

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милош С. Мошић

Спектрометријска метода за одређивање  
температурне расподеле пламена у блиско  
инфрацрвеној области таласних дужина

докторска дисертација

Београд, 2024

University of Belgrade  
Faculty of physics

Miloš S. Mošić

Spectrometric method for determination of  
temperature distribution of flame in visual and near  
infrared wavelength region

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2024

Ментор докторске дисертације:

Проф. др Иван Белча, редовни професор  
Физички факултет Универзитета у Београду

Комисија за одбрану докторске дисертације:

Проф. др Бећко Касалица, редовни професор  
Физички факултет Универзитета у Београду

Др Милентије Луковић, доцент  
Факултет техничких наука у Чачку  
Универзитета у Крагујевцу

Др Едиб Добарџић, ванредни професор  
Физички факултет Универзитета у Београду

Датум одбране: \_\_\_\_\_

*Захваљујем се свом ментору, професору др Ивану Белчи, на упутствима, саветима и руковођењу на изради докторске дисертације.*

*Професору др Бећку Касалици се захваљујем на подршци и знању из експерименталне физике и технике које сам усвајао.*

*Захваљујем се професору др Едибу Добарџићу на помоћи из нумеричке математике и програмирања.*

*Колегиници др Катарини Милетић се захваљујем на пријатељству, дискусијама, сарадњи и великој подршци.*

*Колегиници др Мирјани Сарван се захваљујем на пријатељству, подршци и дискусијама.*

*Колеги Стевану Пецићу се захваљујем на пријатељству и изузетним дискусијама.*

*Покојном професору др Милошу Вићићу сам захвалан на саветима и идејама из експерименталне физике и електронике.*

*Захваљујем се својој породици без чије подршке ништа не би било реализовано.*

## **Спектрометријска метода за одређивање температурне расподеле пламена у блиско инфрацрвеној области таласних дужина**

**Резиме:** Предмет ове докторске дисертације је развој новог метода за истовремено одређивање температурне расподеле пламена и коефицијената атенуације у ложишту котла термоелектране на угаљ. Ова нова метода спада у ред бесконтактних оптичких метода. Од инструмената за мерење топлотног зрачења коришћен је спектрометар који може да мери зрачење у видљивој и блиско-инфрацрвеној области таласних дужина. Једно од предности ове нове методе је у релативној једноставности употребе, колико год је то могуће, у компликованим условима експлоатације у термоелектранама.

У овој докторској дисертацији је истражен нови концепт мерења и реконструисања, решавања инверзног проблема код температурног поља, односно решавања проблема температурне томографије. Досадашњи начини су укључивали системе термопарова, двобојних пирометара, CCD камера итд. Свима њима је заједничко што њихови сензори морају бити размештени на разним местима и позицијама око области, у којој се врши процес сагоревања, и одакле мере долазеће топлотно зрачење. Другим речима овакви инструменти треба да формирају високу просторну резолуцију мерења.

Нови приступ, који је дат у овој докторској дисертацији показује да је могуће направити мерења, са једноставнијим мерним системом, где се смањење просторне резолуције инструментално-мерног система надокнађује коришћењем високе спектралне резолуције мерног система. Овакав приступ у температурној томографији, који знатно поједностављује процес мерења, је потпуно нов и једноставнији је од сличних приступа са ласерском апсорпционом спектроскопијом и комбинацијама са скупим мултиспектралним CCD камерама.

**Кључне речи:** спектрометрија, температурна томографија, инверзни проблем, коефицијент атенуације

**Научна област:** Физика

**Ужа научна област:** Примењена физика

**УДК број:**

## **Spectrometric method for determination of temperature distribution of flame in visual and near infrared wavelength region**

**Abstract:** The subject of the doctoral dissertation is the development of a new method for the simultaneous determination of temperature distribution and attenuation coefficients inside the firebox of a commercial coal power plant. This new method represents a non-contact optical approach for measuring flame temperature. The primary instrument utilized in this method is a spectrometer capable of measuring radiation in the visible and near-infrared regions of the spectrum. One of the main advantages of this new method is its simplicity for use in the very complex and harsh conditions that exist inside the fireboxes of commercial coal power plants.

