текстуалне задатке можемо закључити да ученици показују неразумевање структуре иконичких репрезентација. Када су у питању текстуални задаци ученици који су нетачно урадили задатак најчешће су грешили у рачуну. У задацима са мултипликативним поређењем велики део ученика је мешао множење и сабирање (Слика 12), при чему ученици покушавају да користе цртеже као помоћ за решавање задатка, али су у тим случајевима и цртежи неправилни и показују неразумевање значења контекста задатка.



Слика 12. *Пример мешања аритметичких операција множење и сабирање*

У задацима са Декартовим производом најпристуније су биле грешке, које се односе на неразумевање структуре задатка, што се у значајном проценту јавило и код задатака са правоугаоном схемом што одговара бројним резултатима истраживања (Greer, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Anghileri, 1989; Vergnuad, 1988; Larsson, 2016; Downton and Sullivan, 2017). Најмањи број грешака ученици су правили у задацима са једнакобројним скуповима, што је такође очекивано, јер ова структура задатка истиче основно значење операције множења. У задацима са мултипликативним поређењем ученици су у односу на остале задатке највише правили први тип грешке (мешање рачунских операције), што може бити последица мешања појмова „за толико више“ и „толико пута више“.

2.3. Употреба менталних интуитивних стратегија множења пре систематске обраде множења једноцифрених бројева

Примарни циљ нашег истраживања је испитивање менталних интуитивних стратегија множења. У овом делу рада бавићемо се интуитивним менталним стратегијама множења које су ученици користили на Инцијалном тесту и Инцијалном интервјуу за одређивање вредности израза пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева.

Задаци на Инцијалном тесту су подељени у две групе: задаци са иконичким репрезентацијама и текстуални задаци који обухватају различите семантичке структуре. Инцијални интервју је обухватао 9 примера множења једноцифрених бројева без употребе било које врсте репрезентације.

У складу са ранијим истраживањима других аутора (Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989 SherinandFuson, 2005; Ambrose, etal., 2003; Jacob and Willis, 2001; Heirdsfieldetal, 1999; DowntonandSullivan, 2017; Zeljić etal., 2019), у нашем раду смо обухватили следеће менталне стратегије множења: појединачно пребројавање, ритмичко пребројавање, поновљено сабирање, дуплирање са поновљеним сабирањем, дуплирање, знање чињеница, мултипликативне стратегије, остало (ученици који користе своје стратегије или не поседују стратегије рачунања).

У Табели 10. дат је приказ интуитивних стратегија множења коришћених за решавање задатака на Инцијалном тесту.

Табела 10. *Стратегије коришћене за решавање група задатака на Инцијалном тесту, на целом узорку ученика*

Типови задатака	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
Иконичке репрезентације	118 (27.06%)	11 (2.52%)	256 (58.72%)	25 (5.73%)	19 (4.36%)	2 (0.46%)	4 (0.92%)	1 (0.23%)	436
Текстуални задаци	10 (1.69%)	34 (5.74%)	483 (81.59%)	18 (3.04%)	8 (1.35%)	11 (1.86%)	22 (3.72%)	5 (0.84%)	592
УКУПНО	128 (12.45%)	45 (4.38%)	739 (71.89%)	43 (4.18%)	27 (2.63%)	13 (1.26%)	26 (2.53%)	6 (0.58%)	1028

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Анализирајући интуитивне стратегије множења пре систематске обраде множења једноцифрених бројева можемо закључити да већина ученика на Инцијалном тесту најчешће користи поновљено сабирање. Избор мултипликативних стратегија множења зависи и од типа репрезентација које се користе. За решавање задатака са иконичким репрезентацијама, ученици су на Инцијалном тесту у највећој мери користили стратегију поновљено сабирање, али је такође било значајно заступљена и стратегија појединачно пребројавање, што није био случај у текстуалним задацима у којима је доминантно коришћена само стратегија поновљено сабирање. Ово показује да задаци са различитим иконичким репрезентацијама доприносе коришћењу флексибилнијих стратегија множења, али на нашем узорку је тај проценат занемарљив. Резултати нашег истраживања су потврдили раније налазе, који показују да је поновљено сабирање интуитивна стратегија множења коју ученици користе пре систематског увођења инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева (Mulligan, 1992; Heirdsfield et al, 1999). С друге стране, наведени аутори истакли су да ученици пре увођења инструкција користе и друге стратегије, као што су пребројавање и дуплирање, што у нашем истраживању није био случај. Такви резултати могу бити последица примене алгоритамских поступака сабирања и одузимања у скупу бројева до 100, који у одређеној мери спутавају развој флексибилних стратегија рачунања.

У нашем раду обухватили смо три врсте иконичких репрезентација: домине, правоугаона схема и декадне репрезентације, јер употреба различитих иконичких репрезентација утиче на избор менталних стратегија множења што утиче и на развој способности флексибилног рачунања (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014). Из наведеног разлога изабрали смо три врсте репрезентације. У Табели 11. дат је приказ менталних стратегија множења које су коришћене за решавање задатака са иконичким репрезентацијама.

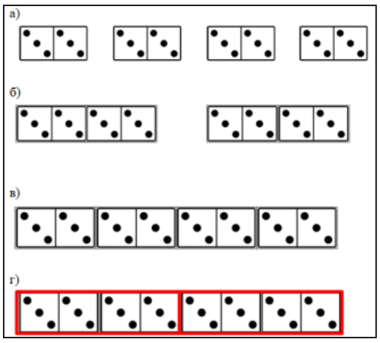
Табела 11. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитим иконичким репрезентацијама на Иницијалном тесту, на целом узорку ученика*

Иконичке репрезентације	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
Домине	65 (27.43%)	7 (2.95%)	132 (55.7%)	16 (6.75%)	16 (6.75%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (0.42%)	237
Правоугаона схема	16 (23.88%)	0 (0.0%)	50 (74.63%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (1.49%)	0 (0.0%)	67
Декадне репрезентације	37 (28.03%)	4 (3.03%)	74 (56.06%)	9 (6.82%)	3 (2.27%)	2 (1.52%)	3 (2.27%)	0 (0.0%)	132
УКУПНО	118 (27.06%)	11 (2.52%)	256 (58.72%)	25 (5.73%)	19 (4.36%)	2 (0.46%)	4 (0.92%)	1 (0.23%)	436

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Резултати нашег истраживања су показали да без обзира који тип иконичке репрезентације користимо ученици у највећој мери користе стратегије поновљеног сабирања, односно да репрезентације не утичу на проналажење флексибилних начина рачунања, које су истицали други аутори (Baroody & Dowker, 2003; Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014; Марјановић, 2014; Kilpatrick, 2001). Поред наведене стратегије, ученици су користили и појединачно пребројавање као стратегију, што је очекивано с обзиром да нису усвојили множење. Наши резултати су показали да се у малом проценту у задацима са доминама и декадним репрезентацијама користе и стратегије дуплирања, док те стратегије нису заступљене у задацима са правоугаоном схемом. У поређењу са осталим задацима, како текстуалним, тако и задацима са правоугаоном схемом (иконичка репрезентација), можемо закључити да су у овим задацима коришћене три врсте стратегија, што потврђује налазе ранијих истраживања, да иконичке репрезентације подстичу развој и одабир флексибилних стратегија рачунања (Марјановић, 2014; Van de Walle, 2006; Wearne, 1996; Blote et al., 2000). Ово може бити последица јасно истакнутих група елемената што деци омогућава јасно груписање једнакобројних скупова, с једне стране, као и њихова заступљеност у уџбеницима које су ученици користили у првом разреду, с друге стране, у којима су наведене репрезентације биле заступљене, док им репрезентације са правоуганом схемом нису познате.

Када је у питању доминска репрезентација, посебно смо анализирали стратегије коришћене за сваки пример у 2. задатку (Слика 13), како бисмо испитали утицај различитог структурисања исте репрезентације на избор стратегије (Табела 12).



Слика 13. *Други задатак на Иницијалном тесту*

Табела 12. *Стратегије коришћене за решавање 2. задатака на Иницијалном тесту, на целом узорку ученика*

Број задатка	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
2а	11 (17.2%)	1 (1.6%)	48 (75.0%)	3 (4.7%)	1 (1.6%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	64
2б	11 (19.3%)	2 (3.5%)	25 (43.9%)	10 (17.5%)	9 (15.8%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	57
2в	23 (35.4%)	2 (3.1%)	38 (58.5%)	1 (1.5%)	1 (1.5%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	65
2г	22 (33.8%)	2 (3.1%)	33 (50.8%)	2 (3.1%)	5 (7.7%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (1.5%)	65

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

На основу добијених резултата примећујемо да су ученици без обзира на начин структирасања израза највише користили поновљено сабирање, док се на другом месту налази појединачно пребројавање, али да и поред тога постоје разлике између појединачних примера. Појединачно пребројавање је заступљеније у примерима где су све домине спојене или само линијом подељене у две целине, док у примеру где су домине одвојене у две групе ученици примењују разноврсније стратегије (дуплирање). С друге стране, поредећи производ који одговара репрезентацији и коришћену стратегију, можемо закључити да на избор интуитивних стратегија множења не утичу бројеви коришћени у задацима, односно структура израза. Ученици теже примени интуитивних модела множења (Mulligan and Mitcelmore, 1997).

Када су у питању текстуални задаци, у нашем истраживању смо их поделили у пет семантичких структура. Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром су дате у Табели 13.

Табела 13. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром на Иницијалном тесту, на целом узорку ученика*

Семнатичка структура	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
Једнакобројни скупови	1 (0.66%)	5 (3.29%)	133 (87.5%)	3 (1.9%)	0 (0.0%)	6 (3.95%)	4 (2.6%)	0 (0.0%)	152
Производ мера	0 (0.0%)	22 (16.54%)	96 (72.18%)	6 (4.51%)	0 (0.0%)	3 (2.26%)	6 (4.51%)	1 (0.75%)	133
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	5 (4%)	110 (88%)	0 (0.0%)	4 (3.2%)	2 (1.6%)	4 (3.2%)	0 (0.0%)	125
Правоугаона схема	9 (8.04%)	1 (0.89%)	82 (73.21%)	7 (6.25%)	4 (3.57%)	0 (0.0%)	7 (6.25%)	0 (0.0%)	112
Декартов производ	0 (0.0%)	1 (1.43%)	62 (88.57%)	2 (2.86%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (1.43%)	4 (5.71%)	70
УКУПНО	10 (1.69%)	34 (5.74%)	483 (81.59%)	18 (3.04%)	8 (1.35%)	11 (1.86%)	22 (3.72%)	5 (0.84%)	592

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Бројни налази из литературе показују да употреба различитих семантичких структура задатака утиче и на избор мултипликативних стратегија рачунања (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Downton and Sullivan, 2017). Супротно налазима ранијих истраживања, наши резултати су показали да на Иницијалном тесту није било значајних разлика у избору интуитивних стратегија множења у задацима различите семантичке структуре пре систематске обраде множења једноцифреним бројевима, односно да избор стратегија није условљен семантичком структуром задатка (Табела 13). Ученици су у највећој мери користили поновљено сабирање у текстуалним задацима што су потврдила и ранија истраживања (Heirdsfield et al, 1999), која су показала да деца интуитивно примењују првобитно стратегије пребројавања и поновљеног сабирања, односно адитивне стратегије рачунања. Без обзира на семантичку структуру задатка поједини ученици су примењивали и друге стратегије, али тај број ученика је веома мали. С друге стране, можемо закључити да су стратегије пребројавања биле заступљене у задацима са иконичким репрезентацијама, али не и у текстуалним задацима. Овакви резултати су очекивани, с обзиром да иконичке репрезентације приказују укупан број елемената, што је погодно за пребројавање.

Посматрајући посебно сваку семантичку структуру задатка можемо закључити да ученици у задацима са једнакобројним скуповима не теже примени других стратегија, осим поновљеног сабирања, што је и повезано са структуром једнакобројних скупова која истиче истобројне скупове који се понављају (Thompson and Saldanha, 2003). Насупрот томе, у задацима са производом мера, које је теже замислити и приказати репрезентацијом, ученици покушавају да користе и друге стратегије, као што је ритмично пребројавање и у малом проценту мултипликативне стратегије које се заснивају на примени аритметичких правила ($3\cdot 9 = 2\cdot 9 + 9$). Даље, уочава се да су ученици само у текстуалним задацима са правоугаоном схемом користили и стратегију пребројавања, што може бити последица утицаја структуре задатка на начин решавања, која подстиче графичко представљање садржаја задатка, а затим пребројавање нацртаних елемената, што је у супротности са налазима ранијих истраживања (Downton and Sullivan, 2017) која су истакла да употреба правоугаоне схеме подстиче употребу ефикаснијих стратегија рачунања. Као што је већ речено, Декартов производ представља сложену структуру операције множења, те је очекивано да су ученици били мање успешни на овим задацима, као и да су тежили примени нестандардних начина решавања, као што су цртежи и упаривање елемената (Слика 9), што показује да ученици разумеју значење ове семантичке струткуре, али још увек не могу да је представе на одговарајући начин, јер мултипликативно мишљење још увек није развијено.

Поред анализирања тачних одговора, бавили смо се и испитивањем интуитивних стратегија које су ученици који праве грешке у рачуну користили за рачунање. Подаци су приказани у Табели 14 (Прилог 3). Можемо закључити да је у посматраним задацима само мали број ученика, у готово занемарљивом проценту, из читавог узорка, користио неку од флексибилних мултипликативних стратегија. У овим задацима искључиво је коришћена стратегија поновљено сабирање. Упоређујући ученике који су тачно решили задатке и ученике који су грешили у рачуну, можемо закључити да је поновљено сабирање доминантна стратегија код обе групе ученика, али да се у групи ученика која је тачно решила задатке, јављају и друге флексибилније стратегије множења, што показује да ученици који нису у потпуности развили значење операције множење користе само једну стратегију.

Интуитивне стратегије множења које ученици користе пре увођења множења смо испитали и кроз интервју у којима је било потребно одредити производ два броја. Укупно је коришћено 9 примера. Бројеви у изразима бирани су са циљем испитивања утицаја бројева на избор мултипликативне стратегије множења. Анализирали смо и у којој мери ученици један пример могу да реше применом више стратегија. У Табели 15. дат је приказ интуитивних стратегија множења које су ученици користили за одређивање вредности израза на Инцијалном тесту.

Табела 15. *Стратегије коришћене за решавање примера на Инцијалном интервјуу, на целом узорку ученика*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
6 · 2		13 (14.77%)	63 (71.59%)		7 (7.95%)	5 (5.68%)			88
7 · 5		37 (46.25%)	35 (43.75%)		1 (1.25%)	2 (2.5%)	5 (6.25%)		80
3 · 10		44 (49.44%)	18 (20.22%)			24 (26.97%)	3 (3.37%)		89
4 · 9		1 (1.45%)	43 (62.32%)	12 (17.39%)	5 (7.25%)	2 (2.9%)	5 (7.25%)	1 (1.45%)	69
8 · 7		1 (1.82%)	39 (70.91%)	8 (14.55%)	1 (1.82%)		6 (10.91%)		55
9 · 8			37 (62.71%)	8 (13.56%)	1 (1.69%)	1 (1.69%)	11 (18.64%)	1 **(1.2%)**	59
8 · 3		6 (8%)	49 (65.33%)	1 (1.33%)	1 (1.33%)	4 (5.33%)	14 (18.67%)		75
4 · 6		2 (2.63%)	45 (59.21%)	12 (15.79%)	12 (15.79%)	1 (1.32%)	4 (5.26%)		76
6 · 4			13 (17.57%)	4 (5.41%)	1 (1.35%)		56 (75.68%)		74
Укупно	0 (0.0%)	104 (15.64%)	342 (51.43%)	45 (6.77%)	29 (4.36%)	39 (5.86%)	104 (15.64%)	2 (0.3%)	665

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Пре свега, дошли смо до закључка да су све три групе најчешће при решавању задатака на Инцијалном интервјуу користиле једну стратегију, што важи за сваки пример понаособ, као и за све примере заједно. Коришћење две стратегије дешавало само у појединим случајевима. Избор стратегија множења у великој мери може бити условљен бројевима који се множе (Sherin and Fuson, 2005), што у овом делу нашег истраживања није био случај. Резултати су показали да већина ученика (51,43%) користи поновљено сабирање као стратегију. На другом месту (15,64%) се налазе мултипликативне стратегије и ритмичко пребројавање, што је показатељ да ученици који су развили значење операције множења успевају да израчунају вредност израза тачно користећи и неке друге менталне стратегије множења. Ови резултати показују да и наши ученици у малој мери, у односу на резултате истраживања других аутора, пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифрених бројева поседују флексибилне стратегије рачунања, што су потврдила и ранија истраживања (Mulligan and Mitchelmore, 1997). Употреба мултипликативних стратегија показује да ученици ипак траже флексибилније начине рачунања, поготово у примерима у којима је један од чинилаца 8 или 9 ($8·7 = (4 · 7) · 2$ *или* $80 – 24$ и $4·9 = 2 · 9 · 2$ *или* $9 · 3 + 9$ *или* $4 · 10 – 4$). Анализирајући сваки пример посебно и стратегије које су ученици користили у нешто мањем проценту у односу на поновљено сабирање можемо закључити да део ученика стратегије прилагођава структури бројева (Sherin and Fuson, 2005). У складу са наведеним, примећујемо да деца за множење бројева 7 и 5, као и 3 и 10 користе ритмичко пребројавање у већем проценту него поновљено сабирање, јер им је овакво множење искуствено блиско из различитих игара са којима су се сусретали током одрастања. У примерима чији су чиниоци парни бројеви ученици поред поновљеног сабирања користе и дуплирање, што показује концепутално разумевање бројева и коришћење својстава бројева за избор стратегија рачунања. У примеру $8·3$ ученици су поред поновљеног сабирања користили и мултипликативне стратегије, растављајући чинилац 3 на 2 и 1, што показује интуитивну примену аритметичких правила (замена места чинилаца и множење збира бројем) на којима се темеље менталне стратегије множења. Ово је битна основа за подстицање развоја мултипликативног мишљења, као флексибилних стратегија рачунања које су његов саставни део.

Приликом решавања примера на интервјуу ученике смо мотивисали да пронађу флексибилнију стратегију множења кроз тражење бар још једног начина на који се може одредити вредност израза. Мали проценат ученика је проналазио другу стратегију. Резултати анализе друге стратегије коришћене за решавање примера на Инцијалном интервјуу, на целом узорку ученика дати су у Табели 16 (Прилог 3). Најчешће коришћена друга стратегија од стране ученика била је поновљено сабирање, са изузетком примера $7·5$. Анализирајући сваког испитаника посебно, закључили смо да другу стратегију рачунања проналазе и користе само они ученици који су првобитно користили флексибилније стратегија множења. Међутим, и они се враћају на поновљено сабирање користећи га као другу могућу стратегију. За пример 7·5, као друга стратегија већински је коришћена стратегија ритмичко пребројавање. Ученици који су користили другу стратегију поред поновљеног сабирања користили су и: дуплирање са поновљеним сабирањем, мултипликативне стратегије и ритмичко пребројавање. Овакви резултати показују да ученици који на интуитивном нивоу користе поновљено сабирање не уочавају друге флексибилније стратегије рачунања, што даље потврђује претходно речено, да је разумевање операције множења директно повезано са употребом разноврснијих менталних стратегија множења.

Примена аритметичких правила представља значајан фактор за флексибилно и ефикасно ментално рачунање (Ritle-Johson et al., 2001; Schliemann et al., 1998; Threlfall 2002; Schiflter, 2009). Анализирањем резултата на Инцијалном интервјуу (Прилог 3: Табела 17) уочили смо да замену места чинилаца ученици интуитивно користе само у неким примерима ($6·2$, $8·3$ и $6·4$), како би лакше израчунали вредност израза, што је показатељ интуитивног разумевања и примене замене места чинилаца у циљу ефикасније рачунања (Butterworth, Marchesini and Girelli, 2003). Наши резултати се подударају са испитивањем бразилских продаваца који интуитивно примењују замену места чинилаца, за разлику од ученика који после поучавања нису примењивали ово правило као олакшицу (Schliemann et al., 1998). Чак 70% ученика је пример $6·4$ решило применом замене места чинилаца уочавајући да је овај пример исти као и пример $4·6$, што показује значајност примене и разумевања замене места чинилаца за развој флексибилних стратегија рачунања, те смо овакве одговоре посматрали као примену мултипликативних стратегија, јер су на овом нивоу испитивања били показатељи разумевања операције множења.

На основу испитивања интуитивних стратегија множења можемо закључити да ученици пре систематских инструкција усмерених на множење једноцифреним бројевима показују адекватно разумевање елементарних мултипликативних ситуација. Ово је само један од сегмената мултипликативног мишљења, које обухвата флексибилан рад са различитим појмовима, стратегијама и репрезентацијама које се односе на множење и дељење (Siemon, Breed and Virgona, 2005). Даље, приметили смо да ученици не поседују флексибилне стратегије множења пре поучавања и да првенствено теже употреби поновљеног сабирања, које представља интуитивни модел множења. Сматрамо да разумевање множења као поновљеног сабирања није довољно, односно да је потребно вишеслојно разумевање множења које обухвата разумевање свих семантичких структура које смо истакли, као и примену различитих менталних стратегија множења. Како би се развиле флексибилне стратегије рачунања, потребно је подстицати константан развој флексибилности и адаптивности, које подразумевају способност решавања математичких задатака ефикасно, креативно и флексибилно применом различитих метода решавања (Kilpatrick et al., 2001; Newton et al., 2019). Наведене компоненте су веома важне за развој менталних стратегија рачунања, а могу се развити само ако се током обраде математичких садржаја инсистира на повезивању математичких идеја и ситуација, које захтевају математичко резоновање и математичку креативност. Ученици који су у стању да ефикасно рачунају или изнесу своје мишљење о математичким идејама, објасне своје начине решавања задатака могу развити и флексибилне стратегије рачунања.

3. Утицај семантичке структуре на нивое разумевања множења и избор мултипликативних стратегија

Функција текстуалних задатака у настави математике је да потпомогне процес разумевања математичких појмова који се у том тренутку усвајају. Из тог разлога, наши експериментални модели су се заснивали на разумевању значења операције и развоју различитих мултипликативних стратегија кроз свакодневну употребу задатака различите семантичке структуре. Анализирајући радове бројних аутора (Anghileri, 1989; Greer, 1992; Vergnuad, 1988; Коuba, 1989) издвојили смо следеће семантичке структуре задатака:

1. Једнакобројни скупови
2. Производ мера
3. Мултипликативно поређење
4. Правоугаона схема
5. Декартов производ

Кроз задатке наведених семантичких структура обухваћена су различита значења операције множења, која се налазе у основи мултипликативног мишљења, а један од циљева обраде множења у млађим разредима треба да буде развој мултипликативног мишљења, које је неопходно за разумевање многобројних математичких садржаја у старијим разредима.

За сваку групу задатака на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1 користили смо по два задатка, док смо на Завршном тесту 2 користили по један задатак из сваке групе задатака. У овом делу рада бавићемо се испитивањем утицаја различитих семантичких структура задатака на ниво разумевања множења и избор и употребу менталних стратегија множења пре и након систематског поучавања операције множења једноцифреним бројевима, као и пре систематског поучавања множења двоцифрених и једноцифрених бројева.

3.1. Утицај семантичке структуре задатака на ниво разумевања множења

Резултати Инцијалног теста показали су да ученици интуитивно разумеју задатке различите семантичке структуре, али да оно варира у зависности од типа задатка. Константан рад који обухвата текстуалне задатке различите семантичке структуре доприноси потпуном разумевању значења множења (Downton, 2017).

Како бисмо испитали ниво разумевања множења поредили смо успешност свих ученика, као и појединачних група ученика на задацима са различитом семантичком структуром у сва три тестирања. Потпуно разумевање множења подразумева да ученици разумеју све семантичке структуре задатака и да их решавају успешно.

За ово поређење коришћена је анализа варијансе за поновљена мерења. Формиран је генерални линеарни модел у коме је непоновљени фактор била припадност једној од три групе ученика (контролној, експерименталној 1 и експерименталној 2), док су два поновљена фактора била: семантичка структура задатака и тестирање (иницијално тестирање, завршно тестирање 1 и завршно тестирање 2). Анализирани су главни ефекти сваког од фактора на просечну успешност испитаника на овим задацима, те су засебно урађена сва потребна поређења добијених резултата.

Анализа варијансе за поновљена мерења спроведена је како би се упоредио ефекат групе, тестирања и семантичке структуре задатка на успешност ученика на задацима. Пронађена је статистички значајна разлика средњег ефекта између групе којој ученик припада, тестирања и семантичке структуре задатка ($F(13.288, 571.381) = 2.396$, $p = .004$, $\eta^2 = .053$), као и интеракције нижег ранга између тестирања и групе ($F(3.691, 158.714) = 5.28$, $p = .001$, $\eta^2 = .109$), као и између семантичке структуре задатка и групе ($F(6.197, 266.473) = 4.211$, $p < .001$, $\eta^2 = .089$), обе средњег интензитета. Осим наведених интеракција, пронађени су и сви главни ефекти, и то велики ефекат тестирања ($F(1.846, 158.714) = 15.913$, $p < .001$, $\eta^2 =$

.156), велики ефекат семантичке структуре задатака ($F(3.099, 266.473) = 19.547$, $p < .001$, $\eta^2 = .185$), као и велики ефекат припадности групи ($F(2, 86) = 9.040$, $p < .001$, $\eta^2 = .174$).

Успешност свих ученика на групама задатака са различитом семантичком структуром приказана је у Табели 18.

Табела 18. Успешност целог узорка на задацима различите семантичке структуре

Семантичка структура	Иницијални тест		Завршни тест 1		Завршни тест 2	
	M	SE	M	SE	M	SE
Једнакобројни скупови	.853	.032	.838	.029	.799	.041
Производ мера	.765	.045	.856	.038	.629	.048
Мултипликативно поређење	.704	.043	.894	.023	.711	.047
Правоугаона схема	.627	.045	.884	.024	.617	.042
Декартов производ	.397	.047	.700	.040	.667	.049

Напомена:
M (Mean) – аритметичка средина
SE (Standard Error) – стандардна грешка

Анализирајући посебно свако тестирање уочавамо се да су пре систематске обраде множења једноцифреним бројевима (Инцијални тест) ученици показали највећи ниво постигнућа на задацима који се односе на идеју једнакобројних скупова, која се сматра основним интуитивним моделом. С друге стране, ученици су показали најслабија постигнућа на задацима са Декартовог производа на Иницијалном и Завршном тесту 1. Декартов производ представља сложенију семантичку структуру и многа истраживања су потврдила овакве резултате (Greer, 1992; Mulligan, 1992). Након систематских инструкција усмерених на множење једноцифреним бројевима, добили смо другачије резултате. Уопштено гледано, примећен је знатан напредак ученика у разумевању множења, односно ученици су знатно успешније решавали све семантичке структуре задатака у односу на Инцијални тест, што показује повећање нивоа разумевања множења, које је последица поучавања. Употреба иконичких репрезентација и текстуалних задатака треба да служи као средство за обраду математичких појмова, али на начин који подстиче математичко мишљење у циљу концептуалног разумевања појмова који се усвајају (Kilpatrick et al., 2001), у нашем случају множења што директно води повећаном нивоу разумевања множења. Посматрајући резултате на Завршном тесту 1 можемо приметити да су ученици најуспешније решавали задатке са мултипликативним поређењем, што показује да наши ученици, након систематске обраде множења поседују велики степен разумевања ове семантичке структуре. Ово је веома важно, јер разумевање мултипликативног поређења доприноси вишеслојном разумевању множења и представља кључни аспект мултипликативног мишљења (Ben-Chaim et al., 1998; Shield and Dole, 2013).

Ученици су и на Инцијалном тесту показали одређени степен разумевања различитих семантичких структура, али су резултати на Завршном тесту 1 показали да је разумевање неких семантичких структура знатно веће него на инцијалном тесту, што показује да употреба адекватних задатака утиче и на повећање нивоа разумевања множења (Downton, 2017). Највећи степен пораста постигнућа уочен је код задатака који се односе на Декартов производ и правоугаону схему, које су од великог значај за развој мултипликативног мишљења потврдили и други аутори (Siemon,Beswick, Brady, Clark, Faragher & Warren,2011; Booker, Bond, Sparrow & Swan, 2010; Vale & Davies, 2007; Young-Loveridge, 2005). Употреба правоугане схеме доприноси и разумевању стандардног алгоритма множења (Davis, 2008; Hurst and Hurrell, 2018). Поредећи резултате само на овом тесту, уочавамо да су ученици и даље најмање успешни на задацима који се односе на Декартов производ, који за њих представља потпуно нов контекст задатка. Анализирање успешности на Завршном тесту 2, којим смо испитивали множење једноцифреног и двоцифреног броја, након систематског поучавања множења једноцифреним бројем, а пре обраде множења двоцифреним бројем, уочавамо да су ученици били најуспешнији на задацима са једнакобројним скуповима, што показује да ученици у нашем случају множење посматрају кроз једнакобројне скупове. Најмањи степен успешности постигнут је на задацима који се односе на посматрање множења као правоугаоне схеме.

У циљу испитивања разлике између семантичке структуре задатака, урађена су накнадна поређења аритметичких средина задатака међусобно. У Табели 19. дат је приказ разлика између семантичких структура задатака у различитим фазама истраживања.

Табела 19. *Поређење успешности између задатака различите семантичке структуре за цео узорак ученика (n = 89)*

Семантичка структура задатка		Иницијални тест			Завршни тест 1			Завршни тест 2		
C1	*C2*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*
Једнакобројни скупови	Производ мера	.089	.045	.514	-.018	.041	1.000	.170	.046	**<u>.004</u>**
Једнакобројни скупови	Мултипликативно поређење	.149	.044	**.011**	-.056	.029	.519	.088	.041	.361
Једнакобројни скупови	Правоугаона схема	.227	.048	**<u>.000</u>**	-.046	.031	1.000	.182	.050	**<u>.005</u>**
Једнакобројни скупови	Декартов производ	.456	.055	**<u>.000</u>**	.137	.041	**.012**	.132	.056	.199
Производ мера	Мултипликативно поређење	.061	.043	1.000	-.038	.034	1.000	-.082	.050	1.000
Производ мера	Правоугаона схема	.138	.048	**.047**	-.028	.039	1.000	.012	.049	1.000
Производ мера	Декартов производ	.368	.060	**<u>.000</u>**	.156	.038	**<u>.001</u>**	-.038	.062	1.000
Мултипликативно поређење	Правоугаона схема	.078	.050	1.000	.010	.030	1.000	.094	.048	.559
Мултипликативно поређење	Декартов производ	.307	.059	**<u>.000</u>**	.194	.040	**<u>.000</u>**	.044	.062	1.000
Правоугаона схема	Декартов производ	.229	.053	**<u>.000</u>**	.183	.044	**<u>.001</u>**	-.050	.057	1.000

Напомена.
C1 и C2 = семантичке групе задатака које се пореде;
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група;
SE (Standard Error) – стандардна грешка;
p – статистичка значајност;
$p < .05$;
<u>$p < .01$</u>

На основу статистичких разлика које су се појавиле између задатака различитих семантичких структура анализираћемо нивое разумевања множења код ученика у све три групе. Међусобним поређењем семантичких структура задатака на Инцијалном тесту, уочено је да ученици у доста већем степену разумеју множење као идеју једнакобројних скупова, него као мултипликативно поређење и правоугаону схему.Ученици су знатно успешнији у задацима са производом мера, него са Декартовим производом. Такви резултати могу бити последица трансфера знања са операције сабирања на операцију множења, којом су обухваћени различити текстуални задаци, који својом структуром подсећају на задатке коришћене у нашем истраживању (за толико већи број и толико пута већи број).

На Завршном тесту 1 нису уочене статистичке значајне разлике између задатака који се односе на једнакобројне скупове, производ мера, мултипликативно поређење и правоугаону схему, што показује да је утицај инструкција на ниво разумевања значења операције множења велики, односно да се ниво разумевања множења временом повећава уколико је праћен одговарајућим инструкцијама. Ови разултати показују да ученици разумеју различито значење чиниоца у задацима различите семантичке структуре (Downton and Sullivan, 2017). Даље, наведени аутори (Downton and Sullivan, 2017) су потврдили да употреба различитих репрезентација подстиче дубље разумевање множења, које одликује флексибилност и концептуално разумевање појмова, што је потврђено и резултатима нашег истраживања.

Насупрот резултатима на Завршном тесту 1, на Завршном тесту 2 ученици су показали нешто већи степен разумевања множења као једнакобројних скупова у односу на задатке са производом мера и правоугаоном схемом. Ове разлике су мање у односу на Иницијални тест, што показује да ученици делимично врше трансфер знања са множења једноцифрених бројева на множење двоцифрених бројева. Настале разлике су делом и последице бројева коришћених у задацима, о чему ће бити речи у 5. поглављу.

Генерални закључак, који се може извући када је у питању разумевање множења исказаног различитим семантичким структурама јесте да ученици најуспешније решавају задатке са једнакобројним скуповима, а затим задатке који се односе на мултипликативно поређење и производ мера. Праовугаона схема и Декартов производ су им искуствено непознати, али након адекватних инструкција разумевања ових семантичких структура се повећава. С обзиром да сматрамо да су веома значајне све наведене семантичке структуре, јер обухватају сва неопходна значења операције множења, бавили смо се и појединачном анализом резултата сваке групе ученика (Табела 20).

Табела 20. *Успешност различитих група ученика на задацима различите семантичке структуре на Завршном тестирању 1 и Завршном тестирању 2*

Група	Семантичка структура	Завршни тест 1		Завршни тест 2	
		M	*SE*	*M*	*SE*
К	Једнакобројни скупови	.800	.049	.600	.070
	Производ мера	.833	.065	.367	.082
	Мултипликативно поређење	.867	.040	.533	.081
	Правоугаона схема	.733	.042	.233	.073
	Декартов производ	.517	.069	.533	.085
Е1	Једнакобројни скупови	.839	.049	.903	.069
	Производ мера	.806	.064	.806	.081
	Мултипликативно поређење	.887	.040	.742	.079
	Правоугаона схема	.935	.041	.903	.072
	Декартов производ	.710	.068	.645	.084
Е2	Једнакобројни скупови	.875	.051	.893	.072
	Производ мера	.929	.067	.714	.085
	Мултипликативно поређење	.929	.042	.857	.084
	Правоугаона схема	.982	.043	.714	.076
	Декартов производ	.875	.072	.821	.088

Напомена.
M (Mean) – аритметичка средина
SE (Standard Error) – стандардна грешка

Анализирајући посебно резултате сваке групе ученика након систематске обраде множења (Завршни тест 1) уочавамо да је контролна група (Табела 20) показала најбоља постигнућа на задацима који се односе на мултипликативно поређење, а затим на задацима типа производ мера. Обе експерименталне групе су биле најуспешније код задатака са правоугаоном схемом. С тим, да је експериментална група 2 показала подједнака постигнућа на задацима који се односе на мултипликативно поређење и на производ мера, док се код експерименталне групе 1 на другом месту по нивоу постигнућа налази мултипликативно поређење, а затим разумевање множења као једнакобројних скупова. Ови резултати иду у прилог ранијим истраживањима, који истичу важност разумевања множења као праваоугане схеме (Skemp, 1993; Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009; Siemon, Breed and Virgona; Jacob and Willis, 2001; Larsson, 2016) за разумевање аритметичких правила у скупу природних и рационалних бројева, растављање чиниоца на просте чиниоце, разумевање везе између множења и дељења, као и за развој флексибилних стратегија множења, али потврђују и утицај експерименталног модела на добијене резултате.

Испитујући трансфер знања на множење двоцифреног и једноцифреног броја уочавамо да су обе експерименталне групе све задатаке решавале са већим степеном успешности у односу на контролну групу, без обзира на семантичку структуру којој задаци припадају, што показује да ученици из ових група поседују већи степен разумевања множења у односу на контролну групу ученика. Експериментална група 1 је показала висок степен постигнућа на задацима типа правоугаоне схеме и једнакобројних скупова, док је и експериментална група 2 и контролна група 2 показала најбоља постигнућа у задацима са једнакобројним скуповима. Ови резултати нам показују да ученици из експерименталне групе 1 показују разумевање множења као правоугаоне схеме. Важно је напоменути да је контролна група ученика најслабије резултате остварила на задацима који се односе на правоугаону схему,експериментална група 1 на задацима са Декартовим производом, док је експериментална група 2 код задатака са производом мера и задатака са правоугаоном схемом постигла најслабије резултате. Овакви резултати показују да употреба инструкција заснованих на аритметичким правилима и репрезентацијама утиче на боље разумевање правоугаоне схеме, иако су неки аутори истицали да је баш употреба ове схеме значајна за разумевање аритметичких правила (Loveridge, 2016; Jacob and Mulligan, 2014; Young-Loveridge, 2005; Hurst and Hurrell, 2016).

Како бисмо утврдили да ли постоје статистички значајне разлике између задатака различите семантичке структуре у различитим фазама истраживања по групама ученика обавили смо накнадне анализе (Прилог 3: Табеле 21, 22 и 23).

У контролној групи на сва три теста истраживања постоје статистички значајне разлике између постигнућа на задацима различите семантичке структуре, што указује на степен разумевања различитих семантичких структура задатака. Ова група ученика у највећем степену множење разуме као идеју једнакобројних скупова. На Иницијалном тесту уочене су статистички значајне разлике између задатака са једнакобројним скуповима и мултипликативним поређењем, као и између задатака са правоугаоном схемом и Декартовим производом, што показује да ученици боље разумеју једнакобројне скупове и правоугаоне схеме у односу на друге две семантичке структуре. И након обраде множења једноцифреним бројем код контролне групе уочене су статистички значајне разлике између задатака са једнакобројним скуповима и свих осталих семантичких структура. Када је у питању множење једноцифреног и двоцифреног броја контролна група показује најслабија постигнућа у задацима са правоугаоном схемом. Сматрамо да овакви резултати могу бити последица врсте задатака који су били заступљени на часовима математике.

На Инцијалном тесту експериментална група 2 је показала значајно већи степен разумевања једнакобројних скупова, производа мера и мултипликативног поређења у односу на Декартов производ, што се огледа у постигнућима ученика. Даље, уочено је да ова група показује боље разумевање множења као идеје једнакобројних скупова и производа мера у односу на правоугаону схему.

Код експрименталних група на завршним тестирањима нису уочене статистички значајне разлике између семантичких структура задатака осим у једном случају и то код експерименталне групе 1. На Завршном тестирању 1 уочено је да је ова група ученика постигла боља постигнућа на задацима са правоугаоном схемом у односу на Декартов производ.

Наши резултати и одсуство статистички значајних разлика између задатака различите семантичке структуре код експерименталних група ученика на завршним тестирањима показује да систематске инструкције усмерене на множење једноцифрених бројева утичу на повећање нивоа разумевања множења, што није случај код традиционалног приступа обради множења једноцифрених бројева. Разумевање множења само као идеје једнакобројних скупова није довољно, јер се оно своди на умножавање истих скупова, што води разумевању множења као поновљеног сабирања. Овакав приступ је оправдан само у почетним фазама, као и за разумевање различитог значења чиниоца (Mulligan and Watson, 1998; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Hurst and Hurell, 2016).

3.2. Употреба менталних стратегија множења у зависности од семантичке структуре задатака

Као што смо већ навели, примарни циљ нашег истраживања јесте испитивање мултипликативних стратегија множења. У првом делу анализе резултата истраживања бавили смо се менталним стратегијама множења које су ученици користили пре систематског увођења множења. У овом дела рада анализираћемо стратегије множења које су ученици користили у задацима различите семантичке структуре након систематске обраде множења једноцифреним бројевима, а то су: појединачно пребројавање, ритмичко пребројавање, поновљено сабирање, дуплирање са поновљеним сабирањем, дуплирање, знање чињеница, мултипликативне стратегије и остало (ученици који користе своје стратегије или не поседују стратегије рачунања) (Mulligan, 1992; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989 Sherin and Fuson, 2005;Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001;Heirdsfield et al, 1999; Downton and Sullivan, 2017; Zeljić et al., 2019).

а) Једнакобројни скупови

Једнакобројни скупови представљају искуствени имплицитни модел множења, који омогућава разумевање значења множења, као и вршење аритметичких операција пре обраде ових садржаја (Fischbein, 1985; Downton, 2008). Разумевање множења на овај начин ограничава разумевање свих својстава ове рачунске операције, при чему се јасно истиче значење сваког чиниоца (Ambrose, Beak, Carpenter, 2003), што некада може утицати и на избор одговарајуће менталне стратегије множења. У Табели 24. дат је приказ стратегија множења које су ученици из различитих група користили за решавање задатака са једнакобројним скуповима у различитим фазама истраживања.

Табела 24. *Стратегије коришћене за решавање задатака са једнакобројним скуповима*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
Иницијални тест	К	1 (1.97%)	3 (5.88%)	44 (86.27%)	2 (3.92%)	0 (0.0%)	1 (1.97%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	51
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	50 (92.59%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (5.56%)	1 (1.85%)	0 (0.0%)	54
	Е2	0 (0.0%)	2 (4.26%)	39 (82.98%)	1 (2.13%)	0 (0.0%)	2 (4.26%)	3 (6.38%)	0 (0.0%)	47
	У	**1 (0.66%)**	**5 (3.29%)**	**133 (87.5%)**	**3 (1.9%)**	**0 (0.0%)**	**6 (3.95%)**	**4 (2.6%)**	**0 (0.0%)**	**152**
Завршни тест 1	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (6.25%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	41 (85.42%)	4 (8.33%)	0 (0.0%)	48
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (9.62%)	12 (23.08%)	6 (11.54%)	7 (13.46%)	22 (42.31%)	0 (0.0%)	52
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	17 (34.69%)	6 (12.24%)	5 (10.20%)	21 (42.86%)	0 (0.0%)	49
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**8 (5.37%)**	**29 (19.46%)**	**12 (8.05%)**	**53(35.57%)**	**47 (31.54%)**	**0 (0.0%)**	**149**
Завршни тест 2	К	1 (5.56%)	0 (0.0%)	11 (61.11%)	6 (33.33%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	18
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (25%)	14 (50%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (25%)	0 (0.0%)	28
	Е2	0(0.0%)	0(0.0%)	7 (28%)	17 (68%)	0(0.0%)	0(0.0%)	1 (4%)	0(0.0%)	25
	У	**1 (1.41%)**	**0 (0.0%)**	**25 (35.21%)**	**37 (52.11%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**8 (11.27%)**	**0 (0.0%)**	**71**

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Ученици су за решавање задатака са једнакобројним скуповима у различитим фазама истраживања користили и различите стратегије множења. На Инцијалном тесту све групе испитаника су најчешће користиле поновљено сабирање као стратегију. Након систематске обраде множења једноцифреним бројем ученици су доминантно користили знање чињеница и мултипликативне стратегије. Занимљиви резултати су добијени на Завршном тесту 2, где су ученици за множење двоцифреног и једноцифреног броја користили пре свега дуплирање са поновљеним сабирањем и поновљено сабирање. Овакви резултати показују да се мултипликативне стратегије временом развијају и да су оне резултат поучавања, што неки аутори потврђују (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003).

С обзиром да на Инцијалном тесту нису пронађене статистички значајне разлике између група ученика можемо рећи да су групе биле веома уједначене пре деловања експерименталног фактора. Међутим, након примене оба модела примећене су разлике између група ученика. На Завршном тесту 1 контролна група за решавање задатака са једнакобројним скуповима најчешће користи знање чињеница. Ученици из ове групе множење једноцифреним бројем су усвајали кроз адитивни приступ, при чему је од њих очекивано да „науче“ таблицу множења, без претераног инсистирања на разумевању значења саме операције. С друге стране, обе експерименталне групе су доминантно користиле мултипликативне стратегије, а на другом месту се налази дуплирање са поновљеним сабирањем. Обе коришћене стратегије сугеришу да ученици при избору стратегија воде рачуна о структури бројева у задацима (*4·6 и 7·8*), који су у овом случају били погодни за коришћење наведених стратегија множења. У обе експерименталне групе се може уочити употреба знања чињеница, али у веома малом проценту. Такође, занимљиво је да експериментална група 2 није користила поновљено сабирање ни у једном случају, док је експерименталне група 1 употребљавала у малом проценту ову стратегију. За множење двоцифреног и једноцифреног броја (Завршни тест 2)контролна група је већински користила поновљено сабирање, док су обе експерименталне групе доминантно користиле дуплирање са поновљеним сабирањем, што опет одговара и самој структури броја у задацима

(*25·4*).Многа истраживања су истакла да је поновљено сабирање и дуплирање доминантно у решавању задатака са једнакобројним скуповима (Anghileri, 2001; Fischbeinetal., 1985; Izsak, 2004, Watanbe, 2003), што у нашем случају није потврђено. Као друга стратегија, јавило се дуплирање, али посматрајући и структуру бројева сматрамо да су се ученици пре стратегије прилагођавали бројевима у задацима.

б) Производ мера

Друга семантичка структура која је била заступљена у нашем раду јесте посматрање множења као производ мера. Разумевање множења на овај начин ствара основу за разумевање пропорција. И у овој семантичкој структури чиниоци имају различито значење које се не може представити истим репрезнетацијама као једнакобројни скупови, јер један чинилац представља величину, односно неку врсту мере. У Табели 25. дат је приказ стратегија које су ученици користили за решавање задатака који приказују производ мера.

Табела 25. *Стратегије коришћене за решавање задатака са производом мера*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
Иницијални тест	К	0 (0.0 %)	8 (20.52%)	27 (69.23%)	2 (45.13%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	2 (5.13%)	1 (2.56%)	39
	Е1	0 (0.0%)	7 (13.46%)	42 (80.77%)	2 (3.85%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (1.92%)	0 (0.0%)	52
	Е2	0 (0.0%)	7 (16.67%)	27 (64.29%)	2 (4.76%)	0 (0.0%)	3 (7.14%)	3 (7.14%)	0 (0.0%)	42
	У	**0 (0.0%)**	**22 (16.54%)**	**96 (72.18%)**	**6 (4.51%)**	**0 (0.0%)**	**3 (2.26%)**	**6 (4.51%)**	**1 (0.75%)**	**133**
Завршни тест 1	К	0 (0.0%)	1 (1.92%)	2 (3.85%)	2 (3.85%)	0 (0.0%)	41 (78.85%)	5 (9.62%)	1 (1.92%)	52
	Е1	0 (0.0%)	15 (27.27%)	4 (7.27%)	4 (7.27%)	2 (3.64%)	13 (23.64%)	17 (30.91%)	0 (0.0%)	55
	Е2	0 (0.0%)	18 (33.33%)	0 (0.0%)	5 (9.26%)	0 (0.0%)	9 (16.67%)	21 (38.89%)	1 (1.85%)	54
	У	**0 (0.0%)**	**34 (21.12%)**	**6 (3.73%)**	**11 (6.83%)**	**2 (1.24%)**	**63 (39.13%)**	**43 (26.71%)**	**2 (1.24%)**	**161**
Завршни тест 2	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (45.45%)	3 (27.27%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	2 (18.18%)	1 (9.09%)	11
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (12%)	6 (24%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16(64%)	0 (0.0%)	25
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (20%)	4 (20%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (50%)	2 (10%)	20
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**12 (21.43%)**	**13 (23.21%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**28 (50%)**	**3 (5.36%)**	**56**

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

На основу извршених анализа уочавамо да су ученици на Инцијалном тесту за производ мера у највећем проценту користили, као и код једнакобројних скупова, поновљено сабирање. Овде је приметно и коришћење стратегије ритмично пребројавање (16.54% ученика), што може бити и последица бројева коришћених у задатку (*5·8*), при чему ученици који су користили наведену стратегију показују разумевање значења замене места чинилаца. Посматрајући сваку групу ученика посебно, уочавамо да је код експерименталне групе 2 на Инцијалном тесту било заступљено и коришћење других стратегија поред поновљеног сабирања (35.71%).

На Завршном тесту 1, ученици су најчешће користили знање чињеница, мултипликативне стратегије и у нешто мањем проценту ритмичко пребројавање. Након систематске обраде множења једноцифреним бројем уочене су веће разлике између стратегија које су користиле групе ученика. Контролна група је у највећем проценту ове задатке решила користећи знање чињеница, док је код експерименталних група примећена употреба разноврснијих стратегија. Експериментална група 1 је у овим задацима највише користила мултипликативне стратегије, затим ритмичко пребројавање и знање чињеница. Експериментална група 2 је користила исте стратегије као ескпериментална група 1, с тим да је у овој групи у мањој мери заступљено коришћење знања чињеница. Сматрамо да је значајан проценат коришћења знања чињеница последица множења бројем 5, који представља основу за развој других менталних стратегија (Harris, 2001).

Посматрајући само ученике који су тачно урадили задатке (у контролној групи мање од 50% ученика) уочено је да су сви ученици на Завршном тесту 2 најчешће користили мултипликативне стратегије, а у нешто мањем проценту поновљено сабирање (22.86%) и дуплирање са поновљеним сабирањем (21.43%). Експерименталне групе су користиле мултипликативне стратегије и у мањем проценту дуплирање, а контролна група је користила преостале наведене стратегије.

Резултати нашег истраживања показали су да ученици задатке са производом мера решавају применом различитих мултипликативних стратегија, које су резултат поучавања (Sherin and Fuson, 2005). Ово је у супротнисти са ранијим истраживањима где је истакнуто да ученици задатке који се односе на разумевање множења као односа најчешће решавају стратегијама које се заснивају на поновљеном сабирању (Mulligan, 1992). Интуитивно наши ученици пре обраде множења немају развијене флексибилне стратегије множења, али се оне временом развијају као резултат поучавања, али се и преносе на множења двоцифрених и једноцифрених бројева.

в) Мултипликативно поређење

Мултипликативно поређење се у нашој наставној пракси најчешће усваја као посебна наставна јединица (Толико пута већи/толико пута мањи број) и из наведеног разлога често је мање заступљено у почетним фазама учења множења. Ова семантичка структура, као и производ мера, представљају централне проблеме мултипликативног мишљења (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto and Miller, 1998; Shield and Dole, 2013) и веома је важно да буду саставни део у обради множења у млађим разредима основне школе. Даље, у литератури се истиче и сложеност ове семантичке структуре у односу на остале семантичке структуре (Greer, 1992; Mulligan, 1992), али резултати нашег истраживања нису показали да деца имају велике потешкоће са разумевањем мултипликативног поређења.

У Табели 26. дат је приказ стратегија које су ученици користили за решавање задатака мултипликативног поређења.

Табела 26. *Стратегије коришћене за решавање задатака са мултипликативним поређењем*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
Иницијални тест	К	0 (0.0 %)	2 (5.71%)	32 (91.43%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (2.86%)	0 (0.0%)	35
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	42 (93.33%)	0 (0.0%)	2 (4.44%)	0 (0.0%)	1 (2.22%)	0 (0.0%)	45
	Е2	0 (0.0%)	3 (6.67%)	36 (80%)	0 (0.0%)	2 (4.44%)	2 (4.44%)	2 (4.44%)	0 (0.0%)	45
	У	**0 (0.0%)**	**5 (4%)**	**110 (88%)**	**0 (0.0%)**	**4 (3.2%)**	**2 (1.6%)**	**4 (3.2%)**	**0 (0.0%)**	**125**
Завршни тест 1	К	0 (0.0%)	1 (1.92%)	5 (9.62%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	37 (71.15%)	8 (15.38%)	1 (1.92%)	52
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (18.18%)	4 (7.27%)	1 (1.82%)	7 (12.73%)	33 (60%)	0 (0.0%)	55
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	11 (21.15%)	1 (1.92%)	0 (0.0%)	10 (19.23%)	30 (57.69%)	0 (0.0%)	52
	У	**0 (0.0%)**	**1 (0.63%)**	**26 (16.35%)**	**5 (3.14%)**	**1 (0.63%)**	**54 (33.96%)**	**71 (44.65%)**	**1 (0.63%)**	**159**
Завршни тест 2	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	9 (56.25%)	4 (25.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (6.25%)	2 (12.5%)	16
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (17.39%)	9 (39.13%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (43.48%)	0 (0.0%)	23
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (16.67%)	12 (50.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	8 (33.33%)	0 (0.0%)	24
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**18 (28.57%)**	**25 (39.68%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**19 (30.16%)**	**2 (3.17%)**	**63**

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Анализирајући добијене резултате можемо приметити да је пре свега највећи број ученика тачно решио задатке са мултипликативним поређењем на Завршном тесту 1. Као и у осталим семантичким структурама, на Инцијалном тесту све групе ученика су у највећој мерили користиле поновљено сабирање. Након систематске обраде операције множења, ученици су у претежно користили мултипликативне стратегије, као и знање чињеница и поновљено сабирање. Контролна група ученика доминантно користи знање чињеница. Експерименталне групе ученика су биле веома уједначне по питању коришћених стратегија, те су код њих доминантно биле заступљене мултипликативне стратегије, а у нешто мањој мери и поновљено сабирање. Ови резултати потврђују резултате ранијих истраживања, која указују на сложеност ове семантичке структуре, те ученици теже коришћењу „сигурнијих" стратегија рачунања (Greer, 1992; Mulligan, 1992). С друге стране, Мулиган (Mulligan, 1992) је истакао да деца користе стратегије пребројавања уз примену конкретних модела за решавање ове групе задатака. Наши ученици показују добро разумевање ове семантичке структуре, те бирају софистицираније стратегије за њихово решавање. Сматрамо да су ови резултати добри, с обзиром да је мултипликативно поређење веома важно за развој мултипликативног мишљења.

На Завршном тесту 2 за множење двоцифреног и једноцифреног броја (*18·4*) 39.68% ученика је користило дуплирање са поновљеним сабирањем, што показује да ученици врше трансфер знања са множења једноцифреним бројевима на множење двоцифреног и једноцифреног броја и да теже коришћењу подучаваних стратегија прилагођавајући их структури бројева у задацима. Поред ове стратегије, ученици су користили и поновљено сабирање и мултипликативне стратегије. Битно је напоменути да су мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем у већој мери заступљене код експерименталних група ученика, а поновљено сабирање у контролној групи ученика.

С друге стране, седам ученика од 16 из контролне групе која је тачно одговорила користило је неку од стратегија или свој начин рачунања, да би одредили тражени производ. Овакви резултати показују да деца интуитивно поседују одређене менталне стратегије множења пре увођења инструкција (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003), али да увођење стандардног алгоритма или инсистирање на учењу таблице множења спутава њихов даљи развој.

г) Правоугана схема

Многи аутори истакли су значај разумевања множења као праваоугане схеме (Baroody, 1990; Fuson, 190, Resnick, 1983; Verchaffel, Greer and De Corte, 2007; Davis, 2008; Young-Loveridge, 2005). Посматрање множења на овај начин омогућава разумевање аритметичких правила, пре свега замене места чинилаца и значење стандардног алгоритма, али и других својстава операције множења. Правоугаона схема се може посматрати као семантичка структура, али и врста репрезентација која омогућава једноставан приказ производа два броја, на начин које интуитивно подстиче ученике да користе различите флексибилне стратегије рачунања. У Табели 27. дат је приказ стратегија које су ученици користили за решавање задатака мултипликативног поређења.

Табела 27. *Стратегије коришћене за решавање задатака који се односе на правоугану схему*

		I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
Инцијални тест	К	6 (17.65%)	0 (0.0%)	22 (64.71%)	2 (5.88%)	2 (5.88%)	0 (0.0%)	2 (5.88%)	0 (0.0%)	34
	Е1	2 (4.35%)	0 (0.0%)	37 (80.43%)	2 (4.35%)	2 (4.35%)	0 (0.0%)	1 (2.17%)	0 (0.0%)	46
	Е2	1 (3.13%)	1 (3.13%)	23 (71.88%)	3 (9.38%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (12.5%)	0 (0.0%)	32
	У	**9 (8.04%)**	**1 (0.89%)**	**82 (73.21%)**	**7 (6.25%)**	**4 (3.57%)**	**0 (0.0%)**	**7 (6.25%)**	**0 (0.0%)**	**112**
Завршни тест 1	К	2 (4.55%)	0 (0.0%)	7 (15.91%)	2 (4.55%)	0 (0.0%)	24 (24.55%)	8 (18.18%)	1 (2.27%)	44
	Е1	2 (3.45%)	0 (0.0%)	6 (10.34%)	16 (27.59%)	8 (13.79%)	5 (8.62%)	21 (36.21%)	0 (0.0%)	58
	Е2	2 (3.64%)	0 (0.0%)	2 (3.64%)	18 (32.73%)	5 (9.09%)	5 (9.09%)	23 (41.82%)	2 (3.64%)	55
	У	**6 (3.82%)**	**0 (0.0%)**	**15 (9.55%)**	**36 (22.93%)**	**13 (8.28%)**	**34 (21.66%)**	**52 (33.12%)**	**3 (1.91%)**	**157**
Завршни тест 2	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (57.14%)	1 (14.29%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (14.29%)	1 (14.29%)	7
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (17.86%)	6 (21.43%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	17 (60.71%)	0 (0.0%)	28
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (15%)	3 (15%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	14 (70%)	0 (0.0%)	20
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**12 (21.82%)**	**10 (18.18%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**32 (58.18%)**	**1 (1.82%)**	**55**

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије
VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

На Инцијалном тесту све групе ученика су најчешће користиле поновљено сабирање као стратегију. Битно је напоменути да су ученици у овој групи задатака једино користили појединачно пребројавање на Инцијалном (8.04%) и Завршном тесту 1 (3.82%), јер сама структура задатка подстиче представљање задатка цртежом, који омогућава једноставно пребројавање укупног броја елемената. Присуство ове стратегије јесте у малом проценту, али је значајно, јер показује да ученици бар делимично стратегије прилагођавају семантичкој структури задатака. Ученици су у највећој мери на Завршном тесту 1 користили мултипликативне стратегије, знање чињеница и дуплирање са поновљеним сабирањем.