This doctoral dissertation investigates a new concept for the measurement and reconstruction of the temperature scalar field to address the challenge of temperature tomography. Traditionally, the main instruments used for temperature measurements and tomography problem-solving include thermocouples, two-color pyrometers, and CCD cameras, among others. However, a common issue with these instruments is the need to deploy them at different positions inside the firebox to form a measurement system with high spatial resolution.

The new approach presented in this doctoral dissertation demonstrates the possibility of conducting measurements in a simpler manner, where the lower spatial resolution of the measurement system is compensated for by an increased spectral resolution. This novel approach to temperature tomography is simpler compared to similar methods involving laser absorption spectroscopy and expensive multispectral and hyperspectral CCD cameras.

**Key words:** spectrometry, temperature tomography, inverse problem, coefficient of attenuation

**Scientific field:** Physics

**Research area:** Applied physics

**UDC number:**

## Садржај

1. Увод.....	1
2. Основни закони и једначине топлотног зрачења.....	4
2.1 Радијационе карактеристике гасова.....	9
2.2 Радијационе карактеристике честичне средине.....	10
3. Дефиниција радијативних својства реалних површина.....	11
3.1 Емитанса.....	11
3.2 Апсорбанца.....	13
3.3 Рефлектанса.....	14
4. Једначина преноса топлоте зрачењем у честичној средини.....	16
4.1 Апсорпција.....	16
4.2 Расејање ван посматраног правца простирања зрачења.....	17
4.3 Атенуација.....	17
4.4 Емисија.....	17
4.5 Расејање у правцу простирања зрачења.....	18
4.6 Једначина преноса топлоте зрачењем.....	19
4.7 Дивергенција флукса топлотног зрачења.....	19
5. Радијативне карактеристике продуката сагоревања млевеног угља у индустријским котловима.....	21
6. Експериментална и мерна техника.....	32
6.1 Контактне методе.....	32
6.1.1 Термопарови.....	33
6.1.2 Индустријски отпорни термометри на бази платине.....	34
6.1.3 Усисни пирометри.....	34
6.2 Бесконтактне методе.....	34
6.2.1 CCD оптички сензор.....	35
6.2.2 Двобојни и вишебојни пирометри.....	36
7. Монте Карло метод решавања директног проблема.....	37
7.1 Директни Монте Карло метод.....	38

7.1.1 Координате избацавања/емисије фотона из воксела.....	38
7.1.2 Апсорпција унутар медијума.....	39
7.1.3 Расејање унутар медијума.....	40
7.1.4 Расејање са површине зидова котла.....	40
7.1.5 Програм за рачунање READ вредности.....	41
7.2 Обрнути Монте Карло метод.....	61
8. Општа анализа решавања инверзног проблема.....	64
8.1 Развој по сингуларним вредностима и Пикаров услов.....	66
8.2 Дискретизација инверзног проблема.....	70
8.3 Декомпозиција по сингуларним вредностима и кондициони број.....	70
8.4 Анализа и решавање система једначина преко декомпозиције по сингуларним вредностима.....	73
8.5 Тихоновљева регуларизација.....	75
8.6 Решавање нелинеарног облика Фредхолмове интегралне једначине.....	76
9. Решавање једнодимензионалног проблема.....	77
9.1 Увод.....	77
9.2 Поставка мерења.....	80
9.3 Теоријске основе и алгоритам решавања инверзног проблема.....	83
9.4 Тестирање поузданости алгоритма кроз симулацију.....	86
9.5 Резултати.....	89
10. Решавање дводимензионалног проблема.....	91
10.1 Увод.....	91
10.2 Опис модела и решавање директног проблема.....	93
10.3 Решавање инверзног проблема.....	97
10.4 Свођење на једнодимензионални случај.....	102
10.5 Резултати и дискусија.....	104
11. Решавање тродимензионалног проблема.....	113
11.1 Увод.....	113
11.2 Поставка и решавање директног проблема.....	114
11.3 Решавање инверзног проблема.....	118
11.4 Резултати и дискусија.....	120
12. Закључак.....	140
13. Литература.....	142