Код све три групе мали број ученика је користио појединачно пребројавање уз цртеж. И код задатака са правоугаоном схемом ученици из контролне групе најчешће користе знање чињеница и поновљено сабирање. Обе експерименталне групе су на Завршном тесту 1 у највећој мери користиле мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем.

На Завршном тесту 2 ниједан ученик није користио појединачно пребројавање, што је очекивано с обзиром на структуру бројева у овом задатку (8·16). Све групе посматрано заједно најчешће су користиле мултипликативне стратегије, а у мањој мери користили су поновљено сабирање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Као и код задатака са производом мера, само половина ученика из контролне групе је тачно решила задатак. Та половина ученика је најчешће користила поновљено сабирање и мањим делом мултипликативне стратегије, што потврђује речено да деца интуитивно поседују флексибилне стратегије рачунања. Обе експерименталне групе већински су користиле мултипликативне стратегије и у нешто мањој мери поновљено сабирање и дуплирање са поновљеним сабирањем.

Стављајући акценат на Завршни тест 1 можемо приметити да је у овој семантичкој структури примећена разноврсна употреба стратегија, што је последица структуре задатка, у којима чиниоци имају исто значење. У нашим уџбеницима су задаци и репрезентације које се односе на правоугану схему веома мало заступљени, те није изненађујуће да је само 7 ученика из контролне групе на Завршном тесту 2 решило овај задатак. С друге стране, и ранија истраживања су показала да мали број наставника примењује правоугаону схему за разумевање операције множења (Barmby and Milinkovic, 2011). Сматрамо да је јако важно да она постане саставни део увођења множења у 2. разреду, јер се на очигледан начин може представити производ два броја у скупу природних бројева до 100. Даље, такав приказ омогућава растављање чиниоца на различите начине што подстиче развој флексибилних стратегија рачунања како за множење, тако и за дељење (Lorriane and Mulligan, 2014).

д) Декартов производ

Задаци типа Декартовог производа, према мишљењу многих аутора (Greer, 1992; Mulligan, 1992) представљају најсложенију семантичку структуру, јер ови задаци подразумевају упаривање елемената једног скупа са елементима другог скупа. Ученицима је најтеже да самостално представе путем репрезентација ову семантичку структуру. С друге стране, веома је важно да задаци овог типа буду заступљени у млађим разредима основне школе, јер представљају основу за разумевање комбинаторике у старијим разредима. У Табели 28. дат је приказ стратегија које су ученици користили за решавање задатака са Декартовим производом.

Табела 28. *Стратегије коришћене за решавање задатака са Декартовим производом*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
Иницијални тест	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	27 (90%)	2 (6.67%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (3.33%)	30
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (76.92%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (7.69%)	2 (15.38%)	13
	Е2	0 (0.0%)	1 (3.7%)	25 (92.59%)	0 (7.5%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (3.7%)	27
	У	**0 (0.0%)**	**1 (1.43%)**	**62 (88.57%)**	**2 (2.86%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**1 (1.43%)**	**4 (5.71%)**	**70**
Завршни тест 1	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	6 (19.35%)	2 (6.45%)	0 (0.0%)	23 (74.19%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	31
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (15.91%)	9 (20.45%)	8 (18.18%)	10 (22.73%)	10 (22.73%)	0 (0.0%)	44
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	9 (18.37%)	6 (12.24%)	11 (22.45%)	18 (36.73%)	4 (8.16%)	1 (2.04%)	49
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**22 (17.74%)**	**17 (13.71%)**	**19 (15.32%)**	**51 (38.93%)**	**14 (11.29%)**	**1 (0.81%)**	**124**
Завршни тест 2	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16 (100%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	14(70%)	1 (5%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (25%)	0 (0.0%)	20
	Е2	0 (0.0%)	0 (0.0%)	18 (73.91%)	0 (0.0%)	0 (0.00%)	0 (0.0%)	5 (21.74%)	0 (0.0%)	23
	У	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**48 81.36%)**	**1 (1.69%)**	**0 (0.0%)**	**0 (0.0%)**	**10 (16.95%)**	**0 (0.0%)**	**59**

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Као што је већ напоменуто, ученици су показали најслабије разумевање Декартовог производа, те је и број тачних одговора у овим задацима најмањи. На Инцијалном тесту ученици су за решавање задатака из ове групе у највећој мери користили поновљено сабирање. Ученици из експерименталне групе 1 показали су најслабија постигнућа на задацима са Декартовим производом на Инцијалном тесту, с тим да је примећено да је један ученик из ове групе користио мултипликативну стратегију за решавање ових задатака.

На Завршном тесту 1 најчешће је коришћено знање чињеница за решавање ове групе задатака.У односу на иницијално тестирање број тачних одговора на Завршном тесту 1 је порастао. Када је у питању контролна група примећен је најмањи пораст броја тачних одговора у односу на Инцијални тест. Ученици из ове групе најчешће су на Завршном тесту 1 користили знање чињеница и мањим делом поновљено сабирање. Експерименталне групе су користиле разноврсне стратегије за решавање ових задатака. Код експерименталне групе 1 подједнако су биле заступљене мултипликативне стратегије и знање чињеница, а у незнатно мањем проценту поновљено сабирање, дуплирање са поновљеним сабирањем и дуплирање. Експериментална група 2 је користила исте стратегије као експериментална група 1, с тим да је најзаступљеније било знање чињеница, а затим дуплирање и поновљено сабирање. Значајна заступљеност знања чињеница у свим групама ученика је последица и коришћених бројева у задацима (*3·4 и 4·4*), који се у почетним фазама обраде заснивају на појединачном пребројавању и поновљеном сабирању, али их ученици лако памте и представљају им познате производе које користе за одређивање других производа (Sherin and Fuson, 2005).

На Завршном тесту 2, као и на Инцијалном тесту, ученици су најчешће користили поновљено сабирање. За разлику од претходних тестирања, ученици из контролне групе су у овом тестирању имали најмањи број тачних одговора. Сви ученици из контролне групе који су тачно одговорили користили су поновљено сабирање. Експерименталне групе су у највећој мери користиле поновљено сабирање, али су се у мањем проценту јавиле и мултипликативне стратегије.

Налази наших истраживања су показали да у задацима који се односе на Декартов производ ученици најчешће користе поновљено сабирање уколико су у питању садржаји који нису били предмет поучавања, док након поучавања долази до примене разноврснијих стратегија множења. Ови резултати су у супротности са ранијим истраживањима, која су показала да ученици задатке са Декартовим производом решавају стратегијама пребројавања уз примену конкретних модела (Mulligan, 1999). С друге стране, неки аутори (Heirdsfield et al., 1999) истакли су да се ученици враћају употреби сигурних стратегија за множење бројева који нису били предмет поучавања.

Уопштено гледано, можемо закључити да ученици пре инструкција, множење у највећој мери разумеју као идеју једнакобројних скупова, али да је разумевање различитих семантичких структура повећано након инструкција. С друге стране, неоспорно је да ученици разумеју задатке различите семантичке структуре и пре увођења инструкција (Marojoke and Beker, 2014). Наши резултати показују да је утицај инструкција усмерених на множење од великог значаја за повећање нивоа разумевања значења операције множења, односно да ученици поседују виши ниво разумевања множења, који се огледа у знатно бољим и уједначенијим резултатима између семантичких структура задатака. Уочено је боље разумевање значења правоугане схеме и мултипликативног поређења у односу на једнакобројне скупове. Разумевање множења на овај начин је веома важно због разумевања значења стандардног алгоритма, аритметичких својстава операције множења и дељења, као и за разумевање пропорција (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Anghileri, 1989; Siemon, Breed and Virgona, 2008). Даље, резултати су показали да ученици из експерименталних група имају највећа постигнућа на задацима који се односе на правоугаону схему на Завршном тесту 1, али да и на Завршном тесту 2 експериментална група 1 показује добро разумевање ове семантичке структуре, што је веома важно за развој мултипликативног мишљења, које подразумева развој ефикасних стратегија рачунања и препознавање и представљање мултипликативних ситуација (Sieom, Breed and Virgona, 2005). С друге стране, контролна група је остварила слаба постигнућа у задацима са правоугаоном схемом на Завршном тесту 2. Када је у питању производ мера и множење једноцифрених бројева, ученици из контролне групе и експерименталне групе 2 су остварили висок ниво постигнућа, што показује да они разумеју значење ове семантичке структуре, док експериментална група 1 показује нешто слабије разумевање ове структуре у односу на једнакобројне скупове, мултипликативно поређење и правоугаону схему. Насупрот томе, на Завршном тесту 2 ученици из експерименталне групе 1 имају боља постигнућа у задацима са производом мера него преостале две групе. Овакви резултати показују да ученици из ове групе разумеју све семантичке структуре, али да на њихову успешност утичу и бројеви у задацима. Сматрамо да је битно наставити рад са задацима овог типа, јер они представљају један од централних проблема мултипликативног мишљења. Наше истраживање показује да ученици генерално показују најслабије разумевање Декартовог производа у односу на остале семантичке структуре, што је у складу и са ранијим истраживањима (Greer, 1992; Mulligan, 1992). Ми сматрамо да недовољна употреба задатака и уопште активности које захтевају комбиновање елемената, доводи до слабијег разумевања ове семантичке структуре, те да би још у вртићу требало почети са употребом задатака који интуитивно захтевају комбиновање.

Разумевање множења које је битно за развој мултипликативног мишљења се огледа у способности ученика да реше задатке различих семантичких структура (Vergnuad, 1993) што наши ученици и успевају, али сматрамо да је за развој мултипликативног мишљења веома значајна и употреба флексибилних стратегија рачунања.

Када су у питању менталне стратегије множења наше истраживање је показало да без обзира на семантичку структуру задатка пре систематске обраде множења једноцифрених бројева сви ученици користе поновљено сабирање. Након систематске обраде множења примећена је употреба разноврснијих стратегија, али само код експерименталних група ученика. Ученици из контролне групе након обраде множења једноцифрених бројева користе знање чињеница и повремено поновљено сабирање, што показује да ученици из ове групе не бирају стратегије у зависности од семантичке структуре задатка и да је њихово мишљење адитивно. Наравно, неколико ученика је користило и друге стратегије, али је то занемарљив проценат. Без обзира на групу ученика, примећена је слаба употреба стратегије појединачно пребројавање, ритмично пребројавање и остало (индивидуалне стратегије или технике рачунања). Ритмично пребројавање је коришћено само у оним задацима где је један чинилац број 5. Из тог разлога, у овом делу истаћи ћемо само стратегије ученика из експерименталних група.

За решавање задатака из свих семантичких структура обухваћених истраживањем ученици из експерименталних група су у највећем проценту користили мултипликативне стратегије, што показује да ни ове групе ученика не бирају стратегије у зависности од структуре задатка, односно да не постоји директна веза између стратегија рачунања и семантичке структуре задатака, коју истче Мулиган и Мишелмор (Mulligan and Mitchelmore, 1987). Примећене су разлике у другим стратегијама које су биле мање заступљене, а коришћене су за решавање задатака. У задацима са једнакобројним скуповима и правоугаоном схемом ученици су користили дуплирање са поновљеним сабирањем. Када је у питању производ мера ученици су користили и ритмично пребројавање, што може бити последица и бројева коришћених у задацима, јер је један чинилац број 5. За решавање задатака са мултипликативним поређењем коришћено је и поновљено сабирање. Само у задацима са Декартовим прозводом поред мултипликативних стратегија коришћена су и знања чињеница. Као што смо навели, само код правоугаоне схеме уочено је коришћење појединачног пребројавања у малом проценту, што је очекивано с обзиром да оваква структура подстиче приказивање задатка цртежом.

Веће разлике између коришћених стратегија за задатке различите семантичке структуре примећене су за множење једноцифрених и двоцифрених бројева у експерименталним групама.За решавање задатака са једнакобројним скуповима најчешће је коришћено дуплирање са поновљеним сабирањем и поновљено сабирање. С друге стране, за решавање задатака који се односе на правоугаону схему и производ мера најчешће су коришћене мултипликативне стратегије. Мултипликативно поређење најчешће је решавано употребом мултипликативних стратегија и дуплирања са поновљеним сабирањем, а Декартов производ употребом поновљеног сабирања.

Наши резултати на Завршном тесту 1 и Завршном тесту 2 показују да експерименталне групе ученика имају развијене менталне стратегије множења, које су основа за развој мулитпликативног мишљења, док ученици из контролне групе показују адитивно мишљење. За множење двоцифрених и једноцифрених бројева пре њиховог поучавања експерименталне групе користе флексибилне менталне стратегије множења које прилагођавају семантичкој структури задатка или вредности бројева у задацима, али су резултат подучавања стратегија за множење једноцифрених бројева, које они преносе на множење двоцифрених и једноцифрених бројева. Можемо закључити да употреба различитих семантичких структура задатака и подстицање деце на примену различитих стратегија, које се огледа у демонстрирању могућих начина решавања, позитивно утиче на повећање нивоа разумевања множења и употребу флексибилних стратегија множења.

4. Утицај инструкција заснованих на значењу аритметичких правила и на значењу појма множења и употреби репрезентација на развој мултипликативног мишљења

У нашем истраживању користили смо два Модела увођења множења. У Моделу 1 множење једноцифреним бројевима и развој стратегија темељио се на разумевању и употреби артиметичких правила, које су у основи мултипликативних стратегија (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003). Након обраде множења бројевима 2, 5 и 10, са ученици из ове групе (експериментална група 1) обрађена су следећа аритметичка правила: замена места чинилаца, здруживање чинилаца и множење збира/разлике бројем. Систематске инструкције усмерене на множење једноцифреним бројевима и развој менталних стратегија множења у Моделу 2 су се заснивала на употреби декадних репрезентација и домина, као и на текстуалним задацима различите семантичке структуре. У овом моделу ученици (експериментална група 2) су аритметичка правила усвојили тек након обраде множења свих једноцифрених бројева, а многи аутори сматрају да се аритметичка правила инутитивно развијају кроз развој стратегија и разумевање различитих значења множења (Larsson, 2015; Ambrose et al., 2003; Jacob and Mulligan, 2014; Young-Loveridge, 2005; Hurst and Hurrell, 2016).

У овом делу рада анализираћемо успех све три групе ученика на Завршном тестирању 1 у циљу анализе утицаја наведених експерименталних фактора на развој мулитпликативног мишљења и менталних стратегија множења. Овде ћемо истаћи само статистички уочене разлике између група ученика, без одређивања природе тих разлика. У поглављима која следе, бавићемо се детаљнијом анализом природе тих разлика посматрајући различите аспекте мулитпликативног мишљења, које смо испитали кроз наше истраживње.

Једнострука анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике у резултатима на Завршном тесту 1 и Завршном интервјуу 1 узетим заједно између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 12.889$, $p = .000$), као и да постоје статистички значајне разлике у скоровима само на Завршном тесту 1 између група ученика (експерименталне групе 1, експерименталне групе 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 14.695$, $p = .000$). Аритметичке средине и стандардне девијације група у тестовним скоровима налазе се у Табели 29.

Табела 29. *Дескриптивна статистика Завршног тестирања 1*

Група испитаника	**Завршни тест 1**		**Завршни интервју 1**		**Завршни тест 1 и завршни интервју 1**	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Контролна група	12.800	4.506	11.267	1.172	24.067	4.975
Експериментална група 1	17.452	4.986	11.484	1.092	28.935	5.819
Експериментална група 2	18.643	3.391	11.714	.659	30.357	3.870
Цео узорак	16.258	5.008	11.483	1.013	27.742	5.620

Анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике између група ученика у резултатима на Завршном тесту 1 и Завршном интервјуу 1. Како бисмо открили природу тих разлика, спроведена су накнадна поређења (Табела 30) која су показала да постоје статистички значајне разлике између, са једне стране, контролне групе и са друге стране, обе експерименталне групе у правцу тога да су обе експерименталне групе имале боље постигнуће од контролне групе на Завршном тестирању 1. Експерименталне групе се међусобно нису статистички значајно разликовале у успешности на Завршном тесту 1 и Завршном интервју 1.

Табела 30. *Post-hoc тестови (Turkey's HSD) – поређење успешности између група на Завршном тесту 1 и Завршном интервју 1*

Г1	**Г2**	***MD***	***SE***	***p***
Контролна група	Експериментална група 1	-4.869	1.277	**.001**
Контролна група	Експериментална група 2	-6.291	1.310	**.000**
Експериментална група 1	Експериментална група 2	-1.422	1.300	0.521

Напомена
Г1 и Г2 – групе које се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p***< **.01**)

У циљу утврђивања утицаја инструкција поредили смо резултате сваке групе на Иницијалном тесту и Завршном тесту 1. На основу анализе варијансе за поновљена мерења, у коме је поновљени фактор био мерење са два нивоа: иницијално и завршно тестирање 1 утврђено је да код контролне групе не постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на тесту у два мерења када је у питању ова група (F(1, 29) = .091, p = .765). Она је постигла сличне резултате на завршном тестирању 1 (M = 10.83) и иницијалном тестирању (M = 11.03).

Како би се поредила генерална успешност за сваку групу на Иницијалном интервју и Завршном интервјуу 1 спроведена је анализа варијансе за поновљена мерења (Прилог 3: Табела 31), у коме је поновљени фактор био мерење, са два нивоа: иницијално интервјуисање и завршно интервјуисање 1. Резултати су показали да код контролне групе постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на интервјуу у два мерења када је у питању ова група (F(1, 29) = 10.666, p = .003), на начин да су бољи резултати постигнути на Завршном интервјуу 1 (M = 8.63) у односу на иницијално интервјуисање (M = 7.53).

Када је у питању експериментална група 1 анализа варијансе за поновљена мерења (Прилог 3: Табела 32) је показала да постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на тесту у ова два мерења када је у питању ова група (F(1, 30) = 6.426, p = .017, $\eta^2 p$ = .176), која показује да су ученици остварили боље резултате на завршном тестирању 1 (M = 14.26) у односу на иницијално тестирање (M = 12.84). Даље, утврђено је да код експерименталне групе 1 постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на интервјуу у два мерења (F(1, 30) = 199.481, p = .000), који показује да су ученици остварили боље резултате на завршном интервјуисању 1 (M = 11.48) у односу на иницијално интервјуисање (M = 7.35).

На основу анализе варијансе за поновљена мерења (Прилог 3: Табела 33) утврећено је да постоје статистички значајна разлика у укупним резултатима на тестовима у ова два мерења када је у питању експериментална група 2 (F(1, 27) = 28.094, p = .000, $\eta^2 p$ = .510), која показује да су ученици остварили боље резултате на завршном тестирању 1 (M = 15.54) у односу на иницијално тестирање (M = 12.46) и разлике у резултатима на ова два теста су статистички значајне. Даље, утврђено је да код ове групе постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на Иницијалном и Завршном интервјуу 1 у два мерења (F(1, 27) = 14.248, p = .001), која показује да су ученици остварили боље резултате на Завршном интервјуу 1 (M = 8.82) у односу на иницијално интервјуисање (M = 7.54).

Поновљена мерења и анализа варијансе показале су да код обе експерименталне групе постоје статистички значајне разлике између резултата на иницијалном тестирању и интервјуисању у односу на завршно тестирање 1 и завршно интервјуисање 1, које се огледа у побољшању резултата након интрукција усмерених на множење једноцифреним бројевима. Из наведеног разлога, у даљој анализи ћемо вршити детаљне упоредне анализе резултата све три групе ученика.

4.1. Разумевње мултипликативних ситуација након обраде множења једноцифреним бројем

Мултипликативно мишљење обухвата способност препознавања мултипликативих ситуација, њиховог представљања и примене различитих флексибилних стратегија множења и дељења (Siemon, BreedandVirgona, 2005). У нашем раду бавили смо се свим наведеним аспектима. Сматрамо да основу за развој мултипликативног мишљења представља разумевање мултипликативних ситуација што се огледа и у успешности ученика у решавању различитих задатака са иконичким репрезентацијама и текстуалних задатака који обухватају различите семантичке структуре.

Посматрањем успешности ученика из сваке групе на Завршном тесту 1(Табела 34) закључили смо да већина испитаника у свим групама даје тачне одговоре након систематске обраде множења једноцифреним бројем, што показује да су ученици усвојили ове садржаје, односно да препознају мултипликативне ситуације представљене иконичким репрезентацијама исказане тексуталним задацима различите семантичке структуре, али на основу ових података не можемо закључити колико их они и разумеју, због чега ћемо се бавити детаљном појединачном анализом задатака са иконичким репрезентацијама, али и задатака са различитим семантичким структурама.

Табела 34. *Успешност ученика на Завршном тесту 1 и Завршном интервју 1*

Група ученика	*Тест/ Интервју*	*Тачно урађен број задатака*	*Нетачно урађен број задатака*	*Неурађени задаци*
Контролна група	Завршни тест 1	384 (58.2%)	139 (21.1%)	137 (20.8%)
	Завршни интервју 1	338 (93.9%)	22 (6.1%)	/
Експери-ментална група 1	Завршни тест 1	541 (79.3%)	79 (11.6%)	62 (9.1%)
	Завршни интервју 1	356 (95.7%)	16 (4.3%)	/
Експери-ментална група 2	Завршни тест 1	522 (84.7%)	63 (10.2%)	31 (5.0%)
	Завршни интервју 1	328 (97.6%)	8 (2.4%)	/

Поредећи успех ученика из сваке групе можемо приметити да у односу на целокупне резултате на Инцијалном тесту (Табела 2) ученици из експерименталних група показују напредак који се огледа у већем проценту тачних одговора, односно смањеном броју нетачних одговора и броју неурађених задатака. На Завршном тесту 1 код експерименталне групе 1 примећено је повећање броја тачних одговора за 12%, а код експерименталне групе 2 за 17.41%. Насупрот томе, код контролне групе примећен је пад у проценту тачних одговора на Завршном тесту 1 за 9.09%.

Контролна група ученика показује слабије разумевање мултипликативних ситуација након обраде множења, што је у одређеној мери неочекивано и показује да ова група ученика не препознаје мултипликативне ситуације исказане иконичким репрезентацијама и текстуалним задацима. Резултати контролне групе показују недовољено развијено разумевање мултипликативних ситуација, што може бити и последица пренаглашености адитивног мишљења у настави (Clark and Kamii, 1996) од кога се деца тешко удаљавају ако је оно доминантно заступљено. Даље, овакви подаци говоре да ученици интуитивно поседују одређен степен мултипликативног мишљења, који се налази у почетним фазама развоја, али да усмереност наставног процеса на меморисање готових производа и употреба адитивног приступа множењу, као и заступљеност једне врсте задатака спречава разумевње множења, односно уопште развој мултипликативног мишљења. Насупрот томе, деца остају на нивоу адитивног мишљења, које је пре свега везано за сабирање и одузимање и не води ка концептуалном разумевању математичких појмова.

Поредећи успешност све три групе ученика, уочавамо да је најбоље резултате на Завршном тесту 1 постигла експериментална група 2 која је имала највећи број тачних одговора, а најмањи број нетачних и неурађених задатака. Нешто слабије резултате постигла је експериментална група 1, док је контролна група имала чак 41,9% неурађених и нетачних одговора. Нешто бољи резултати експерименталне групе 2 говоре у прилог томе да обрада множења и развој менталних стратегија множења применом различитих иконичких репрезентација и текстуалних задатака доприноси бољем разумевању мултипликативних ситуација, јер подстиче различито посматрање мултипликативних ситуација и развој флексибилнијих стратегија множења (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Marojoke and Beker, 2014). Ови резултати су посматрани у целини, те у овом тренутку говоримо само о разумевању мултипликативних ситуација, исказаних кроз успешност на целом Завршном тесту 1, односно кроз задатке са иконичким репрезентацијама и текстуалне задатке.

Када је у питању Завршни интервју 1 уочен је напредак све три групе испитаника у односу на Иницијални интервју. Такође, и на Завршном интервју 1 ученици из експерименталне групе 2 постигли су најбоље резултате. Завршни интервју 1 показује да без обзира да ли користимо адитивни приступ или неки од наведених модела ученици ће „научити“ производе или ће развити менталне стратегије множења које ће им омогућити да одреде производ два броја, али овде остаје питање какав је начин разумевања наведених математичких садржаја. У наредном поглављу (4.3.2) анализираћемо менталне стратегије множења, како бисмо утврдили да ли ученици користе различите флексибилне стратегије множења и које, или су њихови тачни одговори резултати научених производа.

Посматрајући разумевање мултипликативних ситуација кроз успешност на Завршном тесту 1 и Завршном интервјуу 1 можемо закључити да сви ученици успешно множе једноцифрене бројеве, али да је разумевање мултипликативних ситуација исказаних текстуалним задацима и иконичким репрезентацијама боље код експерименталних група у односу на контролну групу ученика, што је последица начина обраде множења једноцифреним бројевима. Без обзира на начин обраде, у експерименталним групама је акценат током обраде множења био на разумевању стратегија или значења операције множења. Дубље разумевање обухвата знање које укључује познавање структура, апстрактности и тачност, као и повезивање математичких појмова (Baroody et al., 2007), а све наведено доприноси смањењу броја грешака и повећању трајности усвојених математичких садржаја, у нашем случају множења једноцифреним бројем. Наши резултати показали су да овакво инсистирање на разумевању повећава степен успешности ученика, односно позитивно утиче на развој мултипликативног мишљења. Поновљеним истраживањем, које би обухватило испитивање разумевања значења стандардног алгоритма множења у скупу природних бројева или целих бројева, могло би се испитати у којој мери је обрада множења једноцифреним бројевима на приказане начине у 2. разреду утицала на разумевање множења у вишим разредима, односно проширеном скупу бројева.

Један од индикатора за разумевање значења операције множења јесте и уочавање и разумевање мултипликативних ситуација које су различито представљене. У нашем раду користили смо две врсте репрезентација: иконичко представљање и текстуалне задатке. Обе врсте репрезетнација су важан показатељ разумевања мултипликативних ситуација и неопходне су за развој мултипликативног мишљења. Како бисмо испитали разумевање оба типа репрезентација, бавили смо се њиховом појединачном анализом.

4.1.1. Разумевање мултипликативних ситуација представљених иконичким репрезентацијама

Циљ наших експерименталних модела и истраживања је било и испитивање разумевања мултипликативних ситуација представљених иконичким репрезентацијама, као и њихов утицај на избор стратегија множења. У оквиру наших модела користили смо репрезентације које јасно истичу структуру броја, односно производа два броја и које не захтевају директно појединачно пребројавање. Коришћена су три типа репрезентација: репрезентације са декадном основом, домине и правоугаона схема.

У Табели 35. приказана је успешност сваке групе ученика на задацима са иконичким репрезентацијама (1, 2, 3. и 4. задатак) на Завршном тесту 1.

Табела 34. *Успешност ученика на задацима са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1*

Група ученика	**Тачно урађен број задатака**	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Контролна група	98 (46.67%)	45 (21.43%)	67 (31.9%)
Експериментална група 1	178 (82.03%)	18 (8.29%)	21 (9.68%)
Експериментална група 2	176 (91.33%)	15 (7.65%)	5 (2.55%)

Посмтрајући сваку групу испитаника посебно можемо закључити да су експерименталне група имале значајно већи број тачних одговора (између 80% и 92%) у односу на контролну група ученика (испод 50%).

На основу резултата можемо закључити да контролна група показује слабије разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама, што је један од показатеља недовољно развијеног мултипликативног мишљења. Поредећи експерименталне групе међусобно, можемо закључити да је експериментална група 2 у задацима са иконичким репрезентацијама постигла најбоље резултате, односно да је чак 91.33% одговора било тачно. Ова група испитаника је имала занемарљив број неурађених задатака, који је значајно мањи него код експерименталне групе 1. Сматрамо да су овакви резултати последица употребе различитих врста репрезентација у експерименталној групи 2, које истичу различита значења операције множења током обраде множења једноцифреним бројем и показују способност ученика да искажу математичке идеје иконичким репрезентацијама што утиче на развој стратегија флексибилног рачунања (Sherin and Fuson, 2005; Wearne, 1996; Blote et al., 2000).

У циљу испитивања напредовања ученика након увођења експерименталног фактора спроведена је анализа варијансе за поновљена мерења, у коме је поновљени фактор био мерење, са два нивоа: иницијално и завршно тестирање 1 (прва четири задатка). Када је у питању контролна група ученика утврђено је да не постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима за ову групу задатака ($F(1, 29) = 3.625$, $p = .067$).Ученици из контролне групе су постигли сличне резултате на ова четири задатка на завршном тестирању 1 ($M = 3.27$) и иницијалном тестирању ($M = 4.27$). Посматрајући сваки задатак посебно (Табела 31) можемо уочити да су резултати на Завршном тесту 1 лошији него на Иницијалном тесту. Те разлике су посебно видљиве у задацима са правоугаоном схемом и делу задатака са доминама. Резултати контролне групе ученика показују да обрада множења без употребе различитих врста репрезентација, односно само повремена употреба декадних репрезентација при обради множења не подстиче развој мултипликативног мишљења, које подразумева и препознавање и представљање различитих мултипликативних ситуација репрезентацијама (Siemon, Breed and Virgona, 2005). Ученици из контролне групе још увек се налазе на нивоу адитивног мишљења, које је било доминантно при обради множења (адитивни приступ), што спречава развој мултипликативног мишљења, које подразумева и способност употребе и разумевања репрезентација множења.

Такође, ни код експерименталне групе 1 нису пронађене статистички значајне разлике у укупним резултатима за задатке са иконичким репрезентацијама у наведена два мерења ($F(1,\ 30) = 2.021$, $p = .165$) – они су постигли сличне резултате на ова четири задатка на завршном тестирању 1 (M = 5.74) и иницијалном тестирању (M = 5.26) (Табела 32). Анализирајући сваку групу задатака посебно можемо приметити да су резултати за сваку групу задатака бољи на Завршном тесту 1, али те разлике нису статистички значајне када су у питању задаци са иконичким репрезентацијама. У експерименталној групи 1 развој стратегија множења се темељио на примени аритметичких правила за која су биле коришћене различите репрезентације. Међутим, резултати ове групе показали су да индиректна употреба репрезентација при обради множења утиче на повећање разумевања значења мултипликативних ситуација представљених иконичким репрезентацијама, али то повећање није статистички значајно, односно мултипликативно мишљење се развија постепено. С друге стране, можемо уочити да је ова група испитаника показала добро разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репзрентацијама и на Инцијалном тесту.

Насупрот резултатима за наведене две групе, утврђено је да код експерименталне групе 2 постоји статистички значајна разлика у укупним резултатима на задацима са иконичким репрезентацијама у ова два мерења ($F(1,\ 27) = 24.952$, $p = .000$).Они су постигли значајно боље резултате на овој групи задатка на Завршном тесту 1 (M = 6.29) него на Инцијалном тесту (M = 4.82) (Табела 33). Посматрајући сваку групу задатака појединачно, можемо приметити да су ученици у оквиру сваке групе постигли боље резултате, али су те разлике статистички значајне код задатака са доминама и правоугаоном схемом. Овакви резултати нам говоре да употреба различитих иконичких репрезентација за обраду множења једноцифрених бројева значајно утиче на повећање нивоа разумевања мултипликативних ситуација, те да су овакви резултати последица кориишћења Модела 2, у коме су биле заступљене различите иконичке репрезентације. Ученици из ове групе показују способност препознавања и исказивања мултипликативних ситуација иконичким репрезентацијама. Ова способност је једна од важних компоненти мултипликативног мишљења и према мишљењу неких атуора (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014) употреба репрезентација подстиче и разумевање композитних јединица, значења чиниоца и производа, јер оспособљава за флексибилну поделу бројева и разумевање аритметичких правила, што смо испитали кроз анализу коришћених менталних стратегија множења.

Уопштено гледано, можемо закључити да врста и тип инструкција значајно утиче на разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама, те ученици који су имали инструкције засноване на значењу показују веће разумевање наведених задатака.

У даљем делу рада, бавићемо се детаљнијом анализом успешности сваке групе испитаника на задацима са различитим иконичким репрезентацијама. У Табели 35. дат је приказ успешности ученика на задацима са различитим врстама иконичких репрезентација.

Табела 35. *Успешност ученика на задацима са различитим иконичким репрезентацијама на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1*

Врста репрезентације	**Иницијални тест**	**ЗАВРШНИ ТЕСТ 1**		
		Контролна група	**Експериментална група 1**	**Експериментална група 2**
Правоугана схема	**65.74%**	46.67%	82.26%	88.89%
Декадна репрезентација	**74.16%**	61.67%	87.1%	89.29%
Домине	**66.57%**	36.67%	79.57%	91.67%

С обзиром да су групе ученика биле веома уједначене на Инцијалном тесту када су у питању задаци са иконичким репрезентацијама поредићемо резултате сваке групе испитаника на Завршном тесту 1 са целокупним резултатима на Инцијалном тесту. На основу наших резултата, као што смо већ истакли обе експерименталне групе постигле су боље резултате на Завршном тесту 1 у односу на иницијално тестирање без обзира која је врста иконичке репрезентације у питању (правоугана схема, домине или декадне репрезентације), што није био случај код контролне групе ученика. Контролна група ученика је показала слабије разумевање све три врсте репрезентација на Завршном тесту 1. Овакви резултати показују да добре и усмерене инструкције утичу на повећање разумевања и употребе иконичких репрезентација, док одсуство истих у наставној пракси утиче на смањење нивоа разумевања и примене истих. Као што смо већ истакли, експериментална група 1 је множење усвајала кроз разумевање и примену аритметичких правила, те индиректна употреба различитих врста иконичких репрезентација у овој групи ученика утиче на разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама, али у мањој мери него када су ученици директно изложени свакодневној употреби иконичких репрезентација на којима се заснива обрада множења једноцифреним бројевима.

Сматрамо да је јако важно да у почетним фазама учења буде заступљена употреба различитих репрезентација, које омогућавају конкретизацију математичких појмова и представљају основу за развој апстрактних математичких појмова (Brownetal., 2009). Употреба репрезентација у процесу обраде множења је веома важна, јер подстиче развој индивидуалних начина решавања задатака, што доприноси концептуалном разумевању значења множења, а касније подстиче и развој флексибилинијих стратегија рачунања. Битно је истаћи да неразумевање одређеног типа репрезентације, као што су домине и правоугаона схема, код контролне групе јесте последица потупног занемаривања ових репрезентација у првом и другом разреду. С друге стране, нешто боље разумевање декадних репрезентација је очекивано с обзиром да се бројеви до 100, као и сабирање и одузимање у блоку бројева до 100, обрађује коришћењем декадних репрезентација, али су и на задацима са том врстом репрезентација ученици показали нижа постигнућа него на Инцијалном тесту. Овакви резултати ученика из контролне групе су последица обраде множења кроз адитиван приступ и показују да се множење разуме као збир једнаких сабирак, као и да ови ученици нису на основу адитивног мишљења развили и мултипликативно мишљење. У овој групи испитаника акценат је стављен на памћење готових производа, док је концептуално разумевање значења множења био споредни циљ. Можемо закључити да овакав приступ обради множења у другом разреду, при чему је занемарен значај употребе конкретних репрезентација и пиктограма који олакшава увођење коцепата и метода рачунања (Milinković and Dabić, 2015), води ка слабом разумевању иконичких репрезентација. С друге стране, обе експерименталне групе су показале велики степен успешности на овим задацима. Анализирајући посебно експерименталне групе, примећујемо да експериментална група 1 показује слабије разумевање свих врста иконичких репрезентација у односу на експерименталну групу 2. Најсличније резултате ове групе су показале код разумевања декадних репрезентација, које су коришћене и за сабирање и одузимање у скупу бројева до 100. Даље, експериментална група 2 показала је највећи степен разумевања репрезентација са доминама, док је разумевање домина у експерименталној групи 1 нешто слабије у односу на остале типове репрезентација. Доминске репрезентације су у уџбеницима које су ученици користили заступљене у малом проценту, те овакви резултати су последица коришћених модела, односно заступљености иконичких репрезентација током обраде множења. Овакви резултати, показују да споредна употреба репрезентација (експериментална група 1) током обраде математичких садржаја, као што је употреба декадних репрезентација подстиче концептуално разумевање математичких садржаја, али се оно постепено развија и повећава са узрастом, односно да постепено, али константно присуство одређеног типа репрезентација повећава степен њиховог разумевања. Код експрименталне групе 2 сва три типа репрезентација су била заступељена подједнако при обради множења једноцифреним бројевима и коришћене су свакодневно у циљу разумевања значења операције множења, те се и развој стратегија множења темељио на њиховој употреби. Из наведеног разлога, сматрамо да су бољи резултати код експерименталне групе 2 последица начина обраде множења, односно употребе иконичких репрезентација у већем проценту него у експерименталној групи 1. Без обзира да ли се репрезентације користе као пратећи садржаји који омогућавају лакше разумевање математичких појмова (у нашем случају експериментална група 1) или су они основа за развој значења одређеног математичког појма (експериментална група 2), треба тежити флексибилној употреби различитих репрезентација (Dreyfus, 1991), јер се на тај начин постепено доприноси развоју концептуалног разумевања математичких садржаја, крећући се од конкретног ка апстрактном (Goldstone and Son, 2005; Hiebert and Carpenter, 1992; Sfard, 2000).

Један од показатеља разумевања значења иконичких репрезентација је и начин на који ученици реагују на репрезентацију постављајући одговарајући производ у циљу записивања израза и одређивања вредности израза представљеног репрезентацијом. Анализирајући резултате на Инцијалном тесту (Табела 5) приметили смо да су ученици у већини случајева (63.5%) користили операцију множења за одређивање вредности израза, што показује да ученици пре систематских инструкција усмерених на множење разумеју значење мултипликативних ситуација представљених иконичким репрезентацијама, те да на њих реагују састављајући одговарајуће производе. У табели 36. дат је приказ начина решавања задатака са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1 по групама ученика.

Табела 36. *Начин решавања задатака са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1 по групама ученика*

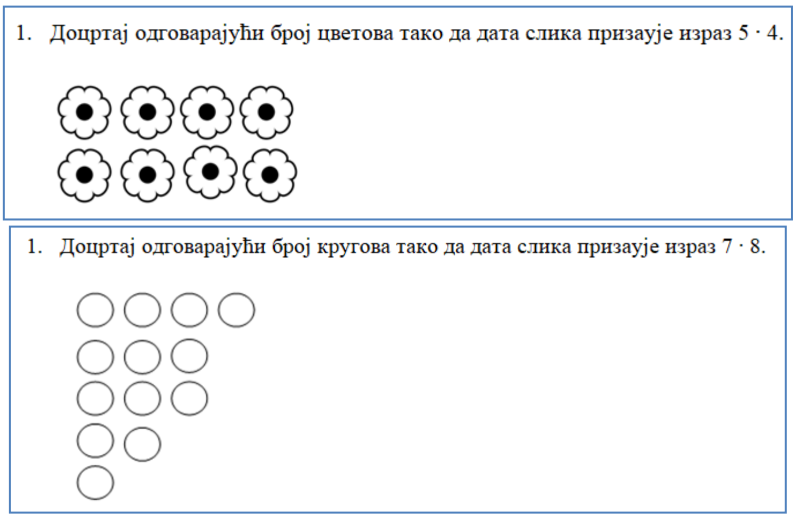
		Операција сабирања			**Операција множења**			**Без постављања израза**		
		К	**Е1**	**Е2**	**К**	**Е1**	**Е2**	**К**	**Е1**	**Е2**
Домине	2а	/	/	1 (3.6%)	13 (86.7%)	27 (96.4%)	26 (92.9%)	2 (13.3%)	1 (3.6%)	1 (3.6%)
	2б	2 (20.0%)	/	2 (8.0%)	8 (80.0%)	22 (100%)	22 (88.0%)	/	/	1 (4.0%)
	2в	2 (25.0%)	1 (4.3%)	2 (8.0%)	6 (75.0%)	22 (95.7%)	22 (88.0%)	/	/	1 (4.0%)
Праваоугана схема (3)		1 (4.3%)	2 (6.9%)	1 (3.7%)	22 (95.7%)	26 (89.7%)	26 (96.3%)	/	1 (3.4%)	/
Декадне репрезентације	4а	/	/	1 (4.0%)	20 (95.2%)	29 (100%)	24 (96.0%)	1 (4.8%)	/	/
	4б	/	/	1 (4.0%)	19 (95.0%)	26 (100%)	24 (96.0%)	1 (5.0%)	/	/
Укупно		5 (5.2%)	3 (1.9%)	8 (5.2%)	88 (90.7%)	152 (96.8%)	144 (92.9%)	4 (4.1%)	2 (1.3%)	3 (1.9%)

Напомена:
Подаци представљају аритметичка средина група на Завршном тесту 1 на датом задатку
К – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2

Поредећи начине решавања задатака са иконичким репрезентацијама на Инцијалном и Завршном тесту 1 (2, 3. и 4. задатак)можемо приметити да је на читавом узорку мањи проценат ученика решавао ове задатке сабирањем или на неки други начин, што је у супротности са иницијалним тестирањем на којем је скоро трећина ученика (22.9%) решила задатке сабирањем. Оно што се може истаћи јесте да је да су све три групе испитаника у највећем проценту (преко 90%) користиле операцију множење, што показује да ученици који тачно решавају задатке показују разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама. С друге стране, око 5% ученика из контролне групе и експерименталне групе 2 је решавало задатке користећи операцију сабирања, што говори да у овим групама постоје ученици који и након обраде множења једноцифреним бројевима и даље посматрају множење на адитивном нивоу, односно као поновљено сабирање. Посматрајући сваку врсту репрезентације можемо закључити да је експериментална група 1 у оба случаја за решавање задатака са декадним репрезентацијама користила само операцију множење и ниједан ученик није користио сабирање или неки други начин поставаљања израза. Даље, ова група је и за решавање задатака са доминама користила најчешће операцију множења, док је само један одговор у три задатка са овом групом испитаника решен записивањем збира. За решавање задатака са правоугаоном схемом само по 1 испитаник из контролне групе и експерименталне групе 2 су користили операцију сабирање. С друге стране, за решавање овог типа задатка ученици из експерименталне групе 1 су користили и операцију сабирања (2 ученика) или нису постављали израз (1 ученик). Када је у питању експериментална група 1, можемо приметити да ова група у највећем проценту користи операцију множења, али са изузетком правоугаоне схеме, где поједини ученици (само 3 испитаника) показују неразумевање мултипликативне ситуације исказане овом репрезентацијом. С друге стране, нешто већи број ученика из експерименталне групе 2 у односу на експерименталну групу 1 користи операцију сабирања и неки други начин за решавање ових задатака, што показује да ови ученици иако тачно решавају задатак, још увек нису у потпуности развили способност реаговања на мултипликативне ситуације исказане иконичким репрезентацијама.

Наши резултати показују да ученици који тачно решавају задатак успешно препознају мултипликативне ситуације исказане различитим иконичким репрезентацијама. Они правилно „реагују“ на њих, постављајући одговарајући израз множења. Можемо закључити да уколико ученици успешно препознају мултипликативну ситуацију они ће успешно и поставити производ, те о утицају експерименталног фактора на начин решавања задатка у овом делу не можемо говорити. Разумевање иконичких репрезентација на Завршном тесту 1 у односу на Инцијални тест показује да ученици након обраде множења постепено напуштају пребројавање и операцију сабирања, која је карактеристична за адитивно мишљење (Fennema and Carpenter, 1992; Milola and Stephens, 2020) и у већем степену користе операцију множења, односно постепено почињу да мисле мултипликативно.

Разумевање значења мултипликативних ситуација огледа се и у способности представљања производа одговарајућом иконичком репрезентацијом (Cai, 2004; Koedingeretal., 2008).Кроз 1. задатак на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1 (Слика 14) испитали смо могућност представљања производа два броја преко правоугаоне схеме.



Слика 14. *Први задатак на Иницијалном тесту и Завршном тесту 1*

Значај правоугаоне схеме за обраду математичких садржаја смо већ истакли у ранијим поглављима. С обзиром да правоугаона схема истиче битне аспекте множења (бинарна операција, репликативност множења, комутативност и дистрибутивност множења у односу на сабирање) (Barmby et al., 2009) изабрали смо у овом задатку баш овај тип репрезентације, при чему чиниоци имају иста значења. У Табели 37. налази се приказ успешности ученика на 1. задатку на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1.

Табела 37. *Успешност ученика на 1. задатку на Завршном тесту 1 и Инцијалном тесту*

	Тачно урађен број задатака	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Контролна група	6 (20%)	14 (46.67%)	10 (33.33%)
Експериментална група 1	22 (70.97%)	7 (22.58%)	2 (6.45%)
Експериментална група 2	21 (75%)	5 (17.86%)	2 (7.14%)
Иницијални тест	**56.18%**	**42.7%**	**1.12%**

Упоређујући резултате које су ученици постигли на Инцијалном тесту можемо приметити да се проценат тачно урађених задатака код екперименталних група повећао, што није случај са контролном групом ученика. Овакви резултати показују да ученици из експерименталних група након систематске обраде множења једноцифреним бројевима показују боље разумевање мултипликативних ситуација приказаних иконичким репрезентацијама и да поседују способност представљања мултипликтивних ситуација иконичким репрезентацијама. Посматрајући број ученика који нису урадили задатке, можемо закључити да у обе експерименталне групе само два ученика није урадило 1. задатак. Резултати нашег истраживања показују да након инструкција усмерених на множење једноцифреним бројевима ученици из експерименталних група показују доста бољу способност представљања мултипликативних ситуација иконичким репрезентацијама него ученици из контролне групе. Насупрот томе, резултати контролне групе потврђују да учење напамет производа једноцифрених бројева води ка смањењу концептуалног разумевања множења (Reys and Barger, 1994), што није случај са експерименталним групама. Контролна група ученика не препознаје мултипликативне ситуације исказане иконичким репрезентацијама и нема развијену способност представљања множења правоугаоном схемом. Упоређујући експерименталне групе међусобно можемо приметити да нема разлика између њихових резултата, када је у питању овај задатак.Овакви резултати показују да без обзира да ли се обрада множења заснива на употреби различитих репрезентација (текстуалних и иконичких) или на разумевању значења аритметичких правила, које прати употреба репрезентација, ученици подједнако добро разумеју значење операције множења и постепено су развили способност иконичког представљања производа два броја, што је одлика мултипликативног мишљења. Сматрамо да учење са разумевањем, без обзира да ли се оно заснива директно или индиректно на употреби репрезентација, доприноси разумевању различитих мултипликативних ситуација, што треба да буде један од основних циљева при обради елементарних математичких појмова.

Представљање множења преко правоугаоне схеме је кључно за развој мултипликативног мишљења, јер омогућава представљање задатака различите семантичке структуре и подстиче развој флексибилних стратегија множења (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014). Учење са разумевањем значења садржаја код ученика, у нашем случају множења, развија способност разумевања различитих мултипликативних ситуација што је веома важно за развој мултипликативног мишљења.

4.1.2. Разумевање мултипликативних ситуација представљених текстуалним задацима различите семантичке структуре

Наши налази истраживања су показали да ученици могу успешно да решавају текстуалне задатке различите семантичке структуре пре обраде множења уколико су им дате одговарајуће репрезентације и контексти задатака блиски њиховом искуству, што потврђују и ранија истраживања (Marojoke and Beker, 2014). У претходном поглављу (IV – 3.1) анализирали смо како различите семантичке структуре утичу на разумевање значења множења и избор стратегија множења. У овом делу рада анализираћемо успешност сваке групе испитаника, као и разлике између група ученика у погледу разумевања значења задатака различите семантичке структуре.

У Табели 38. дат је приказ успешности ученика различитих група на текстуалним задацима на Завршном тесту 1.

Табела 38. *Успешност ученика на текстуалним задацима на Завршном тесту 1*

Група ученика	**Тачно урађен број задатака**	**Нетачно урађен број задатака**	**Неурађени задаци**
Контролна група	227 (75.67%)	39 (13%)	34 (11.33%)
Експериментална група 1	266 (85.81%)	35 (11.29%)	9 (2.90%)
Експериментална група 2	259 (92.5%)	15 (5.36%)	6 (2.14%)

На основу података датих у Табели 38. можемо закључити да су ученици из експерименталне групе 2 били најуспешнији у решавању текстуалних задатака, док су најмањи степен успешности имали ученици из контролне групе, те је ова група имала и највећи проценат нетачних и неурађених задатака. Значајно је истаћи да су експерименталне групе имале сличан проценат неурађених задатака, али да је нешто већи број грешака имала експериментална група 2. Како бисмо испитали природу тих разлика и утицај експериметалних фактора урађена су детаљнија истраживања којим смо извршили упоредну анализу за сваку група ученика за сваку семантичку структуру поредећи успешност на Иницијалном и Завршном тесту 1 (Прилог 3: Табела 39). Оно што је битно истаћи да су све групе ученика постигле боље резултате на Завршном тесту 1 него на Инцијалном тесту, што говори да ученици разумеју операцију множења, али смо даље испитивали колико је напредовала свака група ученика по групама задатака. У табелама 40, 41. и 42. налази се приказ поређења успешности сваке групе ученика на Иницијалном и Завршном тесту 1. Анализирајући те податке извршили смо поређење успешности за сваку групу ученика.

Табела 40. *Поређење успешности контролне групе испитаника у задацима различите семантичке структуре на Завршном тесту 1*

Семантичка структура	**Т1**	**Т2**	***MD***	***SE***	***p***
Једнакобројни скупови	ИТ	ЗТ1	.050	.067	1.000
Производ мера	ИТ	ЗТ1	-.167	.085	.163
Мултипликативно поређење	ИТ	ЗТ1	-.283	.073	**.001**
Правоугаона схема	ИТ	ЗТ1	-.167	.076	.095
Декартов производ	ИТ	ЗТ1	-.017	.093	1.000

Напомена:
Т1 и Т2 = тестирања која се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p*** **< .05**; ***p*** **< .01)**

На основу поређења успешности ученика из контролне групе на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1 можемо закључити да у задацима различите семантичке структуре нема статистички значајних разлика у резултатима на ова два теста. Једина статистички значајна разлика јавила се у групи задатака са мултипликативним поређењем, које показује да су ученици из контролне групе задатке са мултипликативним поређењем успешније решавали на Завршном тесту 1 у односу на Инцијални тест. Можемо приметити да су ученици из ове групе задатке са једнакобројним скуповима и Декартовим производом урадили са истим степеном успешности на оба тестирања. Овакви резултати нам показују да деца множење пре свега разумеју као идеју једнакобројних скупова, што је одлика адитивног мишљења. С друге стране, неразумевање Декартовог производа у оба тестирања је последица слабе заступљености овог типа задатака на часовима математике у млађим разредима основне школе.

Табела 41. *Поређење успешности експерименталне групе 1 испитаника у задацима различите семантичке структуре*

Семантичка структура	**T1**	**T2**	***MD***	***SE***	***p***
Једнакобројни скупови	ИТ	ЗТ1	.032	.066	1.000
Производ мера	ИТ	ЗТ1	.000	.084	1.000
Мултипликативно поређење	ИТ	ЗТ1	-.161	.072	.083
Правоугаона схема	ИТ	ЗТ1	-.194	.075	**.035**
Декартов производ	ИТ	ЗТ1	-.500	.092	**.000**

Напомена:
T1 и T2 = тестирања која се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p***< **.05**; ***p***< **.01**)

На основу анализе варијансе за поновљена мерења (Прилог 3: Табела 32) ученици из експерименталне групе 1 су већину задатака урадили боље на Завршном тесту 1, али само у три задатка су уочене статистички значајне разлике. То су задаци који се односе на мултипликативно поређење, правоугаону схему и Декартов производ. Можемо закључити да су ученици из ове групе на Завршном тесту 1 показали доста боље разумевање задатака са правоугаоном схемом, као и задатака са Декартовим производом, као и веће разумевање задатака са мултипликативним поређењем, што се огледа у њиховим постигнућима. Занимљиво је приметити да су ученици имали исти степен успешности на оба тестирања у задацима са једнакобројним скуповима и производом мера. Ови резултати показују да ученици из експерименталне групе 1 поседују интуитивно разумевање наведених типова задатака, што може бити последица трансфера знања са операције сабирања на операцију одузимања. Такође, можемо приметити да је ова група остварила велики напредак у решавању задатака који се односе на Декартов производ. Занимљиво је истаћи, да је ова група на Инцијалном тесту показала најслабије разумевање овог типа задатака. Велики напредак ученика из ове групе у задацима са Декартовим производом, јесте и последица коришћеног Модела 1. Можемо закључити да употреба артиметичких правила за развој стратегија множења уз коришћење различитих типова задатака позитивно утиче на разумевање множења, што је битно за развој мултипликативног мишљења. У складу са тим, можемо закључити да је мишљење деце из експерименталне група 1 попримило карактеристике мултипликативног.

Табела 42. *Поређење успешности експерименталне групе 2 испитаника у задацима различите семантичке структуре*

Семантичка структура	**Т1**	**Т2**	***MD***	***SE***	***p***
Једнакобројни скупови	ИТ	ЗТ1	-.036	.069	1.000
Производ мера	ИТ	ЗТ1	-.107	.088	.687
Мултипликативно поређење	ИТ	ЗТ1	-.125	.076	.309
Правоугаона схема	ИТ	ЗТ1	-.411	.079	**.000**
Декартов производ	ИТ	ЗТ1	-.393	.096	**.000**

Напомена:
Т1 и Т2 = тестирања која се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p***< **.05**; ***p***< **.01)**

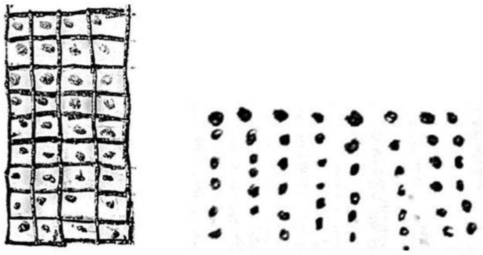
На основу анализе варијансе за поновљена мерења (Прилог 3: Табела 33) можемо приметити да су ученици из експерименталне групе 2 у свим типовима задатака, сем задатака са једнакобројним скуповима, остварили статистички значајне разлике у односу на Инцијални тест, што показује да су они знатно боље решавали задатке на Завршном тесту 1 него на Инцијалном тесту. У Табели 42. налазе се поређења успешности експерименталне групе 2 на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1, унутар различитих група задатака са различитом семантичком структуром. Експериментална група 2 показала је нешто боље резултате у односу на експерименталну групу 1. Међутим, можемо закључити да су ученици из ове групе статистички значајније разлике постигли у задацима са правоугаоном схемом и Декартовом производом, у погледу бољих резултата на Завршном тесту 1 у односу на Инцијални тест. Занимљиво је истаћи су ови ученици, као и ученици из експерименталне групе 1 остварили највећа постигнућа на задацима са правоугаоном схемом, што је свакако последица коришћења различитих типова репрезентација. Даље, можемо приметити да је у већини задатака ова група ученика на Инцијалном тесту имала слабије резултате у односу на експерименталну групу 1, те да је њихов напредак на Завршном тесту заиста статистички заначајан. Разумевање правоугаоне схеме је веома важно, јер доприноси разумевању стандардног алгоритма, а утиче и на развој флексибилних стратегија множења (Davis, 2008; Young-Loveridge, 2005a, 2005b; Lorraine and Mulligan, 2014: 39). Даље, примећено је да је ова група ученика остварила добра постигнућа и на задацима са Декартовим произовдом, што је веома важно за разумевање комбинаторике у старијим разредима основне школе. Како би се разумеле пропорције у старијим разредима, битно је разумевање производа мера. Ученици из ове групе су показали виши ниво постигнућа на овом типу задатака него на ицинијалном тесту, што показује да ученици поседују боље разумевање производа мера након систематске обраде множења. Резултати ове групе ученика показују да они поседују висок степен разумевања мултипликативних ситуација.