14. Прилог .....	153
14.1 Програм за рачунање фазне функције за расејање електромагнетног таласа на честици .....	153
14.1.1 Фајл testPhaseFunction.m .....	153
14.1.2 Фајл Phase.m .....	153
14.2 Програми за рачунање фактора ефикасности за расејање и екстинкцију .....	154
14.2.1 Фајл MieQsca.m .....	154
14.2.2 Фајл MieQext.m .....	155
14.3 Програм за рачунање комплексне величине индекса преламања .....	156
14.3.1 Фајл SootRefractiveIndex.m .....	156
14.4 Програм за рачунање READ вредности у Монте Карло симулацији .....	156
14.5 Програм за ВМС симулацију .....	181

# 1. Увод

Пренос топлотног зрачења (Radiative Heat Transfer) спада већ у засебну науку, која се бави проблемом дистрибуције топлотне енергије путем електромагнетних таласа и њене интеракције са телом на које пада или средином кроз коју пролази. Сва тела у природи емитују или апсорбују електромагнетне таласе, фотоне, мењајући енергетска стања њихових молекула или атома. За преношење топлоте путем зрачења од значаја су таласне дужине између  $10^{-7}$  m и  $10^{-3}$  m (област ултравиолетног, видљивог и инфрацрвеног домена таласних дужина).

Једно од значајнијих особина топлотног зрачења које га издваја од конвекције и кондукције је да топлотни флуks зрачењем постаје доминантан на вишим температурама у односу на остала два механизма. Због тога је топлотно зрачење од највећег значаја у применама где се обавља неки процес сагоревања (индустријске пећи, котлови термоелектрана, ракетни и млазни мотори итд.).

Ефикаснији процес сагоревања горива, боље искоришћење, мања емисија штетних гасова и бољи пренос топлоте у термоелектранама захтевају добро познавање расподеле температуре и позицију њеног максимума. Превисоке температуре и асиметрична расподела могу довести до застакљивања и зашљакавања делова котла и емисије штетних гасова као што су азотни оксиди  $\text{NO}_x$ .

Многе методе за мерење температуре у пећима су развијене до сада. У пракси су најкоришћеније методе мерења температуре са контактним сондама односно са термопаровима и сукционим (усисним) пирометрима. Термопарови могу да се користе за мерења температуре и до 2000 K. Термопарови могу да издрже сурове услове у којима се врше мерења и да дају поуздане измерене вредности. Малих су димензија и релативно јефтине за употребу. Обично се постављају на зидовима ложишта котла. Контактне методе поред својих предности имају и недостатке. Предности су релативно ниска цена и једноставност употребе док главни недостаци локално мерење температуре (мала област пламена) и деградација инструмената у високотемпературним условима при дужој употреби.

Оптичке бесконтактне методе за мерење температуре које се највише користе у пракси су двобојни пирометри и ласерске методе [1, 2]. Двобојни пирометри могу само да мере усредњену вредност температуре у простору где се врши сагоревање без могућности добијања температурне расподеле пламена. Ласерска спектроскопија је метода која подразумева коришћење једног или више ласерских зрака чијим проласком кроз апсорбујућу средину долази до њиховог слабљења у зависности од састава, концентрације честица и температуре пламена. Ласерске методе које су се посебно истакле последњих година су: Ласерски индукована флуоресценција (Laser Induced Fluorescence) [3] и

Ласерска спектроскопија са са подесивим ласерским зрачењем (Tunable Diode Laser Absorption Spectroscopy) [4]. Ласерске методе обично нису применљиве на пећима великих димензија због недовољне снаге.

Поред наведених постоје и акустичне методе [5] које су показале недостатке у квалитету просторно добијене резолуције као и недостатак због ограничене брзине простирања акустичних таласа.

Последњих година највише се примењује радијациона термометрија на бази CCD (Charge Couple Device) камера [6, 7, 8]. Предност ове радијационе методе је у високој резолуцији CCD камере која може да се користи за посматрање пламена у видљивом и инфрацрвеном делу спектра. Недостатак ове методе је у потешкоћама приликом калибрације па се зато често мора користити уз двобојни пирометар. Двобојни пирометар има тачнија читавања температуре у инфрацрвеној области. Такође CCD камере су непрактичне и због сложеност система хлађења што повећава цену употребе, компликује систем мерења.

Такође постоје и спектрометријске методе за одређивање профила пламена у горионицима или пећима FTIR методом [9], као и испитивања употребе спектрометара у различитим интервалима таласних дужина за одређивање температуре при сагоревању природног гаса и самлевеног/уситњеног угља [10, 11, 12].

Пристап са повећањем спектралне резолуције и смањењем броја мерних уређаја (ниске спектралне резолуције) или заменом са уређајима који имају високу просторну резолуцију (као код CCD камера) није нов. Добијање томографске слике, базиране на хиперспектралној апсорпционој спектроскопији, је показано у комбинацији са ласерима и мерењем преко система одашиљач-пријемника [13]. Са повећањем броја мерења на различитим таласним дужинама је показано да је могуће смањити овај број комбинација одашиљач-пријемника. Такође имамо рад са мултиспектралном камером и комбинацијом са спектрометром (за валидацију мерења) за мерење дистрибуције температурног поља пламена свеће [14].

У овој дисертацији, за директно решавање проблема коришћена је Монте Карло симулација, која одређује колики део топлотног зрачења из сегментираног простора доспева до сонди спектрометара, на основу температурне расподеле пламена и оптичких параметара средине. Овакав директан проблем такође омогућава, на основу димензије угљених честица и њихових хемијских својстава, израчунавање коефицијената апсорпције и расејања средине у којој се врши процес сагоревања. Такође је коришћен нови тип Монте Карло методе, прилагођен за спектрометар, која се показује да је неколико стотина пута бржа од класичне.

Решавање инверзног проблема, као много већи изазов у односу на решавање директног проблема, користи линеарну и нелинеарну оптимизацију. Допринос ове дисертације је и у новој развијеној методи за брзу реконструкцију температурног профила која се заснива на Тихоновљевој регуларизацији и Бајесовим вероватноћама. Погодност овог алгорита је у могућности праћења померања термалног фокуса пламена у котлу.

За комбиновано израчунавање оптичких параметара средине и температурне расподеле пламена коришћена је комбинација са познатим нелинеарним оптимizacionим алгоритмима. Показује се да су, због природе проблема и математичког модела, линеарни оптимizacionи алгоритми добри за одређивање температурног поља пламена. Међутим, за добијање оптичких карактеристика средине и температурног профила неопходно је применити нелинеарне методе које су знатно спорије.

Поглавља од 2. до 4. се односе на уводни део физичке теорије топлотног зрачења. Она имају за циљ да изнесу основне релације, законе и једначине које се користе у овој дисертацији.

Пето поглавље приказује теорију која се односи на интеракцију електромагнетних таласа са честицама, као продуката сагоревања, које доминатно учествују у процесу преноса топлотног зрачења. Овде су дата теоријска објашњења и главна литература која се користи у прорачунима радијационих особина средине пламена.

Шесто поглавље даје кратак опис главних инструмената и мерних уређаја који данас доминирају у пракси при контактном и бесконтактном мерењу температуре.

Седмо поглавље даје детаљан опис реализације Монте Карло програма који имају за циљ израчунавање расподеле енергије топлотног зрачења у простору. Ови програми се користе како за директно решавање проблема одређивања температурног поља пламена, тако и за инверзно решавање проблема. Описани директни Монте Карло метод и обрнути Монте Карло метод су коришћени у прорачунима у оквиру ове дисертације.