Упоређујући резултате група међусобно можемо приметити да је контролна група ученика и експериментална група 1 постигла нешто слабије резултате на завршном тесту 1 у односу на Инцијални тест када су у питању задаци са иконичким репрезентацијама, што није случај са експерименталном групом 2, која је у свим групама задатака постигла знатно боље резултате. Овакви резултати показују да ученици интуитивно поседују добро разумевање идеје једнакобројних скупова, која им је искуствено блиска, те незнатно слабији резултати на завршном тесту 1 код наведених група ученика могу бити и последица бројева коришћених у задацима са једнакобројним скуповима. На Инцијалном тесту коришћени су производи који су имали мању вредност (*3·4, 7·3*) у односу на вредности бројева коришћене на Завршном тесту 1 (*4·6, 7·8*). Даље, ово показује да ученици из експерименталне групе 2 без обзира на величину бројева у задацима успешно одређују производ, али о томе ћемо детаљније говорити у наредном поглављу, када будемо анализирали коришћене стратегије множења.

Наши резултати су показали већу успешност експерименталне групе 2 на свим задацима (проценат тачних одговара у свим групама задатака, сем Декартовог производа је преко 90%) у односу на контролну групу ученика и експерименталну групу 1. Експериментална група 1 је само у задацима са правоугаоном схемом постигла успешност већу од 90%, што може бити и последица коришћења правоугаоне схеме за разумевање аритметичких правила. Обрада множења и развој стратегија множења у експерименталној групи 2 се заснивао на коришћењу различитих текстуалних задатака и репрезентација, те наши резултати показују да је велика успешност ученика из ове групе последица експерименталног фактора, односно да употреба различитих семантичких структура задатака утиче на већи степен разумевања множења, те и на развој мултипликативног мишљења, чији значај је истакнут и ранијим истраживањима (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al, 1999; Downton, 2017).

На основу целокупне наведене анализе резултата сваке групе можемо закључити да је утицај експериметалног фактора, који се огледа у већој успешности на задацима, примећен код обе експерименталне групе, с тим да је он у овом сегменту већи код експерименталне групе 2. Овакви резултати показују да инструкције утичу на повећање разумевања значења множења исказаног различитим текстуалним задацима. Сви ученици су на Инцијалном тесту покзали најслабије разумевање задатака са правоугаоном схемом и Декартовом производом, те је на Завршном тесту дошло до драстичног побољшања резултата на овим задацима, али само у експерименталним групама, што је последица инструкција усмерених на множење једноцифреним бројевима. С тим да је разумевање Декартовог производа знатано веће код експерименталне групе 2 у односу на експерименталну групу 1, али су обе групе показале велики напредак у односу на Инцијални тест (између 40% и 50%). Наши резултати су делимично у складу са ранијим истраживањима, која су показала да деца пре инструкција решавају задатке различите семантичке структуре (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Наши ученици могу да реше задатке различите семантичке структуре, али не са истим степеном успешности, што може бити последица и задатака коришћених током обраде операције сабирања. Разумевање различитих семантичких структура је успешније након увођења експерименталног фактора, што потврђује да је за потпуно разумевање множења и развој мултипликативног мишљења потребно користити задатке са различитим семантичким структурама, различите репрезентације и аритметичка правила (Downton, 2017; Mulligan and Mitchelmore 1997; Marojoke and Beker, 2014; Sherin and Fuson, 2005).

Како бисмо испитали детаљније утицај експерименталног фактора, упоредили смо резултате све три групе испитаника посебно за сваку семантичку структуру на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1 (Прилог 3: Табеле 43, 44, 45, 46. и 47). Анализирајући резултате за сваку семантичку структуру посебно, пронађене су само статистички значајне разлике између контролне групе ученика и експерименталних група у задацима са правоугаоном схемом, као и између контролне групе и експерименталне групе 2 на задацима са Декартовим производом на Завршном тесту 1. У задацима са Декартовим прозводом јавила се статистички значајна разлика у просеку аритметичких средина између контролне групе и експерименалне групе 1. Контролна група је на Инцијалном тесту успешније решавала задатке који се тичу Декартовог производа у односу на експерименталну групу 1.Битно је напоменути да након инструкција контролна група и даље решава ову групу задатака са истим процентом успешности, односно да није примећен напредак. С друге стране, експериментална група 1 успешније решава задатке овог типа чак за 50% у односу на Инцијални тест, што је последица утицаја Модела 1 и коришћење разноврснијих текстуалних задатака током обраде множења. Наше добијене разлике показују да нема статистички значајнијих разлика између експерименталних група, док постоје статистички значајне разлике између експерименталних група и контролне групе ученика. Овакви резултати су последица начина обраде множења једноцифреним бројевима. Када су у питању задаци са правоугаоном схемом ученици из експерименталних група користе веома прецизне репрезентације које јасно истичу редове и колоне при чему су лишене шумова. Односно, ученици цртају кружиће или квадратиће, а не конкретне објекте који су назначени у задатку (Слика 15).



Слика 15. *Репрезентација ученика на задатак са правоугаоном схемом*

Слабије разумевање Декартовог производа и правоугаоне схеме, у смислу постигнућа ученика на тестовима, је очекивано, с обзиром да у уџбенику овакви задаци нису заступљени. Даље, можемо приметити да обрада множења кроз памћење производа без употребе репрезентација и разноврсних текстуалних задатака, води ка тачности у решевању познатог типа задатака, али не подстиче концептуално разумевање множења. Овакви резултати показују да ученици из контролне групе развијају разумевање множења на адитивном нивоу, кроз поновљено сабирање и идеју једнакобројних скупова, која се у литератури посматра као интуитивни и примитивни модел (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985). Уколико се множење усваја само на овај начин, не обухватају се сва значења множења и дељења (Vergnuad, 1993; Steffe, 1998; Watson, 2015), а самим тим онемогућен је развој мултипликативног мишљења, које подразумева препознавање и реаговање на различите мултипликативне ситуације. Учење напамет и памћење производа, а касније и стандардног алгоритма спречава развој математичке креативности, која је неопходна за концептуално разумевање математичких садржаја.

Уочене разлике између резултата експерименталних група на задацима различите семантичке структуре смо већ истакли у претходним деловима рада. Анализирајући сваку групу задатака посебно нису уочене статистички значајне разлике између експерименталних група ученика, али не можемо занемарити да оне ипак постоје у мањем проценту. Овакви добијени резултати показују да обе експерименталне групе показују разумевање мултипликативних ситуација исказаних кроз различите задатке, што је један од показатеља мултипликативног мишљења, али и последица начина обраде множења. Иако не постоје статистички значајне разлике, осврнућемо се на оне типове задатака, где су примећене бар мале разлике. Можемо закључити да је експериментална група 2 постигла боље резултате у задацима са производом мера и у задацима са Декартовим производом. У свим другим типовима задатака успешност изражена у процентима се између ове две групе разликовала у распону од 5%. Бољи резултати експерименталне групе 2 на задацима овог типа показују да они поседују већи степен разумевања мултипликативних ситуација исказаних кроз текстуалне проблеме. Сматрамо да обрада множења кроз различите типове текстуалних задатака позитивно утиче на развој мултипликативног мишљења, јер се бирају задаци који су искуствено блиски ученицима. Добар одабир контекста задатка подстиче разумевање нових математичких садржаја (Đokić, 2019). Такође, битно је напоменути да баш производ мера, заједно са мултипликативним поређењем представља један од централних проблема мултипликативног мишљења (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto and Miller, 1998; Shield and Dole, 2013), те можемо закључити да су ученици из експерименталне групе 2 створили добру основу за развој истог. С друге стране, употреба репрезентација, као што је правоугаона схема је погодна и за разумевање наведених семантичких структура и узето све заједно представља добру основу за разумевање множења збира и разлике бројем (Hrust, 2015). И ученици из експерименталне групе 1 показују добро разумевање мултипликативних ситуација, које је значајно веће него код контролне групе ученика, али нешто слабије него код експерименталне групе 2. На основу добијених резултата сматрамо да у млађим разредима (2. разред) за обраду нових математичких појмова треба пре свега користити разноврсне иконичке репрезентације и текстуалне задатке различитог типа, али искуствено блиских ученицима, јер то омогућава деци да постигну већи ниво разумевања. Обрада математичких појмова на тај начин се заснива на принципу очигледности и одговара дечијем мишљењу, које је још увек на конкретном нивоу. У нашем случају, обрада множења заснованог на иконичким репрезентацијама и текстуалним задацима различите семантичке структуре показала се као добар пример за развој мултипликативног мишљења и стварање основе за разумевање аритметичких правила. С друге стране, првобитна обрада аритметичких правила, која се у нашем случају заснивала на употреби репрезентација, допринела је развоју мултипликативног мишљења, које одликује нешто мањи степен разумевања различитих мултипликативних ситуација, што је последица стављања акцента на коришћење усвојених аритметичких правила за развој менталних стратегија множења.

Гледано уопштено, резултати нашег истраживања показују да ученици након одговарајућих инструкција показују боље разумевање оних семантичких структура задатака коришћених на часовима математике, те са те стране можемо закључити да у контролној групи ученика нису били или су у малој мери били заступљени задаци са правоугаоном схемом и Декартовим производом, који нису ни заступљени у уџбенику коришћеном у контролној групи ученика. Ова група ученика јесте показала већи степен разумевања множења на Завршном тесту, што потврђује да се и код ученика из ове групе постепено развија разумевање множења, али с обзиром на њихове резултате можемо рећи да је њихово мишљење још увек адитивног карактера. С друге стране, на основу добијених резултата можемо закључити да без коришћења разноврснијих задатака не можемо постићи потпуни развој мултипликативног мишљења, које подразумева и препознавање и представљање различитих мултипликативних ситуација (Siemon, Breed and Virgona, 2005). Резултати експерименталних група су показали да употреба адекватних инструкција, које подразумевају коришћење задатака различитих репрезентација, како иконичких, тако и текстуалних, доприноси повећању концептуалног разумевања множења. Само ученици који имају искуства у раду са различитим стратегијама и задацима различите семантичке структуре могу развити способност флексибилног менталног рачунања, које се посматра као индивидуална реакција на одређени проблем уз успостављање везе између постојећих знања и конкретних проблема (Threlfall, 2006; Verschaffel et al., 2009).

4.2. Утицај инструкција на избор и употребу стратегија множења

Бројни аутори (Vergnaud, 1983; Clark and Kamii, 1996; Jacob and Willis, 2003; Siemon, Breed and Virgona, 2005) сматрају да мултипликативно мишљење поред препознавања и представљања различитих мултипликативних ситуација обухвата и флексибилно и ефикасно рачунање производа или количника бројева применом различитих стратегија множења и дељења. Употреба научених чињеница, односно производа два броја ограничава развој и употребу флексибилних стратегија рачунања. Наши модели су се заснивали на коришћењу различитих репрезентација и примени аритметичких правила, која омогућавају прилагођавање стратегија својствима бројева и с те стране воде ка употреби ефикасних стратегија множења. У овом делу рада, анализираћемо које мултипликативне стратегије множења су користили ученици на Завршном тесту 1 и Завршном интервјуу 1 у циљу испитивања утицаја инструкција заснованих на аритметичким правилима и на коришћењу различитих репрезентација усмерених на множење једноцифреним бројевима.Менталне стратегије множења смо анализирали према групама задатака.

4.2.1. Стратегије множења коришћене за решавање задатака са иконичким репрезентацијама

У овом делу ћемо анализирати стратегије које су на Завршном тесту 1 ученици из различитих група, који су тачно решили задатке, користили за решавање задатака са иконичким репрезентацијама. У Табели 48. дат је приказ стратегија које су ученици из контролне групе користили за решавање задатака са иконичким репрезентацијама.

Табела 48. *Стратегије коришћене за решавање задатака са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1 у контролној групи*

Иконичке репрезентације	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Домине	2 (6.06%)	0 (0.0%)	5 (15.15%)	4 (12.12%)	2 (6.06%)	20 (60.61%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	3 (13.64%)	0 (0.0%)	3 (13.64%)	1 (4.55%)	0 (0.0%)	11 (50%)	4 (18.18%)	0 (0.0%)
Декадне репрезентације	6 (16.22%)	0 (0.0%)	1 (2.7%)	2 (5.41%)	0 (0.0%)	18 (48.65%)	10 (27.03%)	0 (0.0%)
УКУПНО	11 (11.96%)	0 (0.0%)	9 (9.78%)	7 (7.61%)	2 (2.17%)	49 (53.26%)	14 (15.22%)	0 (0.0%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Узимајући у обзир само тачне одговоре, можемо закључити да је контролна група ученика за решавање задатака са иконичким репрезентацијама, без обзира на врсту репрезентације у највећем проценту користила знање чињеница. Гледано појединачно различите репрезентације, можемо приметити да је за домине коришћена стратегија поновљено сабирање, док је за праовугаону схему примећена и употреба мултипликативних стратегија, као и поновљеног сабирања и појединачног пребројавања.

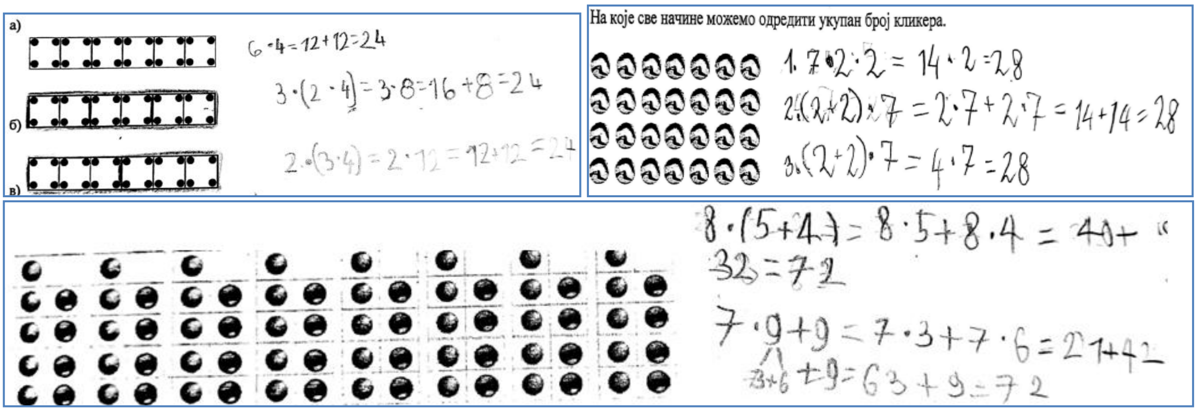
У Табели 49. дат је приказ стратегија које су ученици из експерименталне групе 1 користили за решавање задатака са иконичким репрезентацијама.

Табела 49. *Стратегије коришћене за решавање задатака са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1 у експерименталној групи 1*

Иконичке репрезентације	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Домине	3 (4.11%)	0 (0.0%)	10 (13.7%)	18(24.66%)	16 (21.92%)	14 (19.18%)	12 (16.44%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (10.34%)	7 (24.14%)	7 (24.14%)	1 (3.45%)	11 (37.93%)	0 (0.0%)
Декадне репрезентације	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (5.56%)	5 (9.26%)	1 (1.85%)	6 (11.11%)	39 (72.22%)	0 (0.0%)
УКУПНО	3 (1.92%)	0 (0.0%)	16 (10.26%)	30 (19.23%)	24 (15.38%)	21 (13.46%)	62 (39.74%)	0 (0.0%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Експериментална група 1 је у највећем проценту решавала задатке са иконичким репрезентацијама коришћењем мултипликативних стратегија. Међутим, може се приметити да су стратегије другачије структурисане у зависности од врсте репрезентација (Слика 16).



Слика 16. *Примери стратегије коришћених на задацима са иконичким репрезентацијама*

За решавање задатака са доминама у највећем проценту су користили дуплирање са поновљеним сабирањем и дуплирање, што највише и одговара самој структури репрезентације.Када су у питању декадне репрезентације већина ученика је користила мултипликативне стратегије, које су и у складу са примерима датим на репрезентацијама, те њихова структура интуитивно подстиче ученике на избор наведених стратегија. С друге стране, правоугаона схема даје могућност индивидуалног структурисања елемената и из тога разлога примећујемо да је експериментална група 1 користила различите стратегије за решавање овог задатка: мултипликативне стратегије, дуплирање са поновљеним сабирањем и дуплирање.

Употреба различитих стратегија за решавање ових задатака је потврђена и ранијим истраживањима, која истичу да овај тип репрезентације подстиче развој флексибилних стратегија рачунања (LorrianeandMulligan, 2014; KlingandBay–Williams, 2015). Посматрајући одговоре ученика из ове групе можемо приметити да они своје стратегије заснивају на примени научених аритметичких правила, те је присутна употреба замене места чинилаца, здруживање чинилаца, као и множење збира или разлике бројем. Коришћење аритметичких правила у овој групи ученика није само на интуитивном нивоу, већ ученици приликом одабира стратегије и рачунања директно примењују аритметичко правило записујући цео поступак рачунања:

- $6 \cdot 7 = 6 \cdot (5 + 2) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$
- $6 \cdot 7 = 6 \cdot (4 + 3) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3$
- $8 \cdot 9 = 8 \cdot (4 + 5) = 8 \cdot 4 + 8 \cdot 5$
- $7 \cdot 4 = 7 \cdot 2 \cdot 2$

На основу добијених резултата можемо закључити да експериментална група 1 стратегије бира на основу репрезентација, што је директно повезано са вредностима бројева у задацима. Даље, сама структура репрезентације подстиче ове ученике на избор адекватне стратегије која се у већини случајева, у овој групи, заснива на примени аритметичких правила. Овакви резултати показују да добро структурисана репрезентација истиче аритметичко правило, које ученици самостално уочавају и користе као олакшицу за рачунање у циљу флексибилног рачунања.

У Табели 50. дат је приказ стратегија које су ученици из експерименталне групе 2 користили за решавање задатака са иконичким репрезентацијама.

Табела 50. *Стратегије коришћене за решавање задатака са иконичким репрезентацијама на Завршном тесту 1 у експерименталној групи 2*

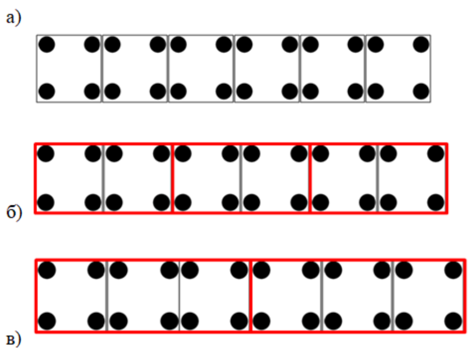
Иконичке репрезентације	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Домине	3 (3.85%)	0 (0.0%)	9 (11.54%)	19 (24.36%)	19 (24.36%)	14 (17.95%)	11 (14.10%)	3 (3.85%)
Правоугаона схема	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	12 (44.44%)	4 (14.81%)	0 (0.0%)	11 (40.74%)	0 (0.0%)
Декадне репрезентације	0 (0.0%)	0 (0.0%)	2 (4%)	2 (4%)	0 (0.0%)	1 (3%)	45 (90%)	0 (0.0%)
УКУПНО	3 (1.94%)	0 (0.0%)	11 (7.1%)	33 (21.29%)	23 (14.84%)	15 (9.68%)	67 (43.23%)	3 (1.94%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Анализирајући резултате експерименталне групе 2 можемо уочити сличне резултате као код експерименталне групе 1. Ова група је у највећем проценту решавала задатке са иконичким репрезентацијама коришћењем мултипликативних стратегија. За решавање задатака са доминама у највећем проценту су користили дуплирање са поновљеним сабирањем и дуплирање, што показује да и ова група, као експериментална група 1, прилагођава стратегије конкретној структури репрезентације. Када су у питању декадне репрезентације већина ученика је користила мултипликативне стратегије, које су и одговарале примерима датим на репрезентацијама. С друге стране, правоугаона схема даје могућност индивидуалног структурисања елемената и из тога разлога примећујемо да је експериментална група 2 за решавање овог задатка најчешће користила две стратегије: дуплирање са поновљеним сабирањем и мултипликативне стратегије. Одабир стратегија у овој групи ученика потврђује претходно наведено – да је избор стратегија условљен типовима репрезентација, као и начинима њиховог структурисања. За разлику од експерименталне групе 1, ова група ученика приликом одређивања производа не записује увек цео поступак рачунања, који подразумева и примену аритметичких правила, већ ова правила примењује интуитивно и тек кроз интервју ученици објашњавају свој начин одређивања производа, односно примене аритметичких правила у циљу коришћења флексибилних стратегија множења. За разлику од експерименталне групе 1, која је користила разноврсније стратегије, ова група ученика користи само три стратегије (дуплирање, дуплирање са поновљеним сабирањем и мултипликативне стратегије). Овакви резултати су у супротности са нашим очекивањима, с обзиром да је експериментална група 2 стратегије множења усвајала кроз примену различитих репрезентација. У складу са тим, очекивали смо да ће они користити разноврсније стратегије, структуришући репрезентације на начин који им омогућава ефикасно рачунање. Међутим, експериментална група 1 је у већој мери правоугаону схему структурисала на индивидуалан начин.У ситуацијама код којих су ученици записивали цео поступак рачунања можемо приметити да су интуитивно и они користили аритметичка правила, али они записују само кључне кораке у рачунању (*$8 \cdot 9 = 8 \cdot 10 - 8$ или $6 \cdot 7 = 35 + 7$*), што свакако потврђује чињеницу да и ова група ученика мултипликативне стратегије заснива на аритметичким правилима.

Разлика између контролне групе ученика и експерименталних група је јасно видљива у погледу менталних стратегија множења у смеру који показује да ученици из контролне групе памте производе и не користе менталне стратегије множења, док је код експерименталних група присутна употреба ефикасних и флексибилних стратегија рачунања, које су одлика мултипликативног мишљења (Siemon, Breed and Virgona, 2005). У даљем тексту, размотрићемо уочене разлике између експерименталних група ученика. Када су у питању задаци са доминским репрезентација можемо приметити да између ове две групе ученика нема већих разлика, осим што су ученици из експерименталне групе 2 користили малим делом (3.85%) остале стратегије, што може бити последица начина обраде у којем су се стратегије развијале кроз коришћење различитих задатака и репрезентација. Веће разлике примећене су у задатку са правоугаоном схемом где су ученици из експерименталне групе 2 у највећем проценту (44.44%) користили стратегије дуплирања, а ученици из експерименталне групе 1 су претежно користили мултипликативне стратегије. С друге стране, уколико заједно посматрамо дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем можемо приметити да су обе групе ученика подједнако користиле ове две страгије. Ученици из експерименталне групе 1 се најчешће ослањају на примену аритметичких правила, па чак и у случајевима када користе дуплирање оно се у основи заснива на множењу збира бројем. Концептуално разумевање аритметичких правила код ученика развија способност структурисања овог типа репрезентације на различите начине уз примену аритметичких правила што води ка примени различитих флексибилних стратегија рачунања, што се у литератури дефинише као адаптивност (Blote et al., 2001; Trobeyns et al., 2008; Heinze et al., 2009). С друге стране, ученици из експерименталне групе 2 стратегије прилагођавају структури репрезентације, структуришући елементе на начин који им омогућава најефикасније одређивање производа два броја. Задатке са декадним репрезентацијама обе групе ученика решавају применом мултипликативних стратегија, али су оне заступљеније у експрименталној групи 2 који стратегије прилагођавају структури репрезентације, али истовремено воде рачуна и о структури бројева у задацима. С друге стране, код експерименталне групе 1 примећена је употреба разноврснијих стратегија када је у питању овај тип репрезентације. Гледано уопштено, можемо закључити да је код експерименталне групе 1 примећено коришћење разноврснијих менталних стратегија множења, што у овом случају показује да ова група ученика стратегије у већем степену прилагођава структури броја, насупрот експерименеталној групи 2 која већ дате репрезентације структурише на начин који омогућава што ефикасније и флексибилније рачунање, што је показатељ мултипликативног мишљења. Такође, можемо приметити да је код експерименталне групе 1 присутнија, али у малом проценту, употреба поновљеног сабирања. Сматрамо да враћање на поновљено сабирање показује да ученици који нису разумели у потпуности аритметичка правила се враћају на „сигурне“ стратегије, односно поновљено сабирање. С обзиром да је та разлика мала, не можемо говорити да су ови ученици на нивоу адитивног мишљења, јер употреба поновљеног сабирања може бити и последица бројева у задацима, што су потврдила ранија истраживања (Sherin and Fuson, 2005) да ученици за множење мањих једноцифрених бројева користе баш ову стратегију.

Један од показатеља разумевања значења операције множења јесте и способност постављања одговарајућег производа у зависности од дате иконичке репрезентације. Други задатак на Инцијалном тесту и Завршном тесту 1 је садржао три примера доминске репрезентације, које су биле структурисане на различите начине, али им је укупна вредност била иста (24) (Слика 17). Циљ нам је био да испитамо да ли ученици постављају исте производе за све примере или начин структурисања репрезентације утиче на састављање производа. У овом делу рада анализираћемо само стратегије коришћене на Завршном тесту 1, с обзиром да је на Инцијалном тесту доминанто било коришћење поновљеног сабирања.



Слика 17. *Други задатак на Завршном тесту 1*

У Табели 51. дат је приказ начина решавања другог задатка на Завршном тесту 1 у циљу испитивања утицаја иконичке репрезентације структурисане на три начина на решавање другог задатка, односно састављање производа.

Табела 51. *Утицај структуре доминске репрезетације на решавање задатака на Завршном тесту 1*

		8·3/3·8	**4·6/6·4**	**2·12/12·2**	**1·24/24·1**
	К	1 (7.7%)	12 (92.3%)	/	/
2а	Е1	/	26 (96.3%)	/	1 (3.7%)
	Е2	/	25 (96.2%)	1 (3.8%)	/
2а	ИТ	27.8%	72.2%	/	/
	К	5 (62.5%)	3 (37.5%)	/	/
2б	Е1	13 (59.1%)	9 (40.9%)	/	/
	Е2	17 (77.3%)	4 (18.2%)	1 (4.5%)	/
2в	ИТ	28.6%	31.4%	/	34.3%
	К	/	/	6 (100%)	/
2в	Е1	/	5 (22.7%)	16 (72.7%)	1 (4.5%)
	Е2	2 (9.1%)	3 (13.6%)	17 (77.3%)	/
2б/2г	ИТ	26.87%	11.94%	47.76%	13.43%

Напомена:
К – проценат коришћених израза код контролне групе ученика на Завршном тесту 1
Е1 – проценат коришћених израза код експерименталне групе 1 на Завршном тесту 1
Е2 – проценат коришћених израза код експерименталне групе 2 на Завршном тесту 1
ИТ – проценат коришћених израза на инцијалном тестирању за цео узорак ученика

Проценат тачних одговора који су посматрани у овој анализи показује пре свега да су ученици из контролне групе показали доста слабије разумевање иконичких репрезентација у односу на експерименталне групе ученика. На основу детаљније анализе и структуре репрезентација можемо приметити да је већина ученика из све три групе користила изразе који одговарају структури доминске репрезентације, што је нарочито видљиво у примеру под а) где су ученици који су користили операцију множења у све три групе најчешће употребљавали израз *6·4*. Када је у питању пример под б) ученици су већини случајева користили израз *3·8*, што и одговара структури репрезентације. У овом примеру, може се уочити да су експериментална група 1 и контролна група у великом броју случајева користили и израз *6·4*. Коришћење овог израза може бити последица изједначавања прве репрезентације са другом и занемаривања црвених линија, које групишу домине или интуитивног коришћења здруживања чинилаца, односно израза *3·2·4*. Трећи пример су ученици већином решили постављајући израз *2·12*. Ученици из експерименталних група су поред овог израза користили и израз *4·6*. Упоређујући резултате на Завршном тесту 1 и Инцијалном тесту (Табела 50), у погледу састављања израза, можемо закључити да ученици на Инцијалном тесту нису у сваком случају користили изразе који у највећој мери одговарају структури иконичке репрезентације. Уочено је да су два ученика користила израз *1·24* што заправо показује да ученици не разумеју мултипликативну ситуацију исказану иконичком репрезентацијом, већ врше појединачно пребројавање сваке тачкице на домини. У примеру под в) на Инцијалном тесту где је структури репрезентација највише одговарао израз *4·6* можемо приметити да су ученици веома уједначено користили три израза: *4·6*, *8·3* и *1·24*, што показује да ученици не разумеју мултипликативне ситуације у потпуности. У Табели 52. даћемо приказ стратегија за решавање наведених задатака по групама ученика у циљу утврђивања утицаја израза и структуре репрезентације на одабир менталних стратегија рачунања.

Табела 52. *Стратегије коришћене за решавање 2. задатака са доминским репрезентацијама на Завршном тесту 1*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
а)	К	2 (13.3%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	13 (86.7%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
	Е1	2 (7.1%)	0 (0.0%)	1 (3.6%)	10 (35.7%)	2 (7.1%)	10 (35.7%)	3 (10.7%)	0 (0.0%)
	Е2	1 (3.6%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	9 (32.1%)	6 (21.4%)	10 (35.7%)	1 (3.6%)	1 (3.6%)
б)	К	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (30.0%)	2 (20.0%)	0 (0.0%)	5 (50.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
	Е1	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (22.7%)	7 (31.8%)	2 (9.1%)	2 (9.1%)	6 (27.3%)	0 (0.0%)
	Е2	1 (4.0%)	0 (0.0%)	7 (28.0%)	4 (16.0%)	2 (8.0%)	4 (16.0%)	6 (24.0%)	1 (4.0%)
в)	К	0 (0.0%)	2 (25.0%)	2 (25.0%)	2 (25.0%)	2 (25.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
	Е1	1 (4.3%)	0 (0.0%)	4 (17.4%)	1 (4.3%)	12 (52.2%)	2 (8.7%)	3 (13.0%)	0 (0.0%)
	Е2	1 (4.0%)	0 (0.0%)	2 (8.0%)	6 (24.0%)	11 (44.0%)	0 (0.0%)	4 (16.0%)	1 (4.0%)

Напомена:
К – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Када је у питању избор стратегија, можемо приметити да ученици из контролне групе који су тачно решили задатак не користе стратегије множења за рачунање вредности израза, те ћемо се у овом делу осврнути на стратегије које су користили ученици из експерименталних група и на појединачне случајеве из контролне групе ученика. Као што смо већ рекли, већина ученика је за пример под а) реаговала изразом *6·4*. Када је у питању избор стратегија, можемо приметити да су обе експерименталне групе највећим делом користиле дуплирање и мултипликативне стратегије, што одговара како бројевима у задацима тако и структури репрезентације. За решавање примера под б) уочили смо да су ученици из експерименталне групе 1 поред израза *8·3* у великој мери користили и израз *4·6*. Као што смо навели, сматрамо да је то последица интуитивне примене здруживања чинилаца. Без обзира што ове две групе нису биле уједначене када је у питању постављање израза који одговара репрезентацији, можемо приметити да су користили сличне стратегије множења. Овакви резултати нам говоре да ученици, пре свега из експерименталне групе 2, препознају мултипликативну ситуацију и правилно реагују на њу, али да се у овом случају приликом одабира стратегија враћају на саму структуру репрезентације и користе структуру репрезентације на начин који им омогућава најефикасније рачунање при чему уочавају сличност са свим примерима. С друге стране, ученици из експерименталне групе 1 правилно реагују на репрезентације састављајући одговарајући израз, а стратегије бирају у складу са изразом, односно бројевима у задатку, водећи рачуна о структури бројева. У примеру под в) обе експерименталне групе су биле поприлично уједначне, с тим да се код експерименталне групе 1 у мањој мери може приметити интуитивна примена аритметичких правила (здруживање чинилаца) приликом састављања израза. Када су у питању коришћене стратегије, можемо приметити да је код експерименталне групе 1 присутно коришћење мултипликативних стратегија, што је свакако последица инструкција које су се заснивале на аритметичким правилима. С друге стране највећи број ученика из обе групе је користио дуплирање и поновљено сабирање, што је очекивано с обзиром на структуру израза и репрезентације (*2·12*). На основу ових анализа можемо закључити да ученици пре свега израз множења састављају на основу структуре репрезентације, а затим менталне стратегије множења прилагођавају у већој мери структури бројева у задацима, али се у одређеној мери (више код експерименталне групе 2) врши избор стратегија на основу структуре репрезентација. Уколико репрезентација приказује множење бројем 2 (подељена је на две једнаке групе) ученици ће користити дуплирање или поновљено сабирање. Даље, уколико иконичка репрезентација приказује 4 једнака дела, ученици ће користити дуплирање или дуплирање са поновљеним сабирањем, као и мултипликативне стратегије. Избор ефикасних стратегија множења је условљен већим бројем фактора, а то су и врста репрезентације и структура бројева, али и инструкције заступљене у настави.

Можемо закључити да након обраде множења једноцифреним бројевима све три групе ученика бирају изразе у складу са структуром репрезентације, што показује разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама.Овакве репрезентације су блиске ученицима и њихово структурисање интуитивно их подстиче на различите начине одређивања вредности израза (Марјановић, 2014).Посматрајући ученике из контролне групе који су тачно одговорили (иако их је знатно мање него ученика из експерименталних група) можемо уочити да и тај мањи проценат ученика правилно реагује на мултипликативне ситуације. Наши резултати у експерименталним групама су последица деловања експерименталног фактора.Применом Модела 1 и Модела 2 утиче се на повећање нивоа разумевања мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама, што се огледа у повећању процента тачних одговора, али и избор адекватних менталних стратегија множења.

Када су у питању задаци са иконичким репрезентацијама наши резултати показују да начин структурисања репрезентације утиче на избор менталних стратегија множења у експерименталним групама ученика, док то није случај код контролне групе која без обзира на врсту репрезентација увек користи знање чињеница. Сматрамо да су овакви резултати последица начина обраде множења. Употреба различитих репрезентација (иконичких и текстуалних) током обраде множења, које омогућавају растављање бројева на различите начине, као и поучавање ученика различитим стратегијама множења полазећи од структуре бројева и примене аритметичких правила омогућава разој мултипликативних стратегија множења (Loveridge, 2005). На основу резултата у контролној групи можемо потврдити налазе ранијих истраживања, односно да разумевање множења као поновљеног сабирања и инсистирање на учењу „таблице множења“ спутава развој флексибилних стратегија множења (Zeljić et al., 2019) и самим тим и даљи развој мултипликативног мишљења. Генерално гледано, избор стратегија је поред репрезентација условљен и инструкцијама које су ученици имали током обраде множења. Као што смо већ навели, између експерименталних група постоје мале разлике, које показују да експериментална група 2 у већем степену стратегије прилагођава структури репрезентације, док експериментална група 1 правилно реагује на мултипликативне ситуације исказане иконичким репрезентацијама, а затим стратегије бира на основу вредности бројева у задацима. Ова група ученика у већем степену користи аритметичка правила за одређивање производа два броја. Без обзира који начин одабира стратегија је заступљен, можемо закључити да су обе групе развиле мултипликативно мишљење и да разумеју мултипликативне ситуације, што се огледа у ефикасном и флексибилном избору менталних стратегија множења. Даље, истраживање показује да је избор менталних стратегија множења у овом случају условљен делимично структуром репрезентације, која подстиче ученике да састављају одговарајући израз, а затим и струкутуром бројева у задацима која је уско повезана са изгледом иконичке репрезентације, те у складу са тим користе флексибилне стратегије множења. Посматрајући резултате све три групе ученика, можемо закључити да су ученици из експерименталних група приликом одабира стратегија узимали у обзир појединачне карактеристике иконичких репрезентација и значења бројева, што је одлика флексибилности (Baroody & Dowker, 2003; Kilpatrick et al., 2001; Threlfall, 2009).

4.2.2. Менталне стратегије множења коришћене у задацима различите семантичке структуре

У претходном поглављу разматрали смо стратегије које су ученици из различитих група користили на задацима са иконичким репрезентацијама. С обзиром да смо у поглављу 3. коментарисали избор и употребу менталних стратегија множења у задацима различите семантичке структуре овде ћемо укратко прокоментарисати стратегије које је користила свака група ученика у зависности од семантичке структуре задатка и могуће разлике.На Инцијалном тесту сви ученици су у највећој мери користили поновљено сабирање, што је најчешћа стратегија коју користе и амерички ученици пре увођења множења (Lianfang-FuandRichardson, 2018). Мулиган и Мишелмор (MulliganandMitcelmore, 1997), али и наши ученици након обраде множења у другом разреду (Зељић и Дабић Боричић, 2020). Ови резултати пре свега показују да ученици интуитивно решавају задатке са множењем применом одређених стратегија, али и да посматрање множења као поновљеног сабирања води ка адитивном мишљењу. Резултати нашег истраживања су показали да наши ученици пре увођења множења решавају задатке са множењем, али у највећем проценту користе само једну стратегију, односно поновљено сабирање, које се посматра као примитивни модел множења (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985).Циљ истраживања је утврђивање утицаја инструкција заснованих на различитим репрезентацијама и аритметичким правилима на развој менталних стратегија множења у другом разреду основне школе.

У Табели 53. дат је приказ стратегија коришћених за решавања текстуалних задатака у контролној групи ученика на Завршном тесту 1.

Табела 53. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у контролној групи ученика на Завршном тесту 1*

Семнатичка структура	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Једнакобројни скупови	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (6.25%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	41 (85.42%)	4 (8.33%)	0 (0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	1 (1.92%)	2 (3.85%)	2 (3.85%)	0 (0.0%)	41 (78.85%)	5 (9.62%)	1 (1.92%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	1 (1.92%)	5 (9.62%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	37 (71.15%)	8 (15.38%)	1 (1.92%)
Правоугаона схема	2 (4.55%)	0 (0.0%)	7 (15.91%)	2 (4.55%)	0 (0.0%)	24 (24.55%)	8 (18.18%)	1 (2.27%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	6 (19.35%)	2 (6.45%)	0 (0.0%)	23 (74.19%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
УКУПНО	2 (0.88%)	2 (0.88%)	23 (10.18%)	6 (2.65%)	0 (0.0%)	165 (73.01%)	25 (11.06%)	3 (1.33%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Контролна група је без обзира на семантичку структуру задатка у највећем проценту користила знање чињенице за решавање текстуалних задатака различите семантичке структуре, што показује да код ове групе ученика избор стратегија множења није условљен семантичком структуром задатака, као ни карактеристикама бројева у задацима, што је у супротности са бројним истраживањима која наглашавају да структура задатака детерминише избор стратегија (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985; Mulligan and

Mitchelmore, 1997; Downton and Sullivan, 2017). Разноврснији одабир стратегија можемо приметити у задацима са правоугаоном схемом и производом мера, што показује да интуитивно ученици из ове групе теже примени стратегија које одговарају семантичкој структури задатка, али је тај проценат ученика занемарљив. Ови ученици показују развијеност неких аспеката мултипликативног мишљења, али због одсуства употребе наведених типова задатака развој флексибилних стратегија множења је онемогућен.

С обзиром да на избор стратегија поред семантичке структуре задатака могу да утичу и бројеви у задацима, у табелама у Прилогу 3. се налазе табеле у којима су анализиране стратегије за сваки задатак појединачно, узимајући у обзир бројеве у задацима. Ове табеле ћемо у даљем раду користити као допуну анализа које следе.

У Табели 54. у тексту и Табели 55. (Прилог 3) дат је приказ стратегија коришћених за решавање текстуалних задатака у експерименталној групи 1 на Завршном тесту 1.

Табела 54. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у експерименталној групи 1 на Завршном тесту 1*

Семнатичка структура	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (9.62%)	12 (23.08%)	6 (11.54%)	7 (13.46%)	22 (42.31%)	0 (0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	15 (27.27%)	4 (7.27%)	4 (7.27%)	2 (3.64%)	13 (23.64%)	17 (30.91%)	0 (0.0%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (18.18%)	4 (7.27%)	1 (1.82%)	7 (12.73%)	33 (60%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	2 (3.45%)	0 (0.0%)	6 (10.34%)	16 (27.59%)	8 (13.79%)	5 (8.62%)	21 (36.21%)	0 (0.0%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (15.91%)	9 (20.45%)	8 (18.18%)	10 (22.73%)	10 (22.73%)	0 (0.0%)
УКУПНО	2 (0.76%)	15 (15.68%)	32 (12.12%)	45 (17.05%)	25 (9.47%)	42 (15.91%)	103 (39.02%)	0 (0.0%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

На основу података из Табеле 54. можемо закључити да је експериментална група 1 на Завршном тесту 1 у највећој мери користила мултипликативне стратегије. Ова група ученика користи разноврсније стратегије у односу на контролну групу ученика, које су другачије распоређене у зависности од семантичке структуре задатка. Можемо приметити да експериментална група 1 није користила појединачно пребројавање, осим два ученика за решавање задатака са правоугаоном схемом. Овакви резултати показују да ученици који нису сигурни на који начин да одреде производ два броја у задацима са правоугаоном схемом контекст задатка приказују иконичком репрезентацијом, на основу које врше појединачно пребројавање. И иконичко представљање мултипликативних ситуација је један од показатеља разумевања множења. Ритмично пребројавање је било заступљено само у задацима са производом мера, али с обзиром да је један од задатак овог типа садржао производ бројева 5 и 6, ова стратегија је у највећем проценту и коришћена у овом примеру (Прилог 3: Табела 55) и она потврђује да ученици бирају стратегије у складу са бројевима у задацима, што је показатељ концептуалног разумевања бројева (Verschaffel et al., 2007), као и флексибилности (Threlfall, 2009). Поновљено сабирање се јавило само у неким задацима и то најчешће у задацима код којих је један од чинилаца 3 или 4 (*$3\cdot 6 = 6 + 6 + 6$ или $4\cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4$*) (Прилог 3: Табела 55). Дуплирање са поновљеним сабирањем су ученици користили у задацима са једнакобројним скуповима и правоуганом схемом, при чему су у питању задаци из наведених група у којима је један од чинилаца 4 (*$4\cdot 6 = 12 + 12$ или $9\cdot 4 = 18 + 18$*). Овакав одабир стратегија потврђује претходно, односно да се стратегије прилагођавају структури бројева, што показује да ученици поседују концептуално разумевање бројева, као и да користе аритметичка правила, односно растављање и здруживање чинилаца и множење збира/разлике бројем. Даље, наши резултати показују да ученици за множење бројем или броја 4 у највећој мери користе стратегије дуплирања или дуплирања са поновљеним сабирањем ($4·4 - 4, 8, 12, 16$ или $4·4 = 8 + 8$), а у нешто мањој мери мултипликативне стратегије. Ово показује да ученици без обзира на семантичку структуру задатка, стратегије у већој мери прилагођавају структури бројева. Коришћење знања чињеница је присутније у задацима са Декартовим производом и производом мера и то у задацима где су следећи производи:$4·3$ и $6·5$ Прилог 3: Табела 55).Чак 60% ученика је решило задатке са мултипликативним поређењем коришћењем мултипликативних стратегија, што је последица с једне стране бројева у задацима ($9·7$ и $3·6$), а са друге стране сложености ове семантичке структуре, коју је теже представити иконичким репрезетнацијама. Уколико посматрамо посебно задатке из ове групе (Прилог 3: Табела 55) ученици су задатак који је садржао производ $9·7$ већински решавали применом мултипликативних стратегија (84%) и то на следеће начине:

- $9 \cdot 7 = 9 \cdot (5 + 2) = 9 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 45 + 18 = 63$
- $9 \cdot 7 = (10 – 1) \cdot 7 = 10 \cdot 7 – 7 = 63 + 7$

С друге стране, за задатак који је садржао производ$3·6$ поред мултипликативних стратегија ($3·6 = 2 \cdot 6 + 6$) ученици су користили и поновљено сабирање, што такође одговара структури бројева у задацима. На основу анализе експерименталне групе 1 можемо закључити да ученици из ове групе стратегије у већој мери прилагођавају структури бројева што потврђује налазе ранијих истраживања (Sherin and Fuson, 2005).

У Табели 56. у тексту и Табели 57. у Прилогу 3 дат је приказ стратегија коришћених за решавања текстуалних задатака у експерименталној групи 1 на Завршном тесту 1.

Табела 56. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром на Завршном тесту 1 у експерименталној групи 2*

Семнатичка структура	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	17 (34.69%)	6 (12.24%)	5 (10.20%)	21 (42.86%)	0 (0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	18 (33.33%)	0 (0.0%)	5 (9.26%)	0 (0.0%)	9 (16.67%)	21 (38.89%)	1 (1.85%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	0 (0.0%)	11 (21.15%)	1 (1.92%)	0 (0.0%)	10 (19.23%)	30 (57.69%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	2 (3.64%)	0 (0.0%)	2 (3.64%)	18 (32.73%)	5 (9.09%)	5 (9.09%)	23 (41.82%)	0 (0.0%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	9 (18.37%)	6 (12.24%)	11 (22.45%)	18 (36.73%)	4 (8.16%)	1 (2.04%)
УКУПНО	2 (0.77%)	18 (6.95%)	22 (8.49%)	47 (18.15%)	22 (8.49%)	47 (18.15%)	99 (38.22%)	2 (0.77%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Експериментална група 2 је на Завршном тесту 1, као и експериментална група 1, у највећој мери користила мултипликативне стратегије. Уопштено гледано, обе експерименталне групе су имале сличне резултате, односно користили су у мањој мери одређене менталне стратегије множења (појединачно и ритмично пребројавање; поновљено сабирање; дуплирање са поновљеним сабирањем), док су мултипликативне стратегије биле заступљеније. Ученици из ове групе су за решавање задатака са мултипликативним поређењем и производом мера користили дуплирање у мањем проценту. Анализирајући бројеве у овим групама задатака (*3·6; 5·6; 6·7 и 9·7*) можемо закључити да су ученици из експерименталне групе 2 менталне стратегије множења прилагођавали структури бројева у задацима, а у мањој мери семантичкој структури. Коришћене менталне стратегије множења су показатељ концептуалног разумевања броја и декадног система бројева (Зељић и др., 2017), што ови ученици и показују. Коришћење знања чињеница је присутније у задацима са Декартовим производом и у задацима са мултипликативним поређењем, и то у примерима *4·3, 4·4 и 3·6*. Овакви резултати су очекивани, јер показују да су ученици усвојили наведене производе и користе их за одређивање других производа који су им тежи, што потврђују и ранија истраживања (Sherin and Fuson, 2005). За решавање задатака са Декартовим производом експериментална група 2 је претежно користила знање чињеница и дуплирање, што није био случај са експерименталном групом 1, код које је у највећем проценту била заступљена примена мултипликативних стратегија за решавање ове групе задатака. С обзиром да је један задатак са Декартовим производом садржао чионице 3 и 4, а други квадрате бројева (*4·4*) потупно је очекивано да су ученици користили знање чињеница, јер и према ранијим истраживањима (Sherin and Fuson, 2005) ове производе ученици лакше и брже памте, те их користе за одређивање производа других бројева.Разлике које су се појавиле између група ученика показују да ученици из експерименталне групе 1 теже већој примени аритметичких правила за одређивање производа два броја што је последица начина обраде множења. Као и код експерименталне групе 1, уочено је да ученици из ове групе за одређивање производа броја 6 и 5 (Прилог 3: Табела 57) користе у највећеој мери ритмично пребројавање (*6·5 – 5, 10, 15, 20, 25, 30)*. Експериментална група 2 мултипликативне стратегије је користила у највећем проценту за решавање свих група задатака, сем за задатке са Декартовим производом. Посматрајући посебно сваки задатак из сваке семантичке структуре (Прилог 3: Табела 57) може се закључити да је и ова група ученика користила мултипликативне стратегије за решавање сложенијих примера, односно примера где је један од чинилаца број већи од броја 5 (7*·8, 6·7, 9·7, 6·8*), што потврђује ранија истраживања (Heirdsfield et al, 1999) да ученици за одређивање непознатих производа након обраде множења проналазе флексибилне менталне стратегија множења.

С обзиром да је контролна група ученика користила у највећем проценту знање чињеница, анализираћемо разлике између експерименталних група ученика. Разлике између експерименталних група у погледу коришћених стратегија су се јавиле у задацима са производом мера и Декартовим производом. У осталим групама задатака разлике између ове две групе ученика су биле занемарљиве. Када су у питању задаци са производом мера, можемо приметити да су ученици из експерименталне групе 1 користили разноврсније стратегије, док су ученици из експерименталне групе користили пре свега мултипликативне стратегије и ритмично пребројавање, а затим дуплирање са поновљеним сабирањем и знање чињеница. Уколико узмемо у обзир да је експериментална група 1 користила и дуплирање можемо закључити да се једине разлике крећу у смеру тога да ова група ученика користи у малој мери и поновљено сабирање, док ниједан ученик у експерименталној групи 2 није користио ову стратегију. Када је у питању Декартов производ, експериментална група 2 је у највећем проценту користила знање чињеница, док је експериментална група 1 подједнако користила и знање чињеница и мултипликативно поређење, али и дуплирање са поновљеним сабирањем. С обзиром да су у овим задацима били заступљени производи: *3·4* и *4·4,* резултати и једне и друге групе су показатељи ефикасног и флексибилног рачунања. Експериментална група 2 показује да је у већој мери „научила" ове производе и да њих користи за одређивање других производа, што потврђује ранија истраживања (Sherin and Fuson, 2005) да деца производе са мањим бројевима брже памте и користе их за одређивање других производа. С друге стране, експериментална група 1 користи стратегије које одговарају структури бројева, као што је дуплирање и мултипликативне стратегије, које се у овом случају заснивају на примени аритметичких правила, пре свега множења збира или разлике бројем, што је последица инструкција коришћених током обраде множења. Наши резултати показују да ученици из ове групе и када усвоје одређене производе користе стратегије засноване на аритметичким правилима, док ученици из експерименталне групе 2 у мањој мери приказују свој поступак рачунања, већ ментално рачунају производ два броја. Избор стратегија у експерименталним групама се темељи на анализи задатог проблема, при чему се успоставља веза између карактеристика задатка и бројева који се користе у том задатку (Vershaffel et al, 2009). Када су у питању ове групе ученика можемо закључити да нема значајнијих разлика између ових група у погледу избора стратегија множења за решавање задатака различитих семантичких структура. Употреба различитих текстуалних задатака у обе групе испитаника, уз усмереност с једне стране на иконичке репрезентације и с друге стране на аритметичка правила, у истој мери води ка развоју флексибилних менталних стратегија множења, а самим тим и развоју мулитпликативног мишљења, што су потврдила и ранија истраживања (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003; Sherin and Fuson, 2005; Downton and Sullivan, 2017). У складу са наведеним, сматрамо да је важно при обради множења користити задатке различите семантичке структуре, као и иконичке репрезентације, али и усвајати аритметичка правила заједно са другим математичким садржајима, који омогућавају њихово потпуно концептуално разумевање и примену истих као олакшица у менталном рачунању.

Уопштено гледано, можемо закључити да су обе експерименталне групе ученика након инструкција усмерених на множење једноцифреним бројевима развила мултипликативне стратегије и вршила флексибилан избор стратегија прилагођавајући их у већој мери бројевима у задатку, а у мањој мери семантичкој структури задатка. Наши резултати су у супротности са резултатима других аутора који истичу да је избор стратегије условљен семантичком структуром задатака (Downton and Sullivan, 2017). С обзиром да је експериментална група 1 била изложена инструкцијама које су се заснивале на примени аритметичких правила за развој стратегија, овакви резултати су у овој групи очекивани, јер аритметичка правила захтевају добро концептуално разумевање бројева, које се огледа у способности растављања бројева (Kamii, 1994; McNeal, 1995; Larsson et al. 2017). С друге стране, употреба иконичких репрезентација код експерименталне групе 2 је код ученика развила менталне моделе на основу којих они ментално растављају бројеве примењујући интуитивно аритметичка правила. Наши резултати потврђују да деца користе стратегије које су заступљене у настави (Sherin and Fuson, 2005), као и да се временом са употребе стратегија поновљеног сабирања прелази на мултипликативне стратегије, које се заснивају на растављању бројева (Heirdsfield et al, 1999), односно примени аритметичких правила.

Наши резултати истраживања, показују да резултати које смо добили за контролну групу ученика нису у складу са резултатима ранијих истраживња (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Downton and Sullivan, 2017), који истичу да се на задацима сложеније семантичке структуре користе флексибилније стратегије множења, као и да је избор стратегија директно повезан са семантичком структуром задатака. Резултати ове групе ученика потврђују тврдње (Clark and Kamii, 19; Siegler, 1998; Steel and Funnell, 2001) да адитивне стратегије и пренаглашеност адитивног приступа у обради множења блокира развој флексибилнијих стратегија множења.

4.3. Флексибилност стратегија множења једноцифрених бројева

Како бисмо испитали утицај коришћених бројева на избор менталних стратегија множења након обраде множења једноцифрених бројева обавили смо интервјуисање ученика. Завршни интервју 1 обухватао је исте примере као и Инцијални интервју. С обзиром да су све три групе ученика имале више од 80% тачних одговора на Инцијалном интервјуу, можемо рећи да на интуитивном нивоу већина ученика може да одреди производ два броја, али применом стратегије поновљено сабирање. Циљ нашег истраживања јесте испитивање менталних стратегија множења које ученици користе за множење два броја, јер један од показатеља мултипликативног мишљења јесте и флексибилан одабир стратегија рачунања.С обзиром да је један од показатељ разумевања множења и способност примене замене места као олакшице у рачунању, која подразумева способност менталне реорганизације чиниоца (Butterworth, Marchesini and Girelli) пре анализе стратегије утврдили смо проценат ученика који је користио замену места чинилаца као олакшицу за одређивање производа два броја на Завршном интервјуу 1 пре примене менталне стратегије множења (Табела 58), јер на основу ових резултата јасније ћемо моћи да разумемо употребу одређене стратегије за поједине производе бројева.

Табела 58. *Коришћење замене места чинилаца као олакшице у рачунању*

Контролна група		**Експериментална група 1**		**Експериментална група 2**	
ДА	**НЕ**	**ДА**	**НЕ**	**ДА**	**НЕ**
13.3%	86.7%	33.0%	67.0%	33.3%	66.7%

Напомена:
ДА – користи замену места чинилаца; НЕ – не користи замену места чинилаца
Резултати су приказани у процентима.

На основу резултата истраживања уочено је да су експерименталне групе чак у 33% случајева користиле замену места чинилаца као олакшицу у рачуну, што показује да ове групе разумеју значење замене места чинилаца, те га и користе у циљу флексибилног и ефикасног рачунања. Овакви резултати показују да ове групе ученика успешно успостављају везу између математичког записа (израза) и значења замене места чинилаца (Ambose, Beak and Carpenter, 2003). Када су у питању појединачни примери замену места чинилаца је користило преко 60% испитаника у следећим примерима: *6·2, 8·3* и *6·4* (Прилог 3: Табела 59). Наши резултати показују да ученици из експерименталних група разумеју замену места чинилаца и да је примењују за оне проиизводе где је други чинилац мањи број у односу на први чинилац, односно знају да заменом места чинилаца производ остаје исти (Butterworth, Marchesini and Girelli, 2003). С друге стране, резултати показују да ученици користе замену места чинилаца као олакшице у рачуну (једноставније је одредити колико је ако имамо на 2 места по 6 него ако имамо на 6 места по 2). Што се тиче примера *6·4* коришћење замене места чинилаца је очекивано, с обзиром да је ученицима пре постављања овог примера дато да одреде вредност производ *4·6*. Ово показује да ученици препознају да су у питању два иста чиниоца и да се вредност производа не мења уколико чиниоци замене места, те ученици успешно без поновне примене неке од менталних стратегија множења одређују производ два броја. Већина ученика је приликом интервјисања прокоментарисала да је у питању исти пример и да су чиниоци заменили места. Када су у питању експерименталне групе и обрада замене места чинилаца коришћене су пре свега репрезентације са правоугаоном схемом, које јасно истичу замену места чинилаца (Ambose, Beak and Carpenter, 2003; Schiflter,2009).

У Табели 60. дат је приказ менталних стратегија множења које су користили ученици из контролне групе на Завршном интервјуу 1.

Табела 60. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 1 у контролној групи ученика*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
6 · 2	/	1 (3.3%)	7 (23.3%)	/	1 (3.3%)	21 (70.0%)	/	/
7 · 5	/	7 (23.3%)	1 (3.3%)	/	/	20 (66.7%)	1 (3.3%)	1 (3.3%)
3 · 10	/	/	/	/	/	30 (100.0%)	/	/
4 · 9	/	/	4 (13.79%)	3 (10.34%)	/	17 (58.62%)	4 (13.79%)	1 (3.45%)
8 · 7	/	/	6 (24%)	1 (4%)	/	11 (44%)	6 (24%)	1 (4%)
9 · 8	/	/	2 (6.9%)	/	/	13 (44.83%)	14 (48.28%)	/
8 · 3	/	/	11 (39.29%)	/	/	14 (50%)	3 (10.71%)	/
4 · 6	/	1 (3.45%)	4 (13.79%)	3 (10.35%)	/	20 (68.97%)	1 (3.45%)	/
6 · 4	/	/	6 (20.69%)	1 (3.45%)	/	17 (58.62%)	5 (17.24%)	/
Укупно	0 (0.0%)	9 (3.47%)	41 (15.83%)	8 (3.09%)	1 (0.39%)	163 (62.93%)	33 (12.74%)	3 (1.16%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Контролна група ученика је у највећем проценту користила знање чињеница за одређивање производа два броја, а на другом месту се налази поновљено сабирање. Обе стратегије се налазе у основи адитивног мишљења и показатељи су недовољно развијеног мултипликативног мишљења, односно неразумевање свих мултипликативних ситуација. Занимљиво је да је за решавање примера *9·8* скоро подједнак број ученика користио и знање чињеница и мултипликативне стратегије.Ученици који су користили мултипликативну стратегију најчешће су производ одређивали на следећи начин: *9·8 = 8·9 = 80 – 8 или 9·4 + 36*. Ово показује да ученици из контролне групе интуитивно поседују мултипликативне стратегије, али оне током процеса обраде множења нису подстицане, односно акценат је био на поновљеном сабирању, те је онемогућен развој флексибилних стратегија рачунања (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001; Downton and Sullivan, 2017). Осим у овом примеру примећено је коришћење мултипликативних стратегија и у примеру *8·7 (8 · 8 – 8* или *7 · 4 + 7 · 4* или *9 · 8 – 8 – 8)* . Овакви резултати истраживања показују да ученици из контролне групе теже проналажењу флексибилних стратегија рачунања у примерима у којима нису сигурни да знају тачан резултат. Баш тај проналазак нових начин рачунања је одлика математичке креативности, која води ка откривању нечег новог (Aizikovitsh Udi, 2014), у нашем случају ефикаснијих стратегија рачунања.Такође, можемо приметити да поједини ученици из ове групе користе и дуплирање са поновљеним сабирањем у примерима где је један чинилац 4 (*4·9 = 18 + 18)*. Резултати ове групе показују да ученици интуитивно поседују мултипликативне стратегије и да неки ученици могу развити интуитивно ефикасне менталне стратегије множења (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003), али сматрамо да је за њихов потпуни развој потребно подстицати употребу истих. Подстицање ученика на флексибилно рачунање је веома важно, јер се оспособљавају за прилагођавање и одабир стратегије у зависности од карактеристика математичког задатка. Доминантна употреба знања чињиница и одсуство неефикасних стратегија показује да су ученици научили производе напамет и да је њихово мишљење адитивног карактера(Siegler, 1998; Steel and Funnell, 2001; Zeljić et al., 2019).

У Табели 61. дат је приказ менталних стратегија множења које су користили ученици из експерименталне групе 1 на Завршном интервју 1.

Табела 61. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 1 у експерименталној групи 1*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
6 · 2	/	2 (6.5%)	20 (64.5%)	/	8 (25.8%)	1 (3.2%)	/	/
7 · 5	/	17 (54.8%)	/	1 (3.2%)	/	7 (22.6%)	6 (19.4%)	/
3 · 10	/	/	/	/	/	31 (100.0%)	/	/
4 · 9	/	/	1 (3.70%)	9(33.33%)	6 (22.22%)	1 (3.7%)	9(33.33%)	1 (3.7%)
8 · 7	/	/	2 (7.69%)	1 (3.85%)	/	3 (11.54%)	20 (76.92%)	/
9 · 8	/	/	/	/	/	4 (14.81%)	23 (85.19%)	/
8 · 3	/	1 (3.2%)	12 (38.7%)	/	/	4 (12.9%)	14 (45.2%)	/
4 · 6	/	1 (3.2%)	3 (9.7%)	12 (38.7%)	7 (22.6%)	1 (3.2%)	7 (22.6%)	/
6 · 4	/	/	2 (6.5%)	3 (9.7%)	/	1 (3.2%)	25 (80.6%)	/
Укупно	0 (0.0%)	21 (7.89%)	40 (15.04%)	26 (9.77%)	21 (7.89%)	53 (19.92%)	104 (39.1%)	1 (0.38%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Ексепериментална група 1 је користила разноврсније стратегије, при чему је највећи проценат ученика (39.1%) користио мултипликативне стратегије за одређивање производа. Друга стратегија по заступљености је знање чињеница, која је најчешће коришћена у једноставнијим примерима, као што је *3·10* где су сви ученици без примене стратегија одредили производ. Знање чињеница је коришћено и за одређивање производа бројева 7 и 5. Ово показује да су ученици ове производе усвојили, те да производе где је један од чинилаца 5 или 10 користе за одређивање производа других бројева. Ранијим истраживањима (Kilpatrick, 2001; Sherin and Fuson, 2005; Ambrose, Baek and Carpenter, 2003) је потврђено да ученици производе са 5 или 10 користе као основу за развој флексибилнијих стратегија рачунања. Анализирајући стратегије коришћене за сваки пример можемо закључити да ученици из експерименталне групе 1 флексибилно рачунају и бирају менталне стратегије множења водећи рачуна о структури бројева који се множе. За одређивање производа бројева 6 и 2 примећена је значајна употреба поновљеног сабирања које су ученици користили након примене замене места чинилаца, што је у складу и са ранијим истраживањима (Sherin and Fuson, 2005), која истичу да се за множење мањих једноцифрених бројева најчешће користи поновљено сабирање. На другом месту је била употреба дуплирања, која је такође искуствено блиска ученицима и омогућава једноставно одређивање производа ова два броја, бројећи по 2. За множење бројем 5 ученици су претежно користили ритмично пребројавање, које је веома погодно и искуствено блиско ученицима. Када је у питању множење бројем 4 ова група ученика је највише употребљавала дуплирање са поновљеним сабирањем или дуплирање ($4·9 = 18 + 18; 6·4 = 12 + 12$), као и мултипликативне стратегије ослањајући се на познате производе и примену научених аритметичких правила:

– $4·9 = 4·10 – 4$ или $4 · 5 + 4 · 4$ или $2 · 9 + 2 · 9$
– $4·6 = 4·5 + 4$ или $5 · 6 – 6$

За примере *8·7* и *9·8* експериментална група 1 је у преко 80% случајева користила мултипликативне стратегије:

– 8 · *7 = 8 · 5 + 8 + 8* или *7 · 10 – 7 – 7* или *4 · 7 + 4 · 7* или *8 · 4 + 8 · 3* или *8 · 5 + 8 · 2*
– *9 · 8 = 7 · 9 + 9* или *9 · 5 + 9 · 3* ***или*** *8 · 10 – 8 · 1*

Овакви резултати су очекивани, јер су у питању већи бројеви и за одређивање производа ученици користе аритметичка правила и познате производе. Када је у питању множење бројева 8 и 3 можемо приметити да су скоро подједнако коришћене мултипликативне стратегије (*8 · 2 + 8* или *4 · 3 + 4 · 3)* и поновљено сабирање. У овом случају, примени поновљеног сабирања је претходила примена замене места чинилаца. За ученике који су пример 6·4 препознали као идентичан пример са примером 4·6 сматрали смо да примењују мултипликативне стратегије, што је чак 80% ученика. Насупрот резултатима ове групе, у контролној групи ученика је значајно мањи број ученика користио замену места чинилаца, што показује да ученици из експерименталне групе 1 разумеју ово аритметичко правило и да га користе као олакшицу у рачунању. Можемо закључити да експериментална група 1 стратегије прилагођава структури бројева у задацима, те користи знања о бројевима и аритметичким правилима за решавање примера, као и познате производе на којима ученици заснивају своје стратегије (Threlfall, 2002; Thompson, 1999; McClure, 2014).

У Табели 62. дат је приказ менталних стратегија множења које су користили ученици из експерименталне групе 2 на Завршном интервју 1.

Табела 62. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 1 у експерименталној групи 2*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
6 · 2	/	3 (10.7%)	16 (57.1%)	/	7 (25.0%)	2 (7.1%)	/	/
7 · 5	/	11 (39.3%)	/	/	/	12 (42.9%)	4 (14.3%)	1 (3.6%)
3 · 10	/	/	/	/	/	28 (100.0%)	/	/
4 · 9	/	1 (3.6%)	1 (3.6%)	9 (32.1%)	3 (10.7%)	2 (7.1%)	12 (42.9%)	/
8 · 7	/	/	1 (4%)	6(24.0%)	/	3 (12%)	15 (60%)	/
9 · 8	/	/	/	2 (7.69%)	/	6 (23.08%)	18 (69.23%)	/
8 · 3	/	3 (10.7%)	14 (50.0%)	/	/	/	11 (39.3%)	/
4 · 6	/	/	1 (3.6%)	13 (46.4%)	8 (28.6%)	1 (3.6%)	5 (17.9%)	/
6 · 4	/	/	2 (7.1%)	5 (17.9%)	/	1 (3.6%)	20 (71.4%)	/
Укупно	0 (0.0%)	18 (7.29%)	35 (14.17%)	35 (14.17%)	18 (7.29%)	55 (22.27%)	85 (34.41%)	1 (0.4%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Ексепериментална група 2 је слично, као и експериментална група 1, користила разноврсније менталне стратегије множења у односу на контролну групу ученика, које је у највећој мери прилагођавала структури бројева. И код ове групе највећи проценат ученика (34.41%) користио је мултипликативне стратегије за одређивање производа. Друга стратегија по заступљености је знање чињеница, које је најчешће коришћено у примеру *3·10* где су сви ученици без примене менталних стратегија можења одредили производ. Знање чињеница је било заступљено у великој мери и при одређивању производа бројева 7 и 5. За множење ова два броја коришћено је и ритмичко пребројавање, које је деци искуствено блиско када је у питању множење бројем 5. Ово показује да су ученици ове производе усвојили, те да та знања користе када одређују производе других бројева. За множење бројева 6 и 2 експериментална група 2 је у највећој мери користила поновљено сабирање које су ученици користили након примене замене места чинилаца. Поред ове стратегије ученици су за множење бројева 6 и 2 користили и дуплирање. За разлику од експерименталне групе 1, ова група је за одређивање производа бројева 4 и 9 најчешће користила мултипликативне стратегије ($4 \cdot 10 - 4$), а у нешто мањем проценту дуплирање са поновљеним сабирањем. За множење бројева 4 и 6 најзаступљенија је било дуплирање са поновљеним сабирањем и дуплирање. Овај производ бројева је погодан за дуплирање, јер омогћава једноставно растављање броја 4 на збир бројева $2+2$, што омогућава множење производа $4{\cdot}6$ на следећи начин: $4{\cdot}6 = 12 + 12$. И ова група је примере $8{\cdot}7$ и $9{\cdot}8$ решила користећи мултипликативне стратегије:

- $8 \cdot 7 = 7 \cdot 4 \cdot 2$ *или* $8 \cdot 4 + 8 \cdot 3$ *или* $80 - 24$ *или* $70 - 16$
- $9 \cdot 8 = 8 \cdot 10 - 8$

Битно је напоменути да су оне у овој групи ученика биле заступљене у нешто мањем проценту (60–70%) него код експерименталне групе 1, као и да су поступци рачунања били разноврснији у експерименталној групи 1, односно ова група у мањој мери користи аритметичка правила за растављање бројева на различите начине. Већина ученика је за множење бројева 9 и 8 користила наведени начин, док је код експерименталне групе 1 било присутније више разноврнсијих начина решавања применом мултипликативних стратегија. Поред ове стратегије за можење бројева 8 и 7 коришћено је и дуплирање са поновљеним сабирањем ($8{\cdot}7 = 14 + 14 + 14 +14$), што је потпуно очекивано и одговара структури ових бројева. Када је у питању множење бројева 8 и 3,50% ученика је користило поновљено сабирање, док је 39% користило мултипликативне стратегије. Око 60% ученика из експерименталне групе 2 је $6{\cdot}4$ препознала као идентичан пример са примером $4{\cdot}6$. Резултати експерименталне групе 2 нам показују да развијање стратегије употребом различитих репрезентација води ка неформалнијим стратегијама, односно примени оних стратегија које се у мањем степену ослањају на употребу аритметичких правила. Ученици из ове групе ће пре одабрати стратегије дуплирања, дуплирања са поновљеним сабирањем или мултипликативне стратегије, у којима ће на интуитивном нивоу применити аритметичка правила, али их неће директно истаћи, што није случај са експерименталном групом 1.

Када су у питању обе експерименталне групе ученика можемо приметити висок степен развијености флексибилних менталних стратегија множења, које су значајан показатељ мултипликативног мишљења (Jacob and Willis, 2003; Siemon, Breed and Virgona, 2005; Kosko, 2020). Између ових група пронађене су мале разлике у погледу коришћених стратегија на Завршном интервјуу 1, које ћемо и анализирати. Уколико посматрамо све примере, може се уочити да су обе групе највише користиле мултипликативне стратегије, а затим знање чињеница и то у примерима који су једноставнији ($7{\cdot}5$ *и* $3{\cdot}10$) и представљају познате производе на основу којих одређују производе других бројева. Занимљиво је истаћи да су обе групе у више од 15% случајева користиле знање чињеница за одређивање производа бројева 9 и 8. Овакви резултати показују да је неким ученицима једноставно одређивање производа ова два броја и да су током обраде множења успели да га запамте. Ученици који су решавали овај пример користећи мултипликативне стратегије најчешће су одређивали производ на следеће начине: $9{\cdot}8 = 8{\cdot}9 = 8{\cdot}10 - 8$ и $9{\cdot}8 = 9{\cdot}9 - 9$. Када су у питању разлике између експерименталних група можемо уочити да је већи број ученика из експерименталне групе 1 решавао пример $7{\cdot}5$ ритмичким пребројавањем, док су ученици из експерименталне групе 2 скоро подједнако користили и ритмично пребројавање и знање чињенице. Даље, ученици из експерименталне групе 2 су користили у већој мери дуплирање са поновљеним сабирањем за одређивање производа $8{\cdot}7$, док је код експерименталне групе 1 присутнија употреба мултипликативних стратегија, које се темеље на примени аритметичких правила (множење збира или разлике бројем, растављање и здруживање чинилаца). Такође, и за решавање примера $9{\cdot}8$ већи број ученика из експерименталне групе 1 је користио мултипликативне стратегије. Разлика се појавила и у примеру $8{\cdot}3$ где су ученици из експерименталне групе 1 у већем проценту користили мулитпликативне стратегије примењујући множење збира бројем, а ученици из експерименталне групе 2 су у већој мери користили поновљено сабирање. И једна и друга група је пре примене стратегија користила интуитивно замену места чинилаца, али овакве разлике су настале као последица начина обраде множења, где се у првој групи инсистирало на примени аритметичких правила, те су ови ученици остали доследни датим инструкцијама. Уопштено гледано, можемо закључити да ученици из експерименталне групе 1 користе мултипликативне стратегије више него ученици из експерименталне групе 2. Њихове стратегије се у великој мери заснивају на примени аритметичких правила и познатих производа, при чему се води рачуна о структури бројева. С друге стране, експериментална група 2 чешће користи дуплирање и дуплирање поновљеним сабирањем, али и даље у мањој мери него мултипликативне стратегије.Ова група користи аритметичка правила, али више на интуитивном нивоу, односно не истичући сваки корак у процесу рачунања. Минималне разлике које су се појавиле су заправо последица различитих инструкција, те ученици који стратегије усвајају кроз примену аритметичких правила (експериментална група 1) користе мултипликативне стратегије које се заснивају на њима и чешће су на додатном папиру бележили цео поступак рачунања. Ученици који су стратегије усвојили кроз примену различитих репрезентација (експериментална група 2) теже коришћењу и других стратегија прилагођавајући их структури бројева при чему су њихови поступци мање формални, а у оквиру групе ученика користе мањи спектар мултипликативних стратегија у оквиру једног примера. С обзиром да су ове разлике између група мале, можемо закључити да су обе експерименталне групе развиле менталне стратегије множења и да су оне резултат поучавања, што је у складу са неким ранијим истраживањима (Kamii, 1994; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson 2005; Downton and Sullivan, 2017). Развијеност ових стратегија је један од показатеља мултипликативног мишљења, које обухвата ефикасно и флексибилно рачунање, као и препознавање мултипликативних ситуација.

Други показатеља мултипликативног мишљења јесте и способност ученика да производ два броја израчунају на више начина, односно користећи различите стратегије. Како бисмо испитали колико наши ученици имају развијену способност упоредили смо број коришћених стратегија за решавање примера на Завршном интервјуу 1 за све три групе ученика (Табела 63).

Табела 63. *Број коришћених стратегија на Завршном интервјуу 1*

Контролна група		**Експериментална група 1**		**Експериментална група 2**	
1	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
89.3%	10.7%	68.8%	31.2%	77.0%	23.0%

Напомена:
1 – једна стратегија; 2 – две стратегије

Можемо приметити да су ученици на Завршном интервјуу 1 у највећем броју случајева користили само једну стратегију, с тим да је код експерименталне групе 1 уочен највећи проценат ученика који је користио две или више стратегија при одређивању производа. Анализирајући појединачне примере на целом узроку ученика (Прилог 3: Табела 59) можемо приметити да је преко 30% ученика користило две стратегије у примерима где је један од чинилаца паран број: *4·9, 8·7, 9·8, 4·6*. Наведени примери су погодини за употребу стратегије дуплирања, као и других мултипликативних стратегија. Способност ученика да користе две стратегије је показатељ концептуалног разумевања, односно спосбности ученика да мисле флексибилно и развијају и примењују различите и ефикасне стратегије рачунања (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001; Downton and Sullivan, 2017). С друге стране, инсистирање само на једном неефикасном начину решавања задатака, као што је случај у контролној групи ученика у којој је акценат стављен на посматрање множења као поновљеног сабирања, спречава развој флексибилних стратегија множења (Zeljić et al, 2019). Такође, битно је напоменути да ученици који одмах примењују мултипликативну или неку другу флексибилну стратегију рачунања не морају нужно користити и другу стратегију рачунања. Избор прве стратегије је довољан показатељ мултипликативног мишљења. У овом делу рада анализираћемо само друге стратегије за примере у којима је више од 30% ученика користило две стратегије (Прилог 3: Табела 58) (*4·9, 8·7, 9·8, 4·6)*. Резултати су приказани у Табели 63.

Табела 64. *Друге стратегије коришћене за одређивање производа на Завршном интервју 1*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
4 · 9	КГ	/	1	1	/	/	1	4	/
	Е1	/	/	1	3	1	1	7	/
	Е2	/	/	1	3	3	/	4	/
8 · 7	КГ	/	/	1	/	/	/	2	/
	Е1	/	/	/	4	/	2	11	/
	Е2	/	/	1	3	2	/	6	/
9 · 8	КГ	/	/	2	/	/	/	5	/
	Е1	/	/	1	2	/	/	9	/
	Е2	/	/	/	1	2	/	8	/
4 · 6	КГ	/	/	1	3	/	/	/	/
	Е1	/	/	/	1	3	/	10	/
	Е2	/	/	1	1	/	/	10	/

Напомена:
* број у табели представља број ученика који је користио одређену стратегију
КГ – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Циљ анализе друге стратегије које ученици користе био нам је да утврдимо да ли ученици као другу стратегију користе флексибилније стратегије или се враћају на мање флексибилне стратегије. Анализирајући резулатате ученика из контролне групе можемо приметити да ученици из ове групе (10.7%) који користе другу стратегију у тим случајевима најчешће користе мултипликативне стратегије, што показује да мањи проценат ученика из контролне групе разуме мултипликативне ситуације и у стању су да изаберу ефикасне и флексибилне стратегије рачунања, само је потребно подстакнути ученике да проналазе још решења. С друге стране, ученици из експерименталних група су за решавање примера *8·7, 9·8 и 4·9* као прву стратегију најчешће користили мултипликативне стратегије. Када су у питању ови примери и избор других стратегија и даље примењују мултипликативне стратегије или су у питању ученици који су прво користили дуплирање или дуплирање са поновљеним сабирањем или су то ученици који проналазе још један начин решавања. Када је у питању пример *4·6* већина ученика из ове две групе као другу стратегију користи мултипликативне стратегије, иако су као прву користили дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Ови резултати показују да уколико ученици на почетку користе флексибилне менталне стратегије множења и као друге стратегије ће најчешће успети да пронађу још један ефикасан начин рачунања и то најчешће применом аритметичких правила. Баш из тога разлога је експериментална група 1 имала највећи проценат коришћења других стратегија (31.2%). Ови резулати показују да употреба аритметичких правила током обраде множења позитивно утиче на развој менталних стратегија множења и доприноси развоју флексибилних начина рачунања. Аритметичка правила захтевају растављање бројева уз разумевање структуре бројева, што је веома важно за развој менталних стратегија множења (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003; Larsson, 2015).

Анализирајући све коришћене стратегије на Завршном интервјуу 1 можемо приметити да су ученици из контролне групе користили у највећем проценту знање чињеница, а затим и поновљено сабирање, те да нису тражили стратегије које би им олакшале рачунање. С друге стране, експерименталне групе су бирале флексибилније стратегије множења прилагођавајући их структури бројева. Код ових група је доминантно било коришћење мултипликативних стратегија, које захтевају примену аритметичких правила и познатих производа. Према Коску (Kosko, 2020) ученици из ових група се налазе на трећем нивоу мултипликативног мишљења, који карактерише ефиканост и флексибилност у рачунању уз примену аритметичких правила. Истраживање је показало да се множење бројевима 2, 5 и 10 лако усваја и најчешће се ти научени производи користе као познати производи који служе за одређивање других производа. Утврдили смо да се за множење бројевима 6, 7, 8 и 9 најчешће користе различите мултипликативне стратегије. За множење бројем или броја 4 ученици доминантно користе стратегије дуплирања и дуплирања са поновљеним сабирањем, уз нешто мањи проценат коришћења мултипликативних стратегија. Када је у питању множење бројем 3 или броја 3 ученици најчешће користе мултипликативне стратегије које се заснивају на аритметичким правилима или поновљено сабирање, што није у потпуности у складу са истраживањима (Sherin and Fuson, 2005), која истичу да деца мање бројеве множе применом поновљеног сабирања, али да за множење бројевима 3, 4 и 5 користе пребројавање група (појединачно и ритмично пребројавање).

Како би ученици могли ефикасно да рачунају потребно је да развију концептуално разумевање бројева и спосбност процене, што се подстиче употребом различитих репрезентација. Разумевање наведених садржаја представља основу за разумевање и употребу менталних стратегија множења, а даље и развој мултипликативног мишљења. С друге стране, истраживања у нашој држави показала су да је доминантни циљ у уџбеницима усмерен на меморисање правила, што онемогућава даљи развој флексибилних стратегија рачунања (Зељић и Дабић Боричић, 2020). Ови резултати су потврђени у нашем истраживању када је у питању контролна група. Насупрот томе, експерименталне групе су уз употребу различитих иконичких репрезентација и текстуалних задатака, као и разумевање аритметичких правила, развиле флексибилне менталне стратегије множења које прилагођавају пре свега структури бројева у задацима проналазећи најефикаснији начин рачунања. Наши резултати су у складу са ранијим истраживањима (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006) која истичу значај поучавања стратегијама менталног рачунања кроз различите приступе множењу једноцифреним бројевима у циљу развоја флексибилних менталних стратегија множења.

4.4. Разумевње аритметичких правила након систематске обраде множења једноцифрених бројева

У основи мултипликативних стратегија налазе се аритметичка правила. Према мишљењу неких аутора аритметичка правила се развијају кроз развој стратегија множења и разумевање различитих значења множења (Larsson, 2015; Ambrose et al., 2003; Jacob and Mulligan, 2014; Young-Loveridge, 2005; Hurst and Hurrell, 2016). С друге стране, Брунер и Карпентер (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003) истичу да су аритметичка правила веома важна за развој флексибилних стратегија рачунања. Како бисмо испитали да ли деца боље разумеју аритметичка правила која су интуитивно усвојена кроз развој различитих стратегија множења и примену задатака различите семантичке структуре након обраде множења једноцифреним бројевима или аритметичка правила која су усвојена на почетку обраде множења једноцифрених бројева, при чему су представљала основу за развој менталних стратегија множења упоредили смо резултате контролне групе и експерименталних група на Завршном тесту 1. Једнострука анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике у скоровима који се односе на примену аритметичких правила на Завршном тесту 1 и интервјуу 1 узетим заједно између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 8.603$, $p = .000$). Аритметичке средине и стандардне девијације група у укупним скоровима са Завршног теста 1 и Завршног интервјуа 1 налазе се у Табели 65. Једнострука анализа варијансе показала је да не постоје статистички значајне разлике у скоровима који се односе на примену аритметичких правила на Завршном интервјуу 2 између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 2.281$, $p = .108$), али да постоје статистички значајне разлике у скоровима који се односе на примену аритметичких правила на Завршном тесту 1 између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 7.682$, $p = .001$). Ипак, важно је напоменути да пронађене разлике највероватније потичу од резултата на Завршном тесту 1, пре него од резултата на Завршном интервјуу 1, с обзиром на то да су такве разлике показане када се ова два мерења сагледавају одвојено.

Табела 65. *Дескриптивни статистици скорова за аритметичка правила*

	Завршни тест 1		**Завршни интервју 1**		**Завршни тест 1 и Завршни интервју 1**	
	M	***SD***	***M***	***SD***	***M***	***SD***
Контролна група	1.200	0.997	2.633	0.850	3.833	1.289
Експериментална група 1	2.129	1.231	2.903	0.301	5.032	1.378
Експериментална група 2	2.250	1.143	2.893	0.315	5.143	1.380
Цео узорак	1.854	1.211	2.809	0.562	4.663	1.461

Анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике између група ученика у скоровима који се односе на примену аритметичких правила на Завршном тесту 1, али не и на Завршном интервјуу 1. Како бисмо описали природу тих разлика, спроведена су накнадна поређења (Табела 66) која су показала да постоје статистички значајне разлике између, са једне стране, контролне групе и, са друге стране, обе експерименталне групе на Завршном тесту 1, у правцу тога да су обе експерименталне групе имале боље постигнуће од контролне групе. Експерименталне групе се међусобно нису статистички значајно разликовале у успешности на задацима са артиметичким правилима.

Табела 66. *Дескриптивни статистици скорова за аритметичка правила*

Г1	**Г2**	***MD***	***SE***	***p***
Контролна група	Експериментална група 1	-0.929	0.289	**0.005**
Контролна група	Експериментална група 2	-1.050	0.297	**0.002**
Експериментална група 1	Експериментална група 2	-0.121	0.294	0.911

Напомена
Г1 и Г2 = групе које се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност
$p < .05$

На основу статистичких анализа, закључили смо да ученици из контролне групе показују слабије разумевање мултипликативних ситуација исказаних текстуалним репрезентацијама, док су оспособљени за одређивање вредности израза. Ови резултати указују да ученици заправо делимично поседују разумевање значења множења, јер потпуно разумевање математичких појмова подразумева разумевање реторичких, симболичких и иконичких репрезентација. Како бисмо детаљније испитали природу ових резултата бавили смо се одвојеном анализом задатака на Завршном тесту 1 и Завршном интервјуу 1, као и и њиховом упоредном анализом. На Завршном тестирању 1 користили смо три текстуална задатка и три примера у Завршном интервјуу 1 која се односе на аритметичка правила (множење збира и разлике бројем и здруживање чинилаца). С обзиром да контролна група ученика није обрадила множење збира бројем и множење разлике броје, као што смо већ напоменули, бавићемо се испитивањем разлика између група ученика узимајући у обзир наведено. У Табели 67. дат је приказ успешности сваке групе ученика на овим задацима.

Табела 67. *Успешност ученика на задацима са аритметичким правилима на Завршном тесту 1*

	Аритметичко правило	**Контролна група**	**Експериментална група 1**	**Експериментална група 2**
Текстуални задаци	Множење збира бројем	16 (53.33%)	22 (70.97%)	21 (75%)
	Множење разлике бројем	15 (50%)	24 (77.42%)	22 (78.57%)
	Здруживање чинилаца	5 (16.66%)	20 (64.52)	20 (71.29%)
Примери	Множење збира бројем $(7 + 3) \cdot 8$	27 (53.33%)	31 (100%)	28 (100%)
	Множење разлике бројем $6 \cdot (7 - 2)$	28 (50%)	31 (100%)	28 (100%)
	Здруживање чинилаца $5 \cdot 7 \cdot 2$	24 (16.66%)	28 (64.52%)	25 (71.29%)

Напомена: Проценат ученика је рачунат на основу броја ученика у свакој групи

На основу добијених резултата можемо закључити да ученици из експерименталних група показују доста боље разумевање аритметичких правила и када су она дата кроз текстуалне задатке и кроз примере у односу на контролну групу ученика. Ученици из контролне групе показују најслабије разумевање правила здруживања чинилаца, које је веома важно због растављања бројева у циљу развоја флексибилних стратегија рачунања, иако је ово правило било предмет поучавања током наставе. Такође, ове група ученика показала је и слабије разумевање (око 50% ученика) правила множења збира и разлике бројем, које је у основи свих мултипликативних стратегија, што је и очекивано с обзиром да нису била предмет поучавања. Резултати ове групе ученика показују да ученици из контролне групе у одређеној мери поседују интуитивно разумевање множења збира и разлике бројем пре систематске обраде истих. Ови резултати потврђују претходна истраживања (Ambrose et al., 2003; Baek, 2008; Schifter et al., 2008) која истичу да ученици могу интуитивно усвојити и користити аритметичка правила пре формалне обраде истих. Неразумевање аритметичких правила, у овом случају здруживања чинилаца, је уско повезано и са стратегијама које су ученици користили, те се из ове анализе јасно уочава да контролна група показује слабо разумевање аритметичких правила, а да без њиховог разумевања, бар на интуитивном нивоу, се не може очекивати ни разумевање и употреба флексибилних менталних стратегија множења (Larsson, 2015). Такође, ови резулатати показују да ученици из контролне групе само делимично разумеју сложеније мултипликативне ситуације, односно не реагују правилно на њих, што показује да обрада аритметичких правила изоловано од осталих садржаја који се односе на множење, не доприноси успостављању веза између њих, што су потврдила и нека ранија истраживања (Anthony and Walshaw, 2002). Даље, битно је напоменути да иако је здруживање чинилаца обрађено заједно са осталим садржајима везаним за множење, ученици не показују његово разумевање и не препознају га у мултипликативним ситуацијама исказаним текстуалним задацима, што сматрамо да је последица обраде здруживања чинилаца као посебне наставне јединице, при чему није инсистирано на функционалној примени правила.

Циљ наше анализе аритметичких правила био је и испитивање начина на који ће ученици решити ове задатке и примере, односно желели смо да испитамо да ли ученици бирају лакши начин одређивања производа, односно да ли увек рачунају редом или здружују чиниоце на најлакши начин, као и да ли примењују својство множења збира/разлике бројем у циљу лакшег рачунања, нарочито у експерименталним групама ученика. На Слици 18. налази се приказ текстуалних задатака које смо користили у овом делу истраживања.

У једном реду је посађено је 5 стабала бреза и 1 стабло липе. Колико укупно има стабала дрвећа у 7 редова?

Лизалица кошта 10 динара, а жвака је за 1 динар јефтинија. Колико новца нам је потребно да бисмо купили 9 жвака?

У 2 кутије је стављено по 9 пакетића чоколадица. У сваком пакетићу се налази по 5 чоколадица. Колико има укупно чоколадица?

Слика 18. Текстуални задаци који испитују аритметичка правила

У примерима и текстуалним задацима смо користили различите бројева како бисмо проверили наведено, односно за сваки текстуални задатак на Завршном тесту 1 (ТЗ) или пример (ПР) за множење збира и разлике бројем један задатак је састављен тако да је лакше прво одредити збир или разлику, а затим их помоножити. Здруживање чинилаца је захтевало у оба примера здруживање чинилаца на различите начине, у циљу лакшег рачунања.

- Множење збира бројем:
  ТЗ: $(5 + 1) \cdot 7 = 6 \cdot 7 = 42$ или $(5 + 1) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 35 + 7 = 42$
  ПР: $(7 + 3) \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$ или $(7 + 3) \cdot 8 = 7 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 56 + 24= 80$
- Множење разлике бројем:
  ТЗ: $(10 - 1) \cdot 9 = 9 \cdot 9 = 81$ или $(10 - 1) \cdot 9 = 10 \cdot 9 - 1 \cdot 9 = 90 - 9 = 81$
  ПР: $6 \cdot (7 - 2) = 6 \cdot 5 = 30$ или $6 \cdot (7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 42 - 12 = 30$
- Здруживање чинилаца:
  ТЗ: $2 \cdot 9 \cdot 5 = 18 \cdot 5 = 90$ или $2 \cdot 9 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 10 \cdot 9 = 90$
  ПР: $5 \cdot 7 \cdot 2 = 35 \cdot 2 = 70$ или $5 \cdot 7 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$

Одговоре ученика смо поделили у две групе. Прву групу чине ученици који су рачунали редом (први наведени примери рачунања за свако правило), а другу групу чине ученици који су примењивали аритметичко правило у циљу лакшег рачунања, тј. као основе стратегије рачунања(други наведени пример рачунања за свако правило). У Табели 68. приказали смо начине на које су ученици решавали задатке са аритметичким правилима на Завршном тесту 1 и примере на Завршном интервјуу 1.

Табела 68. *Примена аритметичких правила у циљу лакшег рачунања*

Група	**Тип задатка**	**Множење збира бројем**		**Множење разлике бројем**		**Здруживање чинилаца**	
		Рачуна редом	*Примењује правило*	*Рачуна редом*	*Примењује правило*	*Рачуна редом*	*Примењује правило*
КГ	ТЗ	9 (56.3%)	7 (43.8%)	9 (60%)	6 (40%)	2 (40%)	3 (60%)
	ПР	24 (88.9%)	3 (11.1%)	26 (92.9%)	2 (7.1%)	16 (66.7%)	8 (33.3%)
Е1	ТЗ	10 (45.5%)	12 (54.5%)	6 (25.5%)	18 (75%)	4 (20%)	16 (80%)
	ПР	29 (93.5%)	2 (6.5%)	29 (93.5%)	2 (6.5%)	12 (42.9%)	16 (57.1%)
Е2	ТЗ	15 (71.4%)	6 (28.6%)	9 (40.9%)	13 (59.1%)	6 (30%)	14 (70%)
	ПР	28 (100%)	/	28 (100%)	/	10 (40%)	15 (60%)

Напомена:
КГ – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2
ТЗ – текстуални задатак; ПР – пример на интервју

Када је у питању множење збира и разлике бројем, бројеви су изабрани на начин који подстиче ученике да примењују правила, односно да сваки број у загради множе бројем, па да добијене резултате сабирају/одузимају. Насупрот овим примерима, примери на интервју су одабрани тако да је ученицима лакше да одреде прво вредност у загради па да добијени резултат помноже бројем. Када је у питању множење збира бројем можемо приметити да су само ученици из експерименталне групе 1 примењивали правило, односно рачунали на следећи начин: $(5 + 1) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 35 + 7 = 42$. Насупрот њима, велики број ученика из експерименталне групе 2 је рачунао редом, не користећи правило ($(5 + 1) \cdot 7 = 6 \cdot 7$), а након добијања производа $6 \cdot 7$ ученици су користили неку од стратегија за одређивање производа. Овакви резултати показују да само ученици из експерименталне групе 1 примењују аритметичка правила као олакшицу у рачуну када су она директно дата, односно да успостављају везу између значења множења збира бројем и значења операције множења. С друге стране, када је у питању решавање примера са интервјуа (множење збира и разлике бројем) ученици из свих група су у већем проценту решавали примере рачунајући редом. Ученици из експерименталних група су текстуални задатак који је садржао множење разлике бројем већински решавали применом правила, што показује да су у овом случају обе ове групе уочиле да се применом аритметичких правила олакшава процес рачунања, што није био случај са ученицима из контролне групе. Овакви резултати су и очекивани, с обзиром да ова група ученика није усвојила наведена правила, те по узору на решавање задатака са сабирањем и одузимањем, ученици прво рачунају вредност израза у загради. Наравно, битно је напоменути да су у доста већем проценту ученици из експерименталне групе 1 решавали задатке применом правила, што потврђује претходно наведено, односно да обрада аритметичких правила на почетку обраде множења једноцифреним бројевима и функционална примена истих води ка концептуалном разумевању и флексибилној употреби мултипликативних стратегија. Здруживање чинилаца даје могућност различитог груписања чинилаца у циљу што ефикаснијег одређивања производа. Када су у питању текстуални задаци ученици из експерименталне групе 1 су здруживали чиниоце на различите начине у циљу лакшег рачунања. Такође, и већи број ученика из експерименталне групе 2 и контролне групе је здруживао чиниоце на начин који омогућава лакше рачунање. Када је у питању пример $5 \cdot 7 \cdot 2$ и рачунање редом, као и други начин здруживања, који смо навели могу бити веома једноставни за рачунање. Ученици из контролне групе су овај пример решавали у већој мери редом, док су ученици из експерименталне групе 2 у највећем проценту користили здруживање чинилаца. Нешто мањи проценат ученика из експерименталне групе 1 у односу на експерименталну групу 2 је користио ово правило. С обзиром да је највећи проценат ученика из експерименталне групе 1 у тексуталном задатку примењивао здруживање чинилаца, можемо закључити да ова група ученика показује добро разумевање здруживања чинилаца и да чиниоце здружује на различите начине у оним примерима где је то заиста потребно. Одређивање производа броја 35 и 2 се своди на поновљено сабирање, те је оправдано да се у овом примеру не врши здруживање чинилаца на различите начине.

На основу анализе употребе аритметичких правила као олашкице у рачуну можемо закључити да ученици из обе експерименталне групе разумеју аритметичка правила и њихову функционалну примену у поступцима рачунања. С друге стране, контролна група је показала слабо разумевање ових правила, као и слабу примену правила у циљу ефикаснијег рачунања, што смо донекле и очекивали, нарочито када је у питању множење збира или разлике бројем, али смо желели да испитамо њихово интуитивно разумевање. Сматрамо да су овакви резултати и последица обраде здруживања чинилаца без функционалне примене у оквиру осталих садржаја који се односе на множење једноцифрених бројева, што су потврдили и други аутори (Schliemann et al., 1998), када су испитивали разумевање замене места чинилаца. Експериментална група 1 је показала нешто мањи степен успешности на овим задацима (али не значјано мањи) у односу на експерименталну групу 2. Међутим, упоређујући колико која група користи аритметичка правила као олакшице у рачуну закључили смо да је експериментална група 1 показала знатно боље разумевање и примену множења збира и разлике бројем, као и здруживања чинилаца. Ова група у свим примерима користи правила тако да множење буде ефикасније, што је очекивано с обзиром да је ова група менталне стратегије множења развијала на основу аритметичких правила, те можемо рећи да ученици из ове групе имају развијену флексибилност у највећој мери. Наши резултати показују да коришћење правила аритметике као основе поступака и стратегија множења води ка њиховом концептуалном разумевању и примени истих у различитим задацима. Множење збира и разлике бројем представља једно од веома важних аритметичких правила, зато што омогућава флексибилност приликом рачунања и омогућава разумевање значења стандардног алгоритма, као и алгебре уопште (Bruner, 1960; Carpenter et al., 2003; Malara and Navarra, 2005; Larsson et al. 2017), коју су постигли ученици из експерименталне групе 1. Аритметичка правила која су усвојена на овај начин се боље памте и представљају бољу основу за трансфер знања на остале математичке садржаје.

4.5. Врсте грешака након систематске обраде множења једноцифрених бројева

Након обраде множења једноцифреним бројем ученици из експерименталних група су постигли значајно боље резултате него ученици из контролне групе ученика, што је као што смо већ навели, последица утицаја експерименталног фактора. Ученици из контролне групе су показали мањи степен успешности. Како бисмо испитали природу грешака анализирали смо које грешке су правиле све три групе ученика. Као што смо већ издвојили у Поглављу 1.2. грешке смо поделили у три групе: мешање рачунских операција, грешке у рачуну и неразумевање структуре иконичких и текстуалних репрезентација којима се изражавјау мултипликативне ситуације. У Табели 69. дат је приказ грешака по групама ученика подељених у две групе задатака (иконичке репрезентације и текстуални задаци).

Табела 69. *Приказ грешака на Завршном тесту 1 по групама ученика*

Група	Типови задатака	Мешање рачунских операција	Грешке у рачуну	Неразумевање структуре репрезентације
КГ	Иконичке репрезентације	0	4 (8.9%)	41 (91.11%)
	Текстауални задаци	1 (2.56%)	32 (82.05%)	6 (15.38%)
Е1	Иконичке репрезентације	0	1 (5.56%)	17 (94.44%)
	Текстауални задаци	2 (5.17%)	24 (68.57%)	9 (25.71%)
Е2	Иконичке репрезентације	0	0	15 (100%)
	Текстауални задаци	0	9 (60%)	6 (40%)
Укупно		3 (1.89%)	70 (42.68%)	91 (55.49%)

Напомена:
КГ – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2

На основу Табеле 34. (Поглавље 4.1.1) и Табеле 38. (Поглавље 4.1.2) закључили смо да је у контролној групи у задацима са иконичким репрезентацијама 21.43% одговора било нетачно, док је у текстуалним задацима контролна група дала 13% нетачних одговора. Експериментална група 1 је имала 8.29% нетачних одговора у задацима са иконичким репрезентацијама и 11.29% нетачних одговора у текстуалним задацима. Насупрот њима, експериментална група 2 је имала доста мање нетачних одговора: 7.65% нетачних одговора у задацима са иконичким репрезентацијама и 5.36% нетачних одговора у текстуалним задацима. Ови резултати су у складу са претходним закључцима, у којима смо истакли да је експериментална група 2 показала највећи степен разумевања различитих мултипликативних ситуација, што је великим делом последица начина обраде множења једноцифреним бројевима. У овом делу рада анлизираћемо само баш ове задатке на којима су ученици правили грешке приликом решавања. Као што смо већ напоменули, грешке су груписане у три категорије. У поређењу са укупним бројем грешака на Иницијалном тесту (Табела 3) можемо закључити да ученици након обраде множења значајно мање греше приликом рачунања. На основу упоредне анализе података из Табеле 3. (Поглавље IV – 2.2) и Табеле 67. можемо закључити да и даље највећи број грешака чини неразумевање структуре репрезентације, а најмањи удео у свим грешакама има мешање рачунских операција. Даље, можемо приметити да, упоређујући у процентима удео сваке врсте грешке у укупним грешкама, мешање рачунских операција је знатно мање на Завршном тесту 1 у односу на Иницијални тест. Ови резултати показују да ученици разумеју и препознају мултипликативне ситуације те правилно реагују на њих, што је свакако последица обраде множења. Оно што је битно напоменути, јесте да се удео грешака у рачуну повећао у односу на Инцијални тест. Сматрамо да ови подаци не указују да ученици након обраде множења праве већи број грешака у рачуну, него је њихово повећање у процентима последица смањења осталих грешака, као и броја грешака које су ученици правили. С друге стране, на овом тесту су коришћени и већи бројеви, те је очекивано да ученици чешће направе грешке него када су бројеви мањи. Неразумевање структуре репрезентације је показатељ неразумевања мултпликативних ситуација, те ове грешке, као и прве указују да ученици не разумеју све мутлипликативне ситуације. Анализа резултата је показала да ученици ове грешке у највећем проценту праве у задацима са иконичким репрезентацијама, што је присутно у све три групе ученика, а нарочито у контролној групи ученика где је чак 41 одговор био нетачан. Неразумевање иконичких репрезентација онемогућава развој различитих менталних стратегија множења, као ни мултипликативног мишљења (Siemon et al., 2011; Young-Loveridge, 2005; Jacob and Mulligan, 2014). Када су у питању текстуални задаци, можемо приметити да ученици већим делом праве грешке у рачуну, што показује да они разумеју задатке различите семантичке структуре, али да још увек греше при употреби стратегија множења, што је последица неразумевања стратегије рачунања или грешака при сабирању, одузимању, растављању бројева и слично. Битно је напоменути да је и у овим задацима највећи број ученика из контролне групе правио грешке. Све наведено потврђује наше претходно изнете анализе, које указују да обрада множења које се заснива на адитивном приступу, онемогућава разумевање различитих мултипликативних ситуација. Када су у питању експерименталне групе ученика примећујемо да између њих постоје разлике, у погледу доста мањег броја грешака код ученика из експерименталне групе 2, што потврђује претходно изнето да се стратегије множења развијају кроз употребу различитих иконичких и текстуалних репрезентација (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Marojoka and Beker, 2014).

У овом поглављу бавићемо се детаљнијом анализом неразумевања структуре репрезентација и грешака у рачуну. Прво ћемо анализирати грешке које се односе на неразумевање структуре репрезентације како бисмо закључили у којим задацима ученици показују најслабије разумевање структуре репрезентације. У Табели 70. дат је приказ распоређености грешака по врстама иконичких репрезентација и различитих семантичких структура текстуалних задатака по групама ученика узимајући у обзир само грешке у рачуну и неразумевање структуре репрезентације.

Табела 70. *Приказ грешака на Завршном тесту 1 по групама зад*атака

<table>
<tr><th colspan="2">Типови задатака</th><th colspan="2">Контролна група</th><th colspan="2">Експериментална група 1</th><th colspan="2">Експериментална група 2</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ГР</td><td>НСР</td><td>ГР</td><td>НСР</td><td>ГР</td><td>НСР</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Иконичке репрезентације</td><td>Правоугаона схема</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td></tr>
<tr><td>Доминске репрезентације</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td></tr>
<tr><td>Декадне репрезентације</td><td>28.57%</td><td>71.43%</td><td>33.33%</td><td>66.67%</td><td>0%</td><td>100%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Текстуални задаци</td><td>Једнакобројни скупови</td><td>66.67%</td><td>33.33%</td><td>66.67%</td><td>33.33%</td><td>28.57%</td><td>71.43%</td></tr>
<tr><td>Производ мера</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Мултипликативно поређење</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Правоугаона схема</td><td>90%</td><td>10%</td><td>100%</td><td>0%</td><td>100%</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Декартов производ</td><td>62.5%</td><td>25%</td><td>11.11%</td><td>66.67%</td><td>50%</td><td>50%</td></tr>
</table>

Напомена:
ГР – грешка у рачуну, НСР – неразумевање структуре репрезентације
Подаци су дати у процентима узимајући у обзир податке из Табеле 67.

На основу података можемо закључити да ученици, када су у питању иконичке репрезентације, већински показују неразумевање структуре репрезентације без обзира на врсту репрезентације. Једина репрезентација у којој су се јавиле грешке у рачуну јесу декадне репрезентације, што је неочекивано с обзиром да је овај тип репрезентација заступљен од првог разреда, те је структура декадне репрезентације позната. Сматрамо да су овакви резултати последица недовољне развијености мулитпликативног мишљења, као и везе између адитивног и мултипликативног мишљења. Када су у питању текстуални задаци, примећујемо да ученици из експерименталних група показују неразумевање структуре репрезентације само у задацима са Декартовим производом, док ученици из контролне групе ученика не разумеју ни правоугаону схему. У свим осталим случајевима, све групе ученика су правиле само грешке у рачуну. Ови резултати потврђују ранија истраживања која истичу да је разумевање Декартовог производа теже у односу на остале семантичке структуре

(Greer, 1992; Mulligan, 1992). Сматрамо да су задаци везани за комбинаторику у нашој наставној пракси слабо заступљени, што доводи до оваквих резултата.

Када су у питању грешке у рачуну битно је утврдити због чега те грешке настају и да ли су оне последица коришћења одређених стратегија. С обзиром да су ученици грешке у рачуну пре свега правили у текстуалним задацима, у нашем раду ћемо обухватати ову врсту грешака само кроз текстуалне задатке анализирајући стратегије које су користили ученици коју су правили грешке у рачуну. Као што смо већ изнели, у експерименталној групи је јако мали број одговора био нетачан, те ћемо у складу са тим и обухватити податке у следећој табели. У Табели 71. (Прилог 3) дат је приказ коришћених стратегија у овим задацима. Можемо приметити да ученици који праве грешке у рачуну најчешће користе стратегију поновљено сабирање без обзира на групу ученика. Ово потврђује да је поновљено сабирање неефикасна стратегија (Anghileri, 2001) и да онемогућава развој ефикасних стратегија рачунања (Zeljić et al., 2019), које су неопходне како би се развило мултипликативно мишљење. Поред поновљеног сабирања ученици су користили и мултипликативне стратегије, појединачно пребројавање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Употреба мултипликативних стратегија и дуплирања са поновљеним сабирањем показује да ученици у основи разумеју и теже коришћењу ефикасних стратегија, али да њихово разумевање још увек није потпуно. На основу анализе одговора ученика који су грешили при коришћењу мултипликативних стратегија и дуплирања приметили смо да су ученици правили следеће грешке:

- $7 \cdot 8 = 80 - 16$ *или* $7 \cdot 5 + 16$
- $9 \cdot 7 = 70 - 9$
- $6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 6$

Овакви одговори показују да ученици не разумеју мултипликативне стратегије, што се огледа у немогућности ученика да правилно одреде који број треба да одузму или додају како би израчунали на прави начин. Када је у питању множење бројем 9 приметили смо да већина ученика која греши не разуме који чинилац је потребно одузети након множења бројем 10, што показује низак ниво концептуалног разумевања бројева. С друге стране, ученици који су користили дуплирање или поновљено сабирање, а правили су грешке у рачуну, најчешће су грешили при сабирању и одузимању, што је последица начина увођења појма броја и операције сабирања и одузимања (Lianfang-Fu and Richardson, 2018). Како би ученици правилно растављали бројеве и користили својства бројева за избор и развој ефикасних стратегија рачунања, потребно је да развију концептуално разумевање броја (Berch, 2005; Gersten & Chard, 1999; Griffin, Case and Siegler, 1994).

5. Утицај инструкција заснованих на значењу аритметичких правила и на значењу појма множења на развој менталних стратегија множења двоцифрених бројева

У претходном поглављу анализирали смо успешност ученика и менталне стратегије множења које су ученици користили за множење једноцифрених бројева и које су резултат поучавања. С друге стране, мултипликативно мишљење карактерише флексибилно и ефикасно рачунање производа, као и разумевање различитих мултипликативних ситуација, те његов развој утиче и на развој других математичких појмова. У складу са тим, желели смо да испитамо да ли ће и у којој мери ученици извршити трансфер менталних стратегија множења једноцифрених бројева на менталне стратегије множења једноцифреног и двоцифреног броја пре обраде наведених садржаја. Истраживања Мулиган и Мишелмор (Mulligan and Mitchelmore, 1997) су показала да ученици користе ефикасније стратегије у скупу бројева до 20, а да се проширивањем скупа бројева (до 40) враћају на стратегије појединачног пребројавања и поновљеног сабирања. Сличне резултате су потврдили и други аутори (Heirdsfield et al, 1999) истичући да ученици за множење двоцифрених бројева који нису обрађени у настави користе неефикасније стратегије.

Једнострука анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике у скоровима на Завршном тесту 2 између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 13.823$, $p = .000$), као и на Завршном интервјуу 2 између група ученика ($F(2, 86) = 7.334$, $p = .001$), те и на Завршном тесту 2 и Завршном интервјуу 2 узетим заједно ($F(2, 86) = 16.662$, $p = .000$).Аритметичке средине и стандардне девијације група у тестовним скоровима налазе се у Табели 72.

Табела 72. *Дескриптивни статистици скорова на завршном тестирању 2*

	Завршни тест 2		**Завршни интервју 2**		**Завршни тест 2 и завршни интервју 2**	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Контролна група	2.267	1.596	3.867	1.456	6.133	2.063
Експериментална група 1	4.000	1.461	4.645	0.950	8.645	2.332
Експериментална група 2	4.000	1.333	4.857	0.448	8.857	1.557
Цео узорак	3.416	1.671	4.449	1.118	7.865	2.356

Анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике између група ученика у скоровима на Завршном тесту 2 и Завршном интервјуу 2 узетим заједно, када је у питању множење двоцифрених и једноцифрених бројева. С обзиром да су разлике постојале и на тесту и интервју за описивање природе тих разлика спроведена су накнадна поређења (Табела 73) којима смо посматрали и тест и интервју заједно. Накнадна поређења су показала да постоје статистички значајне разлике између, са једне стране, контролне групе и, са друге стране, обе експерименталне групе у правцу тога да су обе експерименталне групе постигле боље резултате од контролне групе ученика на Завршном тесту 2 и Завршном интервјуу 2 узетим заједно.. Експерименталне групе се међусобно нису статистички значајно разликовале у успешности на Завршном тестирању 2.

Табела 73. *Post-hoc тестови (Turkey's HSD) – поређење успешности између група на Завршном тесту 2 и Завршном интервјуу 2*

Г1	Г2	*MD*	*SE*	*p*
Контролна група	Експериментална група 1	-2.512	0.518	**0.000**
Контролна група	Експериментална група 2	-2.724	0.532	**0.000**
Експериментална група 1	Експериментална група 2	-0.212	0.527	0.915

Напомена.
Г1 и Г2 – групе које се пореде
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p*< .01**)

У Табели 74. је приказ успешности ученика на Завршном тесту 2 на задацима различите семантичке структуре и Завршном интервјуу 2.

Табела 74. *Успешност ученика на Завршном тесту 2 и Завршном интервју 2 по групама ученика*

Група ученика	Тест/ Интервју	Тачно урађен број задатака	Нетачно урађен број задатака	Неурађени задаци
КГ	Завршни тест 1	68 (45.33%)	79 (52.67%)	3 (2%)
	Завршни интервју 1	116 (77.73%)	22 (14.67%)	12 (8%)
Е1	Завршни тест 1	124 (80%)	29 (18.71%)	2 (1.29%)
	Завршни интервју 1	144 (92.9%)	8 (5.16%)	3 (1.94%)
Е2	Завршни тест 1	112 (80%)	26 (18.75%)	2 (1.43%)
	Завршни интервју 1	136 (97.14%)	4 (2.86%)	/

Напомена:
КГ – контрола група;
Е1 – експериментална група 1;
Е2 – експериментална група 2

На основу података из Табеле 74. у којима је дат приказ успешности сваке групе испитаника, можемо закључити да су ученици из експерименталних група постигли значајно боље резултате на Завршном тесту 2, који је обухватао 5 текстуалних задатака различите семантичке структуре. Битно је истаћи да су ученици из експерименталних група постигли веома сличне резултате на Завршном тесту 2. Наши резултати показују да ученици пре систематске обраде множења двоцифрених и једноцифрених бројева успешно множе једноцифрене и двоцифрене бројеве без обзира који је начин обраде множења једноцифрених бројева био заступљен у настави. Даље, уочено је да обрада множења усмереног на идеју једнакобројних скупова и посматрање множења као поновљеног сабирања омогућава мање повезивање стечених знања са новим, који се огледа у слабијим постигнућима на текстуалним задацима различите семантичке структуре. У нашем случају експерименталне групе су имале јако висок степен успешности на текстуалним задацима (80%), док је контролна група ученика у мање од 50% случајева успешно решила ове задатке. Нешто боље резултате ова група ученика је постигла на Завршном интервјуу 2 него на Завршном тесту 2, али и даље је значајно мањи проценат ученика у односу на експерименталне групе, успешно рачунао производ двоцифреног и једноцифреног броја. Када су у питању експерименталне групе, можемо приметити да су ученици из експерименталне групе 2 незнатно успешнији од ученика из експерименталне групе 1. Ови резултати су у складу са резултатима на Завршном тесту 1, где су ученици из ове групе били успешнији у свим групама задатака, што показује да обрада множења једноцифрених бројева употребом различитих репрезентација (текстуалних и иконичких) позитивно утиче на развој мултипликативног мишљења. На основу успешности ученика на овом тестирању, можемо рећи да су експерименталне групе показале значајно веће разумевање множења двоцифрених и једноцифрених бројева, посебно у текстуалним задацима, али су постигли и значајно боље резултате на интервју. Већ на основу ових резултата можемо истаћи да обрада множења које се заснива на разумевању различитих мултипликативних ситуација и поучавању менталним стратегијама множења позитивно утиче на трансфер знања на множење једноцифрених и двоцифрених бројева. С друге стране, велики број тачних одговора ученика из контролне групе на Завршном интервјуу 2 показује да они успешно множе двоцифрене и једноцифрене бројеве и пре формалне обраде истог, али да бисмо утврдили да ли они поседују интуитивне стратегије множења или користе пре свега поновољено сабирање, бавили смо се анализом стратегија множења коришћених за множење двоцифрених и једноцифрених бројева.

5.1. Разумевање мултипликативних ситуација представљених текстуалним задацима различите семантичке структуре

У нашем истраживању користили смо текстуалне задатке различите семантичке структуре за испитивање разумевања мултипликативних ситуација. Како бисмо испитали да ли ученици врше трансфер знања на множење једноцифреног и двоцифреног броја, испитали смо разумевање мултипликативних ситуација исказаних текстуалним задацима различите семантичке струткуре:

Семантичка структура	**Задатак**	**Бројеви у задацима**
Једнакобројни скупови	*У једној кесици има 25 сличица. Колико сличица има у 4 кесице?*	$4 \cdot 25$
Производ мера	*Једна канта воде се пуни 6 минута. Колико времена је потребно да би се напунило 13 канти воде?*	$13 \cdot 6$
Мултипликативно поређење	*Јана је сакупила 18 сличица, а њен брат 4 пута више. Колико сличица је сакупио Јанин брат?*	$18 \cdot 4$
Правоугаона схема	*Милица и Петра су плочице у кухињи поставиле у 8 редова. У сваки ред су ставиле по 16 плочица. Колико плочица су укупно залепиле?*	$8 \cdot 16$
Декартов производ	*На рекреативну наставу Јоца је понео 3 пара патика и 11 тренерки. Сваког дана Јоца носи једну тренерку и један пар патика. Колико различитих одевних комбинација може носити Јоца?*	$3 \cdot 11$

У наведеним задацима бројеви су бирани на начин који подстиче употребу различитих стратегија, јер смо желели да испитамо да ли у нашем случају на успшеност у множењу двоцифрених и једноцифрених бројева утичу сами бројеви коришћени у задатку или семантичка структура задатака, као и да ли ученици стратегије прилагођавају структури бројева. У Табели 75. дат је приказ успешности ученика по семантичкој структури задатка.