Осмо поглавље описује математичку анализу и теорију која стоји иза примене оптимizacionих метода које су се користиле у овој дисертацији. Овде су приказна главна ограничења и могућности математичких алата којима располажемо при решавању инверзног проблема у температурној томографији.

Девето поглавље даје опис оригиналног решавња једнодимензионалног проблема у температурној томографији са инструментационом и мерном поставком, са применом спектрометара.

Десето поглавље описује проширење проблема, из претходног поглавља, и решавање дводимензионалног проблема са применом Бајесовог закључивања и теорије вероватноће. Показује се добијање и решавање система у матричном облику, што омогућава решавање инверзног проблема за веома кратко потрошено време, реда неколико секунди, а у неким случајевима и мање.

Једанаесто поглавље даје општи облик решавња тродимензионалног проблема са описом новог модела за решавање директног и инверзног проблема у температурној томографији, базираној на спектроскопској методи.

## 2. Основни закони и једначине топлотног зрачења

Топлотно зрачење може да се представи у виду електромагнетних таласа или као скуп безмасених честица, које се зову фотони, које се крећу великим брзинама. Топлотно зрачење течности и чврстих тела као и ситних честица погодно је описати преко електромагнетне теорије док је зрачење гасова много згодније описати преко квантне теорије

Електромагнетни таласи односно фотони се простиру кроз разне средине високим брзинама. Брзина простирања електромагнетних таласа односно брзина светлости зависи од оптичких карактеристика средине кроз коју се светлост простира. Брзина светлости кроз неку средину се рачуна по формули

$$c = \frac{c_0}{n}, c_0 = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (2.1)$$

где је  $n$  индекс преламања средине кроз коју се светлост простира, а  $c_0$  је брзина светлости у вакууму. У ваздуху вредност индекса преламања средине је близу јединици.

Када се електромагнетно зрачење простира кроз неки медијум и наилази на површине друге средине (чврсте површи, течности или честице) талас се може рефлектовати тотално или делимично, док онај нерелектовани део продира кроз тај медијум. Док пролази кроз неку средину електромагнетно зрачење се атенуира односно апсорбује или расејава. Ако се зрачење у потпуности атенуира онда такву средину зовемо непрозирном или непропусном. Ако зрачење пролази кроз средину без атенуације онда такву средину зовемо прозирном односно пропусном. Код делимичне атенуације имамо полупрозрачну или полупропусну средину. Пропусност средине зависи од врсте материјала (оптичке особине) као и од дебљине односно оптичког пута који електромагнетни зраци морају да прођу кроз средину. Метали су готово потпуно непрозирни осим ако се светлост не простира кроз изузетно танке слојеве. Да би неметали били непрозирни потребно је да буду знатно дебљи од метала. Непропусна средина која не рефлектује зрачење се назива савршени апсорбер односно њена површина је црна.

Једна од главних физичких мерних величина која се користи у спектрометрији је спектрална радијанса (Spectral Radiative Intensity)

$$I_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{dQ_\lambda}{dA \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda} \quad (2.2)$$

што представља снагу зрачења  $dQ_\lambda$  на таласној дужини  $\lambda$  која пада или пролази кроз елементарну површ  $dA$  (на позицији  $\mathbf{r}$ ) у правцу  $\mathbf{s}$  (под углом  $\theta$  у односу на нормалу на површ  $dA$ ) кроз узак просторни угао  $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$ .

Поред овога постоји и величина која се зове тотална спектрална радијанса или тотални интензитет зрачења (Total Intensity)

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_0^{\infty} I_{\lambda}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \lambda) d\lambda \quad (2.3)$$