Табела 75. *Успешност ученика на Завршном тесту 2*

Семантичка структура	Контролна група (*n=30*)	Експериментална група 1 (*n=31*)	Експериментална група 2 (*n=28*)
Једнакобројни скупови	18 (60%)	28 (90.32%)	25 (89.29%)
Производ мера	11 (36.67%)	25 (80.65%)	20 (71.43%)
Мултипликативно поређење	16 (53.33%)	23 (74.19%)	24 (85.71%)
Правоугаона схема	7 (23.33%)	28 (90.32%)	20 (71.43%)
Декартов производ	16 (53.33%)	20 (64.52%)	23 (82.14%)

Све три групе ученика су најуспешније решавале задатке са једнакобројним скуповима, што показује да ученици на интуитивном нивоу најбоље разумеју једнакобројне скупове и да су им оне искуствено блиске. Слично резултатима на Завршном тесту 1, можемо приметити да су ученици из контролне групе остварили најслабија постигнућа на задацима са правоугаоном схемом, што сматрамо да је последица пренаглашености адитивног приступа множењу. Поред тога, ови ученици су показали и слабије разумевање задатака са производом мера, што је неочекивано, с обзиром да су ученици на Завршном тесту 1 показали најбоље разумевање ове групе задатака. Сматрамо да су ови резултати последица бројева коришћених у задацима, те су ученици урадили боље оне задатке где су чионици мањи од 5. Као што смо већ истакли, ученици из експерименталних група су били подједнако успешни на задацима различите семантичке структуре, али анализирајући посебно сваку групу задатака, можемо приметити да не решавају појединачне задатке са истим степеном успешности. Експериментална група 1 је најуспешнија у задацима са једнакобројним скуповима и правоугаоном схемом, док је експериментална група 2 најуспешнија у задацима са једнакобројним скуповима и мултипликативним поређењем. Ова група је најмање успешна на задацима са производом мера и правоугаоном схемом, а експериментална група 1 у задацима са Декартовим производом. Упоређујући резултате ових група са резултатима на Завршном тесту 1 где је експериментална група 2 показала највећи степен постигнућа на задацима са правоугаоном схемом, закључујемо да када је у питању ова група ученика на успешност у задацима утичу у великој мери бројеви у задацима (Sherin and Fuson, 2005), јер су баш задаци са производом мера и правоугаоном схемом подразумевали множење бројевима где је један од чинилаца већи од 5 ($13 \cdot 6$ и $8 \cdot 16$). С друге стране, резултати експерименталне групе 1 показују да на успешност ове групе утиче семантичка структура задатка, јер су ученици постигли најслабије резултате у примеру у коме је један чинилац 3 ($3 \cdot 11$) и примеру где је један чинилац 4 ($4 \cdot 11$), али ови примери припадају сложенијим семантичким структурама – Декартов производ и мултипликативно поређење (Greer, 1992; Mulligan, 1992), што показује да на успешност код ове групе ученика утиче семантичка структура задатка. Наши резултати показују да употреба различитих репрезентација утиче на разумевање различитих мултипликативних ситуација, али да се у мањој мери подстиче концептуално разумевање броја, што се огледа у мањем степену успешности на задацима у којима је један од чинилаца већи од 5. Насупрот томе, развој стратегија које се темеље на разумевању аритметичких правила позитивно утиче на концептуално разумевање бројева, јер константна употреба ових правила оспособљава ученике да растављају бројеве на начине који им омогућавају флексибилно рачунање. На овај начин ученици развијају флексибилност која им омогућава одређивање производа двоцифрених и једноцифрених бројева применом различитих менталних стратегија множења, пре систематске обраде множења, које се темеље на растављању бројева. С друге стране, код ове групе ученика присутно је слабије разумевање неких семантичких структура, нарочито Декартовог производа. Генерално гледано, и један и други модел обраде множења једноцифрених бројева има своје предности и недостатке. Модел заснован на аритметичким правилима позитивно утиче на концептуално разумевање бројева и подстиче развој флексибилних стратегија рачунања. С друге стране, модел заснован на различитим репрезентацијама подстиче боље разумевање различитих мултипликативних ситуација. Из тог разлога, сматрамо да је у настави за обраду множења једноцифрених бројева потребно користити различите текстуалне и иконичке репрезентације, уз истовремено подстицање и употребу аритметичких правила. Свеобухватном употребом наведених математичких садржаја може се постићи развој флексибилних и ефикасних стратегија множења, као и разумевање различитих мултипликативних ситуација, што је у основи мултипликативног мишљења.

5.2. Стратегије множења коришћене за множење једноцифреног и двоцифреног броја у задацима различите семантичке структуре

Првобитно ћемо се бавити анализом менталних стратегија множења, које су ученици користили за решавање текстуалних задатака различите семантичке структуре на Завршном тесту 2. С обзиром да смо већ анализирали стратегије у Поглављу 4.3.2. Овде ћемо дати само кратак преглед стратегија, уз осврт на разлике између група ученика.

У Табели 76. дат је приказ коришћених стратегија за контролну групу ученика.

Табела 76. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у контролној групи ученика на Завршном тесту 2*

Семнатичка структура	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Једнакобројни скупови	1 (5.56%)	0(0.0%)	11 (61.11%)	6 (33.33%)	0(0.0%)	0(0.0%)	0(0.0%)	0(0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (45.45%)	3 (27.27%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	2 (18.18%)	1 (9.09%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	0 (0.0%)	9 (56.25%)	4 (25.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (6.25%)	2 (12.5%)
Правоугаона схема	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (57.14%)	1 (14.29%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (14.29%)	1 (14.29%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16 (100%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
УКУПНО	1 (1.47%)	0 (0.0%)	45 (66.18%)	14 (20.59%)	0(0.0%)	0 (0.0%)	4 (5.88%)	4 (5.88%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Контролна група је за множење једноцифрених и двоцифрених бројева на Завршном тесту 2 у највећој мери користила поновљено сабирање и у нешто мањем проценту дуплирање са поновљеним сабирањем. Дуплирање са поновљеним сабирањем се јавило највише у задацима са једнакобројним скуповима, производом мера и мултипликативним поређењем, где је један од чинилаца паран број, што одговара овој стратегији. Овакви резултати су очекивани, јер поред знања чињеница ова група ученика је у највећем проценту на свим тестирањима користила поновљено сабирање. Резултати показују да контролна група ученика још увек није развила мултипликативно мишљење, односно да је њихово мишљење адитивног карактера, што је свкаако последица начина обраде множења једноцифрених бројева.

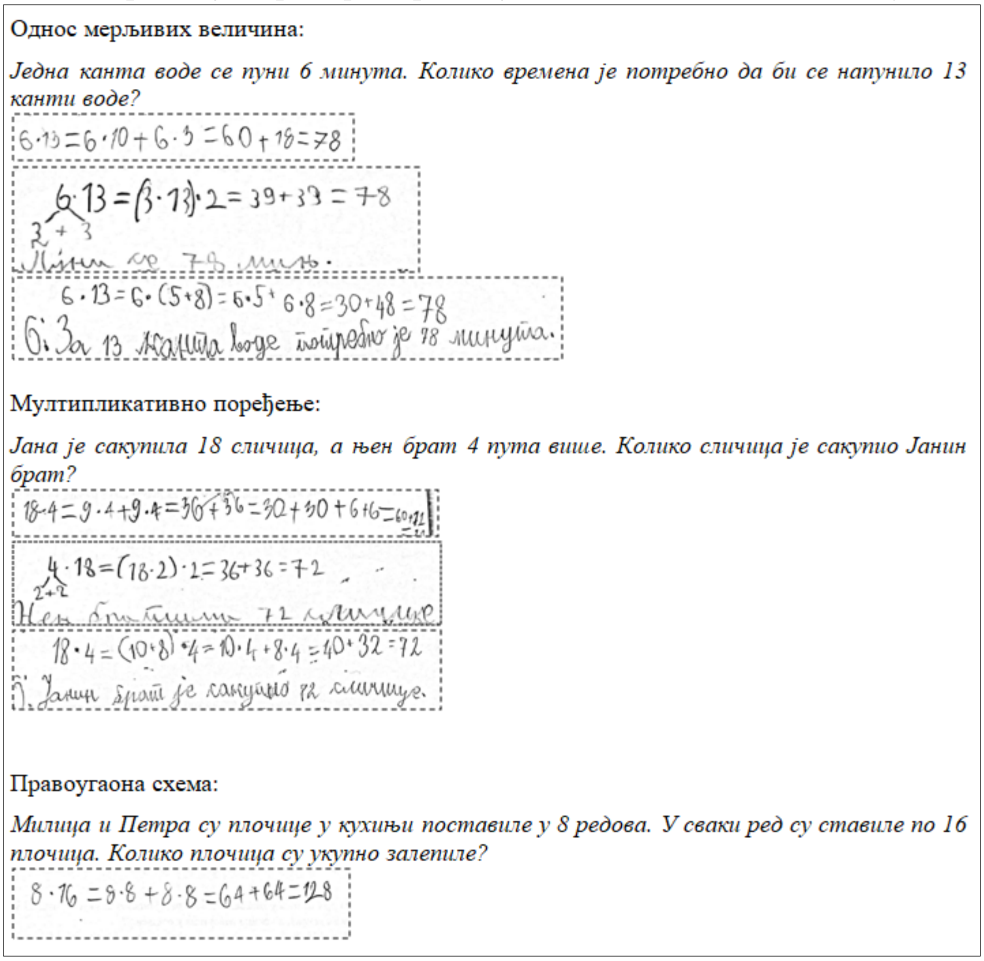
У Табели 77. дат је приказ менталних стратегија множења које је користила експериментална група 1 на Завршном тесту 2.

Табела 77. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у експерименталној групи 1 на Завршном тесту 2*

Семнатичка структура	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Једнакобројни скупови	0(0.0%)	0 (0.0%)	7 (25%)	14 (50%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (25%)	0 (0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (12%)	6 (24%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16 (64%)	0 (0.0%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (21.74%)	9 (39.13%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (43.48%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (17.86%)	6 (21.43%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	17 (60.71%)	0 (0.0%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	14 (70%)	1 (5%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (25%)	0 (0.0%)
УКУПНО	0 (0.0%)	0 (0.0%)	33 (26.61%)	36 (29.03%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	55 (44.35%)	0 (0.0%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Експерименталне групе су на Завршном тесту 1 користиле разноврсне стратегије, што није био случај за множење двоцифрених бројева. Експериментална група 1 је за множење двоцифреног и једноцифреног броја користила три стратегије: мултипликативне стратегије, дуплирање са поновљеним сабирањем и поновљено сабирање. Најзаступљеније стратегије у већини задатака (производ мера, мултипликативно поређење и правоугаона схема) су мултипликативне стратегије. Примери стратегије за наведене задатке дати су на Слици 19.



Слика 19. *Примери коришћења мултипликативних стратегија*

На основу одговора можемо приметити да ученици из експерименталне групе 1 мултипликативне стратегије за множење једноцифреног и двоцифреног броја темеље на правилној употреби аритметичких правила, растављајући пре свега двоцифрене бројеве на различите начине. Ови одговори показују да ученици користе менталне стратегије које су биле резултат поучавања и за множење двоцифреног и једноцифреног броја пре обраде ових садржаја, при чему воде рачуна о структури бројева у задацима. С друге стране у задацима са једнакобројним скуповима ученици из ове групе су највише користили дуплирање са поновљеним сабирањем, што одговара структури бројева у задатку (*4·25 – 25 + 25 = 50 и 50 и 50 = 100*). За решавање задатака са Декартовим производом ученици из експерименталне групе 1 су највише користили поновљено сабирање, а затим мултипликативне стратегије. И једна и друга група стратегија одговара бројевима у задацима, јер производ бројева 3 и 11 можемо лако израчунати као *11+11+11* или као *11·2 + 11,* при чему долази до примене аритметичких правила. Ова група ученика јесте показала да на успшеност у решавању утиче семантичка структура задатка, али битно је напоменути да ученици који препознају мултипликативне ситуације и успешно решавају задатке, менталне стратегије бирају у складу са структуром бројева.

У Табели 78. смо приказали менталне стратегије множења које су користили ученици из експерименталне групе 2 за множење двоцифреног и једноцифреног броја.

Табела 78. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у експерименталној групи 2 на Завршном тесту 2*

Семнатичка структура	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	0(0.0%)	0(0.0%)	7 (28%)	17 (68%)	0(0.0%)	0(0.0%)	1 (4%)	0(0.0%)
Производ мера	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (20%)	4 (20%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (50%)	2 (10%)
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (16.67%)	12 (50.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	8 (33.33%)	0 (0.0%)
Правоугаона схема	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (15%)	3 (15%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	14 (70%)	0 (0.0%)
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	18 (73.91%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (21.74%)	0 (0.0%)
УКУПНО	0 (0.0%)	0 (0.0%)	36 (32.14%)	36 (32.14%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	38 (33.93%)	2 (1.79%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Експериментална група 2 је за решавање задатака на Завршном тесту 2 користила исте стратегије као и експериментална група 1. Разлика се огледа у томе што су само два ученика користила неку другу стратегију за одређивање производа бројева, али је то занемарљив број ученика. Битно је напоменути да су у овој групи све три коришћене стратегије (поновљено сабирање, дуплирање са поновљеним сабирањем и мултипликативне стратегије) биле заступљене у скоро истој мери, што није био случај са експериментланом групом 1, код које су најзаступљеније биле мултипликативне стратегије. Ученици из ове групе су мултипликативне стратегије у највећој мери користили за решавање задатака са производом мера и правоугаону схему, где су постигли и најслабије резултате. С друге стране, сматрамо да ове стратегије највише и одговарају бројевима у задацима (*13·6 и 8·16*), јер захтевају примену аритметичких правила у циљу растављања бројева, што је у основи мултипликативних стратегија. Битно је напоменути да је већина ученика у овој групи бројеве 13 и 16 растављала на збир десетица и јединица, што у основи одговара стандардном начину обраде множења једноцифрених и двоцифрених бројева. С те стране, сматрамо да су ученици из експерименталне групе 1 показали боље разумевање мултипликативних стратегијеа и да имају развијенију адаптивност која се огледа у различитим начинима растављања бројева, а самим тим и разноврснијим начинима множења двоцифрених и једноцифрених бројева. Даље, ученици су и множење бројем 4 у задатку са једнакобројним скуповима и задатку са мултипликативним поређењем (*25·4 и 18·4*) користили дуплирање са поновљеним сабирањем, што свакако одговара стрктури наведених бројева. Задатак са Декартовим производом је већина ученика решила поновљеним сабирањем, што свакако одговара множењу бројем 3.

Када су у питању разлике између експерименталних група можемо нагласити да су оне мале, те ћемо се само кратко осврнути на њих. Експериментална група 1 је у већини задатака користила мултипликативне стратегије у већем проценту у односу на експерименталну групу 2. Сматрамо да су ови резултати последица употребе аритметичких правила за развој менталних стратегија множења, те ученици њих примењују у већој мери. С друге стране, експериментална група 2 тежи већем прилагођавању стратегија множења бројевима у задацима те пример *18·4* решава дуплирањем, примењујући замену места чинилаца, док експериментална група 1 раставља број 18 примењујући множење збира и разлике бројем, али је занимљиво истаћи да ученици из експерименталне групе 1 растављају број 18 на различите начине, док ученици из експерименталне групе 2 увек растављају на збир десетица и јединица. Насупрот наведеном, за производ *8·16* ученици из експерименталне групе 2 су користили у већој мери мултипликативне стратегије и то на следећи начин: $8 \cdot 10 + 8 \cdot 6$. Ученици из експерименталне групе 1 су овај пример решавали већински дуплирањем са поновљеним сабирањем, што нам говори да ученици из ове групе стратегије најчешће бирају у зависности од вредности првог чиниоца, те уколико је први чинилац мањи од 10 бирају стратегије дуплирања са поновљеним сабирањем, а у супротном теже примени мултипликативних стратегија. С друге стране, ученици из експерименталне групе 2 посматрају вредност оба чиниоца и у зависности од тога бирају стратегије множења. Обе групе показују висок степен разумевања множења једноцифрених и двоцифрених бројева, као и флексибилности при одабиру стратегија што је одлика мултипликативног мишљења, али сматрамо да ученици из експерименталне групе 1 показују нешто већи степен флексибилности, која се огледа у примени различитих аритметичких правила и растављању бројева на разноврсније начине.

Генерално гледано, сматрамо да су обе експерименталне групе показале велики степен успешности у множењу двоцифрених и једноцифрених бројева пре њихове систематске обраде, што се огледа у разумевању текстуалних задатака и одабиру веома ефикасних стратегија множења, које пре свега прилагођавају структури бројева. Обе експерименталне групе су користиле разноврсније стратегије на Завршном тесту 1, али овакав избор стратегија за множење једноцифреног и двоцифреног броја показује да ученици врше трансфер подучених менталних стратегија множења за једноцифрене бројве на множење двоцифрених и једноцифрених бројева. Ранија истраживања (Fazio, deWolf and Siegler, 2016; Opfer and Siegler, 2007) су показала да ученици временом теже коришћењу оних стратегија које су за њих сигурне, а омогућавају ефикасно рачунање. Ученици из експерименталних група су током обраде множења усвојили различите стратегије, а за множење једноцифреног и двоцифреног броја бирају оне које су за њих ефикасне, при чему их прилагођавају структури бројева. Наши резултати су у супротности са ранијим истраживањима (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Heirdsfield et al, 1999), која су истакла да се ученици за множење већих бројева враћају на употребу адитивних стратегија. На успешност и одабир ефикасних менталних стратегија множења пре свега утиче вредност бројева у задатку, а затим и контекст задатка (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985), али у мањој мери него вредност бројева. Употреба различитих стратегија током обраде множења једноцифреним бројевима позитивно утиче на учење и постигнућа ученика и неопходан је услов за каснији развој менталних стратегија множења и дељења (Liu et al., 2015).

5.3. Флексибилност стратегија множења у примерима са једноцифреним и двоцифреним бројевима

На Завршном интервјуу 2 ученици су показали велики степен успешности у рачунању производа двоцифреног и једноцифреног броја. Успешност ученика из контролне групе је нешто мања у односу на ученике из експерименталних група, али та разлика није статистички значајна. Како бисмо испитали да ли ученици користе флексибилне стратегије рачунања за множење двоцифреног и једноцифреног броја пре обраде, интервјуисали смо ученике кроз пет примера. Килпатрик (Kilpatrick, 2001) је истакао значај обраде процедура и стратегија рачунања са разумевањем, јер усвајање истих без разумевања води потешкоћама у рачунању са вишецифреним бројевима. Из наведног разлога желели смо да видимо колико су наши модели обраде множења утицали на развој флексибилних стратегија множења које ученици могу успешно да примењују и на проширеном скупу бројева. За множење двоцифрених и једноцифрених бројева веома је важно разумевање структуре бројева, односно могућност њиховог растављања и састављања на различите начине (Behr, 1989; Trafton, 1989), на којима се и заснивају мултипликативне стратегије.

У циљу испитивања флексибилности множења обавили смо истраживање менталних стратегија множења које су ученици користили за множење једноцифреног и двоцифреног броја. У неким примерима је било погодније користити замену места чинилаца, док у другим примерима није, као олакшице у рачуну. Замену места чинилаца је користило 31,03% ученика из контролне групе, 24,31% ученика из експерименталне групе 1 и 32,35% ученика из експерименталне групе 2. На основу наше анализе можемо закључити да је експериментална група 1 најмање користила замену места чинилаца, док су експериментална група 2 и контролна група скоро подједнако користили замену места чинилаца. Употреба замене места чинилаца јесте један од показатеља разумевања множења и омогућава ефикасније рачунање у почетним фазама учења множења где ученици још увек развијају сва значења операције множења. С друге стране, слабија заступљеност код експерименталне групе 1 није показатељ неразумевања или неразвијености мултипликативног мишљења, већ напротив то може бити и последица вишег нивоа разумевања значења операције множења, у којем ученици посматрају чиниоце независно од њиховог значења (први и други чинилац), односно теже примени стратегија које су довољно ефикасне и флексибилне и без претходне примене замене места чинилаца. Као што смо већ изнели, ученици из ове групе испитаника су за решавање текстуалних задатака који обухватају множење двоцифреног и једноцифреног броја у највећој мери користили мултипликативне стратегије које се заснивају на аритметичким правилима (множење збира или разлике бројем, здруживање чинилаца), што је битна одлика мултипликативног мишљења (Loveridge, Larsson, 2016; Izsak, 2004).

На основу анализе коришћења замене места чинилаца у сваком примеру утврдили смо да је ово правило највише коришћено у примерима где је први чинилац једноцифрени број ($13 \cdot 9$ (52,63%) и $15 \cdot 4$ (81,18%)). Овакви резултати су показатељ да ученици у значајној мери примењују правило замене места чинилаца као олакшицу у рачуну. Резултати нашег истраживања су показали да ученици разумеју и користе замену места чинилаца у циљу флексибилног рачунања, што је у супротности са ранијим истраживањима (Zeljić et al., 2019; Schliemann et al., 1998).

Како бисмо утврдили да ли ученици врше трансфер стратегија множења једноцифреним бројевима на стратегије множења двоцифреног и једноцифреног броја анализирали смо стратегије које су користили ученици на Завршном интервјуу 2.

У Табели 79. дат је приказ стратегије множења које су користили ученици из контролне групе на Завршном интервјуу 2.

Табела 79. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 2 у контролној групи ученика*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
5 · 25	0 (0.0%)	3 (11.54%)	12 (46.15%)	2 (7.69%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	8 (30.77%)	1 (3.85%)	26
6 · 12	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (47.62%)	6 (28.57%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (23.81%)	0 (0.0%)	21
8 · 14	0 (0.0%)	0 (0.0%)	10 (47.62%)	6 (28.57%)	2 (9.52%)	0 (0.0%)	2 (9.52%)	1 (4.76%)	21
13 · 9	0 (0.0%)	0 (0.0%)	12 (57.14%)	1 (4.76%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	7 (33.33%)	1 (4.76%)	21
15 · 4	0 (0.0%)	0 (0.0%)	13 (48.15%)	1 (3.7%)	5 (18.52%)	0 (0.0%)	6 (22.22%)	2 (7.41%)	27
Укупно	0 (0.0%)	3 (2.59%)	57 (49.14%)	16 (13.79%)	7 (6.03%)	0 (0.0%)	28 (24.14%)	5 (4.31%)	116

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Контролна група ученика за одређивање производа једноцифрених и двоцифрених бројева је у највећој мери користила поновљено сабирање као стратегију, а у нешто мањој мери мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем. Ученици из ове групе су на Завршном интервјуу 1 користили највише знање чињеница, али пошто ове производе нису могли да одреде применом познатих производа тежели су проналажењу других стратегија. Ово потврђује истраживања (Heirdsfield et al, 1999) која истичу да ученици за множење двоцифреног и једноцифреног броја теже примени мултипликативних стратегија. Даље, сматрамо да је доминантна употреба поновљеног сабирања последица начина обраде множења једноцифреним бројем које је било адитвног карактера. Употреба мултипликативних стратегија код контролне групе показује да ученици када не знају да одреде производ теже проналажењу других ефикаснијих начина рачунања, што заправо показује да употреба једне стратегије не значи нужно и спутавање развоја других ефикасних менталних стратегија множења, како тврде неки аутори (Ambrose, et al., 2003; Jacob and Willis, 2001; Downton and Sullivan, 2017). Контролна група интуитивно поседује менталне стратегије множења, али је потребно подстаћи њихову употребу током обраде множења.

Анализирајући одговоре ученика можемо закључити да су се њихове мултипликативне стратегије темељиле на употреби множења збира бројем и познатих производа уз упостављање везе са усменим поступком сабирања двоцифрених бројева. То значи да су ученици пре почетка рачунања растављали двоцифрени број на збир десетица и јединица, а затим су сваки сабирак множили са чиниоцем који је једноцифрени број при чему су производе једноцифрених бројева већ знали. Контролна група ученика успешно повезује научене математичке садржаје и користи постојећа знања за откривање нових, што је одлика математичке креативности (Skemp, 1993). Мултипликативне стратегије су у већој мери коришћене у примеру *5·25* и *13·9* и то на следећи начин:

– $5 \cdot 25 = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 5$
– $13 \cdot 9 = 130 – 13$ или $13 \cdot 3 + 13 \cdot 3 + 13 \cdot 3$

За множење два броја, при чему је један број једноцифрени паран број (*6·12, 8·14 и 15·4)*, ученици из контролне групе су поред поновљеног сабирања користили и дуплирање са поновљеним сабирањем ($6 \cdot 12 = 24 + 24 + 24$; $8 \cdot 14 = 28 + 28 \rightarrow 54 + 54$; $15 \cdot 4 = 30 + 30$), што показује да ученици из контролне групе стратегије прилагођавају структури бројева и да у ситуацијама када треба да одреде производе бројева који нису били предмет обраде у настави теже проналажењу што флексибилнијих начина рачунања, што није био случај за множење једноцифрених бројева. Овакви резултати показују да ученици из контролне групе интуитивно поседују флексибилне стратегије рачунања, али је пренаглашеност адитивног приступа негативно утицала на њихов развој.

У Табели 80. дат је приказ стратегије множења које су користили ученици из експерименталне групе 1 на Завршном интервјуу 2.

Табела 80. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 2 у експерименталној групи 1*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
5 · 25	0 (0.0%)	1 (3.33%)	7 (23.33%)	8 (26.67%)	1 (3.33%)	0 (0.0%)	13 (43.33%)	0 (0.0%)	30
6 · 12	0 (0.0%)	1 (3.45%)	4 (13.79%)	9 (31.03%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	15 (51.72%)	0 (0.0%)	29
8 · 14	0 (0.0%)	0 (0.0%)	5 (18.52%)	4 (14.81%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	18 (66.67%)	0 (0.0%)	27
13 · 9	0 (0.0%)	0 (0.0%)	6 (21.43%)	3 (10.71%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	19 (67.86%)	0 (0.0%)	28
15 · 4	0 (0.0%)	0 (0.0%)	6 (20%)	12 (40%)	5 (16.67%)	0 (0.0%)	7 (23.33%)	0 (0.0%)	30
Укупно	0 (0.0%)	2 (1.39%)	28 (19.44%)	36 (25%)	6 (4.17%)	0 (0.0%)	72 (50%)	0 (0.0%)	144

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Ученици из експерименталне групе 1 су у чак 50% случајева користили мултипликативне стратегије за одређивање производа двоцифреног и једноцифреног броја. Поред ове стратегије, користили су и дуплирање са поновљеним сабирањем и поновљено сабирање. Мултипликативне стратегије су биле најзаступљеније у примерима *8·14, 13·9* и *6·12* (преко 50%), што показује да ови ученици врше трансфер стратегија множења једноцифрених бројева на стратегије множења двоцифреног и једноцифреног броја. Експериментална група 1 је наведене примере решавала на следеће начине:

- $8 \cdot 14 = 8 \cdot 7 \cdot 2$ или $8 \cdot 10 + 8 \cdot 4 = 80 + 32$ или $4 \cdot (2 \cdot 14)$ или $140 - 14$ или $8 \cdot 6 + 8 \cdot 8$
- $13 \cdot 9 = 130 - 13$ или $(13 \cdot 3) + (13 \cdot 3) + (13 \cdot 3)$ или $10 \cdot 9 + 3 \cdot 9$
- $6 \cdot 12 = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 2$ или $3 \cdot (2 \cdot 13)= 3 \cdot 26 = 3 \cdot 20 + 18$ или $36 + 36$

Њихове стратегије се заснивају на примени аритметичких правила, те неки ученици користе множење збира бројем док други ученици користе здруживање и растављање чиниоца на различите начине. Као и код контролне групе и овде један део ученика раставља двоцифрене бројеве на збир десетица и јединица аналогно са усменим поступком сабирања двоцифрених бројева. Разлике у односу на контролну групу ученика, је што ови ученици и даље користе мултипликативне стратегије када одређују производ два једноцифрена броја. Као што видимо у наведеним примерима, ученици су на различите начине множили бројеве 8 и 14, растављајући 14 на 10 и 4 или на 6 и 8, док је један део ученика користио растављање чинилаца, које су затим здруживали на најпогоднији начин. Када је у питању множење бројева 13 и 9 ученици су у најмањој мери, у односу на остале групе ученика, користили поновљено сабирање. Они су производ одређивали или растављањем броја 13 на збир бројева 10 и 3 или или допуњавањем броја 9 до 10 (*13·10 – 13*). За одређивање производа бројева 6 и 12 ученици су растављали број 12 на збир бројева 10 и 2 или су растављали чиниоце на више чиниоца, а затим их здруживали на различите начине.У овом примеру у великој мери је било заступљено и дуплирање (*36 + 36*). Дуплирање са поновљеним сабирањем је значајно коришћено и за одређивање производа *15·4* што је потпуно очекивано, с обзиром да је један чинилац 4, те ученици прво одређују збир бројева *15 + 15*, а затим добијени збир дуплирају. Када је у питању пример *5·25* ученици су користили мултипликативне стратегије, као и поновљено сабирање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Ученици који су користили мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем полазили су од производа *4·25* који је погодан за дуплирање, па су додавали још 25. Велики број ученика је овај пример рачунао на основу познатог производа из Завршног теста 2 (*4·25*).

Сви одговори ученика из експерименталне групе 1 показују веома висок степен развијености флексибилних менталних стратегија множења, које одликује висок степен флексибилности и ефикасности у рачунању. Ови ученици за своје мултипликативне стратегије у највећој мери користе здруживање и растављање чинилаца, као и множење збира или разлике бројем, али у сваком случају воде рачуна о структури бројева. Њихови резултати показују да обрада аритметичких правила у оквиру операције множења позитивно утиче на разумевање и примену истих у циљу ефикасног рачунања, што је и један од циљева обраде аритметичких правила у млађим разредима основне школе. Разумевање и примена аритметичких правила подстиче развој мултипликативних стратегија множења, а она се даље развијају и повећава се ниво њиховог разумевања кроз њихову примену у оквиру различитих ефикасних стратегија множења (Ambrose et al., 2003; Larsson, 2015).

У Табели 81. дат је приказ стратегије множења које су користили ученици из експерименталне групе 2 на Завршном интервјуу 2.

Табела 81. *Стратегије коришћене за решавање примера на Завршном интервјуу 2 у експерименталној групи 2*

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	У
5 · 25	0 (0.0%)	5 (17.86%)	4 (14.29%)	8 (28.57%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	11 (39.29%)	0 (0.0%)	28
6 · 12	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (14.81%)	7 (25.93%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	16 (59.26%)	0 (0.0%)	27
8 · 14	0 (0.0%)	1 (3.85%)	3 (11.54%)	2 (7.69%)	3 (11.54%)	0 (0.0%)	17 (65.38%)	0 (0.0%)	26
13 · 9	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (11.11%)	2 (7.41%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	22 (81.48%)	0 (0.0%)	27
15 · 4	0 (0.0%)	0 (0.0%)	4 (14.29%)	1 (3.57%)	15 (53.57%)	0 (0.0%)	8 (28.57%)	0 (0.0%)	28
Укупно	0 (0.0%)	6 (4.41%)	18 (13.24%)	20 (14.71%)	18 (13.24%)	0 (0.0%)	74 (54.41%)	0 (0.0%)	136

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Експериментална група 2 показала је веома сличне резултате као и експериментална група 1. Ова група ученика је у незнатно већем проценту користила мултипликативне стратегије. Затим су користили дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Ако се ове две стратегије посматрају заједно, можемо рећи да су је обе експерименталне групе користиле скоро подједнако. Трећа група стратегија која је била заступљена јесте поновљено сабирање, али у нешто мањем проценту него у експерименталној групи 1. Резултати ове групе ученика показују да ученици успешно множе двоцифрене и једноцифрене бројеве пре њихове обраде примењујући ефикасне стратегије, које прилагођавају структури бројева. Експериментална група 2 је мултипликативне стратегије највише користила у следећим примерима: *13·9, 8·14 и 6·12*, што је примећено и код експерименталне групе 1. Битно је напоменути да је за пример *13·9* чак 81,48% ученика користио мултипликативне стратегије, што није био случај код претходне групе ученика, која је у око 20% случејаве користила поновљено сабирање. Ова група ученика је пример *13·9* решавала на следеће начине: *130 – 13* или *10 · 9 + 3 · 9.* За решавање овог примера поновљено сабирање није ефикасна стратегија. Резултати експерименталне групе 2 показују да су ови ученици користе веома флексибилне стратегије и да, као што смо већ рекли, бирају стратегије у складу са структуром бројева, што су показатељи мултипликативног мишљења. За множење производа *8·14* и *6·12* ученици су најчешће растављали други чинилац на збир десетица и јединица. Поред тога ученици су користили и следеће начине решавања:

– $6 \cdot 12 = 3 \cdot 12 + 3 \cdot 12$ или $6 \cdot 6 \cdot 2$
– $8 \cdot 14 = 4 \cdot 14 + 4 \cdot 14 = (28 + 28) + (28 + 28)$ или $8 \cdot 7 + 8 \cdot 7$

Експериментална група 2 поред растављања двоцифреног броја на десетице и јединице приликом примене мултипликативних стратегија, раставља парне бројеве на збир једнаких сабирака. У неким ситуацијама они користе знање чињеница за даље рачунање, а у неким ситуацијама се враћају на поновљено сабирање или дуплирање са поновљеним сабирањем, што показује да иако користе дуплирање са поновљеним сабирањем теже проналажењу што ефикаснијег начина одређивања производа. Дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем било је њазаступљеније у примеру *15·4* што је очекивано, јер је други чинилац 4. Занимљиви резултати су се појавили у првом примеру (*5·25)* где су ученици поред дуплирања са поновљним сабирањем и мултипликативних стратегија, у којима су растављали 25 на збир бројва 20 и 5 користили и ритмичко пребројавање. Ученици који су користили ритмичко пребројавање су додавали по 25 (*25, 50, 75, 100, 125*), што ученици раде по истом принципу као и када множе бројем 5.

Резултати експерименталне групе 2 показују мање разлике у односу на експерименталну групу 1, али без обзира на исте разлике можемо закључити да су обе групе развиле мултипликативно мишљење, које се огледа у примени ефикасних стратегија множења и за двоцифрене и једноцифрене бројеве, које нису биле предмет поучавања. Код експерименталне групе 2 је примећен мањи степен формалног рачунања, у смислу прецизног писања поступка рачунања. С друге стране, код ученика из експерименталне групе 1 употреба мултипликативних стратегија је у већој мери праћена записивањем целог поступка који се заснива на примени аритметичких правиила. Сматрамо да ове разлике, с једне стране јесу последица начина обраде множења, где се код прве групе множење усвојило применом аритметичких правила, а код друге групе радом на различитим репрезентацијама, али с друге стране оне могу бити и последица рада учитеља од почетка првог разреда. Ово потврђује ранија истраживања (Mulligan and Mitchelmore, 1997¸Downton and Sullivan, 2017)која показују да ученици са узрастом теже коришћењу софистициранијих стратегија, што је последица начина примене различитих репрезентација и аритметичких правила при обради множења, а све то подстиче дубље разумевање множења.

5.4. Врсте грешака пре систематске обраде множења двоцифрених и једноцифрених бројева

Успешност ученика на Завршном интервјуу 2 је била висока у све три групе ученика. С друге стране, на Завршном тесту 2 ниво успешности је био доста мањи, нарочито у контролној групи ученика. У овом делу рада приказаћемо грешке које су правили ученици на Завршном тесту 2 (Табела 82).

Табела 82. *Приказ грешака на Завршном тесту 2 по групама ученика*

Група	Мешање рачунских операција	Грешке у рачуну	Неразумевање структуре репрезентације
Контролна група	28 (35,44%)	21 (26,58%)	30 (37,97%)
Експериментална група 1	5 (17,24%)	13 (44,83%)	11 (37,93%)
Експериментална група 2	1 (3,85%)	21 (80,77%)	4 (15,38%)

У Табели 82. дат је приказ грешака по групама ученика за оне ученике који су задатак урадили нетачно. Када је у питању контролна група ученика (52,67% није тачно урадило задатке) можемо приметити да се највећи део грешака односио на неразумевање структуре текстуалног задатка, што показује да ученици не разумеју различите семантичке структуре задатака када су бројеви у задацима двоцифрени, иако су ови типови задатака већ коришћени. Даље, у великом проценту ова група ученика је мешала рачунске операције, користећи пре свега сабирање, што је такође показатељ неразумевања структуре задатка. Грешке у рачуну су се јавиле у најмањем проценту, али је и даље тај проценат ученика значајан. Када су у питању експерименталне групе ученика, највећи удео грешака имају грешке у рачуну, које показују да ученици препознају мултипликативне ситуације и да правилно реагују на њих, али не знају да одреде производ два броја или користе неефикасне стратегије множења. Експериментална група 2 је показала доста боље разумевање множења двоцифреног и једноцифреног броја, што се огледа у малом проценту остала два типа грешака (мешање рачунских операција и неразумевање структуре репрезентације). У преко 50% случајева ученика који су нетачно урадили задатак из експерименталне групе 1 су правили наведене типове грешака, што показује да ти ученици не разумеју мултипликативне ситуације исказане текстуалним задацима. Сматрамо да је експериментална група 2 правила мање наведене типове грешака због употребе различитих иконичких репрезентација и текстуалних задатака током обраде множења једноцифрених бројева. С друге стране, ова група је правила већи број грешака у рачуну у односу на експерименталну групу 1, која је стратегијама множења подучавана кроз примену аритметичких правила. Ови резултати показују да употреба аритметичких правила води ка бољем разумевању стратегија и ка већој тачности, јер ученици разумеју значење правила и знају како да их користе у циљу примене мултипликативних стратегија. Такође, обрада множења и менталних стратегија множења заснованих на различитим репрезентацијама води ка бољем разумевању различитих мултипликативних ситуација.

Како бисмо утврдили зашто ученици греше у рачуну урадили смо анализе стратегија које су користили ученици који су правили грешке у рачуну на Завршном тесту 2 (Прилог 3: Табела 83). На основу података из наведене табеле можемо приметити да су ученици из контролне групе који су правили грешке у рачуну најчешће користили поновљено сабирање. У нешто мањој мери јавила се грешка приликом употребе мултипликативних стратегија и дуплирања. Када је у питању експериментална група 1 ученици који су грешили у рачуну су најчешће користили мултипликативне стратегије, а у нешто мањој мери поновљено сабирање и дуплирање са поновљеним сабирањем. Ови ученици су у већини случајева добро раставили бројеве применом аритметичких правила, али приликом сабирања добијених резултата настале су грешке. Експериментална група 2 је у овим ситуацијама највише користила мултипликативне стратегије, при којима је грешила. Грешке су настајале на исти начин као и у експерименталној групи 1, али су се јављале и грешке при првим корацима, односно ученици нису знали у потпуности правилно да примене аритметичко правило повезујући их са стратегијом (Пример: $13 \cdot 9 = 13 \cdot 10 - 9$).

Ово показује да ученици делимично разумеју значење операције множења, али да нису у потпуности способни да примене множење разлике и збира бројем у циљу ефикасног рачунања. У све три групе грешке у рачуну су најчешће последица грешака при сабирању, што је и очекивано, јер су ученици сабирали по неколико двоцифрених бројева применом научених процедура сабирања. Иако су ови ученици правили грешке, можемо рећи да они показују разумевање значења множења, као и да покушавају да користе ефикасне стратегије. Даље, важно је да деца успостављају везу између нових информација и претходно стечених знања (Rathgeb-Schnierer and Green, 2013; Threlfall, 2009), да разумеју утицај аритметичких операција на бројеве (Bobis, 1996), као и да проналазе флексибилне начине рачунања (Threlfall, 2002) уз могућност уочавања грешака (Berh, 2005; Mercier and Higgins, 2013). Из наведног разлога, сматрамо да је веома важно да се код ученика подстакне разумевање значења стратегија које примењују уз могућност процене тачности, као и уважавања карактеристика бројева, јер само механичко учење и примена процедура подложна је прављењу грешака (Brown and VanLehn, 1980).

Анализирајући менталне стратегије множења које ученици користе за множење једноцифрених и двоцифрених бројева на интервју и у текстуалним задацима можемо закључити да су ученици из експерименталних група показали јако висок степен разумевања значења множења исказаног различитим репрезентацијама, као и флексибилан избор и употребу стратегија множења. Контролна група ученика показује нешто слабије разумевање текстуалних задатака, што је последица пренаглашености адитивног приступа. Ова група ученика за множење двоцифрених и једноцифрених бројева у највећој мери користи поновљено сабирање. Појављивање других стратегија рачунања, које су ефикасније, показује да ови ученици полако развијају значење операције множења, али да усмереност на памћење производа или одређене поступке рачунања онемогућава њихов даљи развој. Као што смо видели, ова група ученика је користила у одређеној мери на Завршном интервју 2 ефикасне стратегије рачунања. Поставља се питање да ли би контролна група и после систематске обраде множења једноцифреног и двоцифреног броја успешно користила разноврсније стратегије или би користила само научени алгоритам. Када су у питању експерименталне групе ученика примећен је висок степен успешности ових група, које се разликују у мањој мери на Завршном интервјуу 2, где је експериментална група 2 постигла незнатно боље резултате. Резултати показују да су ученици након обраде множења изабрали одређене стратегије, пре свега мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем, а затим поновљено сабирање. Употреба наведених стратегија показује да коришћење одређених стратегија у настави подстиче и њихову употребу (Sherin and Fuson, 200; Downton and Sullivan, 2017) које су им једноставније за рачунање, омогућавају им да на ефикасан начин одреде производ, те њих и користе за рачунање. Током обраде множења једноцифреним бројевима коришћене су различите стратегије множења, које су се показале као добре, јер су позитивно утицале на оспособљавање ученика за њихову примену и проширеном скупу бројева, а све ово представља неопходан услов за трајност и проширивање претходних знања ученика (Liu et al., 2015). На крају, битно је напоменути да експерименталне групе ученика нису користили само једну стратегију и то на исти начин, већ су стратегије прилагођавали структури бројева у задацима. Ово показује да ученици поседују концептуално разумевање броја и имају развијену способност растављања бројева на различите начине уз успостављање веза између рачунских операција ((Burton, 1993; Reys, 1991; NCTM, 2000). С тим у вези, употреба мултипликативних стратегија не подразумева само један начин рачунања, већ се односи на примену аритметичких правила и различито растављање чинилаца у циљу што ефикаснијег рачунања, што су ученици из експерименталних група и користили.

6. Способност ученика за решавање мултипликативних проблемских ситуација

Мултипликативно мишљење обухвата разумевање значења чиниоца, као и развој и употребу флексибилних стратегија рачунања. Многи аутори (Mulligan and Mitchelmore 2009; Vergnuad, 1983) су истакли значај разумевања мултипликативних структура, јер оне обухватају разумевање множења и дељења, захтевају одређени степен визуелизације и битан су сегмент у организовању структура. У теоријском делу истакли смо значај развоја мултипликативног мишљења. У претходним поглављима већи акценат смо ставили на разумевање једноставних задатака различите семантичке структуре и анализу менталних стратегија множења. У овом делу рада желели смо да испитамо колико су ученици успешни у решавању проблемских задатака који се односе на мултипликативне ситуације. Задаци које смо користили обухватили су семантичке структуре о којима смо већ говорили, али је сама структура задатка, односно поставка проблема била сложенија, те је захтевало успостављање везе између стечених знања.

Једнострука анализа варијансе показала је да постоје статистички значајне разлике у скоровима који се односе на разумевање и доживљавање мултипликативних ситуација на овим задацима између група ученика (експерименталне 1, експерименталне 2 и контролне групе) ($F(2, 86) = 3.503$, $p = .034$). Аритметичке средине и стандардне девијације група у укупним скоровима за наведену групу задатака налазе се у Табели 84.

Табела 84. *Дескриптивни статистика за задатке који се односе на мутлипликативне проблемске ситуације*

Група испитаника	***M***	***SD***
Контролна група	1.133	0.937
Експериментална група 1	2.032	1.581
Експериментална група 2	1.571	1.372
Цео узорак	1.584	1.364

Како бисмо описали природу тих разлика, спроведена су накнадна поређења (Табела 85) која су показала да постоје статистички значајне разлике између, са једне стране, контролне групе и, са друге стране, експерименталне групе 1 у правцу тога да је експериментална група 1 имала боље постигнуће од контролне групе. Контролна група и експериментална група 2 нису се статистички значајно разликовале, као ни обе експерименталне групе међусобно.

Табела 85. *Post-hoc тестови (Turkey's HSD) – поређење успешности између група на у задацима који се односе на проблемске мултипликативних ситуација*

Г1	**Г2**	***MD***	***SE***	***p***
Контролна група	Експериментална група 1	-0.899	0.340	**0.026**
Контролна група	Експериментална група 2	-0.438	0.349	0.423
Експериментална група 1	Експериментална група 2	0.461	0.346	0.381

Напомена
Г1 и Т2 = групе које се пореде; *MD* (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група; *SE* (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност$\boldsymbol{p} <$ **.05**

На основу статистичких анализа утврдили смо да само између контролне групе и експерименталне групе 1 постоје статистички значајне разлике. Резултати показују да су разлике између осталих група мање, али да и даље постоје. Како бисмо испитали могуће разлике извршили смо анализу успешности сваке групе на сваком задатку који је био обухваћен овим делом истраживања (Табела 86). Ради лакшег праћења анализе навешћемо задатке које смо користили:

Концептуално разумевање броја

На које све начине можемо представити број 72 као производ два или више бројева.

Пропорционално резоновање 1

Три лептира дневно потроше 13 капи нектара. Колико капи нектара потроши 9 лептира?

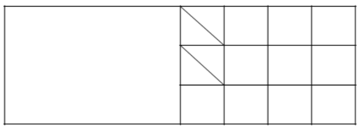
У две вреће стане 18 кромпира. Колико врећа је потребно да би се спаковало 72 кромпира?

Пропорционално резоновање 2

На свака три дечака у одељењу има 4 девојчице. Ако укупно има 35 ученика у одељењу, одреди колико има дечака, а колико девојчица у одељењу?

Правоугаона схема

На слици је приказан правоугаоник. Половина правоугаоника је поплочана квадратима. Израчунај колико је троуглова потребно за поплочавање целог правоугаоника на основу слике.



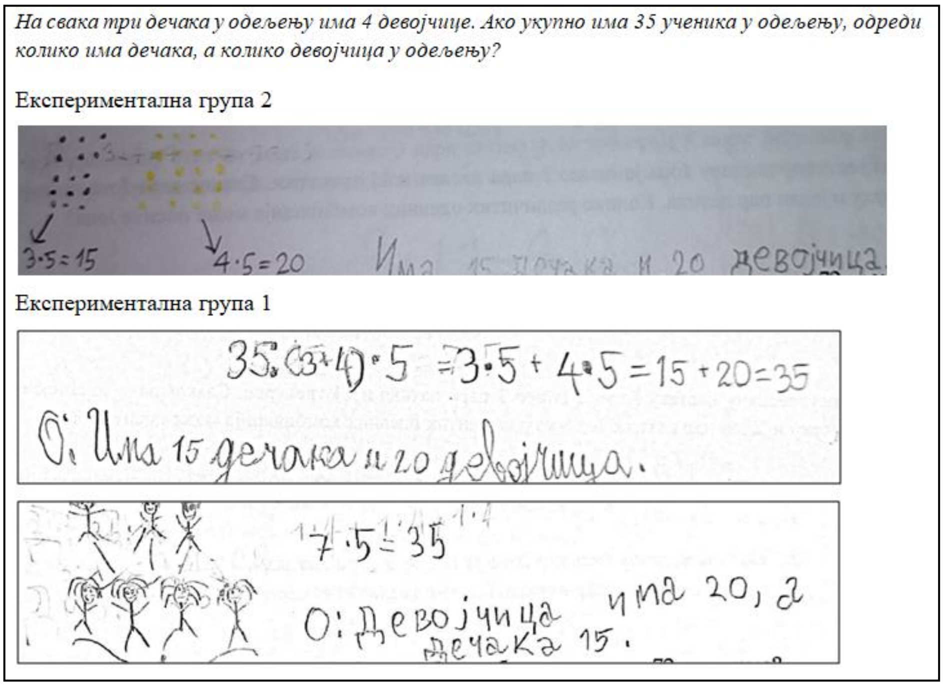
Табела 86. *Успешност ученика на задацима који се односе на проблемске мултипликативне ситуације по групама ученика*

	Контролна група (n = 30)	**Експериментална група 1 (n = 31)**	**Експериментална група 2 (n = 28)**
Концептуално разумевање броја	22 (73.3%)	23 (74.2%)	20 (71.4%)
Пропорционално резоновање 1	1 (3.3%)	10 (32.3%)	4 (14.3%)
	3 (10.0%)	9 (29.0%)	4 (14.3%)
Пропорционално резоновање 2	/	6 (19.4%)	5 (17.9%)
Правоугаона схема	8 (26.7%)	15 (48.4%)	11 (39.3%)
Укупно	34 (18.9%)	63 (33.9%)	44 (26.2%)

Анализирајући резултате можемо приметити да је у свакој групи мање од 50% ученика решило ове задатке, што показује да ученици још увек немају развијено мултипликативно мишљење у потпуности, а и способност решавања проблема, односно немају развијено математичко мишљење у потпуности. Најбоље резултате постигли су ученици из експерименталне групе 1. С обзиром да је сваки задатак имао за циљ испитивање различитих карактеристика анализираћемо сваки задатак посебно.

Концептуално разумевање броја и разумевање различитих аспеката множења смо испитали кроз први задатак. Способност ученика за растављање бројева на различите начине, односно „записивање” броја као производа два или више бројева се показала као добра, односно у све три групе испитаника више од 70% ученика може успешно да представи број 72 као производ два или више бројева. Ово је веома важно, јер показује да ученици поседују концептуално разумевање броја, а то је значајно због развијања менталних стратегија множења. Ученици су најчешће писали само *8·9 и 9·8.* Поред наведеног један ученик је користио и следеће изразе: *1·72, 72·1, 36·2, 2·36*. Неколико ученика написало је и пример који садржи три или четири чиниоца: *2·6·6* или *6·3·2·2*. Изостанак других могућих решења покауje да ученици нису још увек у потпуности развили мултипликативно мишљење и да не препознају све производе који одговарају датом решењу. Такође, занимљиво је истаћи да су неки ученици користили и по две рачунске операције састављајући израз чија је вредност 72. Ово показује да ученици поседују добро концептуално разумевање бројева, као и операције сабирања и множења, али да још увек нису у потпуности савладали множење.

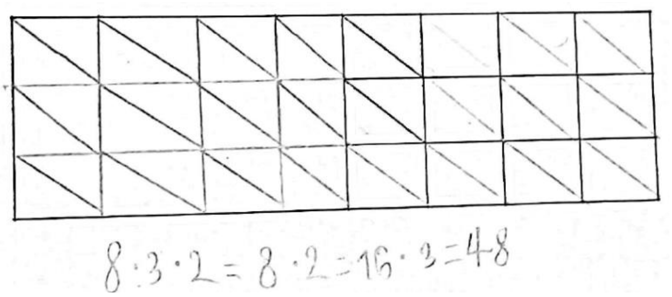
Пропорционално резоновање обухватило је три задатка, које смо поделили у две групе због сложености структуре задатка. Прву групу чине други и трећи задатак, а другу групу 4. задатак (Прилог 2). Значај мултипликативног мишљења за разумевање значења пропорција су истакли бројни аутори (Greer, 1992; Bakker, vandenHeuvel-Panhuizen, Robitzsch, 2014; Thompson, Saldanha, 2003; Vergnaud, 1983, 199; Hurst and Linsell, 2020) који сматрају да она представља једну од семантичких структура. Прва група пропорционалног резоновања захтева успостављање односа између две величине. Када су у питању ови задаци контролна група је показала јако мали степен успешности у овим задацима. Мало боље резултате постигли су ученици експерименталне групе 2, док је чак 30% ученика из експерименталне групе 1 успешно решило ове задатке. Наши резултати показују да у другом разреду након обраде множења једноцифрених бројева ученици не разумеју у потпуности сва значења операције множења, нарочито пропорцију, али да показују флексибилност и адаптивност која се огледа у флексибилном избору стратегија множења. Сматрамо да ће истовремено са даљим развојем мултипликативног мишљења доћи и до разумевања наведених садржаја. Резултати експерименталне групе 1 показују да трећина ученика из ове групе има развијено пропорционално резоновање, што је битна одлика мултипликативног мишљења. Трећи задатак је сложеније структуре у односу на прву групу задатака, те смо њега посебно анализирали. Чак ниједан ученик из контролне групе није покушао да реши ове задатке. Насупрот њима, 5 ученика из експерименталне групе 1 и 6 из експерименталне групе 2 су успели да реше овај задатак, који је захтевао успостављање везе између чак три величине (дечаци, девојчице и деца). На Слици 20. су приказани начини решавања задатка.



Слика 20. *Примери решења ученика на задацима са пропорционалним резоновањем*

Скице контекста задатка и поступци рачунања показују да ученици теже враћању на цртеже уколико су им контексти задатка тежи, али и да они цртају само кључне елементе задатка. Решавање задатка преко израза, које се ослања на проналажење бројева који одговарају тачном решењу показује да ученици интуитивно постављају пропорције које на овом нивоу успевају правилно да реше и искажу решење реторички.

Последњи задатак се односио на разумевање правоугаоне схеме. Можемо приметити да је већи проценат ученика у све три групе испитаника био успешнији на овој групи задатака, а нарочито је то видљиво код експерименталних група. Употреба правоугаоне схеме током обраде множења у обе експерименталне групе довела је до бољих резултата у овој групи задатака. Експериментална група 1 постигла је значајно боље резултате (скоро 50% ученика) у овом задатку, што је можда последица примене аритметичких правила од почетних часова обраде множења. У овом задатку је било потребно одредити производ три броја, те су ученици из експерименталне групе 1 најчешће користили здруживање чинилаца после записивања производа који одговара слици коју су добили након доцртавања елемената који недостају (Слика 21).



Слика 21. *Пример решавања задатка са правоугаоном схемом*

С друге стране, ученици из експерименталне групе 2 су у мањој мери него ученици из експерименталне групе 1 доцртавали целу слику. Они су најчешће одмах одређивали производ, вршећи ментално пребројавање елемената у нацртаној половини, а затим су множењем бројем 2 одређивали укупан број троуглова на слици (*24·2*).Ови резултати показују да ученици који су имали искуства са репрезентацијама су развили менталне репрезентације, те у већој мери могу да „замисле“, односно створе менталну репрезентацију него ученици који су множење једноцифреним бројевима усвојили кроз примену аритметичких правила.

Генерално гледано, ученици из све три групе ученика показују концептуално разумевање мултипликативне струкуре броја, док је пропорционално резоновање на овом узрасту слабо. Разумевање правоугаоне схеме је значајно за развој менталних стратегија множења, као и за разумевање значења множења, јер покрива различита значења ове операције (Skemp, 1993; Anghileri, 2000; Barmby et al., 2009), што је код експерименталних група присутно, али у највећој мери код експерименталне групе 1. С обзиром да је наше истраживање обухватило период током и након обраде множења једноцифрених бројева у 2. разреду, сматрамо да се даљим радом применом аритметичких правила и различитих репрезентација може постићи даљи развој мултипликативног мишљења.

V ЗАКЉУЧАК

На млађем школском узрасту веома је битно концептуално разумевање основних математичких појмова, на које у великој мери утиче математичка креативност, која подразумева проналажење ефикаснијих начина решавања задатака и откривање нечег новог на темељу постојећих знања (Skemp, 1989; Ervynck, 1991; Nadjafikhah et al., 2012).

Множење, као основа мултипликативног мишљења, је већ неко време предмет многих истраживања. Сумирајући различита мишљења аутора (Siemon et al, 2005; Breed et al., 2006; Siemon et al., 2012) под мултипликативним мишљењем подразумевамо препознавање и представљање различитих мултипликативних ситуација и разумевање својстава операција множења и дељења, као и способност коришћења флексибилних стратегија рачунања, а у нашем случају стратегија множења. Множење, као један од важних аспеката мултипликативног мишљења, обухвата четири важне теме: семантичку структуру задатка, менталне интуитивне стратегије, стандардни алгоритам и флексибилну и адаптивну примену стратегија множења. Веома је важно да ученици у млађим разредима основне школе развију менталне стратегије рачунања, у којима се акценат ставља на рачунање са бројевима, а не цифрама, јер оно подстиче развој способности процене, доприноси концептуалном разумевању бројева и аритметичких операција, те подстиче ученике на проналажење флексибилних начина рачунања.