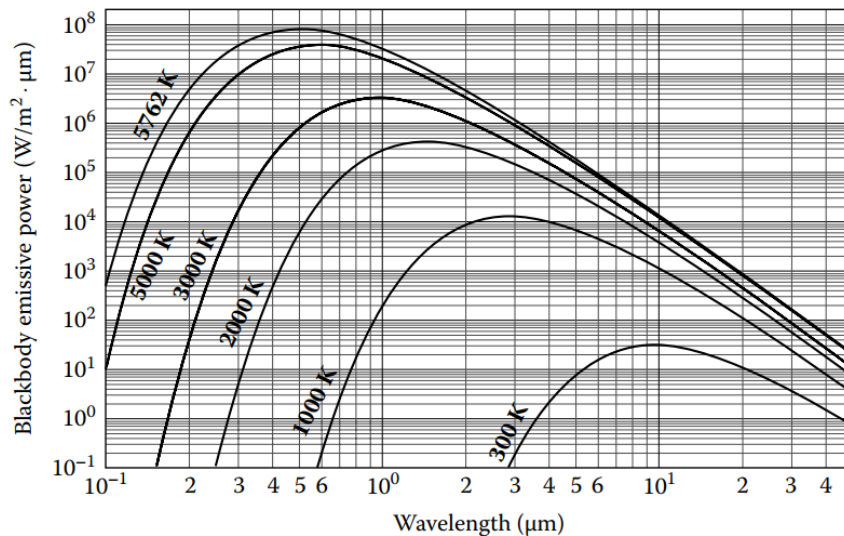
Ако се величина (2.2) интегралом по целом полупростору добија се тотална емисиона спектрална моћ (Total Emissive Spectral Power)

$$E_{\lambda}(r) = \int_{2\pi} I_{\lambda}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \circ \mathbf{s} \cdot d\Omega \quad (2.4)$$

Године 1901. немачки физичар Мах Планк је објавио рад [15] који је везан за квантну статистику где је за апсолутно црно тело у средини са индексом преламања  $n$  пронашао закон зрачења (Blackbody emissive Power) тј. Планков закон зрачења

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \frac{\pi \cdot C_1}{n^2 \cdot \lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{C_2}{\lambda n T}} - 1 \right)} \quad (2.5)$$

где су  $C_1 = 2hc_0^2$  и  $C_2 = hc_0/k_B$  прва и друга радијациона константа,  $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  Планкова константа,  $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  Болцманова константа. Израз (2.5) представља хемисферичну спектралну емисиону моћ апсолутно црног тела (Hemispherical Spectral Emissive Power of a Blackbody) и њена расподела је дата на слици (2.1).



Слика 2.1. Хемисферична спектрална емисиона моћ апсолутно црног тела у зависности од таласне дужине за различите вредности температура [17].

При асимптотским случајевима, Планков закон зрачења апсолутно црног тела можемо за велике и мале таласне дужине апроксимирати једноставнијим изразима.

У првом случају из израза (2.5) за  $hc_0/n\lambda k_B T \ll 1$  можемо добити израз за хемисферичну спектралну емисиону моћ апсолутно црног тела

$$E_{b\lambda} = \frac{2\pi c_0 k_B T}{n\lambda^4} \quad (2.6)$$

што представља Рејли-Џинсонов закон зрачења (Rayleigh-Jeans distribution law).

У другом случају за  $hc_0/n\lambda T k_B \gg 1$  добијамо израз

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1}{n^2 \lambda^5} e^{-\frac{C_2}{k_B T}} \quad (2.7)$$

који представља Винов закон зрачења (Wien's distribution law).

Када интегралимо израз (2.5), односно хемисферичну спектралну емисиону моћ апсолутно црног тела за све таласне дужине, добијамо израз

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda = \left[ \frac{C_1}{C_2^4} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \right] n^2 T^4 = n^2 \sigma T^4 \quad (2.8)$$

што представља познати Штефан-Болцманов закон (Stefan-Boltzmann law).

Израз (2.5) можемо поделити са  $n^3 T^5$  и диференцирати по  $n\lambda T$  па да тражимо екстремум тј. максимум функције

$$\frac{d}{d(n\lambda T)} \left( \frac{E_{b\lambda}(T)}{n^3 T^5} \right) = 0 \quad (2.9)$$

при чему добијамо

$$n\lambda T = C_3 = 2898 \mu m K \quad (2.10)$$

израз који је познат као Винов закон померања (Wien's displacement law). Одатле за одређену температуру апсолутно црног тела можемо наћи на којој таласној дужини имамо максимално зрачење.