За развој мултипликативног мишљења и разумевање значења множења, важно је разумевање мултипликативних ситуација које могу бити исказане различитим иконичким и конкретним репрезентацијама. У нашем раду обухватили смо текстуалне задатке следећих семантичких структура:

1. Једнакобројни скупови
2. Производ мера
3. Мултипликативно поређење
4. Правоугаона схема
5. Декартов производ

Употреба различитих иконичких репрезентација подстиче разумевање значења операције множења и развој менталних стратегија множења. Највише пажње смо посветили употреби правоугаоне схеме и декадних репрезентација. Правоугаона схема омогућава разумевање својстава операције множења, аритметичких правила, као и значења стандардног алгоритма, те утиче и на развој флексибилних стратегија множења. Декадне репрезентације су искуствено блиске ученицима и представљају основу за разумевање стандардног алгоритма.

Флексибилност стратегија множења се огледа у познавању различитих менталних стратегија множења и прилагођавању и избору најприкладнијих у зависности од специфичности самог задатка, као и индивидуалних карактеристика појединца. Без обзира да ли су стратегије интуитивне (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambose et al., 2003) или су резултат поучавања (Baroody, 1985; Smith and Smith, 2006; Woodward, 2006), аутори праве веома сличну категоризацију стратегија множења, са којом смо се и ми сложили, те смо их анализирали и у оквиру нашег исраживања, а то су:

1. Појединачно пребројавање;
2. Ритмичко пребројавање;
3. Поновљено сабирање;
4. Знање чињеница;
5. Дуплирање;
6. Дуплирање са поновљеним сабирањем;
7. Мултипликативне стратегије које подразумевају прилагођавање стратегија бројевима у задацима уз примену познатих производа и аритметичких правила.

Без обзира да ли се аритметичка правила уводе на почетку обраде множења (Kouba, 1989; Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Downton and Sullivan, 2017) или се њихово разумевање интуитивно развија применом различитих стратегија множења (Larsson, 2015; Ambrose et al., 2003) сматрамо да су аритметичка правила у основи мултипликативних стратегија, било интуитивно или као резултат поучавања и без њиховог разумевања нема ни развоја мултипликативних стратегија множења.

Анализирајући све наведене теоријске претпоставке развили смо два *Модела систематске обраде множења једноцифрених бројева.Модел 1* се заснивао на примени аритметичких правила и развоју стратегија множења које се темеље на аритметичким правилима. *Модел 2* је обухватао обраду множења једноцифрених бројева заснованих на значењу операције множења и примени различитих репрезентација. Након примене модела емпиријским истраживањем испитали смо карактеристике и ефикасност оба модела обраде множења једноцифреним бројевима у другом разреду основне школе, како бисмо утврдили и анализирали колико наведени модели утичу на развој флексибилних менталних стратегија множења и развој мултипликативног мишљења.

Резултати нашег истраживања су показали да ученици пре сиситематске обраде множења једноцифрених бројева препознају мултипликативне ситуације и правилно реагују на њих, састављајући одговарајући израз (производ). Чак преко 65% ученика препознаје мултипликативне ситуације исказане иконичким репезентација пре обраде овик садржаја. С обзиром да су декадне репрезентације ученицима познате јер су коришћене током обраде сабирања и одузимања, ученици су показали најбоље разумевање ове врсте репрезентација. Иако ученици препознају и правилно реагују на мултипликативне ситуације исказане различитим репрезентација, наше истраживање је показало да ученици на интуитивном нивоу не користе флексибилне стратегије множења, те да већина ученика за множење једноцифрених бројева користи поновљено сабирање. Поновљено сабирање је неефикасна стратегија множења и употреба ове стратегије показује да се ученици налазе на нивоу адитивног мишљења. Даље, разумевање множења само на овај начин не обухвата сва значења операције множења, те су нам ови налази послужили као добра основа за испитивање утицаја наших модел на подстицање развоја мултипликативног мишљења и флексибилних стратегија множења. Насупрот ранијим истраживањима (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Larsson, 2015) наше истраживање је показало да ученици не поседују интуитивне менталне стратегије множења. Разлог томе је потребно даље истражити, а ми га видимо у недостатку инсистирања на флексибилним стратегијама сабирања и одузимања.

Као што смо већ навели, мултипликативно мишљење подразумева способност разумевања и решавања задатака различите семантичке структуре и примену флексибилних стратегија множења. Како би ученици развили мултипликативно мишљење, неопходно је да разумеју текстуалне задатке различите семантичке струтктуре, јер њима су обухваћена различита значења множења. Наше истраживање је показало да ученици другог разреда на интуитивном нивоу показују највећи ниво постигнућа на задацима који се односе на идеју једнакобројних скупова, док су на задацима типа правоугаона схема ученици постигли нешто слабија постигнућа, а на задацима типа Декартовог производа најслабија, која се посматра као веома сложена семантичка структура. Резултати истраживања су показали да је након систематске обраде множења једноцифрених бројева, односно примене наведених модела, дошло до повећања нивоа разумевања текстуалних задатака различите семантичке структуре, али само у експерименталним групама. Ове групе ученика након инструкција показују најбоље разумевање правоугаоне схеме, што се огледа у њиховим постигнућима на Завршном тесту 1. Занимљиво је истаћи да између експерименталних група нису уочене веће разлике, али да је експериментална група 2 била нешто успешнија у односу на експерименталну групу 1. Ово показује да без обзира да ли се обрада множења једноцифрених бројева заснива на значењу операције и примени репрезентација или на примени аритметичких правила уз примену различитих текстуалних задатака, ученици разумеју различите мултипликативне ситуације. Сматрамо да је ово последица употребе различитих значења и приступа који нису адитивног карктера, односно у нашем случају посматрана су различита значења множења, а не само идеја једнакобројних скупова. С друге стране, незнатно бољи резултати експерименталне групе 2 су последица утицаја Модела 2 на успешност, јер ова група је у већој мери обраду множења једноцифрених бројева заснивала на значењу операције множења, него експериментална група 1. Уколико се обрада множења заснива на повезивању свих математичких садржаја који се односе на множење и подстицању ученика на проналажење флексибилних стратегија множења, ученици ће разумети различита значења операције множења и доћи ће до постепеног развоја мултипликативног мишљења.

Разумевање наведених семантичких структура је веома важно за развој мултипликативног мишљења, јер концептуално разумевање правоугаоне схеме ствара основу за разумевање значења стандардног алгоритма, површине правоугаоника, аритметичких правила, као и основу за разумевање множења у скупу рационалних бројева. С друге стране, разумевање мултипликативног поређења и производа мера позитивно утиче на способност пропорционалног резоновања и размевање функција у старијим разредима основе школе. Насупрот експерименталним групама, контролна група ученика је показала слабије разумевање задатака са правоугаоном схемом, што показује да пренаглашеност адитивног мишљења не утиче на развој мултипликативног мишљења. Анализирајући сва три теста, ученици показују најслабије разумевање Декартовог прозвода, али поредећи међусобно групе испитаника и разумевање ове семантичке структуре пре и након инструкција, можемо закључити да су експерименталне групе биле значајно успешније на овом типу задатака наком примене модела, што потврђује ефикасност коришћених модела. Употреба задатака који подстичу комбиновање елемената је од суштинске важности за разумевање Декартовог производа, а касније и за разумевање комбинаторике, те ова семантичка структура треба да буде заступљена приликом обраде множења. Када је у питању множење двоцифрених и једноцифрених бројева, што није било предмет поучавања, резултати нашег истраживања су показали да ученици успешно разумеју ове садржаје исказане кроз текстуалне задатке различите семантичке структуре, али ови резултати су показали да различити приступи у настави утичу на разумевање мултипликативних ситуација. Разумевање и усвајање аритметичких правила смо заснивали на употреби правоугаоне схеме, те на основу постигнућа ученика на завршним тестовима можемо закључити да су ученици из експерименталне групе 1 показали најбоље разумевање ове семантичке структуре, а ученици из експерименталне групе 2 су показали најбоље разумевање задатака који се односе на идеју једнакобројних скупова. Разлике у успешности између семантичких структура задатака су мале када је реч о експерименталним групама ученика, односно нису статистички значајне и сматрамо да су оне у већој мери последица утицаја бројева у задацима, него самог контекста задатка.

На основу анализе успешности ученика након примене модела утврдили смо да све групе ученика разумеју значење операције множење и да правилно реагују на исте, али не и да сви имају у потпуности развијено мултипликативно мишљење, што је и очекивано с обзиром да у овом узрасту деца тек почињу да га формирају, што су потврдили и налази ранијих истраживања (Clark & Kamii, 1996). Ученици из контролне групе показали су недовољно разумевање иконичких репрезентација, као и текстуалних задатака који се односе на Декартов производ и праовоугаону схему. Експерименталне групе показале су доста боље разумевање мултипликативних ситуација исказаних иконичким репрезентацијама и текстуалним задацима. Ови резултати показују да усмереност на једну врсту задатака и један тип репрезентације води ка разумевању само те групе задатака и спутава развој мултипликативног мишљења.

Наше истраживање је пре свега било усмерено на развој флексибилних стратегија множења, које представљају један од кључних сегмената мултипликативног мишљења и показатељи су развоја математичке креативности. Како би се подстакао развој менталних стратегија множења, потребно је користити иконичке и конкретне репрезентације које подстичу развој истих. У складу са тим, у нашем раду смо највише пажње усмерили на анализу менталних стратегија множења. Анализом резултата истраживања, закључили смо да контролна група ученика након обраде множења једноцифрених бројева у већини случајева за множење једноцифрених бројева користи знање чињеница. Учење усмерено на меморисање чињеница без разумевања значења операције множења не подстиче развој математичке креативности и флексибилности, која је неопходна ради примене ефикаснијих начина рачунања. С друге стране, експерименталне групе након систематске обраде множења (примене модела) примењују разноврсније и флексибилније стратегије множења, а у највећој мери користе различите мултипликативне стратегије које се заснивају на разумевању структуре израза (коришћених бројева) и примени аритметичких правила. Употреба мултипликативних стратегија показује да ученици разумеју значења операције множења и да та знања могу ефикасно да примене у рачунању. Наши резултати показују да су ученици из ескперименталних група развили флексибилност у мишљењу, која се огледа у начину на који врше одабир менталних стратегија множења, прилагођавајући их у највећој мери структури бројева у задацима, својим индивидуалним карактеристикама, а у нешто мањој мери контексту задатка, односно семантичкој структури задатака.

Модел 1 се заснивао на поучавању стратегија применом аритметичких правила. Анализирајући резултате експерименталне групе 1, уочили смо да ученици из ове групе за решавање задатака са иконичким репрезентацијама након примене модела користе разноврсније менталне стратегије, а у највећој мери мултипликативне стратегије. Даље, ова група ученика је и за решавање текстуалних задатака користила пре свега мултипликативне стратегије, али и друге стратегије прилагођавајући их структури бројева у задацима, а не семантичкој структури. Модел 2 се заснивао на поучавању стратегија употребом конкретних и иконичких репрезентација. Ови ученици су задатке са иконичким репрезентацијама решавали применом стратегија које одговорају структури репрезентације, успостављајући директну везу између репрезентације и бројева. И ова група ученика је текстуалне задатке највећим делом решавала применом мултипликативних стратегија.

Генерално гледано, обе експерименталне групе су за решавање задатака користиле флексибилне стратегије множења које прилагођавају структури бројева у задацима. Тако можемо закључити да се:

- за множење бројем 2 и 4 у највећој мери користи дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем;
- за множење бројем 3 користи се поновљено сабирање или мултипликативне стратегије;
- за множење бројем 5 користи ритмичко пребројавање или овај производ представља познати производ;
- за множење бројем 6, 7 и 9 користе мултипликативне стратегије
- за множење бројем 8 користе мултипликативне стратегије, дуплирање и дуплирање са поновљеним сабирањем;
- множење бројем 10 посматра као знање чињеница које служи за одређивање других производа.

Начин обраде множења се у ове две групе разликовао у погледу приступа поучавању стратегија, али су у обе групе били заступљени задаци различитих семантичких структура. Ученици који множење усвајају кроз акценат на аритметичка правила (експериментална група 1) чешће користе мултипликативне стратегије примењујући у већој мери научена ариметичка правила. Њихове стратегије се увек базирају на карактеристикама бројева, те они растављају бројеве на различите начине у циљу примене мултипликативних стратегија на што флексибилнији начин. Ученици из експерименталне групе 2 који стратегије прилагођавају карактеристикама бројева, аритметичка правила у већој мери примењују интуитивно, насупрот ученицима из експерименталне групе 1 који у већој мери записују цео поступак рачунања при чему се јасно истиче како је аритметичко правило примењено. Даље, код експерименталне групе 2 примећено је значајније прилагођавање стратегија структури иконичких репрезентација, при чему сами проналазе ефикасне начине структурисања репрезентација. Ученици из експерименталне групе 2 су били у неким задацима успешнији од ученика из експерименталне групе 1, што сматрамо да је последица начина обраде множења једноцифрених бројева. На овом узрасту ученицима су ближи неформални приступи, који омогућавају неки вид слободног проналажење решења, док употреба аритметичких правила неку децу спутава. С друге стране, резултати из експерименталне групе 1 су показали да усвајње аритметичких правила може и треба да буде саставни део множења и да их је могуће функционално примењивати у свим фазама обраде множења.

На основу резултата које смо добили можемо закључити да смо код ученика успешно подстакли развој менталних стратегија множења, који се огледа у флексибилном одабиру најадекватнијих стратегија, што представља једну од најзначајнијих претпоставки развоја мултипликативног мишљења и основу за разумевање значења операције множења, а касније и стандардног алгоритма рачунања. Резултати су показали да након примене модела ученици показују висок степен разумевања задатака различите семантичке структуре, као и да је примећено значајно боље разумевање правоугаоне схеме, што није био случај код ученика из контролне групе. Ови резултати нам показују да ученици са 8 година могу да разумеју правоугаону схему, било да је она представљена иконичком репрезентацијом или кроз текстуални задатак, а њено разумевање је од суштинске важности за разумевање стандардног алгоритма множења, аритметичких правила, множења у скупу природних и рационалних бројева, а све ово заједно је веома важан сегменат развоја мултипликативног мишљења.

Менталне стратегије множења једноцифрених бројева које ученици користе су последица инструкција којима су ученици били изложени. Резултати нашег истраживања су показали да ученици након обраде множења једноцифрених бројева веома успешно множе једноцифрене и двоцифрене бројеве примењујући флексибилне стратегије множења. Ово показује да ученици врше трансфер стратегија множења једноцифрених бројева на стратегије множења двоцифрених и једноцифрених бројева. Занимљиво је истаћи да су ученици из експерименталних група показали висок ниво флексибилности, који се огледа у употреби мултипликативних стратегија које прилагођавају структури израза (бројева). Насупрот резултатима експерименталних група ученика, можемо истаћи да ученици из контролне групе показују нижа постигнућа на задацима различите семантичке струткуре, а за множење двоцифрених и једноцифрених бројева претежно користе поновљено сабирање, а у нешто мањој мери мултипликативне стратегије. Контролна група ученика је за множење двоцифрених и једноцифрених бројева, у мањој мери тежила проналажењу ефикаснијих начина решавања, успостављајући везу између нових и већ стечених знања, што није био случај на иницијалном тестирању. Резултати показују да су експерименталне групе ученика за множење једноцифрених и двоцифрених бројева, што није било предмет поучавања,користили флексибилне стратегије множења, а пре свега мултипликативне стратегије и дуплирање са поновљеним сабирањем, а у нешто мањој мери поновљено сабирање. За множење двоцифрених и једноцифрених бројева како на Завршном тесту 2, тако и на Завршном интервјуу 2 ученици су стратегије прилагођавали структури бројева, при чему су у обзир пре свега узимали вредност једноцифреног чиниоца. Контролна група је доминантно користила поновљено сабирање. Ова група ученика је користила мултипликативне стратегије у примерима где је један чинилац 9 или 5. Ученици из експерименталних група су за множење бројева, где је један чинилац 4 користили стратегије дуплирања, за множење бројм 5, 6, 8 и 9 користили мултипликативне стратегије растављајући вредност другог чиниоца на збир или разлику броја или вредност првог чиниоца. За множење бројем 3 експерименталне групе су користиле поновљено сабирање, док је за множење бројем 6 примећена употреба мултипликативних стратегија и стратегија дуплирања.

Анализирајући сва три теста истраживања издвојили смо три врсте грешака: мешање рачунских операција, грешке у рачуну и неразумевање структуре репрезентације, које су такође показатељи неразвијености мултипликативног мишљења. Ученици који су правили грешке у рачуну показују да се налазе у фази развоја мултипликативног мишљења, док преостале грешке показују одстуство истог. Ученици из експерименталних група су правили најчешће грешке у рачуну, које су биле последица грешака при сабирању или одузимању. Нешто већи проценат неразумевања структуре репрезентација јавио се у контролној групи и у задацима са Декартовим производом код свих група ученика.

Испитујући разумевање проблемских мултипликативних ситуација, на основу постигнућа ученика, дошли смо до закључка да ученици из експерименталних група након употребе модела показују боље разумевање различитих проблемских мултипликативних ситуација, што представља важну компоненту мултипликативног мишљења. С тим да је битно напоменути, да су ученици из експерименталних група показали боље разумевање ових садржаја, а примећено је и да су ученици најуспешнији у разумевању мултипликативних ситуација које се односе на правоугаону схему. Овакви резултати су последица примене наведених модела, односно заступљених садржаја у настави математике. Пропорционално резоновање ученика у 2. разреду је на нижем нивоу, али резултати су показали да су неки ученици достигли и тај ниво, док се други још увек налазе у почетним фазама мултипликативног мишљења.

Сматрамо да је веома важно да се множење обради пре свега применом различитих иконичких и текстуалних репрезентација, јер је наше истраживање као и друга (Mulligan and Mitchelmore, 1997; Sherin and Fuson, 2005; Marojoka and Beker, 2014) показало да се стратегије множења развијају кроз употребу различитих репрезентација. Даље, сматрамо да је поред наведеног веома важно аритметичка правила увести у почетним фазама обраде множења једноцифрених бројева, јер то омогућава њихову функционалну и сталну примену током обраде ових наставних садражаја, што је неопходно ради постизања коцептуалног разумевања аритметичких правила, али и развоја флексибилних стратегија рачунања. На тај начин она постају саставни део множења, те их ученици тако посматрају и оспособљавају се за њихову употребу у циљу што ефикаснијег рачунања, односно примене флексибилних стратегија множења. Ово потврђују и наши резултати, који су показали да ученици из експерименталне групе 1 у већој мери користе научена аритметичка правила као олакшицу у рачуну.

На основу анализе резултата, закључили смо да су ученици, у овом случају експеременталне групе, на завршном тесту постигли значајно боље резлтате него на Инцијалном тесту. Након систематске обраде множења једноцифрених бројева ученици су показали већи степен разумевања значења операције множења, што се огледа у разумевању различитих мултипликативних ситуација, исказаних кроз текстуалне задатке различите семантичке структуре и задатке са различитим иконичким репрезентацијама, а посебно задатака који се односе на правоугаону схему и Декартов производ. С друге стране, ефикасност спроведених модела огледа се и у стратегијама множења које ученици примењују, а које одликује висок степен флексибилности. Експерименталне групе ученика након примене модела користе флексибилне стратегије множења једноцифрених, али и двоцифрених и једноцифрених бројева прилагођавајући их структури бројева. Даље, примећено је да ове групе ученика након примене модела праве мањи броја грешака. Посматрано све заједно указује да модели систематске обраде множења једноцифрених бројева позитивно утичу на развој мултипликативног мишљења. На основу наведеног, можемо закључити да пажљиво структурисани садржаји и примена одговарајућих математичких садржаја за обраду новог градива и увежбавање наученог, у нашем случају множења једноцифрених бројева, позитивно утиче на концептуално разумевање садржаја који су предмет обраде. Те, концептуално разумевање множења подстиче развој флексибилности и математичке креативности, што је такође битна одлика мултипликативног мишљења.

Сматрамо да садржаји које смо користили у Моделу 1 и Моделу 2 могу бити од велике помоћи учитељима приликом обраде множења једноцифрених бројева, јер представљају пример добро структурисаног садржаја неопходног за разумевање свих значења множења и развој менталних стратегија множења. У нашем раду дали смо приказ разрађеног плана и распореда наставних јединица уз приказ свих примера репрезентација и задатака које смо користили током часова обраде, утврђивања и вежбања. На овај начин смо желели да понудимо један од могућих начина обраде множења једноцифреним бројевима, који могу помоћу ученицима да развију флексибилне стратегије множења, а касније и дељења, као и да разумеју различита значења операције множења, што је од кључне важности за касније разумевање множења у осталим скуповима бројева, као и других математичких садржаја (пропорције, комбинаторика, функције, разломци и сл). Само добро структурисани математички садржаји и правилно изграђене појмовне схеме везане за множење могу обезбедити целокупан развој мултипликативног мишљења. Мултипликативно мишљење обухвата широк спектар математичких проблема, са којима се почиње у другом разреду, а затим се наставља и у осталим разредима. Сматрамо да налази нашег емпиријског истраживања могу послужити као полазиште за креирање разноврснијих математичких садржаја у уџбеницима за други, трећи и четврти разред који ће обухватити различите мултипликативне ситуације у циљу развоја мулитипликативног мишљења.

Нашим истраживањем смо обухватили само један, али полазни елемент мултипликативног мишљења – менталне стратегије множења. С обзиром на важност мултипликативног мишљења сматрамо да је веома битно истражити и друге аспекте мултипликативног мишљења, како у другом разреду, тако и у старијим разредима. Те са те стране, сматрамо да би било значајно испитати ефикасност примењених модела на развој флексибилних стратегија дељења у скупу бројева до 100, као и ефикасност примењених модела на развој и примену флексибилних стратегија множења и дељења вишецифрених бројева у скупу природних бројева. С друге стране, како би се испитао утицај одређеног модела, односно новог приступа множењу и дељењу било би значајно обавити лонгитудинално истраживање које би обухватило праћење и испитивање истог узорка ученика кроз целу основу школу на садржајима који су предмет мултипликативног мишљења. На тај начин би се добили подаци о томе колико обрада множења и дељења усмереног на разумевање значења операције кроз примену различитих репрезентација и разумевање и функционалну примену аритметичких правила у млађим разредима утиче на развој флексибилних стратегија множења и дељења у свим скуповима бројева, као и на разумевање стандардног алгоритма и уопште гледано на разумевање различитих математичких садржаја који су у основи мултипликативног мишљења (пропорционално резоновање, функције, разломци, комбинаторика, статистика, мерење и сл).

VI ЛИТЕРАТУРА

1. Anghileri, J., Beishuizen, M. & Van Putten, K. (2002). From informaln strategies to structured procedures: mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49, 149–170.
2. Abrams, J.P. (2001). Teaching mathematical modeling and the skills of representations. In: Couco A., Curcio F.R. (Eds.) *The roles of representation in school mathematics*: *NCTM Yearbook*, 269–282.
3. Ambrose, R., Baek, J.M. & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms.* In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise,* 305–336. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
4. Aizikovitsh U. (2014). The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problems among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program. *Creative Education,* 5 (4), 228–241.
5. Anwar, R. & Rahmawati, D. (2017). Symbolic and Verbal Representation Process of Student in Solving Mathematics Problem Based Polya's Stages. *International Education Studies*, 20–28.
6. Baek, J.M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. Morrow & M. Kenney (Eds.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 151–160. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
7. Bakker, M. (2014). *Using mini-games for learning multiplication and division: A longitudinal study.*
8. Bakker, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2013). First-graders′ knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology,* 39, 59–73.
9. Barmby, P. and Harries, T. and Higgins, S. and Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational studies in mathematic*, 70 (3), 217–241.
10. Barmby, P. & Harries, T. (2006). Representating Multiplication. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 26 (3), 25–30.
11. Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The development of commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction,* 1, 321–329.
12. Baroody, A., Feil, Y. & Johnson, A. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *National Council of Teachers of Mathematics,* 38 (2), 115–131.
13. Baroody, A. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics,*13 (1) 22–31.
14. Baroody, A. J., Wilkins, J. L. M., & Tiilikainen, S. H. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: From protoquantitative concept to general concept? In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* 127–160.
15. Beishuizen, M., Van Putten, M. & Van Mulken, F. (1997). Mentaln arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction,* 7 (1) 87–106.
16. Berch, D. (1998). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities,* 38 (4), 333–339.
17. Boaler, J. & Chen, L., Williams, C. & Cordero, M. (2016). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 5 (5), 1–6.
18. Butterworth, B., Marchesini, N. & Girelli, L. (2003). Basic Multiplication Combinations: Passive Storage or Dynamic Reorganization? In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise,* 189–202. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
19. Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 627–638.
20. Blote, A., Klein, A., Beishuizen, M. (2000). Mentaln computation and conceptual understanding. *Lerning and Instruction,* 10, 221–247.

21. Butterworth, B., Marchesini, N., & Girelli, L. (2003). Basic multiplication combinations: Passive storage or dynamic reorganization? In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise,* 189–202. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
22. Bobis, J. (1991). The effect of instruction on the development of computation estimation strategies. *Mathematics Education Research Journal,* 3, 7–29.
23. Booker, G., Bond, D., Sparrow, L., & Swan, P. (2010). *Teaching primary mathematics* (4th ed.). Malaysia: Pearso
24. Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* Washington DC: National Academy Press.
25. Brayer Ebby, C. (2005). The powers and pitfalls of algorithmic knowledge: a case study. *Journal of Mathematical Behaviour,* 24, 73–87.
26. Breed, M. (2011). *Constucting Path to Multiplicative Thinking: Breaking Down the Barriers.* RMIT University.
27. Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Harvard Univer.
28. Cai, Jinfa. (2007). What is effective mathematics teaching? A study of teachers from Australia, Mainland China, Hong Kong SAR, and the United States. ZDM. 39 (4) 265-270.
29. Case, R. & Sowder, J. (1990). The development of computational estimation: A neo-Piagetian analysis. *Cognition and Instruction* , 7, 79-104
30. Callingham, R. & Siemon, D. (2021). Connecting multiplicative thinking and mathematical reasoning in the middle years. *Journal of Mathematical Behavior,* 61, 1–12.
31. Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,* 9–24. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaurn Associates.
32. Carpenter, T., & Fennema, E. (1992). Cognitively Guided Instruction: Building on the Knowledge of Students and Teachers. *International Journal of Educational Research,* 17, 457–470.
33. Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.
34. Clark, F. & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (1), 41–51.
35. Clements, D., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
36. Clements, D., Sarama, J. & MacDonald, B. (2019). Subitizing: The Neglected Quantifier. In A. Norton and M. W. Alibali (Eds.) *Constructing Number,* 13–45.
37. Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A. & Ferguson, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *Journal of Mathematical Behavior,* 60, 1–16.
38. Cobb, Paul & Wheatley, Grayson. (1988). Children's Initial Understandings of Ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 10 (3), 1–28.
39. Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M., (1991). Assessment of a problem-centred second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education* , 22, 3–29.
40. Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 107–124.
41. Cook, C. & Dossey, J. (1982). Basic Fact Thinking Strategies for Multiplication – Revisited. *Journal for Research in Mathematics Education,* 13 (3), 163–171.
42. Cooper, T. J. and Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students` Ability to Generalise: Models, Representation and Theory for Teaching and Learning. In Cai, J. and Knuth, E. (Eds), *Early Algebraization*. Berlin: Springer-Verlag, 187–214.
43. Dabic, M. & Milinkovic, J. (2015). Teachers' representations of multiplication – do children understand them? In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *Developing mathematical language and reasoning,* 99–107.
44. Day, L. & Hurrel, D. (2015). An explanation for the use of arrays to promote the understanding of mental strategies for multiplication. *Applied Mathematics and Computation,* 20 (1), 20–23.
45. Degande, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2019). To add or to multiply? An investigation of the role of preference in children's solutions o word problems. *Learning and Instruction,* 61, 60–71.

46. DeStefano, D., & LeFevre, J.A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*, 16 (3), 353–386.
47. Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representation: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, 87, 103−121.
48. Doig, B., MCrae, B. & Rowe, K. (2003). *A good start to numeracy – Effective numeracy strategies from research and practice in early childhood.* Canberra: The Commonwealth Numeracy Research and Development Initiative.
49. Downton, A. (2008). Links Between Children's Understanding of Multiplication and Solution Strategies For Division. In: M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.). *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 171–178.
50. Downton, A. & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 303–328.
51. Donald, D., Lazarus, S. & Lolwana, P. (2006). *Educational psychology in social context*. Oxford: CapeTown
52. Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1–16.
53. Đokić, O. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet
54. Engel, M., Claessens, A., & Finch, M. A. (2013). Teaching students what they already know? The (mis)alignment between mathematics instructional content and student knowledge in kindergarten. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *35*(2), 157–178.
55. Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking,* 42–55. Kluwer Academic Publishers New York.
56. Ghazali, M., Mohamed, R., & Mustafa, Z. (2021). A systematic review on the definition of children's number sense in the primary school years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 17 (6), 1–12.
57. Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education, 33*(1), 18–28.
58. Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 276–295.
59. Greeno, J. (2018). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), 170–218.
60. Griffin, S. A., Case, R., & Siegler, R. S. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice*, 25–49.
61. Götze, D. (2019). Language-Sensitive Support of Multiplication Concepts Amnog at-Risk Children: A Qualitative Didactical Design Research Case Study. *A Contemporary Journal,* 17 (2), 165–182.
62. Götze, D. & Baiker, A (2020). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM: the international journal on mathematics education, 53 (4).*
63. Götze, D. (2020). The importance of a meaning-related language for understanding multiplication. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*.
64. Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In English L. D. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 197−218.
65. Griffin, S., & Case, R. (1997). Rethinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education,* 3(1), 1–49.
66. Fazio, L. K., DeWolf, M., & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 42*(1), 1–16.
67. Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7 (5), 288–292.
68. Fischer, F. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number to kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, (3) 207–215.

69. Fisher, J., Villete, B., Joffredo-Lebrun, S., Moellato, M., Normand, C., Scheilbling-Seve, C. & Richard, J. (2019). Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 105–121.
70. Fishbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M. & Sciolis Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Divison. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3–17.
71. Fuson, K. C., & Burghardt, B. H. (2003). Multidigit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.) *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*, 267–304.
72. Fuson, K. C. & Briars, D. J. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First and Second Grade – Place Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (3), 180–206.
73. Fuson, K. (2003). Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division. *Teaching Children Mathematics*, 9, 300–305.
74. Fuson, K. & Beckmann, S. (2012–2013). Standard Algorithms in the Common Core State Standards. *NCSM Journal*, 14–30.
75. Илић, С. и Зељић, М. (2017). Правила сталности збира и разлике као основа стратегије рачунања. *Иновације у настави,* XXX (1), 55–66.
76. Izsk, A. (2004). Teaching and Learning Two-Digit Multiplication: Coordinating Analyses of Classroom Practices and Individual Student Learning. *Mathematical Thinking and Learning,* 6 (1), 37–79.
77. Harries, A. (2001). *Multiplication and Division.* Preuzeto sa: http://www.mathematicshed.com/uploads/1/2/5/7/12572836/md.pdf
78. Harries, A. & Barmby, P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education,* 9 (1), 33–46.
79. Heinze, A., Star, J. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education,* 41, 535–540.
80. Heirdsfield, A. (2002). Flexible Mental Computation: What about Accuracy. In Nardi, E. & Cockburn, A. (Eds.) *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 89–96. University of East Anglia, Norwich, United Kingdom.
81. Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J. & Irons, C. (1999). Children’s mental multiplication and division strategies. In Zaslavsky, Orit, Eds. *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, 89–96.
82. Heirdsfield, A., Cooper, T. & Irons, C. (1999). Traditional Pen-and-paper VS Mental Approaches to Computation: The Lessoon of Adrien. *Presented at the AARE Annual Conference in Melbourne, 460*–467.
83. Hiebert, J. & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraciton. *Cognition and Instruction,* 14 (3), 251–283.
84. Hiebert, J., Morris, A. & Glass, B. (2003). Learning to Learn to Teach: An „Experiment“ Model fot Teaching and Teacher Preparation in Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 201–222.
85. Hughs, P. (2002). A model for Teaching Numeracy Strategies. In B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.) *Mathematics Education in the South Pacific (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland)*, 350–357.
86. Hurst, C. (2015). The multiplicative situation. *Applied Mathematics and Computation,* 20 (3), 10–16.
87. Hurst, C. (2017). Children Have the Capacity to Think Multiplicatively, as long as… *European Journal of Stem Education,* 2 (3), 1–14.
88. Hurst, C. & Linsell, C. (2020). Manipulatives and Multiplicative Thinking. *European Journal of Stem Education,* 5 (1), 04, 1–14.
89. Hurst, C. & Hurrel, D. (2016). Investigating Children`s Multiplicative Thinking: Implications for Teaching. *European Journal of STEM Education,* 1 (3), 1–11.
90. Hurst, C. & Hurrel, D. (2018). Algorithms are useful: Understanding them is even better! *Applied Mathematics and Computation,* 23 (3), 17–21.
91. Hurst, C. & Linsell, C. (2020). Manipulatives and Multiplicative Thinking. *European Journal of STEM Education*, 5(1), 04.

92. Hope, J. A., & Sherrill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (2), 98–111.
93. Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *The Arithmetic Teacher*, 36 (6), 6–11.
94. Hwang, W. Y., Chen, N. S., Dung, J. J., & Yang, Y. L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving Using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 10 (2), 191–212.
95. Jacob, L. & Willis, S. (2003). The Development of Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, 460–467.
96. Jacob, L. & Willis, S. (2003). Recognising the Difference Between Additive and Multiplicative Thinking in Young Children. *Proceedings of the 24th Annual MERGA Conference*, 306–312.
97. Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36 (2), 20–32.
98. Jordan, N. C., & Dyson, N. (2016). Catching math problems early: Findings from the number sense intervention project. In A. Henik (Ed.), *Continuous issues in numerical cognition: How many or how much*, 59–79. Elsevier Academic Press.
99. Kamii, C. & Anderson, C. (2003). Multiplication Games: How We Made and Used Them. *Teaching Children Mathmeatics,* 10 (3), 135–141.
100. Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167–194). Hillsdale, NJ: Erlbaum
101. Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001): *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Mathematics Learning Study Committee, National Research Council.
102. Kling, G. & Bay-Williams, J. (2015). Three steps to mastering multiplication facts. *Teaching children mathematics,* 21 (9), 549–560.
103. Kosko, K. (2019). A multiplicative reasoning assessment for fourth and fifth grade students. *Studies in Educational Evaluation,* 60, 32–42.
104. Kosko, K. (2020). The multiplicative meaning conveyed by visual representations. *Journal of Mathematical Behavior,* 60, 1–18.
105. Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147–158.
106. Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences,* 13 (2), 129–164.
107. Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach. *Asia Pacific Education Review,* 7, 51–61.
108. Larsson, K. (2016). *Students` understanding of multiplication*. Stockholm University: Department of Mathematics and Science Education.
109. Larsson, K. (2015). Connections for Learning Multiplication. *Conference: International Symposium for Elementary Mathematics Teaching,* 202–211.
110. Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *The Arithmetic Teacher,* 17 325–328.
111. LeFevre, J. A., Smith-Chant, B., Hiscock, K., Daley, K. & Morris, J. (2003). Young Adults' Strategic Choices in Simple Arithmetic: Implications for the Development of Mathematical Representations. In: Baroody, A. & Dowker, A. (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise,* 203–228. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
112. Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert and M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* 93–118. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
113. LeFevre, J. A. & Liu, J. (1997). The Role of Experience in Numerical Skill: Multiplication Performance in Adults from Canada and China. *Mathematical Cognition*, 3 (1), 31–62.
114. Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educationaln Studies in Mathematics,* 67, 255–276.
115. Lu, L., & Richardson, K. (2018). Understanding children's reasoning in multiplication problem solving. *Investigations in Mathematics Learning*, 10 (4), 240–250.
116. Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on Mathematical Creativity. *For The Learning of Mathematics*, 26, 20–23.

117. Maclellan, E. (2001). Assessment for Learning: The Differing Perceptions of Tutors and Students. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 26, 307–318.
118. MacDonald, B. & Moyer-Packenham, P. (2018). Components of Place Value Understanding: Targeting Mathematical Difficulties When Providing Interventions. *School science and mathematics,* 118 (2), 1–13.
119. Malara, N. A. and Navarra G. (2005). Approaching the distributive law with young children. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME, 352−362.
120. Malola, M. & Stephens, M. (2019). From additive to multiplicative thinking: Key ideas for teaching. *The Mathematical Association of Victoria,* 82–87.
121. Malola, M., Symons, D. & Stephens, M. (2020). Supporting students` transition from additive to multiplicative thinking: A complex pedagogical challenge. *Applied Mathematics and Computation,* 25 (2), 31–36.
122. Марјановић. М. (1997). Схематско учење таблице сабирања и множења – штапићи као дидактички материјал. *Настава математике,* XLII (3–4), 1–20.
123. Марјановић. М. (2014). Један приступ извођењу наставе аритметике, IV. *Настава математике,* LIX (4), 1–16.
124. Марјановић, М. (2016). *Структурисање садржаја школске аритметике*. Београд: Српска академија наука и уметности.
125. Matney, G. T. & Daugherty, B. N. (2013). Seeing Spots and Developing Multiplicative Sense Making. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19 (3), 148–155.
126. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12 (3), 2–8.
127. McNeal, B. (1995). Learning Not to Think in a Textbook-Based Mathematics Class. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 205–234.
128. Mercier, E. & Higgins, S.. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. *Learning and Instruction*, 25, 13–23.
129. Милинковић, Ј. (2011). *Елементарни математички појмови.* Београд: Учитељски факултет
130. Милинковић, Ј. (2016). Компетенције учитеља за коришћење репрезентација у настави математике. У: Теодоровић Ј. (ур.), *Унапређење квалитета образовања у основним школама, Зборник радова са међународне научне конференције,* 263–274. Београд
131. Mihajlović, A. (2014). Razvijanje kreativnosti u početnoj nastavi matematike metodom otvorenog pristupa. *Nastava i vaspitanje*, 63 (2), 229–243. Univerzitet u Kragujevcu: Fakultet pedagoških nauka.
132. Mulligan, J. & Watson, J. (1998). A Developmental Multimodal Model for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal,* 10 (2), 61–86.
133. Mulligan, J. (1992). Children’s Solutions to Multiplication and Division Word Problems: A Longitudinal Study. *Mathematics Education Research Journal,* 4 (1), 24–41.
134. Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children‘s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309–331.
135. Mulligan, J., Kemp, C. & Highfield, K. (2008). Encouraging Mathematical Thinking through Pattern & Structure: An Intervation in the First Years of Schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 13 (3), 10–15.
136. Mulligan, J. & Jacob, L. (2014). Using Arrays To Build Towars Multiplicative Thinking in the Early Years. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 19 (1), 35–40.
137. Mulligan, J., Papic, M., Prescott, A. & Mitchelmore, M. (2006). Improving Eartly Numeracy Through a Pttern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP). In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 2, 376–383.
138. Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal,* 21 (2), 33–49.
139. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Standards and principles in School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.
140. Nadjafikhah, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences,* 31, 285–291.

141. Newton, K. & Star, J.R. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41, 557–567.
142. Newton, K., Lange, K. & Booth, J. (2019). Mathematical Flexibility: Aspects of a Continuum and the Role of Prior Knowledge. *The Journal of Experimental Education*, 88 (2), 1–13.
143. Nunes, T. (1992). Cognitive Invariants and Cultural Variation in Mathematical Concepts. *International Journal of Behavioral Development*, 15 (4), 433–453.
144. Octavarulia Shanty, N. & Wijaya, S. (2012). Rectangular Array Model Supporting Students' Spatial Structuring in Learning Multiplication. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 3 (2), 175–186.
145. Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, *55*(3), 169–195.
146. Park, J.H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16, 763–773.
147. Pesek, Dolores & Kirshner, David. (2000). Interference of Instrumental Instruction in Subsequent Relational Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5) 524–540.
148. Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja (2018). *Službeni glasnik*, 16.
149. Presmeg, N. (2002). Visualization and Learning in Mathematics Education. In English L. D. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 636−639.
150. Rathgeb-Schnierer, E. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M. A. (Eds.) *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *Cerme 8*, Middle East Technical University and ERME.
151. Rathmell, E. C. (1978). Using thinking strategies to teach the basic facts. In M. Suydam (Ed.), *Developing computational skills*. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va: The Council.
152. Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 183–201.
153. Reys, B. J., & Barger, R. H. (1994). Mental computation: Issues form the United States perspective. In R. Reys & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*, 31–47. Reston, Virginia: NCTM.
154. Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220 (4596), 477–478.
155. Rittle-Johnson, B. & Lynch, K. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *The International Journal on Mathematics Education*, 41 (5), 569–579.
156. Russel, S., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra - Strategies for Building Algebraic Thinking in the Elementary Grades.* Heinemann.
157. Ruthven, K. (1998). The Use of Mental, Written and Calculator Strategies of Numerical Computation by Upper Primary Pupils within a 'Calculator-aware' Number Curriculum. *British Educational Research Journal*, 24 (1), 21–42.
158. Ross, S. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher* , 36 (6), 47–51.
159. Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 41, 619–625.
160. Schulz, A. & Leuders, T. (2018). Learning trajectories towards strategy proficiency in multi-digit division – A latent transition analysis of strategy and error profiles. *Learning and Individual Differences*, 66 (1), 54–69.
161. Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*, 9 (5), 405–410.
162. Sengul, S. (2013). Identification of Number Sense Strategies used by Pre-service Elementary Teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 13 (3), 1965–1974.
163. Secada, W. G., Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (1), 47–57.
164. Siemon, D. (2019). Connecting Research and Practice – The Case of Multiplicative Thinking. In Rogerson, A., & Morska, J. (Eds.) – *Theory and Practice: An Interface or A Great Divide? The*

Mathematics Education for the Future Project – Proceedings of the 15th International Conference, 535–540.
165. Siemon, D., Breed, M. & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking – The big challenge of the middle years. In J. Mousley, L Bragg, & C. Campbell, (Eds.) *Mathematics – Celebrating Achievement, Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria*, 1–7. Melbourne: MAV.
166. Siemon, D., Izard, J., Breed, M. & Virgona, J. (2006). The Derivation of a Learning Assesment Framework for Multiplicative Thinking. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education – Mathematics in the centre*, 113–120.
167. Siegler, R. (1988). Strategy Choice Procedures and the Development of Multiplication Skill. *Journal of Experimental Psychology,* 117 (3), 258–275.
168. Silver, E. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM: the international journal on mathematics education,* 29 (3), 75–80.
169. Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriaton of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (4), 347–395.
170. Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking in grades K–6. In L. V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K–12,* 62–81.Reston, VA: NCTM.
171. Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998). Use of Multiplicative Commutativity by School Children and Street Sellers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29 (4), 422–435.
172. Skemp, Richard (1993). *Mahtematics in the Primary School*. London: RoutledgeFalmer
173. Smith, L. F., & Smith, J. K. (2006). The Nature and Growth of Aesthetic Fluency. In P. Locher, C. Martindale, & L. Dorfman (Eds.) *New directions in aesthetics, creativity and the arts*, 47–58.
174. Steffe, L. (1988). Children’s construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades,* 2, 119–140. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
175. Steffe, L. P., & Cobb, P. (1998). Multiplicative and divisional schemes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (1), 45–62.
176. Steffe, L. (1994). Children’s multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics,* 3–39. Albany, NY: University of New York Press
177. Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In Heibert & Behr (Eds.). *Research Agenda for Mathematics Education: Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 192–197. Hillsdale, NJ: Lawrence, Erlbaum & Reston
178. Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*, 3–21. Science Education Department, University of Warwick, Warwick, UK.
179. Torbeyns, J., Verschaffel. L. & Ghesquiere, P. (2006). The development of children’s adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24 (4), 439–465.
180. Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 1–17.
181. Trafton, P. (1992). Using number sense to develop mental computation and computational estimation. In C. Irons (Ed.) *Challenging Children to Think when they Compute*, 78–92. Brisbane: Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology
182. Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics,* 50, 29–47.
183. Threlfall, J. (1998). Are Mental Calculation Strategies Really Strategies? In Bills, L.(Ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 18 (3), 71–76.
184. Vale, C. & Davies A. (2007). Dean's great discovery: multiplication, division and fractions. *Australian primary mathematics classroom*, 12, (3), 18–22.
185. Van de Walle, J.A. (1997). *Elementary and middle school Mathematics: teaching developmentally*. Longman: NY
186. Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2010). Just answering … or thinking? Contrasting pupils' solutions and classifications of missing value word problems. *Mathematical Thinking and Learning,* 12 (1), 20–35.

187. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). A Spotlight on Mathematics Education in the Netherlands and the Central Role of Realistic Mathematics Education. In Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education,* 1–18.
188. Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 127–174. New York: Academic.
189. Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education,* XXIV (3), 335–359.
190. Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 557–628. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
191. Young-Loveridge, J. & Mills, J. (2008). Supporting Multiplicative Thinking: Multi-digit Multiplication Using Array-based Materials. *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects, 48*–64.
192. Young-Loveridge, J. (2005). Fostering Multiplicative Thinking: Using Array-based Materials. *Australian Mathematics Teacher,* 61 (3), 34–40.
193. Young-Loveridge, J. (2005). A Developmental Perspective on Mathematics Teaching and Learning : The Case of Multiplicative Thinking. *Teachers and Curriculum,* 8 (1), 49–58.
194. Young-Loveridge, J. (1999). The Acquisition of Numeracy. *Research Information for Teachers,* 1 (12), 1–7.
195. Young-Loveridge, J. & Bicknell, B. (2015). Using Multiplication and Division Contexts to Build Place-value Understanding . Sun, X., Kaur, B., Novtona, J. (Eds) *Proceeding of ICMI STUDY 23: primary mathematics study on whole number,* 379–386.
196. Zakaria, E. (2015). Understandin of Number Concepts and Number Operations through Games in Early Mathematics Education. *Creative Education,* 6 (12), 1306–1315.
197. Зељић,М. и Дабић, М. (2014). Однос процедуралног и концептуалног знања ученика у процесу овладавања поступцима рачунања у почетној настави математике, *Настава и васпитање*, LXIII (4), 653 – 668.
198. Зељић, М., Илић, С. и Јелић, М. (2017). Ментална аритметика – стратегије одузимања. *Иновације у настави,* XXX (4), 49–61.
199. Зељић, М. и Дабић Боричић, М. (2020). Уџбеник у функцији развоја мултипликативног мишљења. У: З. Опачић и Г. Зељић (ур.). *Програмске (ре)форме у образовању и васпитању – изазови и перспективе,* 393–405. Београд: Учитељски факултет
200. Зељић, М. (2021). *Учење и поучавање математике – једнакост са више (не)познатих.* Београд: Учитељски факултет.
201. Zejlic, M., Dabic, M. & Đokić, O. (2019). Multiplication Strategies: Progressive Development and (or) Systematic Teaching. In J.Novtna and Hana Moraova (Eds.) *Proceedings Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics At: International Symposium Elementary Mathematics Teaching,* 418–427. Prague: the Czech Republic Charles University, Faculty of Education
202. Zeljic, M. Đokić, O. & Dabic, M. (2016). Teachers′ belief towards the various representation in mathematics instruction. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 403–410.
203. Watanabe, T. (2003). Teaching Multiplication: An Analysis of Elementary School Mathematics Teachers' Manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal,* 104 (2), 111–125.
204. Watson, A. & Thompson, D. (2015). Design Issues Related to Text-Based Tasks. In A. Watson and M. Ohtani (Eds.) *Task Design In Mathematics Education,* 143–186.
205. Warner, L., Alcock, L., Coppolo, J. & Davis, G. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the Twenty-fifth Conference of the National Group for the Psychology of Mathematics Education, Honolulu, Hawaii*, 4, 371–378.

206. Willis, S., Jacob, L., Devlin, W., Powell, B., Tomazos, D. & Treacy, K. (2004). *First steps in mathematics: Understand operations, calculate & reason about number pattern*. Melbourne: Rigby Heinemann
207. Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly,* 29 (4), 269–289.
208. Wright, R. J., Ellemor-Collins, D., & Tabor, P. D. (2012). *Developing number knowledge: Assessment, teaching & intervention with 7–11 year olds*. SAGE Publications Ltd
209. Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.) *The role of representation in school mathematics,* 215–227. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

VII ПРИЛОЗИ

Прилог 1: Наставни садржаји коришћени за обраду множења

Наставне јединице које су на исти начин обрађене у *Моделу 1* и *Моделу 2*

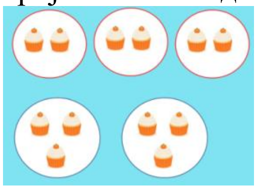
Множење броја 2 и бројем 2 – 2 часа

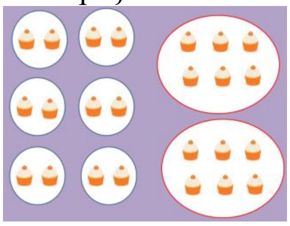
Примери и задаци за обраду множења броја 2 и бројем 2:

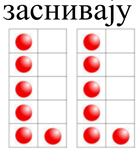
1. Уочавање броја прстију на две руке: $\mathbf{2 \cdot 5} = 5 + 5 = 10$

2. Одређивање броја ученика који седе у две клупе: $\mathbf{2 \cdot 2} = 2 + 2 = 4$

3. Одређивање броја ученика у две клупе (у свакој клупи седи по 1 ученик): $\mathbf{2 \cdot 1} = 2$
   Затим у једној клупи седе два ученика, а друга клупа је празна: $\mathbf{1 \cdot 2}$
   Одређивање укупног броја ученика који седе у 4 клупе: $\mathbf{4 \cdot 2}$
   Спајање две клупе, тако да у свакој буде по 4 ученика: $\mathbf{2 \cdot 4}$

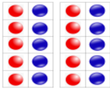
4. Идеја једнакобројних скупова:
   Број колача на три тацне: $\mathbf{3 \cdot 2} = 2 + 2 + 2$ или $4 + 2$
   Броја колача на две тацне: $\mathbf{2 \cdot 3}$
   

5. Правоугаона схема:
   Распоређивање колача са слике на тацну правоугаоног облика која има две преграде:
    $\mathbf{6 \cdot 2 = 2 \cdot 6}$

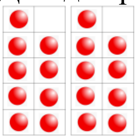
6. Декадна репрезентација: Распоређивање колача на начин као што су приказани на слици. Ученици су мотивисани да интуитивно примене стратегије множења које се заснивају на примени аритметичких правила.
    $2 \cdot 5 + 2 \cdot 1$

7. Производ мера:
   Број дана у две седмице: $\mathbf{2 \cdot 7}$
   Један викенд траје___ дана. Колико дана траје 7 викенда? $\mathbf{7 \cdot 2}$

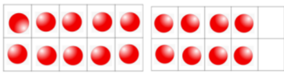
8. Декадне репрезентације: Колико кружића је приказано на слици: **2 · 10**



9. Декадна репрезентација: Колико кругова сам залепила на једну таблу? **2 · 9**



Репрезентације са декадном основом се стављају у хоризонтални положај и спајају два круга, којима се добија запис **9 · 2.**



На које све начине можемо израчунати укупан број кругова? 9 + 9 или 20 – 2 · 1

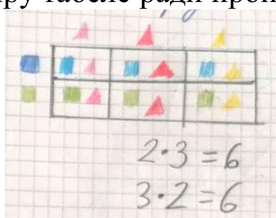
10. Мултипликативно поређење:

Ја имам 8 бомбона, а моја другарица 2 пута више бомбона. Колико бомбона има моја другарица? **8 · 2**.

Представљам њене бомбоне у репрезентацији са декадном основом. Како можемо израчунати? Пишемо 2 + 2 +2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Да ли постоји неки лакши начин? Који? Уочавање **2 · 10 – 2 · 1 или 8 + 8**

11. Увођење Декартовог производа кроз комбиновање картица облика квадрата (зелена и плава) и картица облика круга (црвена, жута, бела) у циљу уочавања на колико различитих начина можемо искомбиновати све кругове и све квадрате различитих боја.

На табли се лепе комбинације у оквиру табеле ради проналажења обрасца.

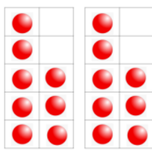


<u>Задаци за самостални рад ученика:</u>

1. Израчунај производ следећих бројева: 2 · 4 2 · 6 2 · 8 3 · 2 5 · 2

2. Милица је колаче распоредила у 2 реда. У сваки ред је ставила по 9 колача. Колико колача је Милица направила?

3. На основу слике напиши производ и израчунај:

4. Колико ногавица заједно има четворо панталона?

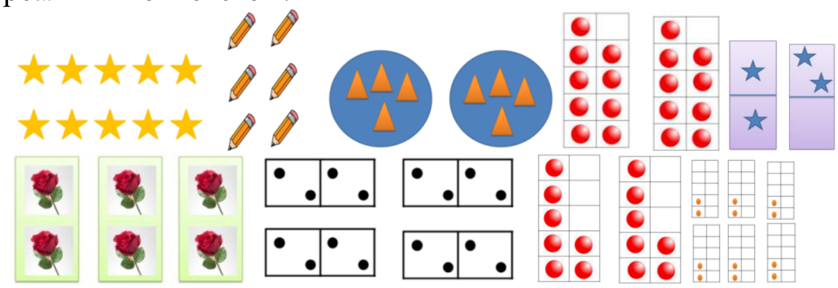
5. Једна чоколадица кошта 9 динара.

а) Колико новца је потребно за 2 чоколадице?
б) Колики кусур ћемо добити ако чоколадице платимо новчаницама од 10 динара?

6. Ана има 2 сукње и 2 мајице. Колико дана Ана може носити своје ствари ако сваки дан носи различите комбинације?

<u>Наставни садржаји за систематизацију наученог градива:</u>

Понављање множења бројем 2 и броја 2 кроз различите иконичке репрезентације и задатак са реалним контекстом.



- ➢ *Милица помаже старијој сестри у спремању колача. Милица има 10 година. Њена сестра Јана је 2 пута старија. Колико година има Јана?*
  Заједно украшавају колаче. За један колач им је потребно 2 минута. Украсиле су колаче. Колико минута су потрошиле за украшавање колача?
  Имају 2 предивне тацне и на сваку може да стане по 2 колача.
  Остале колаче су распоределе на тацну која има две преграде и у сваку стаје по 2 колача.

Замена места чинилаца – 2 часа

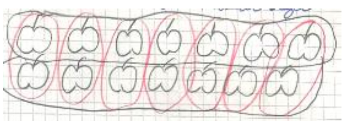
Замена места чинилаца је усвојена кроз употребу правоугаоне схеме:

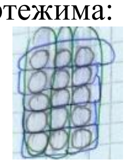
Марија је сложила у 2 реда по 4 поморанџе, а Јана у 4 реда по 2 поморанџе. Која девојчица има више поморанџи?

- ➢ Декадна репрезентација:

Колико укупно имамо поља? **2 · 5**.
Ученици се усмеравају да првобитно посматрају редове у циљу записивања записа који одговара исказу *у 5 редова по 2 поља* **5 · 2**.

- ➢ Записивање производа који одговарају цртежима:

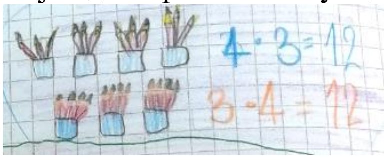
 **2 · 7 = 7 · 2**

 **3 · 5 = 5 · 3**

- ➢ Усвајање замене места чинилаца кроз **једнакобројне скупове:**

Маша је све бојице распоредила у 4 кутије. У сваку кутију је распоредила по 3 бојице?

Временом Машине кутије су се поквариле и остале су јој три кутије. Како ће Маша распоредити бојице? Користећи штапиће и две кутије ученици распоређују бојице.
Приказ иконичке репрезентације која одговара контексту задатка:

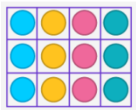


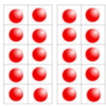
- Употреба замене места чинилаца у задацима:

Како можемо користити замену места чинилаца у задацима? Да ли нам је лакше да рачунамо 10 · 2 или 2 · 10 и сл?

<u>Задаци за самостални рад:</u>

1. Напиши одговарајуће производе на основу слике:





2. Нацртај одговарајући цртеж за производ 5 · 6 = 6 · 5.

3. Упиши бројеве тако да једнакости буду тачне.

6 · 5 = ___ · __ *9 · __ = 4 · ___* *13 · 2 = __ · 13*

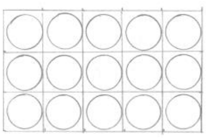
3 · ___ = 8 · 3 *__ · 1 = ___ · 10* *__ · 17 = ___ · 5*

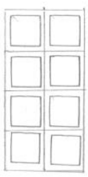
4. Упореди без израчунавања:

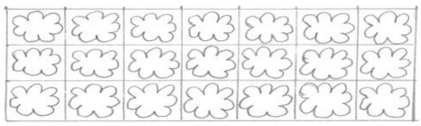
6 · 2 ____ 2 · 6 *2 · 10 ____ 10 · 2* *3 · 2 + 2 · 2 ____ 2 · 6* *5 + 5 + 5 _____ 5 · 4*

<u>Задаци за самостални рад ученика 2:</u>

1. Посматрај цртеже и упиши (на цртице) бројеве који недостају:







3 · 5 =__ · 3 *4 · __= __ · 4* *3 · __= __ · __*

2. Три девојчице су купиле по девет бомбона, а девет дечака по три бомбоне. Одреди ко је купио више бомбона. Пробај без рачунања, а затим провери рачунањем.

3. Један керамичар је лепио плочице у кухињи. На један зид је залепио у 6 редова по 9 црвених плочица, а на други зид је залепио по 6 плавих плочица у 9 редова. Да ли је било више плавих или црвених плочица?

4. Алекса је платио свеску са 5 новчаница од 10 динара, Марко са 10 кованица од 5 динара, а Урош са једном новчаницом од 50 динара. Напиши одговарајуће изразе који приказују колико динара су дечаци платили свеске и одреди који дечак је највише новца потрошио?

5. Осмисли задатак за производ бројева 3 и 10.

Напомена: Ученици су мотивисани да приликом решавања одређених задатака цртају одговарајућу репрезентацију.

Множење бројевима 5 и 10 и множење бројева 5 и 10 – 2 часа

<u>Садржаји за понављање градива:</u>

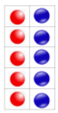
1. *За прање једног тањира потребно је два минута. Колико минута је потребно да би се опрало 10 тањира?*

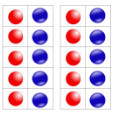
2. *Маја је платила лизалицу 5 динара, а њена сестра два пута више. Колико је коштала лизалица Мајине сестре?*

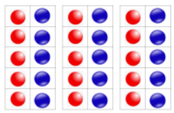
Чиме је Маја могла да плати лизалицу од 5 динара? На табли цртам кованицу од 5 динара. А поред новчаницу од 10 динара. *Колико динара је још потребно да доцртам код кованице од 5 динара да би обе стране биле једнаке?*
5 + 5 = 10 – уочавање једнакости и односа броја 5 и 10. *Број 5 је 2 пута мањи од броја 10.*

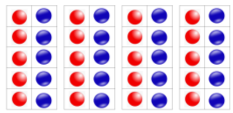
<u>Примери и задаци за обраду множења бројевима 5 и 10:</u>

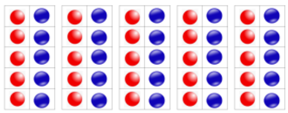
Користећи репрезентације са декадном основом ученици су усвојили све примере множења бројем 5 и 10, као и однос између бројева 5 и 10. Током обраде градива подстицани су на употребу ритмичког пребројавања, као и мултипликативних стратегија које се у основи заснивају на односу бројева 5 и 10.

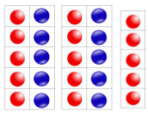

$2 \cdot 5 = 1 \cdot 10 = 10$

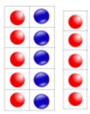

$4 \cdot 5 = 2 \cdot 10 = 20$

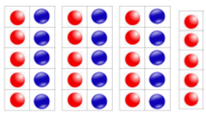

$6 \cdot 5 = 3 \cdot 10 = 30$

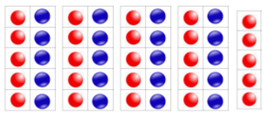

$8 \cdot 5 = 4 \cdot 10 = 40$

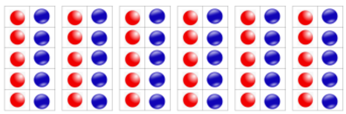

$10 \cdot 5 = 5 \cdot 10 = 40$

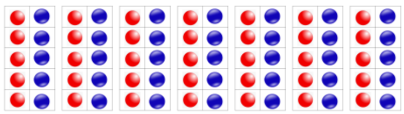

$5 \cdot 5 = 25$

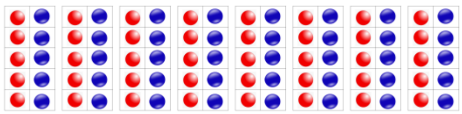

$3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 5 = 15$

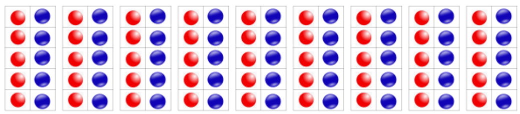

$7 \cdot 5 = 35$

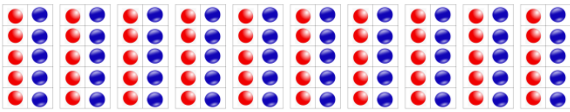

$9 \cdot 5 = 45$


$6 \cdot 10 = 60$


$7 \cdot 10 = 70$


$8 \cdot 10 = 80$


$9 \cdot 10 = 90$



$10 \cdot 10 = 100$

Задаци за самостални рад:

1. Израчунај, а исте резултате обој истом бојом:

2 · 5 = ______ 6 · 10 = ______ 5 · 8 = ______ 10 · 9 = ______ 2 · 2 · 5 = _____

2. Један човек је желео да укрупни новац. Имао је 10 новчаница од 10 динара. Коју новчаницу је човек добио као замену?

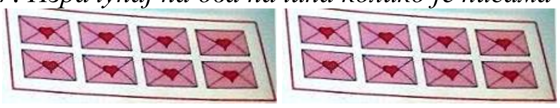
3. Милица је у воћњаку посадила 9 редова воћки. У сваки ред је ставила по 5 воћки. Колико укупно воћки је посадила? Нацртај одговарајући цртеж.

4. Марија је пронашла у парку 4 бубамаре. Свака бубамара је на једном крилу имала по 5 тачкица. Колико тачкица имају све бубамаре на оба крила?

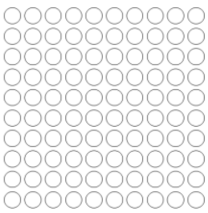
5. Милош је сакупио 10 сличица. Његов друг је сакупио 5 сличица више од њега, а његов брат 5 пута више сличица. Колико сличица су укупно сакупили?

6. На колико начина се петоро деце може распоредити да седи на 4 различите столице? Нацртај одговарајући цртеж.

7. Израчунај на два начина колико је писама Мира добила од својих другарица са зимовања.



8. Обој 6 редова кружића. Запиши производ и састави одговарајући текст задатка.



б) У облику производа два броја напиши колико је кружића остало необојено.

Задаци за самостални рад 2:

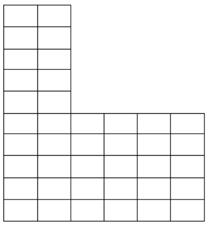
1. У свакој кутији има 10 бојица. Јована има 4 кутије бојица, а Мила 6 кутија бојица.
а) Која девојчица има више бојица? Одреди без рачунања.
б) Колико ______ има више бојица?

2. Који број је 10 пута већи од броја 5? А који број је за 40 већи од броја 10?

3. а) Три друга су укупно уштедела 100 динара. Алекса је уштедео 5 кованица од 5 динара, Миша 2 новчанице од 10 динара и 3 кованице од 5 динара. Колико новца је уштедео Стефан?

б) Допуни реченице.
Стефан је могао да уштеди _______ новчаница од 10 динара или _______ кованица од 5 динара.

4. а) Посматрај слику и израчунај укупан број квадратића.



5. Син има 5 година. Мама је 7 пута старија од њега, а тата 8 пута. Колико година има мама, а колико тата?

6. Нађи одговарајуће парове и повежи их.

$5 \cdot 7$	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 8$	$5 \cdot 4$
$4 \cdot 10$	$8 \cdot 2$	$5 \cdot 9$	$4 \cdot 10 - 5$
$2 \cdot 10$	$5 \cdot 8 + 1 \cdot 5$	$2 \cdot 5$	$5 \cdot 3 + 1$

7. Колико минута траје 5 малих одмора?

Напомена: За решавање сваког задатка ученици су подстицани да објашњавају стратегије које су користили за одређивање производа. За множење бројевима 5 и 10 ученици су претежно подстакнути да користе ритмичко пребројавање.

Множење бројевима 0 и 1 – 2 часа

<u>Примери за презентацију новог градива</u>:

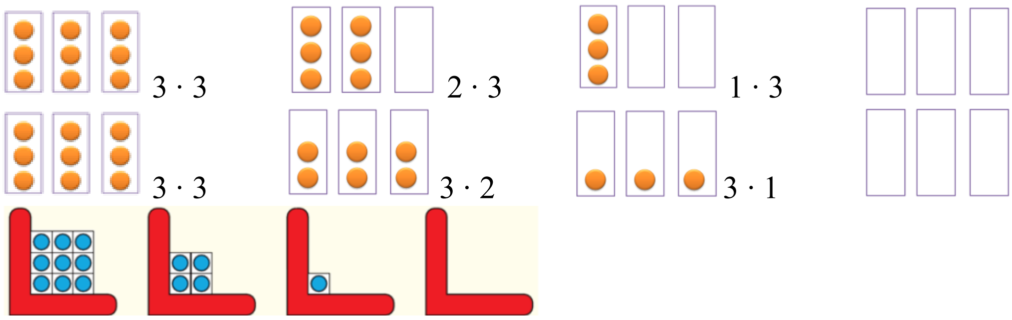
- Идеја једнакобројних скупова:

$5 \cdot 2$

$5 \cdot 1$

$1 \cdot 5$

- Правоугаона схема



$3 \cdot 3$ $2 \cdot 3$ $1 \cdot 3$ $0 \cdot 3$

$3 \cdot 3$ $3 \cdot 2$ $3 \cdot 1$ $3 \cdot 0$

$3 \cdot 3$ $2 \cdot 2$ $1 \cdot 1$ $0 \cdot 0$

У *Моделу 1* ученици су усмено подстицани да уоче и примене аритметичка правила која смо научили.
На пример: $1 \cdot 0$; 0 се може посматрати као разлика два иста броја (на пример: $0 = 1 - 1$ или $2 - 2$)
$2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 - 1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$
$3 \cdot 1 = 3 \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3$

<u>Задаци за самостални рад ученика:</u>

1. Напиши одговарајући производ.

а)  *б)*  *в)* 

2. Израчунај:
$6 \cdot 1 \cdot 1 =$ $\quad$ $2 \cdot 4 \cdot 0 =$ $\quad$ $1 \cdot 6 \cdot 9 =$ $\quad$ $0 \cdot 3 + 5 =$

3. Исправи грешке у задатку:

$9 \cdot 1 = 9$ $\quad$ $3 \cdot 0 = 0$ $\quad$ $0 \cdot 4 = 4$ $\quad$ $7 \cdot 0 = 7$ $\quad$ $2 + 1 = 3$ $\quad$ $0 + 7 = 0$
$7 \cdot 1 \cdot 0 = 7$ $\quad$ $1 \cdot 1 = 2$ $\quad$ $5 - 0 \cdot 1 = 0$ $\quad$ $4 \cdot 2 = 8$ $\quad$ $2 \cdot 4 = 6$ $\quad$ $1 \cdot 2 = 3$

4. Упиши бројеве који недостају.
а) $\underline{\quad\quad} \cdot 1 = 22$ $\quad$ *б)* $69 \cdot \underline{\quad\quad} = 0$ $\quad$ *в)* $\underline{\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad} = 10$ $\quad$ *г)* $\underline{\quad\quad} \cdot \underline{\quad\quad} = 18$

5. Упиши одговарајући знак <, > или =.
$10 \cdot 1 \underline{\quad\quad} 10 \cdot 0$ $\quad$ $5 \cdot 4 \underline{\quad\quad} 20 \cdot 1$ $\quad$ $6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \underline{\quad\quad} 0 \cdot 10$
$3 \cdot 9 \cdot 2 \underline{\quad\quad} 6 \cdot 9 \cdot 1$ $\quad$ $3 \cdot 0 + 1 \underline{\quad\quad} 1 + 1 \cdot 1$

6. Један паук улови 1 мушицу. Колико мушица улови шест паукова?

7. Маја је кренула на журку. Са другарицом Машом се договорила да обуку сукњу и мајицу. Маша има у свом ормару две сукњу и три мајице, а Маја има две мајице, али ниједну сукњу.
а) Колико различитих комбинација може да обуче свака девојчица?
б) Шта оне могу да ураде како би и Маја и Маша могле да оду на журку?

<u>Задаци за самостални рад (*Модел 1*):</u>

1. Израчунај, а затим напиши у облику одговарајућег производа.
$4 + 3 \cdot 4 =$ $\quad$ $3 \cdot 5 + 3 =$ $\quad$ $4 \cdot 3 - 4 =$ $\quad$ $5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 =$
$4 \cdot 2 \cdot 4 =$ $\quad$ $3 \cdot 2 \cdot 8 =$ $\quad$ $6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 =$

2. Јована има 4 украса које ће ставити на јелку. У сваки украс може да стане по једна сличица. Колико разлчитих комбинација може направити Јована ако има 9 различитих сличица?

3. На дрвету има 5 грана. На свакој грани има по 1 врабац.
а) Колико има врабаца?
б) Колико има голубова?

4. Једна оловка кошта 1 евро. Колико евра кошта 29 оловака?

<u>Задаци за самостални рад (*Модел 2*):</u>

1. У соби има 4 угла. У сваком углу је једна мачка.
а) Колико има мачака?

б) Неко је ушао у собу и мачке су се уплашиле. Све су отишле у један ћошак. Колико има сада мачака?
в) Истерали су мачке из собе. Колико их је остало?

2. У кокошињцу се налази 5 кокошака и 4 петла. Кокошке су данас снеле по 1 јаје. Колико јаја је било данас у кокошињцу?

3. Јована је скупљала коцкице. У 10 редова је ставила по једну плаву, али ниједну црвену коцкицу. Колико има црвених коцкица?

4. У једној чаши са соком се налази 8 коцкица леда. Колико је укупно коцки леда у чаши?

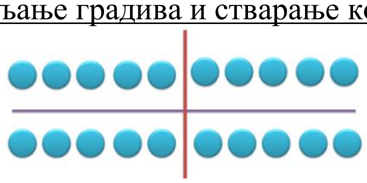
5. Весна је позвала на вечеру 6 другарица. Поставила је свима по 1 тањир. Колико је тањира било на столу?

АРИТМЕТИЧКА ПРАВИЛА (ЗДРУЖИВАЊЕ ЧИНИЛАЦА; МНОЖЕЊЕ ЗБИРА БРОЈЕМ И БРОЈА ЗБИРОМ; МНОЖЕЊЕ РАЗЛИКЕ БРОЈЕМ И БРОЈА РАЗЛИКОМ)

Напомена*:* Наведене наставне јединице су обрађене на исти начин као у оба модела. У Моделу 1 су обрађене одмах након множења бројевима 2, 5 и 10, а у Моделу 2 након обраде множења свих једноцифрених бројева. Из наведеног разлога, коришћене су исте иконичке репрезентације и тексутални задаци, али су бројеви прилагођени обрађеним садржајима.

Здруживање чинилаца – 2 часа

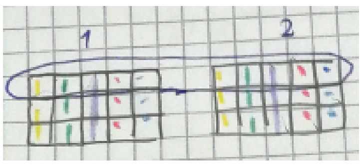
<u>Примери за понављање градива и стварање контекста за учење:</u>



Одређивање могућих производа на основу правоугаоне схеме $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

<u>Примери и задаци коришћени за обраду здруживања чинилаца:</u>

- ***Модел 1:*** **Две кутије подељене на три преграде, а у свакој по 5 коцкица различитих боја**

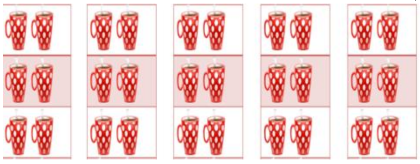


Користећи наведени контекст задатка ученици записују различите изразе уз истовремено усмеравање који део преграда се прво посматра.
1. Број преграда: $5 \cdot 3$
Укупан број коцкица: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$
2. Број коцкица у једној кутији: $3 \cdot 5$
Укупан број коцкица: $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$
3. Број коцкица само на првој прегради: $2 \cdot 5$
Укупан број коцкица: $3 \cdot (2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = 30$

Усмено одређивање броја коцкица у случају да имамо: 3 кутије или 4 преграде или 2 коцкице.

Циљ истих бројева у неким примерима јесте уочавање правила здруживања чинилаца и замене места чинилаца.

- ***Модел 2:*** **Слика полице са шољама**

 На исти начин је одређен укупан број шоља као и у Моделу 1.

Задаци за вођено вежбање:

Записивање и уочавање свих једнакости који одговарају слици:

(4 · 5) · 2; (5 · 2) · 4; 4 · (5 · 2); (4 · 2) · 5...

Задаци за самостални рад ученика:

Напомена: *У заградама су дати бројеви који су коришћени у Моделу 2*

1. Израчунај на неколико начина производ бројева 10, 5, 2 (3, 9, 2)

2. Израчунај на неколико начина број чаша на слици.

а) 

б)

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2

3. Допиши одговарајући број тако да једнакост буде тачна. Подвуци на који начин би ти било лакше да израчунаш.

а) (4 · 10) · 2 = 10 · (__ · 4)   *б) 7 · 12 · 2 (6) = _ · 12*   *в) _ · 5 · _ = 16 (36) · 5*

4. Без рачунања заокружи већи производ. Исте производе подвуци.

а) (6 · 5) · 2   *2 · (6 · 5)*   *б) 10 · 5 · 2*   *5 · 5 · 2*

в) 15 · 4 · 5   *5 · 15 · 3*

5. Четири школе су пријавиле по две (3) екипе ученика за такмичење у квизу. У свакој екипи се налази по 5 ученика. Колико ученика укупно учествује на такмичењу?

6. На два паркинга има по 6 аутомобила. Колико укупно точкова има?

7. Ана има 3 (4) бојице. Њена сестра Јана два пута више од ње. А Марко има 5 (4) пута више од Јане. Колико бојица има Марко?

8. У три реда је распоређено по 5 (7) клупа. У свакој клупи седи по 2 ученика. Колико је укупно ученика у одељењу?

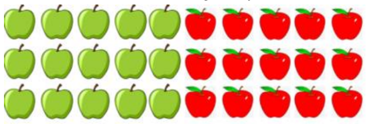
9. Милану је потребно 10 (9) минута да би опрао прозоре. Данас је опрао 3 прозора, али му је требало дупло више времена него иначе. Израчунај колико минута је Милан прао прозоре.

Напомена: У сваком задатку су ученици подстицани да производ одреде на различите начине уз усмено објашњење стратегије коју су користили за рачунање и истицање начина који им је био најлакши за рачунање.

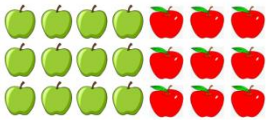
Множење збира бројем и множење броја збиром – 2 часа

<u>Примери коришћени за понављање градива и стварање контекста за учење:</u>

Деда је слагао јабуке у гајбицу. У три реда је сложио 10 (7) јабука. Колико деда има јабука? Нису све јабуке биле исте боје. Неке јабуке су биле црвене, а неке зелене.
Колико у једном реду има црвених, а колико зелених? Колико укупно има црвених јабука, а колико зелених јабука?



Модел 1



Модел 2

<u>Примери и задаци коришћени за обраду множења збира бројем и множење броја збирем:</u>

- На основу претходне слике одређује се укупан број јабука.

Број црвених јабука: $3 \cdot 5$ ($3 \cdot 3$)
Број зелених јабука: $3 \cdot 5$ ($3 \cdot 4$)
Укупан број јабука:
Први начин: $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 15 + 15 = 30$ ($3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 9 + 12 = 21$)
Други начин: $3 \cdot (5 + 5) = 3 \cdot 10 = 30$ ($3 \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21$)

Након тога ученици су усмерени на првобитно посматрање редова, а затим колона:
$(5 + 5) \cdot 3$ ($(3 + 4) \cdot 3$)
<u>Дискусија:</u> Какви су резултати у оба примера? Који пример је лакши? Зашто?

- 2) *Јована је отишла у продавницу и желела је да купи 2 (3) жваке и 2 (3) лизалице. Жваке коштају 2 динара, а лизалице 8 динара. Колико динара је Јована потрошила?*

Први начин: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20$ ($3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 12 + 24 = 36$)
Други начин: $2 \cdot (2 + 8) = 2 \cdot 10 = 20$ ($3 \cdot (4 + 8) = 3 \cdot 12 = 36$)

Напомена: Кроз примере истиче се редослед обављања рачунских операција множење и сабирање.

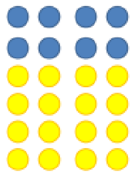
<u>Задаци за вођено вежбање:</u>

1. 

Одређивање укупног броја штапића потребних за кућице на два начина.

2.


(Модел 1)


(Модел 2)

Писање одговарајућих израза и рачунање производа на два начина, као и истицање начина који је лакши за рачунање.

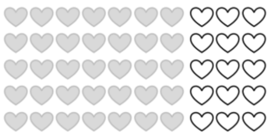
Усмено коментарисање како бисмо рачунали да је било:
а) три реда б) један ред в) по још један кружић у сваком реду

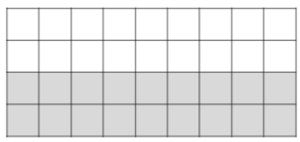
3. Одређивање производа **6 · 5** (**6 · 8**) растављањем једног од чинилаца на збир два броја

Циљ је да ученици уоче да један чинилац (било који) можемо раставити на збир два броја и применити множење збира бројем.
(6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 и 5 = 1 + 4 = 2 + 3)
6 · 5 = (4 + 2) · 5 или 6 · 5 = 6 · (3 + 2)
(6 · 8 = (1 + 5) · 8 или 6 · (5 + 3)

<u>Задаци за самостални рад ученика:</u>

1. На основу цртежа напиши одговарајући израз и израчунај на неколико начина.

а) 

б) 

2. Упореди:
4 · 10 + 4 · 2 ____ 4 · (10 + 2)
6 · 5 + 2 · 5 _____ 6 + 2 · 5
(5 + 5) · 5 ____ 5 + 5 · 5
(6 + 3) · 2 ____ 2 · 6 + 2 · 3

3. Шест дечака и 3 девојчице су набрали по 5 (7) крушака. Колико су укупно крушака набрали?

4. Одреди број који је 2 (7) пута већи од следбеника броја 5 (6).

<u>Задатак коришћен у *Моделу 1*:</u>

1. а) Упиши бројеве тако да једнакост буде тачна:
4 · (____ + _____) = 8 + 20 = ______
(7 + 9) ·_____ = 7 · _____ + 9 · 2 = ____________________
5 · (8 + ____) = ______ + 10 = ________________________
_____ · (2 + _____) = 4 + 6 = ______________________

б) Изабери два примера: један представи графички, а за други напиши одговарајући текстуални задатак.

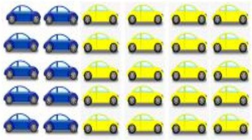
<u>Задаци коришћени у *Моделу 2*:</u>

1. У року од 5 дана Маја треба да уради 46 задатака. Маја сваког дана уради 6 задатака из математике и 2 задатка из српског језика. Да ли ће Маја стићи да заврши све задатке? Зашто?

2. Замисли да треба да помножиш број 9 са бројем 7, али си заборавио производ. На које све начине можемо раставити број 7 на два сабирка? Да ли можемо на више сабирака? Нацртај слику која ће ти служити као помоћ у решавању.

Множење разлике бројем и множење броја разликом – 2 часа

Примери и задаци коришћени за обраду множења разлике бројем и множење броја разликом:

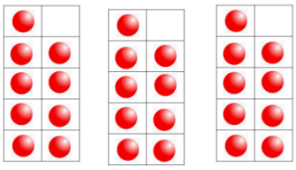


Колико има укупно аутића на слици?
1) На основу слике одређује се број жутих и број плавих аутића полазећи од укупног броја аутића.
Број жутих аутића: $5 \cdot (6 - 2)$
Први начин: $5 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 30 - 10 = 20$
Други начин: $5 \cdot (6 - 2) = 5 \cdot 4 = 20$

Број плавих аутића: $5 \cdot (6 - 4)$
Први начин: $5 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 30 - 20 = 10$
Други начин: $5 \cdot (6 - 4) = 5 \cdot 2 = 10$

Како бисмо записали да смо прво посматрали број колона? **$(6 - 4) \cdot 5$ и $(6 - 2) \cdot 5$**
Дискусија: Какви су резултати у оба примера? Који начин у ова два примера вам је био лакши? Зашто?

- Модел 2:



Први начин: $3 \cdot (10 - 1) = 3 \cdot 10 - 3 \cdot 1 = 30 - 3 = 27$
Други начин: $3 \cdot (10 - 1) = 3 \cdot 9 = 27$

Задаци за вођено вежбање:

1. Израчунај на два начина: $5 \cdot (8 - 3) =$
2.
Модел 1: Одређивање броја плавих звездица, примењујући множење разлике бројем, тако што ученици један од чинилаца записују као разлику два броја.

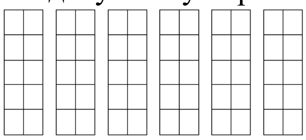
Циљ је да ученици покушају да један од чинилаца представе као разлику броја 5 и неког броја (5 – 1 или 5 – 2). Показују им се додатне слике које их мотивишу на уочавање наведеног, уколико не уоче сами. Пишемо пример који они истакну.


или


$(5-1)\cdot 3 = 4\cdot 3 = 12$ или $(5-1)\cdot 3 = 5\cdot 3 - 1\cdot 3 = 15 - 3 = 12$
$(5-2)\cdot 4 = 3\cdot 4 = 12$ или $(5-2)\cdot 4 = 5\cdot 4 - 2\cdot 4 = 20 - 8 = 12$

Модел 2: ученици самостално цртају цртеж за наведени задатак
Замисли да треба да помножиш број 8 са бројем 4, али си заборавио производ. На које све начине можемо представити бројеве 4 и 8 као разлику два броја?
$(4 = 5 - 1 = 6 - 2;\ 8 = 10 - 2;\ 9 - 1)$
Одређивање производа применом наученог правила: $(5-1)\cdot 8$ и $4\cdot(10-1)$

3 (*оба модела*) Израчунај производ бројева 6 и 9 користећи множење разлике бројем. Следећу слику користи као помоћ.

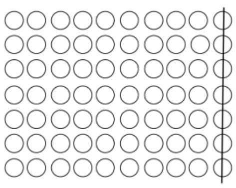


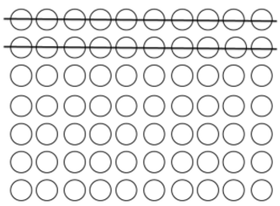
<u>Задаци за самостални рад ученика:</u>

1. У 5 (7) редова је засађено по 8 стабала јабука. У сваком реду се осушило по 1 стабло. Колико се стабала примило?

2. Анђела је на две (три) полице сложила по 10 шољица. Колико је остало шољица ако је Анђелин брат са обе полице узео по 2?

Модел 2:
3. На основу цртежа напиши одговарајући израз и израчунај на неколико начина.

а) 

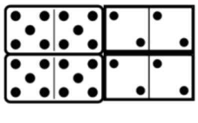
б) 

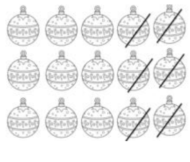
4. Израчунај на два начина производ следбеника броја 1 и разлике највећег једноцифреног броја и најмањег парног броја.

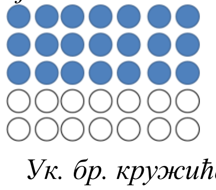
5. Алекса иде на камп који траје месец дана. Спаковао је четири тренерке и осам мајица како би имао довољно различитих комбинација. Када је стигао на камп схватио је да је ипак понео једну мајицу мање. Колико комбинација ће Алекса носити два дана?

Аритметичка правила (задаци коришћени на часу утврђивања):

1. На основу цртежа напиши одговарајући израз и израчунај на неколико начина.

а) 
____

б) 
____

в) 

Ук. бр. кружића:
Бр. плавих кружића:

2. Упореди:

$2 \cdot (2 - 1)$ ____ $2 \cdot 2 - 2 \cdot 1$
$2 \cdot (2 - 1)$ ______ $2 \cdot 2 - 1$
$2 \cdot (2 - 1)$ ____ $2 \cdot 1 - 2$

$2 \cdot 4 + 2 \cdot 6$ _____ $(4 + 6) \cdot 2$
$(4 + 6) \cdot 2$ _____ $4 + 6 \cdot 2$
$(4 + 6) \cdot 2$ ____ $2 \cdot 4 + 6$

3. Мила је направила 5 (3) букета, а у сваки букет је ставила по 10 цветова. Милици је из сваког букета дала по 4 цвета. Колико цветова је остало Мили?

4. Плави кликери коштају 4 динара, а жути 7 динара. Ако купимо по два (4) кликера обе боје, колико динара ћемо потрошити?

5. Бака је распоређивала зимницу на четири полице. На свакој полици има по 2 (3) преграде. На горње преграде ставља по 5 (3) тегли киселих краставчића, а на доње преграде по 5 (3) тегли џема. Колико је укупно тегли зимнице направила бака?

6. *У школском дворишту је засађено дрвеће у 2 (6) реда (ова). У једном реду име 4 брезе и јела за једну више од бреза. Колико има укупно стабала?*

7. Који број је два пута већи од производа најмањег парног броја и претходника броја 6?

Модел 2:
Нацртај одговарајући цртеж, а затим израчунај користећи научена правила:
$4 \cdot 7 =$ _____ $6 \cdot 9 =$ _____ $5 \cdot 8 =$ _____ $7 \cdot 6 =$ _____ $3 \cdot 8 =$ _____

УСВАЈАЊЕ МНОЖЕЊА ЈЕДНОЦИФРЕНИМ БРОЈЕВИМА ЗАСНОВАНО НА РАЗУМЕВАЊУ И ПРИМЕНИ АРИТМЕТИЧКИХ ПРАВИЛА (*Модел 1)*

Множење бројевима 3, 4 и 6 – 4 часа

Примери и задаци коришћени за понављање градива и стварање контекста за учење:

$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ $= 6$, јер је $2 \cdot 2 = 4$; $4 + 2 = 6$
$4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8$, јер је $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$
$6 \cdot 2$ $= 3 \cdot 2 \cdot 2$ или $4 \cdot 2 + 2 \cdot 2$ или $5 \cdot 2 + 1 \cdot 2$

Репрезентације са декадном основом су коришћене за понављање научених производа са 5 и 10 $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$, $3 \cdot 10 = 10 \cdot 3$, $4 \cdot 10 = 10 \cdot 4$ и $6 \cdot 10$ $6 \cdot 5$

Примери и задаци за обраду множења бројевима 3, 4 и 6:

Напомена: За све примере увођења множења ученици су мотивисани да одреде начин на који се бројеви могу раставити на производ два броја или збир или разлику два броја. На табли су приказиване правоугаоне слагалице или репрезентације са декадном основом које су додатно мотивисале ученике да одреде начин на који се може одредити производ, односно применити множење збира или разлике бројем, као и здруживање чинилаца.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$
$3 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$
$3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12$
$2 \cdot 4 + 4 = 8 + 12$

$4 \cdot 4 = 16$
$2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 8$
$4 \cdot 5 - 4 = 20 - 4 = 16$
$4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8 + 8 = 16$

$3 \cdot 3 = 9$
$3 \cdot 2 + 3 = 9$

$6 \cdot 3 = 3 \cdot 6 = 18$
$6 \cdot 2 + 6 = 12 + 6 = 18$
$2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 9 = 18$

$3 \cdot 5 + 3 = 15 + 3 = 18$

$6 \cdot 6 = 36$
$6 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \cdot 2 = 36$
$6 \cdot 5 + 6 = 30 + 6 = 36$

$4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$
$4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 20 + 8 = 28$
$7 \cdot 2 \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$
$7 \cdot 5 – 7 = 35 – 7 = 28$

$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 24$
(однос бројева 3 и 6 и 8 и 4)
$2 \cdot 8 + 8 = 16 + 8 = 24$
$3 \cdot 4 \cdot 2 = 12 \cdot 2$
$3 \cdot 10 – 3 \cdot 2 = 30 – 6 = 24$

$4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 32$
$4 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$
$4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 20 + 12 = 32$
$4 \cdot 10 – 4 \cdot 2 = 40 – 8 = 32$
$8 \cdot 5 – 8 = 40 – 8 = 32$
$8 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$

$6 \cdot 9 = 54$
$3 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 27 + 27 = 54$
или $3 \cdot 2 \cdot 9 = 3 \cdot 9 \cdot 2$
$6 \cdot 10 – 6 = 54$

$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 21$
$3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21$
$7 \cdot 2 + 7 = 14 + 7 = 21$

$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6 = 24$
$6 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$
$3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$
$4 \cdot 5 + 4 = 20 + 4 = 24$

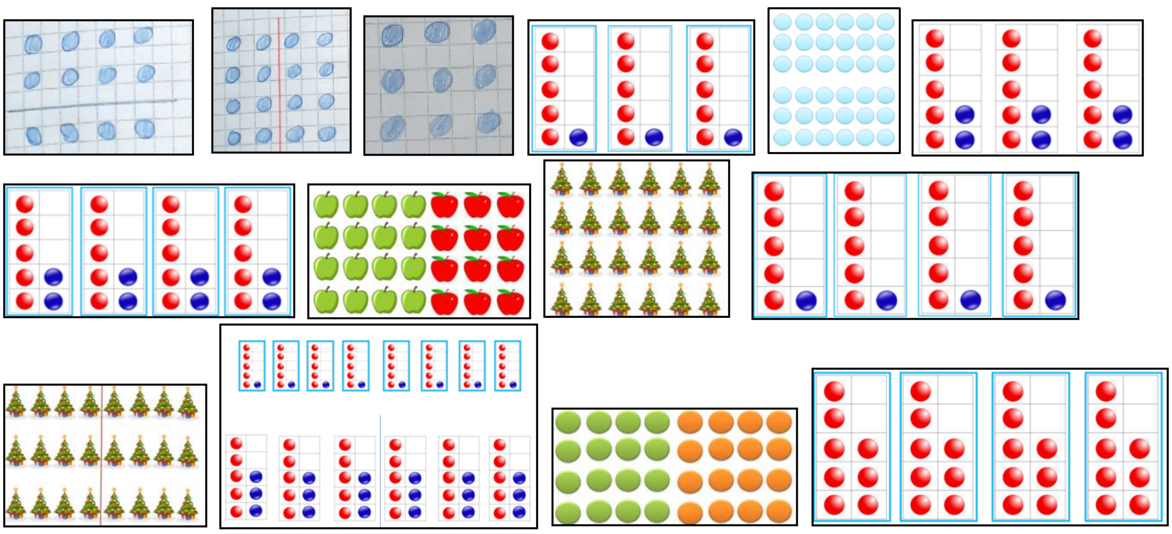
$6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$
$3 \cdot 8 \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$
$5 \cdot 8 + 8 = 40 + 8 = 48$
$6 \cdot 10 – 6 \cdot 2 = 48$
$6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 48$
$6 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 30 + 18 = 48$...

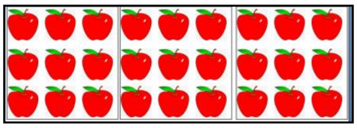
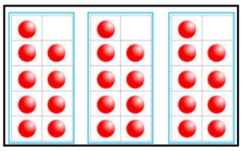
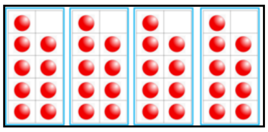
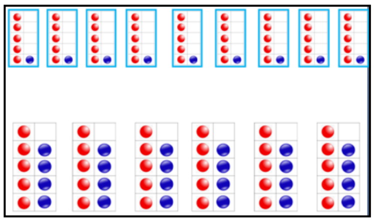
$3 \cdot 9 = 27$
$3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27$
$3 \cdot 10 – 3 = 30 – 3 = 27$

$4 \cdot 9 = 9 \cdot 4 = 36$
$5 \cdot 9 – 9 = 45 – 9 = 36$
$4 \cdot 10 − 4 = 36$

$6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42$
$6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 30 + 12 = 42$
$7 \cdot 5 + 7 = 35 + 6 = 42$

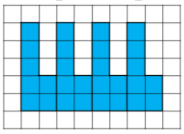
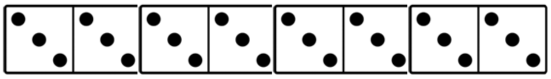
<u>Примери репрезентација коришћених као помоћ за растављање једног од чинилаца:</u>



<u>Задаци за самостални рад ученика – два часа:</u>

1. Одреди производ бројева на основу слике.

2. Миша за 6 минута стигне до школе, а његовом другу треба 4 пута више времена? Колико времена треба Мишином другу да би стигао до школе?

3. Пронађи број који је за 2 већи од броја 4, а затим пронађи број који је шест пута већи од њега.

4. Састави текст задатка који одговара производу бројева 3 и 9 и израчунај применом множења збира или разлике бројем.

5. Примењујући множење збира или разлике бројем и растављање чинилаца, одреди производ.

$3 \cdot 7 \qquad 4 \cdot 8 \qquad 6 \cdot 9 \qquad 9 \cdot 4 \qquad 4 \cdot 4$

6. На једном паркиралишту је обележено 6 редова за паркирање. У сваки ред може се паркирати 8 аутомобила. Колико аутомобила може да буде највише на том паркиралишту?

7. На такмичење је кренуло 30 деце. Девет аутомобила вози децу на такмичење. У сваки аутомобил стане по 3 детета. Колико аутомобила недостаје да би се одвезла сва деца на такмичење?

8. За један сат урадимо 3 задатка из математике и 4 задатка из српског језика. Колико задатака из сваког предмета ћемо урадити за 6 сати?

9. Миша је замислио број који је за 7 већи од броја 1. Ана је замислила број који је 4 пута већи од Мишиног броја, а Мила број који је 6 пута већи од Мишиног броја. Која девојчица је замислила већи број и за колико?

10. Подвуци израз који има већу вредност.

$\boxed{6 \cdot 5 \quad 6 \cdot 6}$ $\qquad$ $\boxed{4 \cdot 8 \quad 7 \cdot 4}$ $\qquad$ $\boxed{3 \cdot 7 \quad 7 \cdot 2}$

$\boxed{(5 + 3) \cdot 3 \quad (10 - 1) \cdot 3}$ $\qquad$ $\boxed{6 \cdot 2 \cdot 4 \quad 4 \cdot 6 \cdot 3}$ $\qquad$ $\boxed{4 \cdot (4 + 3) \quad (5 + 1) \cdot 4}$

11. а) Колико различитих кућица можемо нацртати уз помоћ датих троуглова и квадрата, ако је сваки троугао и сваки квадрат различите боје?

б) Уколико додамо дупло више троуглова, колико ћемо кућица моћи да нацртамо?

Пример задатка за систематизацију:

Сваки ред добија 15 примера који су тачно или погрешно израчунати. Њихов задатак је да прегледају и заједнички оцене рад. Након тога сви проверавамо заједно примере и коментаришемо настале грешке.

$3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + 1$	$3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 3$	$3 \cdot 3 = 9$
$6 \cdot 5 = 35$	$6 \cdot 5 = 30$	$6 \cdot 5 = 5 \cdot 5 + 5 = 25$
$4 \cdot 9 = 4 \cdot 10 – 1$	$4 \cdot 9 = 4 \cdot 10 – 4$	$4 \cdot 9 = 4 \cdot 10 – 4$
$9 \cdot 6 = 6 \cdot 10 – 6$	$9 \cdot 6 = 6 \cdot 10 – 1$	$9 \cdot 6 = 6 \cdot 10 – 6$
$6 \cdot 8 = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 44$	$6 \cdot 8 = 3 \cdot 8 \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$	$6 \cdot 8 = 5 \cdot 8 – 8 = 40 – 8 = 32$
$7 \cdot 4 = 7 \cdot 2 + 2 = 16$	$7 \cdot 4 = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 24$	$7 \cdot 4 = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$
$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \cdot 12 = 24$	$6 \cdot 4 = 4 + 5 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$	$6 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 24$
$3 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 8 = 24$	$3 \cdot 8 = 3 \cdot 10 – 3 = 27$	$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 24$
$4 \cdot 7 = 14 + 14 = 28$	$4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2 \cdot 14 = 28$	$4 \cdot 7 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$
$9 \cdot 3 = 9 \cdot 2 + 3 = 25$	$9 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 + 9 + 9 = 26$	$9 \cdot 3 = 9 \cdot 2 + 3 = 25$
$6 \cdot 7 = 7 \cdot 5 + 6 = 42$	$6 \cdot 7 = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 35 + 12 = 47$	$6 \cdot 7 = 6 \cdot 10 – 6 \cdot 3 = 60 – 18 = 42$
$7 \cdot 5 = 6 \cdot 5 + 5 = 35$	$7 \cdot 5 = 35$	$7 \cdot 5 = 8 \cdot 5 – 5 = 35$
$3 \cdot 4 = 4 \cdot 2 + 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 3 \cdot 5 – 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 11$
$4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$	$4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 8 = 16$	$4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 16$
$6 \cdot 6 = 6 \cdot 5 + 6 = 30$	$6 \cdot 6 = 6 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36$	$6 \cdot 6 = 6 \cdot 5 + 6 = 30$
$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 1 = 1 + 1 + 1$	$3 \cdot 1 = 6 – 3$

Множење бројевима 7, 8 и 9 – 4 часа

Примери и задаци коришћени за обраду множења бројевима 7, 8 и 9

9 · 9
$9 \cdot 9 = 9 \cdot (10 – 1)$
$9 \cdot 9 = 9 \cdot 10 – 9 \cdot 1 = 90 – 9 = 81$
$10 \cdot 9 – 9 = 90 – 9 = 81$
$5 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 45 + 36 = 81$
$6 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 54 + 27 = 81$

8 · 9 = 9 · 8
$10 \cdot 8 – 8 = 80 – 8 = 72$
$8 \cdot 10 – 8 \cdot 1 = 80 – 8 = 72$
$4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 36 + 36 = 72$
$5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 40 + 32 = 72$
$9 \cdot 9 – 9 \cdot 1 = 81 – 9 = 72$
$9 \cdot 5 + 9 \cdot 3 = 45 + 27 = 72$

7 · 9 = 9 · 7
$7 \cdot 10 – 7 \cdot 1 = 70 – 7 = 63$
$10 \cdot 7 – 7 = 70 – 7 = 63$
$9 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 45 + 18 = 63$
$6 \cdot 9 + 9 = 54 + 9 = 63$

7 · 7
$7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 35 + 14 = 49$
$7 \cdot 6 + 7 = 42 + 7 = 49$
$7 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 28 + 21 = 49$
$7 \cdot 10 – 7 \cdot 3 = 70 – 21 = 49$

7 · 8
$8 \cdot 7 = 8 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 40 + 16 = 56$
$7 \cdot 4 \cdot 2 = 28 + 28 = 56$
$7 \cdot 10 – 7 \cdot 2 = 70 – 14 = 56$

8 · 8
$8 \cdot 7 + 8 = 56 + 8 = 64$
$8 \cdot 4 \cdot 2 = 32 + 32 = 64$
$8 \cdot 10 – 8 \cdot 2 = 80 – 16 = 64$
$8 \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 40 + 24 = 64$

Задаци за самостални рад:

1. а) Израчунај уз коришћење одговарајуће стратегије рачунања:

6 · 8 7 · 9 8 · 9 9 · 9

б)
6 · 7 + 7 =
8 · 7 – 7 · 7 =
16 + 8 · 8 =
9 · 8 – 6 · 9 =

2. Јована је купила 8 кутија украса за јелку. У свакој кутији је било по 7 плавих и 2 црвена украса. Колико украса је купила Јована?

3. Разлику бројева 9 и 3 увећај 7 пута.

4. Погледај слику судокуа из новина. Одреди колико поља укупно има судоку?

					3			
5			7	1		2		
	4			9		8	6	
		3						8
	5		6			9	3	
9		7		3			5	
			3		5			
6				2		1		
	9		1				4	

5. Колико стабала има у једном воћњаку који има 4 реда, ако је у једном реду посађено 7 стабала шљива и 8 стабала јабука?

6. На једном паркиралишту је обележено 7 редова за паркирање. У сваки ред може се паркирати 9 аутомобила. Колико аутомобила може да буде највише на том паркиралишту?

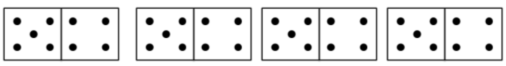
7. Марија и Милица су у књижари купиле по 6 кутија бојица. Која девојчица има више бојица и за колико, ако се зна да у Маријиним кутијама има по 7, а у Миличиним кутијама по 9 бојица?

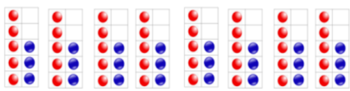
8. Састави текст задатка коме одговара следећи израз:
а) 7 · 4 + 9 · 4 б) 3 · 2 · 8

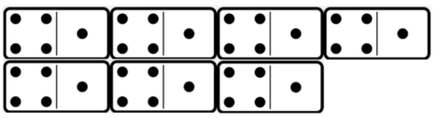
9. Примени научена правила и израчунај производ следећих бројева.
а) 7 · 4 = б) 3 · 8 = в) 9 · 6 =

Задаци за самостални рад 2:

1. На основу слике запиши и израчунај производ.

а) 

б) 


в)

2. Упиши одговарајући знак
7 · 2 + 7 ___ 7 · 3 0 · 7 ___ 8 · 1 9 · 6 ___ 7 · 9
8 · 7 ___ 8 · 5 + 8 · 2 7 · 5 ___ 7 · 2 · 2 10 · 6 – 12 ___ 6 · 8

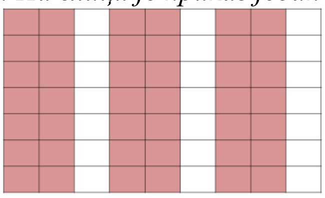
3. Из једне флаше сока се може попити 7 чаша сока. Мама је купила 6 таквих флаша, а попијено је 5 флаша.
а) Колико чаша сока се добије од 6 флаша?

б) Колико чаша сока је попијено?
в) Колико флаша сока је остало?

4. Тата сваког дана до посла у једном правцу прелази 9 километара. Колико километара тата пређе за 3 дана од куће до посла?

5. Један дечак има кутију следећег изгледа. Колико кликера он може ставити у кутију, ако у сваку преграду стави по 2 кликера?

6. На слици је приказ један зид једне кухиње.



а) Колико сивих плочица је стављено на тај зид?
б) Колико белих плочица је стављено на зид?
в) Колико је укупно плочица стављено на зид?
г) На другом зиду стављено је два реда плочица мање нега на првом зиду. Колико плочица је стављено на други зид?

<u>Пример задатка за систематизацију:</u>

1. Колико поља има шаховска табла?
2. Колико имамо белих, а колико црних фигура?
3. Колико имамо укупно фигура?
4. Колико имамо белих и црних пешака?
5. Колико поља су заузели црне фигуре? А беле?
6. Колико поља су заузели сви играчи?
7. Колико поља је остало празно?

Напомена: Кроз слику и наведена питања ученици се мотивишу да одреде производе на различите начине, као и да размишљају о структури броја, односно да уочавају исте производе, нпр. која два броја дају производ 8, 16 или 32 или 24.

УСВАЈАЊЕ МНОЖЕЊА ЈЕДНОЦИФРЕНИМ БРОЈЕВИМА ЗАСНОВАНО НА УПОТРЕБИ РАЗЛИЧИТИХ ИКОНИЧКИХ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА И ТЕКСТУАЛНИХ ЗАДАТАКА РАЗЛИЧИТЕ СЕМАНТИЧКЕ СТРУКТУРЕ (*Модел 2)*

Множење бројевима 3 и 4 и множење бројева 3 и 4 – 3 часа

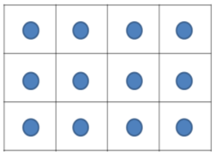
Примери иконичких репрезентација коришћених за понављање обрађених производа


$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$ $4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8$

$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$, $3 \cdot 10 = 10 \cdot 3$, $4 \cdot 10 = 10 \cdot 4$ – коришћене су репрезентације са декадном основом (коришћене током обраде множења бројевима 5 и 10).

Примери и задаци коришћени за обраду множења бројевима 3 и 4:

3 · 4

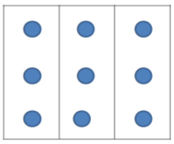


$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

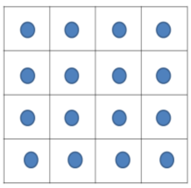
Ученици предлажу контекст задатка који одговара датом изразу.

Ученици интуитивно (на основу цртежа) долазе до начина на који се може одредити производ: 8 + 4, 6 + 6 или 3, 6, 9, 12.

3 · 3 = 6 + 3 или 3, 6, 9 (усмено коментаришемо могуће начине рачунања производа)



4 · 4



Цртеж се може посматрати и као два цртежа којима одговара производ $2 \cdot 2$ (таква 2 производа уз коришћење пребројавања; $4 \cdot 4 = 8 + 8 = 16$ или $4 \cdot 4 = 12 + 4$)

3 · 1

Ученици добијају траку која је дугачка 1dm. Потребно је да исеку траку која је 3 пута дужа.

Пишемо: $3 \cdot 1 = 3$

Лепим нову траку коју смо добили (1 трака састављена од три траке).

Пишемо производ који одговара том цртежу ($1 \cdot 3 = 3$).

4 · 1

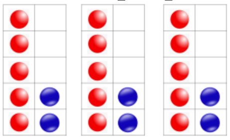
Из 4 клупе излази по један ученик. Пишемо израз који одговара броју ученика који седе у 4 клупе ($4 \cdot 1$) и броју ученика који стоје на једном месту ($1 \cdot 4$).

3 · 7

Један деда је јабуке распоређивао у гајбицу. У три реда је ставио по 4 зелене јабуке. Колико он има зелених јабука? 3 · 4
Поред њих је поређао и у 3 реда црвене јабуке. *Колико има црвених јабука?* 3 · 3
Ученици цртају цртеж који одговара контексту задатка (правоуагаона схема)
Колико имамо укупно јабука у једном реду? (7)
Уз занемаривање боје јабука пишемо израз **3 · 7** који одговара датом цртежу, а затим уз помоћ истог одређују начине на које можемо одредити производ.
Могући начини одређивања производа бројева 3 и 7:

1. 3 · 4 + 3 · 3 = 12 + 9 = 21
2. 2 · 7 + 7 = 14 + 7 = 21

Декадна репрезентација:

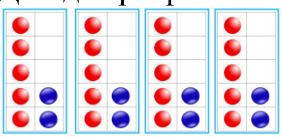


3 · 7 = 15 + 6 = 21 или 3 · 10 = 30; 30 – 3 – 3 – 3 = 21

4 · 7
Замислите да је деда додао још један ред јабука.
Колико имамо укупно јабука у једном реду? Уз занемаривање боје јабука записују се израз 4 · 7 који одговара новом контексту задатка.
Могући начини одређивања производа бројева 4 и 7:

1. Како можемо да одредимо производ на основу претходног задатка: 21 + 7
2. 2 · 8 + 2 · 6 = 16 + 12 = 28
3. 14 + 14 = 28
4. 4 · 4 + 4 · 3 = 16 + 12 = 28

Декадна репрезентација:



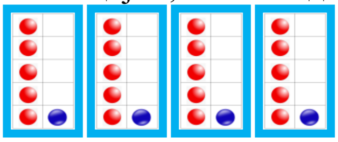
4 · 7 = 4 · 5 + 4 · 2 = 20 + 8 = 28 или 4 · 10 = 40; 40 – 8 – 8 = 28

3 · 6 = 6 · 3

3 · 6 = 15 + 3 = 18 или као 3 · 6 = 12 + 6
Уочавање да на три места имамо производ 3 · 2 или на два места производ 3 · 3

4 · 6 = 6 · 4
Ученицима се показује једна декадна репрезентација са 6 кругова. Потребно је да нацртају слику са декадном репрезентацијом, али тако да укупно буде 4 пута више кругова.

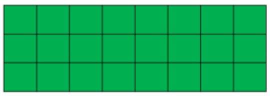
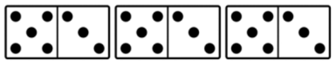
→ Нови цртеж:

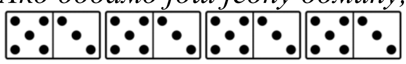


4 · 6 = 20 + 4 = 24 или 4 · 6 = 8 + 8 + 8 = 24
На основу примера ученика који су нацртали правоугаону схему одређује се производ 6 · 4:
6 · 4 = 6 · 5 – 6 или 12 + 12 = 24 или 6, 12, 18, 24.

3 · 9

Аца је купио 3 лизалице по девет динара. Користећи три исте новчанице он је платио ове лизалице. Које новчанице је Аца користио? (*новчанице од 10 динара)*
Колики кусур је Аца добио? За колико динара је Аца смањио вредност сваке новчанице?
Цртамо декадне репрезентације које приказују вредност новчанице од 10 динара, али тако да је она растављена на кованице од 1 динар.
Ако је $3 \cdot 10 = 30$; онда је $3 \cdot 9 = 30 - 3 = 27$
4 · 9
Замислите да је Аца купио 4 лизалице. *Колико би новца потрошио?*
$4 \cdot 10 = 40$; онда је $4 \cdot 9 = 40 - 4 = 36$

3 · 8
Који број је 3 пута већи од броја 8?
Репрезентација са декадном основом:
Ако је $3 \cdot 10 = 30$; онда је $3 \cdot 8 = 30 - 2 - 2 - 2 = 24$
Приказивање правоугаоне схеме и доминске репрезентације:
 и 
$2 \cdot 8 + 8 = 16 + 8 = 24$ или $3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24$ или $3 \cdot 8 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3$

4 · 8
Ако додамо још једну домину, колика ће бити вредност домина?

$2 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 16 + 16 = 32$ или $3 \cdot 8 = 24 \rightarrow 24 + 8 = 32$ или $4 \cdot 8 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3$
Приказивање декадне репрезентације:
Ако је $4 \cdot 10 = 40$; онда је $4 \cdot 8 = 40 - 4 - 4 = 32$

<u>Задаци за самостални рад ученика (1. и 2. час):</u>

1. Израчунај производ следећих бројева и нацртај одговарајући цртеж:
$3 \cdot 4$ $\quad 4 \cdot 4$ $\quad 4 \cdot 8$ $\quad 9 \cdot 4$

2. Изабери један пример из претходног задатка и осмисли текст задатка и нацртај одговарајући цртеж.

3. Пронађи број који је за 2 већи од броја 1, а затим пронађи број који је три пута већи од њега.

4. Јована има 4 украса које ће ставити на јелку. У сваки украс може да стане по једна сличица. Колико разлчитих комбинација може направити Јована ако има 4 различите сличице?

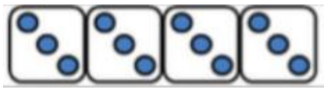
5. Осам аутомобила вози децу на такмичење. Колико деце учествује на такмичењу ако у сваки аутомобил може да стане три детета?

6. За један сат урадимо 4 задатка из математике и 3 задатка из српског језика. Колико задатака из сваког предмета ћемо урадити за 7 сати?

7. Миша је замислио број који је за 8 већи од броја 1. Ана је замислила број који је 4 пута већи од Мишиног броја, а Мила број који је три пута већи од Мишиног броја. Која девојчица је замислила већи број и за колико?

<u>Задаци за самостални рад ученика (3. час):</u>

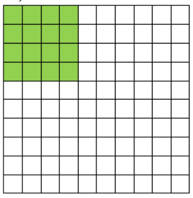
1. Напиши одговарајући производ и израчунај.

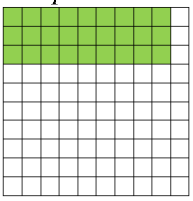


4	4	4	4	4	4

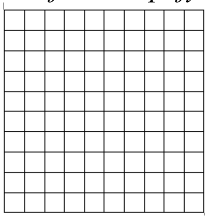
2. Производ бројева 2 и 3 увећај 3 пута.

3. а) Напиши одговарајући производ.

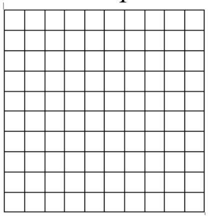




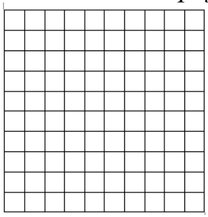
б) Обој одговарајући број поља, тако да он представља производ датих бројева.



4 · 8



3 · 3



7 · 3

4. Мила је купила 9 кесице бомбона. У свакој кесици је било 4 бомбоне. Колико бомбона је Мила купила?

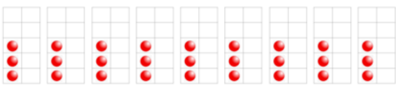
5. Ако имамо 3 гумице и 8 оловака, а у школу сваки дан носимо 1 гумицу и 1 оловку. Да ли можемо сваки дан у току месец дана носити различите комбинације гумица и оловака?
(У једном месецу имамо око 20 радних дана)

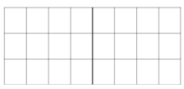
6. Нацртане тачкице распореди у редове и колоне тако да у сваком реду буде исти број тачкица и да у свакој колони буде исти број тачкица.
• • • • • • • • • • • • • • •

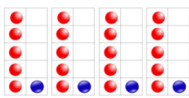
7. Дуња за 10 минута исплете траку дужине 2dm.
а) Колико минута јој је потребно да исплете такве 4 траке?
б) Колико ће бити дугачке све траке заједно?

<u>Пример задатка за систематизацију:</u>

Ученици су подељени у групе по 4. Свака група добија 4 цртежа на основу којих пишу производ и рачунају га.







Множење бројевима 6 и 7 и множење бројева 6 и 7 – 3 часа

Примери и задаци коришћени за стварање контекста за учење:

- Производи 5 · 7, 5 · 6, 10 · 7 и 10 · 6 поновљени су уз коришћење репрезентација са декадном основном.

Текстуални задаци коришћени за понављање наведених производа:

1. *Који број је пет пута већи од броја 6?*
2. *Ако нас неко пошаље да купимо 7 картона јаја, колико јаја ћемо купити?*
   Купили смо 7 картона јаја, али у сваком је било по 5 јаја. Колико јаја је било?

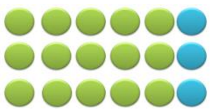
3. *Колико минута траје 6 школских одмора? Колико минута треба додати да бисмо имали 1 сат? Како то можемо записати у облику производа два броја?*

- Производи 3 · 7, 4 · 7, 3 · 6 и 4 · 6 су поновљени кроз текстуалне задатке:

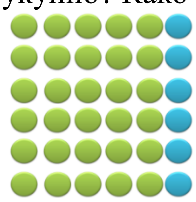
1. *Колико дана имају три седмице? А 4 семдице?*
2. *Јован је кликере распоредио у 4 реда. У сваки ред је ставио по 5 зелених и 1 плави кликер. Колико кликера има Јован? Један ред кликера је поклонио другу. Колико кликера је њему остало?*
3. За производ 3 · 6 коришћена је правоугаона схема.

Примери и задаци коришћени за обраду множења бројевима 6 и 7:

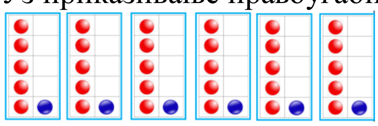
6 · 6



Колико Јован има сада кликера? Ако Јован купи још оволико кликера, колико ће имати укупно? Како бисмо доцртали кликере на цртежу?

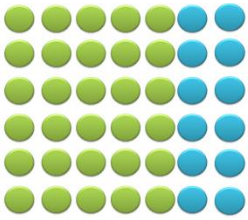


Који производ одговара овом броју кликера?
Уз приказивање правоугаоне схеме показујемо и репрезентацију са декадном основом.



На који начин можемо одредити укупан број Јованових кликера?
18 + 18 = 36, јер је 3 · 6 = 18;
6 · 5 + 6
2 · 6 + 2 · 6 + 2 · 6
4 · 6 + 2 · 6

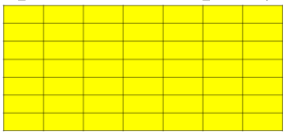
6 · 7
Замислите да је Јован добио још 6 плавих кликера.



$6 \cdot 6 + 6$
$6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$
$3 \cdot 6 + 4 \cdot 6$

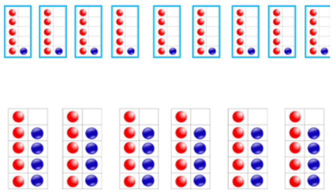
$21 + 21$, јер је $7 \cdot 3 = 21$
$7 \cdot 5 + 7$
$14 + 14 + 14$, јер је $7 \cdot 2 = 14$

7 · 7
Колико дана има 7 седмица?
Подсећање задатка са почетка часа: *Колико дана имају 3 и 4 седмице?*
$21 + 28 = 49$, јер $7 \cdot 4 = 28$ и $7 \cdot 3 = 21$
Приказивање правоугаоне схеме која одговара календару који приказују 7 седмица:



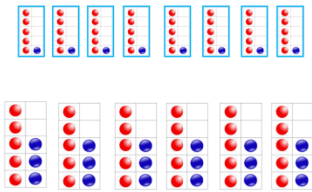
$7 \cdot 5 = 35$ и $7 \cdot 2 = 14 \rightarrow 35 + 14 = 49$
$7 \cdot 6 + 7 = 42 + 7 = 49$

6 · 9



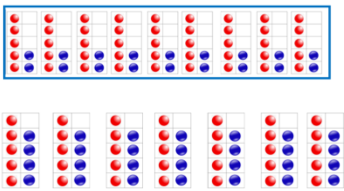
$6 \cdot 10 - 6 = 60 - 6 = 54$
$9 \cdot 5 + 9 = 45 + 9 = 54$
$3 \cdot 9 = 27 \rightarrow 27 + 27 = 54$

6 · 8



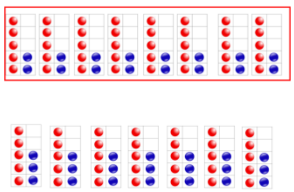
$6 \cdot 10 - 6 - 6 = 60 - 6 - 6 = 54 - 6 = 48$
$8 \cdot 5 + 8 = 40 + 8 = 48$
$3 \cdot 8 = 24 \rightarrow 24 + 24 = 48$
$4 \cdot 6 = 24 \rightarrow 24 + 24 = 48$

7 · 9



$7 \cdot 10 - 7 = 80 - 7 = 63$
$9 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 45 + 18 = 63$
$6 \cdot 9 + 9 = 54 + 9 = 63$

7 · 8



$7 \cdot 10 - 7 - 7 = 70 - 7 - 7 = 63 - 7 = 56$
$8 \cdot 5 + 8 + 8 = 40 + 8 + 8 = 48 + 8 = 56$
$7 \cdot 4 = 28 \rightarrow 28 + 28 = 56$

<u>Задаци за самостални рад ученика:</u>

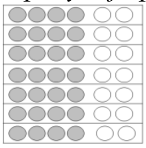
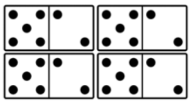
1. За следеће производе нацртај одговарајући цртеж и израчунај производ.
а) 3 · 7 б) 6 · 6 в) 3 · 6 г) 7 · 8

2. На једном паркиралишту је обележено 7 редова за паркирање. У сваки ред може се паркирати 9 аутомобила. Колико аутомобила може да буде највише на том паркиралишту?

3. Маја има 6 година. Њена бака је старија од ње 9 пута, а млађа од деке 9 година. Колико година имају Мајини бака и дека?

4. Маја и Јана су правиле колаче. Свака је на колаче стављала по 6 мрвица. Која девојчица је потрошила више мрвица, ако је Маја направила 9, а Јана 8 колача?

5. Израчунај производ на основу слике.

а)  *б)* 

6. Који број је 8 пута већи од броја 7, а за 4 мањи од највећег броја шесте десетице?

7. Из једне флаше сока се може попити 6 чаша сока. Мама је купила 6 таквих флаша, а попијено је 5 флаша.
а) Колико чаша сока се добије од 6 флаша?
б) Колико чаша сока је попијено?
в) Колико флаша сока је остало?
г) Колико чаша сока је остало?

8. Тата сваког дана до посла у једном правцу прелази 9 километара. Колико километара тата пређе за 3 дана од куће до посла?

9. Погледај мени једног ресторана. За доручак мама сваког дана узима једно пиће и једно јело. Колико различитих оброка мама може да има?

- Салата са туњевином
- Топли сендвич
- Омлет са шунком

- Чај
- Капућино
- Домаћа кафа
- Нес кафа
- Цеђена поморанџа
- Лимунада
- Млеко

10. Алекса је слагао слагалицу. Сложио је целу, али када се вратио из школе приметио је да је неко део слагалице обојио белом темпером.

а) Колико делова има Алексина слагалица?
б) Колико делова недостаје?

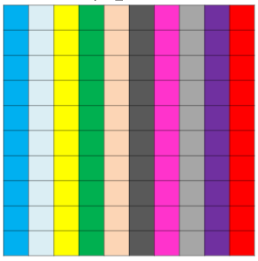
11. У један ред мама је ставила 3 чоколадна и 4 воћна колача. Колико има колача ако их је сложила у 6 редова?

Множење бројевима 8 и 9 и множење бројева 8 и 9 – 2 часа

Примери и задаци коришћени за обраду множења бројевима 8 и 9:

1. Колико поља има шаховска табла? А судоку?

2. Имам укупно 100 коцкица које су различитих боја. Ако имам 10 боја, колико имам коцкица сваке боје? Како могу распоредити коцкице у редове и колоне? ($10 \cdot 10$).



Замислисте да сада склонимо коцкице у једној боји. Колико ће коцкица остати? ($9 \cdot 10$)

$9 \cdot 9$

Ако склонимо још једну коцкицу од сваке боје, колико ће коцкица остати?

На који начин можемо одредити производ ова два броја:

$9 \cdot 10 - 9$

$5 \cdot 9 + 4 \cdot 9$

$8 \cdot 9$

Склања се још један ред коцкица (смањујемо сваку боју за 1 коцкицу):

$4 \cdot 9 = 36 \rightarrow 36 + 36 = 72$

$5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 40 + 32 = 72$

$9 \cdot 10 - 9 - 9 = 90 - 9 - 9 = 81 - 9 = 72$

$8 \cdot 10 - 8 = 80 - 8 = 72$

$8 \cdot 8$

Склањају се коцкице у истој боји (једна колона)

$4 \cdot 8 = 32 \rightarrow 32 + 32 = 64$

$5 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 40 + 24 = 64$

$2 \cdot 8 = 16 \rightarrow 4 \cdot 16 = 16 + 16 + 16 + 16 = 32 + 32 = 64$

$8 \cdot 10 - 2 \cdot 8 = 80 - 16 = 64$

$8 \cdot 9 - 8 = 72 - 8 = 64$

<u>Задаци за самостални рад:</u>

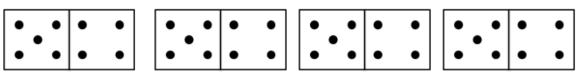
1. Јована је купила 8 кутија украса за јелку. У свакој кутији је било по 9 украса. Колико украса је купила Јована?

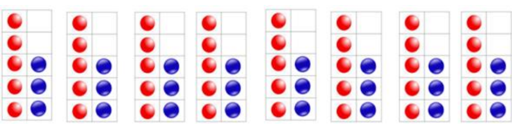
2. Највећи једноцифрени број увећај 3 пута.

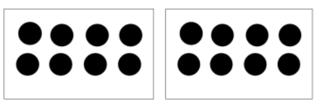
3. Нацртај слику и осмисли задатак који одговара производу бројева:

а) 4 и 8 *б) 8 и 9*

4. На основу слике запиши и израчунај производ.

а)


б)


в)


У примеру под в) подели сваки правоугаоник на два једнака дела, а затим у облику производа напиши израз који одговара таквој слици.

5. Нацртај у 6 редова по 8 кружића и одреди укупан број кружића. Један реда кружића обој црвеном, а остале кружиће плавом бојом. Одреди:
а) укупан број кружића
б) број плавих кружића
в) број црвених кружића

6. Маша се спрема за такмичење математике које траје 80 минута. Маша је израчунала да јој у просеку за сваки задатак треба 9 минута. Ако на такмичењу има 9 задатака, да ли ће Маша стићи да уради све задатке?

7. На један тањир мама је ставила 8 колача, а на други 14 колача више. На трећи три пута више колача него на први тањир. Колико је било колача на сва три тањира заједно?

8. Марко има дрвене фигурице у облику коцкица и пирамида. Од њих прави кућице тако што на сваку коцкицу стави једну пирамиду. Колико различитих кућица Марко може да направи ако има 7 коцкциа различитих боја и 9 пирамида различитих боја?

9. Један дечак има кутију следећег изгледа. Колико кликера он може ставити у кутију, ако у сваку преграду стави по 2 кликера?

Множење једноцифреним бројевима – задаци коришћени на часу утврђивања

Напомена: Задаци су коришћени у оба Модела

1. Израчунај:
$6 \cdot 6 + 6$ $9 \cdot 7 – 7 \cdot 3$ $5 \cdot 2 \cdot 9\ 2 + 8 \cdot 7$ $(2 + 8) \cdot 7$

2. Највећи једноцифрени број увећај 3 пута.

3. Радник у једном магацину ради по 8 сати радним данима и по 3 сата викендом. Колико сати недељно ради овај радник?

4. Деда је посадио у 6 редова по 7 стабала шљива. Међутим, срне су у сваком реду огулиле по једно стабло, које се касније осушило. Колико стабала шљива је остало?

5. Бака испоручује јабуке на пијацу тек када набере 5 гајбица јабука. Колико јабука је потребно да бака набере, ако у сваку гајбицу стаје по 3 пластичне посуде, а у сваку посуду стане по 3 јабуке?

6. Маша се спрема за такмичење математике које траје 80 минута. Маша је израчунала да јој у просеку за сваки задатак треба 9 минута. Ако на такмичењу има 9 задатака, да ли ће Маша стићи да уради све задатке?

7. На један тањир мама је ставила 8 колача, а на други 14 колача више. На трећи три пута више колача него на први тањир. Колико је било колача на сва три тањира заједно?

Математичке игре коришћене на часовима:

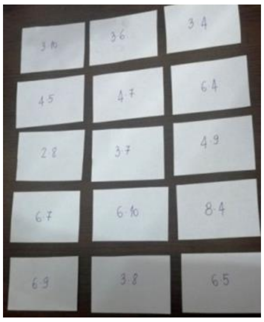
Матматичка слагалица

Циљ игре: Усвајање и утврђивање множења једноцифрених бројева (*Модел 1: множење бројевима 2, 5, 10, 3, 4 и 6 Модел 2: множење једноцифрених бројева*) уз акценат на развој менталних стратегија множења уз употребу различитих репрезентација које подстичу ученике на развој стратегија множења у циљу ефикаснијег рачунања. Током играња игре ученике треба подстицати да користе различите менталне стратегије множења.

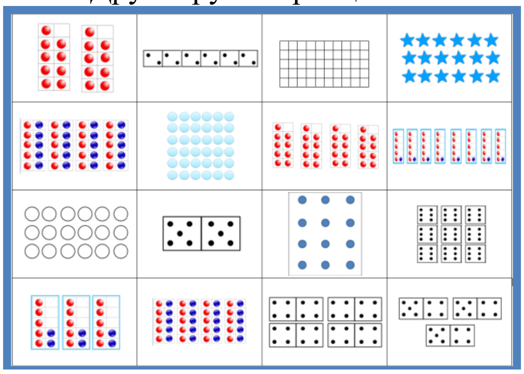
Опис игре: Игра се састоји из четири групе картица које омогућавају проналажење одговарајућег дела пузле и састављање новогодишње пузле.

Први ниво:

Прва група картица



Друга група картица



Пример картица из Модела 1

Ученици извлаче картицу из прве групе на којој је написан производ два броја. Проналазе њен пар у оквиру картица из друге групе (сваком производу из прве групе одговара цртеж из друге групе картица). Њихов задатак је да на папиру или усмено одреде производ два броја користећи менталне стратегије множења. У почетку је дозвољено коришћење папира, али се тежи што мањој употреби у циљу развоја менталних стратегија множења, које омогућавају флексибилно рачунање.

Други ниво:

Када ученици успешно одреде производ окрећу картицу из друге групе, на чијој полеђини је написан текстуални задатак, који је потребно да реше како би прешли на трећи ниво игре. На слици су дати примери задатака коришћених у игри.

Друга страна картица из друге групе:

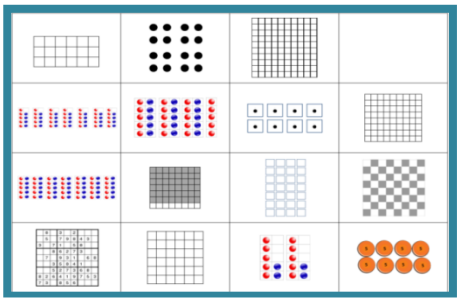
Колико различитих комбинација оброка можемо направити помоћу јела на слици?	Једна девојчица прави стрип. Папир је поделила на 3 реда. Сваки ред је поделила на још 6 делова. Колико делова ће имати њен стрип?	Колико фигурица, без коцкице, нам је потребно за игру Човече не љути се, ако играју сви играчи?	Колико кошта чоколадица ако смо је платили са 8 кованица од 5 динара?
Колико бојица има у 9 кутија, ако у свакој кутији има по 7 бојица?	Мајина мама је старија 5 пута од Маје. Колико година има Мајина мама, ако Маја има 7 година?	Колико плочица је потребно за поплочавање пода на слици?	У једном паковању се продаје 8 тацни различитих боја и 9 шоља различитих боја. На колико начина можемо сервирати шоље и тацне?
Израчунај цену оловки на слици, ако знаш да једна оловка кошта 10 динара? ?	Један керамичар је лепио плочице у кухињи. На један зид је залепио у 6 редова по 8 плочица, а на други зид у 7 редова по 8 плочица. На који зид је залепио више плочица и за колико?	Колико апликација можемо истовремено видети на телефону, ако су оне распоређене у 7 редова и 4 колоне?	Колико поља има шаховска табла?
Колико поља има судоку, ако у се сваки ред и сваку колону уписују бројеви од 1 до 9?	Јована жели да направи таблу за своју игру тако да колоне обележава са првих шест слова азбуке, а редове са првих шест бројева. Колико поља ће имати Јованина табла за игру?	Колико дана трају две седмице?	Који број има 10 десетице?

Примери задатака на картицама (Модел 2)

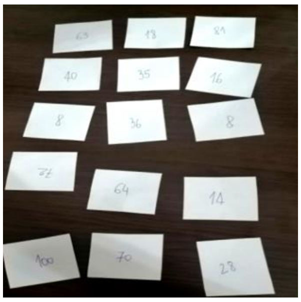
Трећи ниво: Трећа гурпа картица:

$30-3$	$3\cdot4\cdot2$	$4\cdot7$	$6\cdot7$
$2\cdot7$	$5\cdot(6-3)=$ $5\cdot3$	$3+3$	$3\cdot5+1\cdot5$
$4\cdot5-4$	$5\cdot10-5$	$3\cdot9=3\cdot10\cdot3$	
$5\cdot2+5$	$4\cdot5+4$	$6\cdot5+5$	$3\cdot2+3$

Модел 1



Модел 2

Четврта група картица: 

Модел 1: Ученици траже у трећој групи картица израз који показује начин на који можемо израчунати производ који одговара решењу задатка.

Модел 2: Ученици траже у трећој групи картица цртеж који одговара задатку (на пример: *у 3 реду на 4 месту се налази цртеж који одговара следећем задатку: Колико поља има шаховска табла?*).

Истовремено узимају наведену картицу из треће групе и картицу из четврте групе на којој је приказан коначан резултат који одговара задатку који тренутно решавају.

Трећа група картица (друга страна картица):

Четврта група картица (друга страна картица):

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

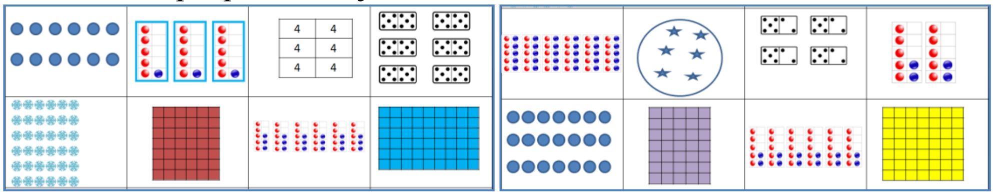
На полеђини картица на којима је приказан могућ начин рачунања који одговара задатку (3. група картица) налази се скривени број, који показује на ком месту у пузли се налази слика, односно део пузле, који је приказан на полеђини картица на којима се налази коначан резултат (4. група картица). Ученици стављају на талон део пузле (делови пузле су приказани на слици испод текста) на одговарајуће место, у зависности од броја скривеног у трећој групи картица.

<u>Математичка меморија</u>

Циљ игре: Утврђивање множења једноцифрених бројева уз акценат на развој менталних стратегија множења стратегија множења и усмено одређивање производа два једноцифрена броја.

Опис игре: Игра се састоји из три групе картица:

1. Иконичка репрезентација



2. Израз (производ два броја)
3. Резултат

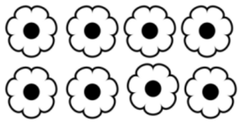
Игра се може играти на два начина:
1. Ученици добијају једну врсту картица. Учитељ подиже картицу на којој је написан израз, а ученици који имају резултат и иконичку репрезентацију која одговара датом изразу подижу картицу.
2. Игра меморије: Ученици на почетку игре поделе картице са изразима (производом два броја) и потребно је да пронађу парове (иконичка репрезентација и резултат) који одговарају производу који имају.

За аритметичка правила (множење збира бројем и множење разлике бројем) играна је игра на исти начин, али су картице са иконичким репрезентацијама и изразима прилагођене овим аритметичким правилима.

Прилог 2: Тестови знања

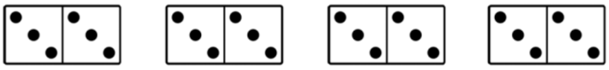
Иницијални тест

1. Доцртај одговарајући број цветова тако да дата слика приказује израз 5 · 4.



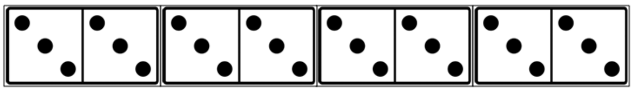
2. Напиши одговарајући израз и одреди колика је укупна вредност приказана на слици.

а)

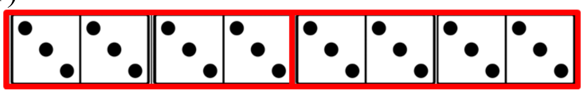


б)

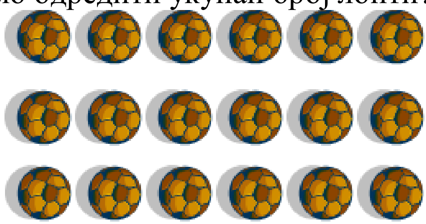
в)



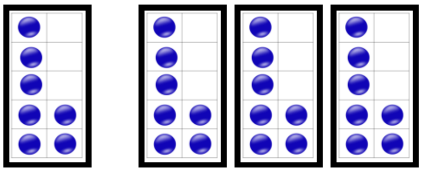
г)



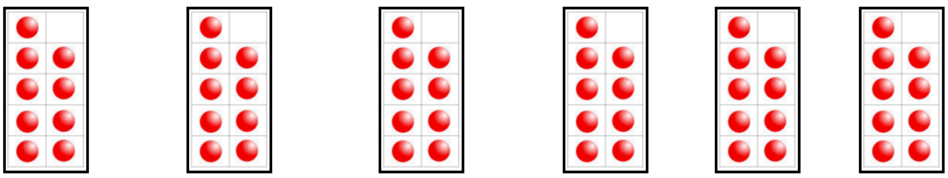
3. На које све начине можемо одредити укупан број лопти?



4. а) Израчунај укупан број плавих кругова. Напиши одговарајући израз.



б) Израчунај укупан број црвених кругова. Напиши одговарајући израз.



5. У три кутије се налази по 4 оловке. Колико има укупно оловака?

6. Седам аутомбола вози децу такмичење. У сваки аутомобил стане по троје деце. Колико деце иде на такмичење?

7. Јана је купила 3 бојице. Једну бојицу је платила 9 динара. Колико динара је Јана потрошила?

8. Кувару је потребно 5 минута да направи један колач. Колико минута ће кувар правити 8 колача?

9. Лука има 2 пута више кликера од Елене. Елена има 8 кликера. Колико Кликера има Лука?

10. Маја и Ана имају 9 јабука. Њихова браћа имају три пута више јабука од њих? Колико јабука имају браћа?

11. Павле је своје аутиће распоредио у 4 реда. У сваки ред је ставио по 8 аутића. Нацртај распоред Павловић аутића и израчунај колико аутића има укупно.

12. Бака Милица је посадила купус у 3 реда. У сваки ред је ставила по 9 главица купуса. Нацртај бакину башту и израчунај колико главица купуса има бака Милица.

13. Мила има 3 сукње и 3 мајице. Колико различитих комбинација Мила може да обуче користећи сукње и мајице које има?

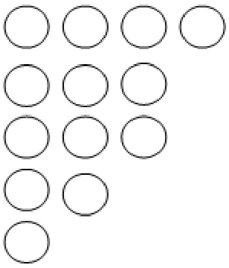
14. Јана има 4 различита колача и 3 различите тацне. На колико различитих начина она може сервирати колаче, ако на једну тацну ставља један колач?

Иницијални интервју и Завршни интервју 1 – примери за интервју

$6 \cdot 2$	$9 \cdot 8$
$7 \cdot 5$	$4 \cdot 6$
$3 \cdot 10$	$8 \cdot 3$
$4 \cdot 9$	$6 \cdot 4$
$8 \cdot 7$	

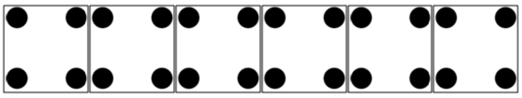
Завршни тест 1

1. Доцртај одговарајући број кругова тако да дата слика приказује израз $7 \cdot 8$.

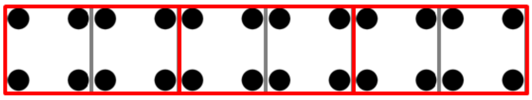


2. Напиши одговарајући израз и одреди колика је укупна вредност приказана на слици.

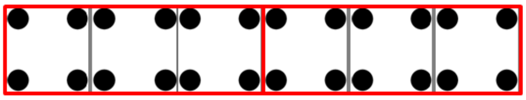
а)



б)

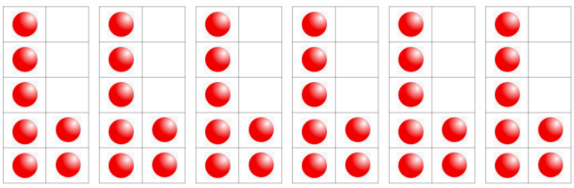


в)

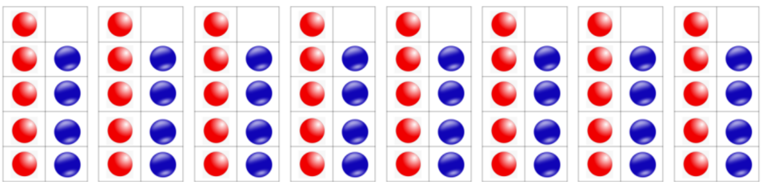


3. На које све начине можемо одредити укупан број кликера.

4. а) Напиши на које све начине можемо одредити укупан број кругова и израчунај.



б) Напиши на које све начине можемо одредити укупан број кругова и израчунај.



5. На 4 полице се налази по 6 књига. Колико укупно књига има на све три полице?

6. Седам кутија је потребно за паковање чаша. У сваку кутију стане по 8 чаша. Колико чаша је спаковано у кутије?

7. Ана је купила 6 лизалица. Једну лизалицу је платила 7 динара. Колико динара је платила лизалице?

8. Перачу прозора потребно је 5 минута да опере један прозор. Колико времена му је потребно да би опрао 6 прозора?

9. Марко је сакупио 3 сличице, а његов брат 6 пута више сличица. Колико сличица је сакупио Марков брат?

10. Оловка кошта 9 динара, а свеска је 7 пута скупља. Колико кошта свеска?

11. Деда је засадио 9 редова крушака. У сваком реду је засадио по 4 крушке. Нацртај дедин воћњак и израчунај колико је крушака деда посадио.

12. Миша је све своје кликере поређао у 6 редова. У сваки ред је ставио по 8 кликера. Нацртај и израчунај колико кликера има Миша.

13. Никола у свом ормару има 4 тренерке и 3 мајице. Колико различитих одевних комбинација може направити Никола користећи мајице и тренерке из ормара?

14. Милица има 4 торте и 4 тацне за сервирање торти. На колико различитих начина Милица може сервирати торте, ако на једну тацну ставља једну торту?

15. У једном реду је посађено 5 стабала бреза и 1 стабло липе. Колико укупно има стабала дрвећа у 7 редова?

16. Лизалица кошта 10 динара, а жвака је за 1 динар јефтинија. Колико новца нам је потребно да бисмо купили 9 жвака?

17. У 2 кутије је стављено по 9 пакетића чоколадица. У сваком пакетићу се налази по 5 чоколадица. Колико има укупно чоколадица?

Завршни интервју 1

(додатни примери)

$5 \cdot 7 \cdot 2$

$6 \cdot (7-2)$

$(7+3) \cdot 8$

Завршни тест 2

1. У једној кесици има 25 сличица. Колико сличица има у 4 кесице?

2. Једна канта воде се пуни 6 минута. Колико времена је потребно да би се напунило 13 канти воде?

3. Јана је сакупила 18 сличица, а њен брат 4 пута више. Колико сличица је сакупио Јанин брат?

4. Милица и Петра су плочице у кухињи поставиле у 8 редова. У сваки ред су ставиле по 16 плочица. Колико плочица су укупно залепиле?

5. На рекреативну наставу Јоца је понео 3 пара патика и 11 тренерки. Сваког дана Јоца носи једну тренерку и један пар патика. Колико различитих одевних комбинација може носити Јоца?

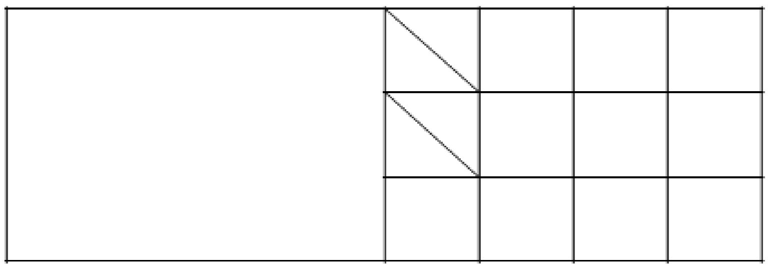
6. На које све начине можемо представити број 72 као производ два или више бројева.

7. Три лептира дневно потроше 13 капи нектара. Колико капи нектара потроши 9 лептира?

8. На свака три дечака у одељењу има 4 девојчице. Ако укупно има 35 ученика у одељењу, одреди колико има дечака, а колико девојчица у одељењу?

9. У две вреће стане 18 кромпира. Колико врећа је потребно да би се спаковало 72 кромпира?

10. На слици је приказан правоугаоник. Половина правоугаоника је поплочана квадратима. Израчунај колико је троуглова потребно за поплочавање целог правоугаоника на основу слике.



Завршни интервју 2

$15 \cdot 4$

$13 \cdot 9$

$8 \cdot 14$

$6 \cdot 12$

$5 \cdot 25$

Прилог 3: Табеле

Табела 14. *Стратегије коришћене за решавање задатака на Иницијалном тесту код ученика који су правили грешке у рачуну*

Семантичка структура	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
Иконичке репрезентације	6 (15.38%)	0 (0.0%)	33 (84.62%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	39
Једнакобројни скупови	0 (0.0%)	0 (0.0%)	13 (100%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	13
Производ мера	0 (0.0%)	2 (11.76%)	14 (82.35%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (5.88%)	17
Мултипликативно поређење	0 (0.0%)	1 (5.26%)	18 (94.74%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	19
Правоугаона схема	1 (4.35%)	0 (0.0%)	22 (95.65%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	23
Декартов производ	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3 (100%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	3
УКУПНО	7 (6.14%)	3 (2.63%)	103 (90.35%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (0.88%)	114

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Табела 16. *Друге стратегије коришћене за решавање задатака на Инцијалном интервјуу, на целом узорку ученика*

Примери	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**У**
6 · 2						1 (100%)			1
7 · 5		11 (61.1%)	4 (22.2%)				3 (16.7%)		18
3 · 10		2 (13.3%)	11 (73.3%)			1 (6.7%)	1 (6.7%)		15
4 · 9			13 (61.9%)	5 (23.8%)	1 (4.8%)		2 (9.5%)		21
8 · 7		1 (7.7%)	7 (53.8%)	1 (7.7%)	2 (15.4%)		2 (15.4%)		13
9 · 8		1 (5.0%)	11 (55.0%)	4 (20.0%)	1 (5.0%)		3 (15.0%)		20
8 · 3			18 (75.0%)	1 (4.2%)	1 (4.2%)	1 (4.2%)	3 (12.5%)		24
4 · 6		1 (4.2%)	16 (66.7%)	5 (20.8%)			2 (8.3%)		24
6 · 4			19 (73.1%)	4 (15.4%)	2 (7.7%)		1 (3.8%)		26
Укупно	0 (0.0%)	16 (9.9%)	99 (61.1%)	20 (12.3%)	7 (4.3%)	3 (1.9%)	17 (10.5%)	0 (0.0%)	162

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Табела 17. *Коришћење замене места чинилаца у решавању примера на Инцијалном интервјуу, на целом узорку ученика*

	Користи ЗМЧ	**Не користи ЗМЧ**
$6 \cdot 2$	32 (36.0%)	57 (64.0%)
$7 \cdot 5$	3 (3.4%)	86 (96.6%)
$3 \cdot 10$	2 (2.2%)	87 (97.8%)
$4 \cdot 9$	1 (1.1%)	88 (98.9%)
$8 \cdot 7$	15 (16.9%)	74 (83.1%)
$9 \cdot 8$	12 (13.5%)	77 (86.5%)
$8 \cdot 3$	40 (44.9%)	49 (55.1%)
$4 \cdot 6$	4 (4.5%)	85 (95.5%)
$6 \cdot 4$	61 (68.5%)	28 (31.5%)
Укупно	170 (21.2%)	631 (78.8%)

Напомена.
ЗМЧ – замена места чинилаца

Табела 21. *Поређење успешности између задатака различите семантичке структуре за контролну групу*

Семантичка структура задатка		**Иницијални тест**			**Завршни тест 1**			**Завршни тест 2**		
C1	*C2*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*
Једнакобројни скупови	Производ мера	.183	.077	.197	-.033	.070	1.000	.233	.079	**.041**
Једнакобројни скупови	Мултипликативно поређење	.267	.076	**<u>.007</u>**	-.067	.049	1.000	.067	.071	1.000
Једнакобројни скупови	Правоугаона схема	.283	.083	**<u>.009</u>**	.067	.053	1.000	.367	.086	**<u>.001</u>**
Једнакобројни скупови	Декартов производ	.350	.095	**<u>.004</u>**	.283	.071	**<u>.001</u>**	.067	.096	1.000
Производ мера	Мултипликативно поређење	.083	.075	1.000	-.033	.059	1.000	-.167	.087	.583
Производ мера	Правоугаона схема	.100	.082	1.000	.100	.068	1.000	.133	.084	1.000
Производ мера	Декартов производ	.167	.103	1.000	.317	.066	**<u>.000</u>**	-.167	.106	1.000
Мултипликативно поређење	Правоугаона схема	.017	.086	1.000	.133	.051	.111	.300	.083	**<u>.005</u>**
Мултипликативно поређење	Декартов производ	.083	.102	1.000	.350	.070	**<u>.000</u>**	.000	.107	1.000
Правоугаона схема	Декартов производ	.067	.092	1.000	.217	.076	.055	-.300	.098	**.030**

Напомена.
C1 и C2 = семантичке групе задатака које се пореде;
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група;
SE (Standard Error) – стандардна грешка;
p – статистичка значајност;
***p*< .05;**
<u>p< .01</u>

Табела 22. *Поређење успешности између задатака различите семантичке структуре за експерименталну групу 1*

Семантичка структура задатка		**Иницијални тест**			**Завршни тест 1**			**Завршни тест 2**		
C1	*C2*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*
Једнакобројни скупови	Производ мера	.065	.076	1.000	.032	.069	1.000	.097	.078	1.000
Једнакобројни скупови	Мултипликативно поређење	.145	.075	.557	-.048	.048	1.000	.161	.070	.234
Једнакобројни скупови	Правоугаона схема	.129	.081	1.000	-.097	.052	.670	.000	.085	1.000
Једнакобројни скупови	Декартов производ	.661	.093	<u>**.000**</u>	.129	.069	.663	.258	.094	.075
Производ мера	Мултипликативно поређење	.081	.073	1.000	-.081	.058	1.000	.065	.085	1.000
Производ мера	Правоугаона схема	.065	.081	1.000	-.129	.067	.563	-.097	.083	1.000
Производ мера	Декартов производ	.597	.101	<u>**.000**</u>	.097	.065	1.000	.161	.104	1.000
Мултипликативно поређење	Правоугаона схема	-.016	.085	1.000	-.048	.051	1.000	-.161	.082	.524
Мултипликативно поређење	Декартов производ	.516	.100	<u>**.000**</u>	.177	.069	.113	.097	.106	1.000
Правоугаона схема	Декартов производ	.532	.091	<u>**.000**</u>	.226	.075	**.034**	.258	.097	.091

Напомена.
C1 и C2 = семантичке групе задатака које се пореде;
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група;
SE (Standard Error) – стандардна грешка;
p – статистичка значајност;
***p*< .05;**
<u>***p*< .01**</u>

Табела 23. *Поређење успешности између задатака различите семантичке структуре за експерименталну групу 2*

Семантичка структура задатка		**Иницијални тест**			**Завршни тест 1**			**Завршни тест 2**		
С1	*С2*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*	*MD*	*SE*	*p*
Једнакобројни скупови	Производ мера	.018	.080	1.000	-.054	.072	1.000	.179	.082	.321
Једнакобројни скупови	Мултипликативно поређење	.036	.079	1.000	-.054	.051	1.000	.036	.074	1.000
Једнакобројни скупови	Правоугаона схема	.268	.085	**.023**	-.107	.055	.542	.179	.089	.480
Једнакобројни скупови	Декартов производ	.357	.098	**<u>.005</u>**	.000	.073	1.000	.071	.099	1.000
Производ мера	Мултипликативно поређење	.018	.077	1.000	.000	.061	1.000	-.143	.090	1.000
Производ мера	Правоугаона схема	.250	.085	**.041**	-.054	.070	1.000	.000	.087	1.000
Производ мера	Декартов производ	.339	.107	**.020**	.054	.068	1.000	-.107	.110	1.000
Мултипликативно поређење	Правоугаона схема	.232	.089	.110	-.054	.053	1.000	.143	.086	1.000
Мултипликативно поређење	Декартов производ	.321	.106	**.031**	.054	.072	1.000	.036	.111	1.000
Правоугаона схема	Декартов производ	.089	.095	1.000	.107	.079	1.000	-.107	.102	1.000

Напомена.
С1 и С2 = семантичке групе задатака које се пореде;
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група;
SE (Standard Error) – стандардна грешка;
p – статистичка значајност;
***p*< .05;**
<u>***p*< .01**</u>

Табела 31. *Анализе варијансе за поновљена мерења на задацима на Инцијалном тестирању и завршном тестирању 1, за контролну групу ученика (n = 30)*

Број задатка	**Структура задатка**	**ИТ**	**ЗТ1**	**Поновљена анализа варијансе**
		ЗАДАЦИ СА ИКОНИЧКИМ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈАМА		
1	Правоугаона схема	.43	.20	**$F(1, 29) = 4.167, p = .050$**
3		.77	.73	$F(1, 29) = .088, p = .769$
2а	Домине	.60	.50	$F(1, 29) = .521, p = .476$
2б		.57	.33	$F(1, 29) = 3.544, p = .070$
2в		.60	.27	**$F(1, 29) = 5.800, p = .023$**
4а	Декадне репрезентације	.70	.60	$F(1, 29) = .813, p = .375$
4б		.60	.63	$F(1, 29) = .088, p = .769$
		ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЦИ		
5	Једнакобројни скупови	.90	.83	$F(1, 29) = .492, p = .489$
6		.80	.77	$F(1, 29) = .139, p = .712$
7	Производ мера	.67	.83	$F(1, 29) = 2.959, p = .096$
8		.63	.90	**$F(1, 29) = 7.864, p = .009$**
9	Мултипликативно поређење	.70	.93	**$F(1, 29) = 6.430, p = .017$**
10		.47	.80	$F(1, 29) = 14.500$, **$p = .001$**
11	Правоугаона схема	.60	.80	$F(1, 29) = 3.222, p = .083$
12		.53	.67	$F(1, 29) = 1.634, p = .211$
13	Декартов производ	.57	.57	$F(1, 29) = .000, p = 1.000$
14		.43	.47	$F(1, 29) = .088, p = .769$

Напомена.
ИТ – аритметичка средине групе на Инцијалном тестирању, на датом задатку
ЗТ1 – аритметичка средина групе на Завршном тестирању 1, на датом задатку
$p < .05$, $p < .01$

Табела 32. *Анализе варијансе за поновљена мерења на задацима на Инцијалном тестирању и Завршном тестирању 1, за експерименталну групу 1 (n = 31)*

Број задатка	Структура задатка	ИТ	ЗТ1	Поновљена анализа варијансе
		ЗАДАЦИ СА ИКОНИЧКИМ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈАМА		
1	Правоугаона схема	.61	.71	$F(1, 30) = .685$, $p = .414$
3		.77	.94	$F(1, 30) = 3.906$, $p = .057$
2а	Домине	.81	.90	$F(1, 30) = 1.298$, $p = .264$
2б		.74	.71	$F(1, 30) = .108$, $p = .745$
2в		.74	.74	$F(1, 30) = .000$, $p = 1.000$
4а	Декадне репрезентације	.87	.94	$F(1, 30) = 1.000$, $p = .325$
4б		.71	.81	$F(1, 30) = 1.000$, $p = .325$
		ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЦИ		
5	Једнакобројни скупови	.90	.87	$F(1, 30) = .195$, $p = .662$
6		.84	.81	$F(1, 30) = .108$, $p = .745$
7	Производ мера	.81	.81	$F(1, 30) = .000$, $p = 1.000$
8		.87	.97	$F(1, 30) = 1.849$, $p = .184$
9	Мултипликативно поређење	.71	.97	**$F(1, 30) = 7.805$, $p = .009$**
10		.74	.81	$F(1, 30) = .491$, $p = .489$
11	Правоугаона схема	.74	.97	**$F(1, 30) = 8.750$, $p = .006$**
12		.74	.90	$F(1, 30) = 3.906$, $p = .057$
13	Декартов производ	.23	.74	**$F(1, 30) = 32.000$, $p = .000$**
14		.19	.68	**$F(1, 30) = 22.351$, $p = .000$**

Напомена.
ИТ – аритметичка средине групе на иницијалном тестирању, на датом задатку
ЗТ1 – аритметичка средина групе на Завршном тестирању 1, на датом задатку
$p < .05$, $p < .01$

Табела 33. *Анализе варијансе за поновљена мерења на задацима на иницијалном тестирању и Завршном тестирању 1, за експерименталну групу 2 (n = 28)*

Број задатка	**Структура задатка**	**ИТ**	**ЗТ1**	**Поновљена анализа варијансе**
		ЗАДАЦИ СА ИКОНИЧКИМ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈАМА		
1	Правоугаона схема	.64	.74	$F(1, 27) = 1.855, p = .184$
3		.71	.96	$\mathbf{F(1, 27) = 6.517, p = .017}$
2а	Домине	.57	1.00	$\mathbf{F(1, 27) = 20.250, p = \underline{.000}}$
2б		.54	.89	$\mathbf{F(1, 27) = 11.441, p = .002}$
2в		.79	.89	$F(1, 27) = 1.855, p = .184$
4а	Декадне репрезентације	.89	.93	$F(1, 27) = .194, p = .663$
4б		.68	.86	$F(1, 27) = 2.974, p = .096$
		ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЦИ		
5	Једнакобројни скупови	.89	.82	$F(1, 27) = .491, p = .490$
6		.79	.93	$F(1, 27) = 2.842, p = .103$
7	Производ мера	.82	.93	$F(1, 27) = 1.855, p = .184$
8		.68	1.00	$\mathbf{F(1, 27) = 12.789, p = .001}$
9	Мултипликативно поређење	.86	1.00	$\mathbf{F(1, 27) = 4.500, p = .043}$
10		.75	.86	$F(1, 27) = 1.299, p = .264$
11	Правоугаона схема	.61	.96	$\mathbf{F(1, 27) = 11.441, p = .002}$
12		.54	1.00	$\mathbf{F(1, 27) = 23.400, p = \underline{.000}}$
13	Декартов производ	.50	.93	$\mathbf{F(1, 27) = 15.677, p = \underline{.000}}$
14		.46	.82	$\mathbf{F(1, 27) = 9.247, p = .005}$

Напомена.
ИТ – аритметичка средине групе на иницијалном тестирању, на датом задатку
ЗТ1 – аритметичка средина групе на Завршном тестирању 1, на датом задатку
$\mathbf{p < .05}$, $\mathbf{\underline{p < .01}}$

Табела 39. *Успешност ученика на задацима различите семантичке структуре на Иницијалном тесту и Завршном тесту 1*

Семантичка структура	**Контролна група**		**Експериментална група 1**		**Експериментална група 2**	
	ИТ	**ЗТ1**	**ИТ**	**ЗТ1**	**ИТ**	**ЗТ1**
Једнакобројни скупови	85%	80%	87.1%	83.87%	83.93%	91.07%
Производ мера	65%	86.67%	83.87%	88.71%	75%	96.43%
Мултипликативно поређење	58.33%	86.67%	72.58%	88.71%	80.36%	92.86%
Правоугаона схема	56.67%	73.33%	74.19%	93.54%	57.14%	98.21%
Декартов производ	50%	51.67%	20.97%	70.97%)	48.21%	87.5%

Табела 43. *Поређење успешности између група ученика на задацима са једнакобројним скуповима, кроз различита тестирања*

Тест	**Група која се пореди (Г1)**	**Група која се пореди (Г2)**	***MD***	***SE***	***p***
Иницијални тест	Контролна група	Експериментална група 1	-.021	.076	1.000
	Контролна група	Експериментална група 2	.011	.078	1.000
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	.032	.077	1.000
Завршни тест 1	Контролна група	Експериментална група 1	-.039	.069	1.000
	Контролна група	Експериментална група 2	-.075	.071	.884
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.036	.071	1.000

Напомена.
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p* < .05**; ***p* < .01**)

Табела 44. *Поређење успешности између група ученика на задацима са производом мера, кроз различита тестирања*

Тест	**Група која се пореди (Г1)**	**Група која се пореди (Г2)**	***MD***	***SE***	***p***
Иницијални тест	Контролна група	Експериментална група 1	-.140	.109	.611
	Контролна група	Експериментална група 2	-.155	.112	.511
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.015	.111	1.000
Завршни тест 1	Контролна група	Експериментална група 1	.027	.091	1.000
	Контролна група	Експериментална група 2	-.095	.093	.932
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.122	.093	.573

Напомена.
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p* < .05**; ***p* < .01**)

Табела 45. *Поређење успешности између група ученика на задацима са мултипликативним поређењем, кроз различита тестирања*

Тест	**Група која се пореди (Г1)**	**Група која се пореди (Г2)**	***MD***	***SE***	***p***
Иницијални тест	Контролна група	Експериментална група 1	-.142	.104	.521
	Контролна група	Експериментална група 2	-.220	.107	.125
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.078	.106	1.000
Завршни тест 1	Контролна група	Експериментална група 1	-.020	.056	1.000
	Контролна група	Експериментална група 2	-.062	.058	.865
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.041	.057	1.000

Напомена.
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p* < .05**; ***p* < .01**)

Табела 46. *Поређење успешности између група ученика на задацима са правоугаоном схемом, кроз различита тестирања*

Тест	Група која се пореди (Г1)	Група која се пореди (Г2)	*MD*	*SE*	*p*
Иницијални тест	Контролна група	Експериментална група 1	-.175	.109	.337
	Контролна група	Експериментална група 2	-.005	.112	1.000
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	.171	.111	.387
Завршни тест 1	Контролна група	Експериментална група 1	-.202	.058	**.003**
	Контролна група	Експериментална група 2	-.249	.060	**.000**
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.047	.059	1.000

Напомена.
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p* < .05**; ***p* < .01)**

Табела 47. *Поређење успешности између група ученика на задацима са Декартовим производом, кроз различита тестирања*

Тест	Група која се пореди (Г1)	Група која се пореди (Г2)	*MD*	*SE*	*p*
Иницијални тест	Контролна група	Експериментална група 1	.290	.114	**.039**
	Контролна група	Експериментална група 2	.018	.117	1.000
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.272	.116	.065
Завршни тест 1	Контролна група	Експериментална група 1	-.193	.097	.152
	Контролна група	Експериментална група 2	-.358	.100	**.002**
	Експериментална група 1	Експериментална група 2	-.165	.099	.297

Напомена.
MD (Mean Difference) – просечна разлика између аритметичких средина група
SE (Standard Error) – стандардна грешка
p – статистичка значајност (***p* < .05**; ***p* < .01)**

Табела 55. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у експерименталној групи 1 на Завршном тесту 1*

Семантичка структура		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	4 · 6	/	/	2 (7.4%)	12 (44.4%)	6 (22.2%)	4 (14.8%)	3 (11.1%)	/
	7 · 8	/	/	3 (12.0%)	/	/	3 (12.0%)	19 (76.0%)	/
Производ мера	6 · 7	/	1 (4.0%)	2 (8.0%)	3 (12.0%)	1 (4.0%)	3 (12.0%)	15 (60.0%)	/
	6 · 5	/	14 (46.7%)	2 (6.7%)	1 (3.3%)	1 (3.3%)	10 (33.3%)	2 (6.7%)	/
Мултипликативно поређење	3 · 6	/	/	9 (30.0%)	2 (6.7%)	1 (3.3%)	6 (20.0%)	12 (40.0%)	/
	9 · 7	/	/	1 (4.0%)	2 (8.0%)	/	1 (4.0%)	21 (84.0%)	/
Правоугаона схема	9 · 4	1 (3.3%)	/	2 (6.7%)	12 (40.0%)	5 (16.7%)	2 (6.7%)	8 (26.7%)	/
	6 · 8	1 (3.6%)	/	4 (14.3%)	4 (14.3%)	3 (10.7%)	3 (10.7%)	13 (46.4%)	/
Декартов производ	4 · 3	/	/	6 (26.1%)	1 (4.3%)	1 (4.3%)	6 (26.1%)	9 (39.1%)	/
	4 · 4	/	/	1 (4.8%)	8 (38.1%)	7 (33.3%)	4 (19.0%)	1 (4.8%)	/

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Табела 57. *Стратегије коришћене за решавање задатака са различитом семантичком структуром у експерименталној групи 2 на Завршном тесту 1*

Семантичка структура		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	4 · 6	/	/	/	15 (65.2%)	6 (26.1%)	1 (4.3%)	1 (4.3%)	/
	7 · 8	/	/	/	2 (7.7%)	/	4 (15.4%)	20 (76.9%)	/
Производ мера	6 · 7	/	/	/	5 (19.2%)	/	4 (15.4%)	17 (65.4%)	/
	6 · 5	/	18 (64.3%)	/	/	/	5 (17.9%)	4 (14.3%)	1 (3.6%)
Мултипликативно поређење	3 · 6	/	/	11 (39.3%)	1 (3.6%)	/	8 (28.6%)	8 (28.6%)	/
	9 · 7	/	/	/	/	/	2 (8.3%)	22 (91.7%)	/
Правоугаона схема	9 · 4	1 (3.7%)	/	/	12 (44.4%)	5 (18.5%)	2 (7.4%)	7 (25.9%)	/
	6 · 8	1 (3.6%)	/	2 (7.1%)	6 (21.4%)	/	3 (10.7%)	16 (57.1%)	/
Декартов производ	4 · 3	/	/	9 (34.6%)	1 (3.8%)	1 (3.8%)	11 (42.3%)	4 (15.4%)	/
	4 · 4	/	/	/	5 (21.7%)	10 (43.5%)	7 (30.4%)	/	1 (4.3%)

Напомена:
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Табела 59. *Број коришћених стратегија и замене места чинилаца на Завршном интервјуу 1*

Примери	Број стратегија		Замена места чинилаца	
	1	2	ДА	НЕ
6 · 2	95.5%	4.5%	**69.7%**	30.3%
7 · 5	73.0%	27.0%	1.1%	98.9%
3 · 10	97.8%	2.2%	1.1%	98.9%
4 · 9	65.2%	**34.8%**	1.1%	98.9%
8 · 7	64.0%	**36.0%**	12.4%	87.6%
9 · 8	66.3%	**33.7%**	18.0%	82.0%
8 · 3	79.8%	20.2%	**68.5%**	31.5%
4 · 6	66.3%	**33.7%**	4.5%	95.5%
6 · 4	96.6%	3.4%	**61.8%**	38.2%

Табела 71. *Стратегије које су коришћене у задацима са грешком у рачуну на Завршном тесту 1*

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	КГ			6 (100%)					
	Е1			2 (33,33%)			1 (16,67%)	3 (50%)	
	Е2							2 (100%)	
Производ мера	КГ			4 (100%)					
	Е1			3 (50%)				3 (50%)	
	Е2			1 (50%)	1 (50%)				
Мултиплика-тивно поређење	КГ			6 (85,71%)			1 (14,29%)		
	Е1			3 (42,86%)	1 (14,29)%			3 (42,86%)	
	Е2			1 (33,33%)	1 (33,33%)		1 (33,33%)		
Правоугаона схема	КГ	2 (20%)		5 (50%)			3 (30%)		
	Е1	1 (25%)		2 (50%)				1 (25%)	
	Е2				1 (100%)				
Декартов производ	КГ			5 (100%)					
	Е1	1 (100%)							
	Е2			1 (100%)					

Напомена:
КГ – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

Табела 83. Стратегије које су коришћене у задацима са грешком у рачуну на Завршном тесту 2

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Једнакобројни скупови	КГ			2					
	Е1				1				
	Е2			2					
Производ мера	КГ			2	1				
	Е1			1				2	
	Е2			1	1			6	
Мултипликативно поређење	КГ			5	2			1	
	Е1			1	2			3	
	Е2				2			2	
Правоугаона схема	КГ			4				3	
	Е1							2	
	Е2				2			4	
Декартов производ	КГ			1					
	Е1			1					
	Е2			1					

Напомена:
* Бројеви представљају број ученика који је користио одређену стратегију
КГ – контролна група; Е1 – експериментална група 1; Е2 – експериментална група 2
I – појединачно пребројавање II – ритмичко пребројавање III – поновљено сабирање
IV – дуплирање са поновљеним сабирањем V – дуплирање VI – знање чињеница VII – мултипликативне стратегије VIII – остало У – укупан број ученика код којих су анализиране стратегије

БИОГРАФИЈА

Ивана Веселиновић је рођена 25.9.1994. године у Бегораду. Основну школу и средњу економску школу „Нада Димић” завршила је у Београду. Основне студије на Учитељском факултету у Београду, смер за образовање учитеља, уписала је школске 2013/2014. године и завршила их 2017. године са просечном оценом 9,60. Након тога, 2017/2018. године, уписала је мастер студије на истом факултету, које је завршила 2018. године са просечном оценом 9,67 и одбранила мастер рад на тему Начини разумевања разломака од стране ученика четвртог разреда. Тренутно ради у Основној школи „Бранко Радичевић” у Новом Београду и као НТЦ сарадник.

Докторске студије на смеру Методика наставе математике на Учитељском факултету уписује 2018. године. Током студирања учествовала је на:

- Међународном научном скупу *Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља* (2018) где је презентовала рад на тему „Начини разумевања разломака у почетној настави математике”;
- 24. Међународном округлом столу о даровитости *Достигнућа и перспективе у образовању даровитих* (2018) на тему „Утицај различитих наставних стратегија и контекста учења на развој математичке даровитости деце нижег школског узраста”, а рад је објављен у зборнику са поменуте конференције;
- 6. Међународној стручно-научној конференцији *Нови изазови у едукацији: школа и вртић будућности* (2023), где је представљала рад на тему „Примена НТЦ система учења у настави математике”, а рад је објављен у зборнику са поменуте конференције.

Објавила је и следеће радове часописима и зборницима:

1. Начини разумевања разломака у почетној настави математике. *Методичка теорија и пракса,* XVIII, број 1/2018, 31–44;
2. Математичке активности у функцији развоја почетних геометријских појмова. *Методичка теорија и пракса,* XIX, број 1/2019, 21–30.
3. Разумевање разломака ученика четвртог разреда основне школе. *Норма,* XXV, 2/2020, 217–239.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Ивана Веселиновић

Број индекса 3003/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Стратегије множења у функцији развоја мултипликативног мишљења

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање другедипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину другихлица.

Потпис аутора

У Београду, _______________ ___________________________

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије

докторскограда

Име и презиме аутора **Ивана Веселиновић**

Број индекса 3003/2018

Студијски програм Методика наставе

математике

Наслов рада Стратегије множења у функцији развоја

мултипликативног мишљења

Ментор проф. др Маријана Зељић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, ________________ __________________________

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Стратегије множења у функцији развоја мултипликативног мишљења

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, ________________ ____________________________

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.