Из једначине (2.4) се може наћи веза између спектралне емисионе моћи и спектралне радијансе за апсолутно црно тело

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \pi \cdot I_{b\lambda}(T) \quad (2.11)$$

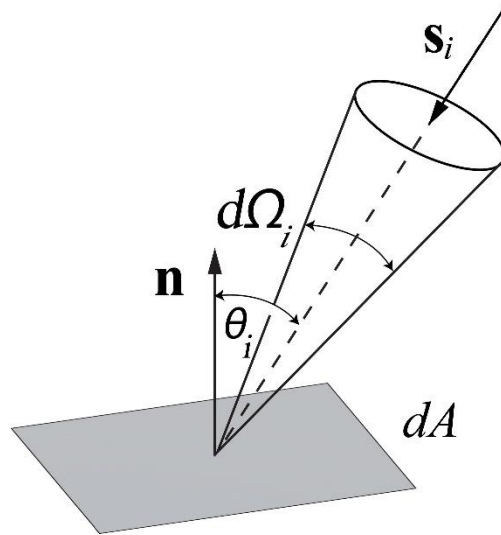
пошто је зрачење апсолутно црног тела дифузно и не зависи од смера и правца емитовања зрачења.

Ако се пође од једначине (2.2) може се на основу спектралне радијансе  $I_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  наћи снага зрачења на таласној дужини  $\lambda$  кроз елементарни просторни угао  $d\Omega_i$  у правцу  $-\mathbf{s}_i$  који је под углом  $\theta_i$  у односу на нормалу  $\mathbf{n}$  на елементарну површ  $dA$  као на слици 2.2,

$$dQ_\lambda = I_\lambda(\mathbf{s}_i) d\Omega_i dA \cos \theta_i. \quad (2.12)$$

Одавде можемо да нађемо укупан топлотни флуks из полупростора ако  $dQ_\lambda$  поделимо са  $dA$  и интегралимо израз (2.12) у  $2\pi$  просторном углу

$$q_\lambda = \int_{2\pi} I_\lambda(\mathbf{s}_i) \cos \theta_i d\Omega_i = \int_{\varphi_i=0}^{2\pi} \int_{\theta_i=0}^{\pi/2} I_\lambda(\mathbf{s}_i) \cos \theta_i \sin \theta_i d\varphi_i d\theta_i \quad (2.13)$$



Слика 2.2. Флуks зрачења кроз елементарну површ

При интеракцији зрачења са материјом сама површ не врши апсорпцију или емисију фотона. Атенуација се одиграва унутар слоја материје. Дебљина слоја у којој се врши интеракција са зрачењем је у целини гледано мала у односу на површину на коју пада зрачење или одакле се емитује зрачење. За метале, дебљина слоја је реда неколико  $10^{-10}$  m, док је за неметале та дебљина неколико микрометара.

Када зрачење пада на неки медијум коначне дебљине део тог зрачења ће бити апсорбован, део ће бити рефлектован а остали део ће проћи тј. биће трансмитован кроз тај медијум. Зато можемо дефинисати три важне оптичке карактеристике сваког материјала:

$$\text{Рефлектанса, } \rho = \frac{\text{рефлектовани део долазећег зрачења}}{\text{укупно долазеће зрачење}}, \quad (2.14a)$$

$$\text{Апсорбанса, } \alpha = \frac{\text{апсорбовани део долазећег зрачења}}{\text{укупно долазеће зрачење}}, \quad (2.14b)$$



$$\text{Трансмита́нса, } \tau = \frac{\text{трансмитовани део долазећег зрачења}}{\text{укупно долазеће зрачење}} \quad (2.14\text{в})$$

Обзиром да целокупно зрачење при проласку кроз слој неке материје мора бити апсорбовано или рефлектовано или трансмитовано можемо написати следећи израз

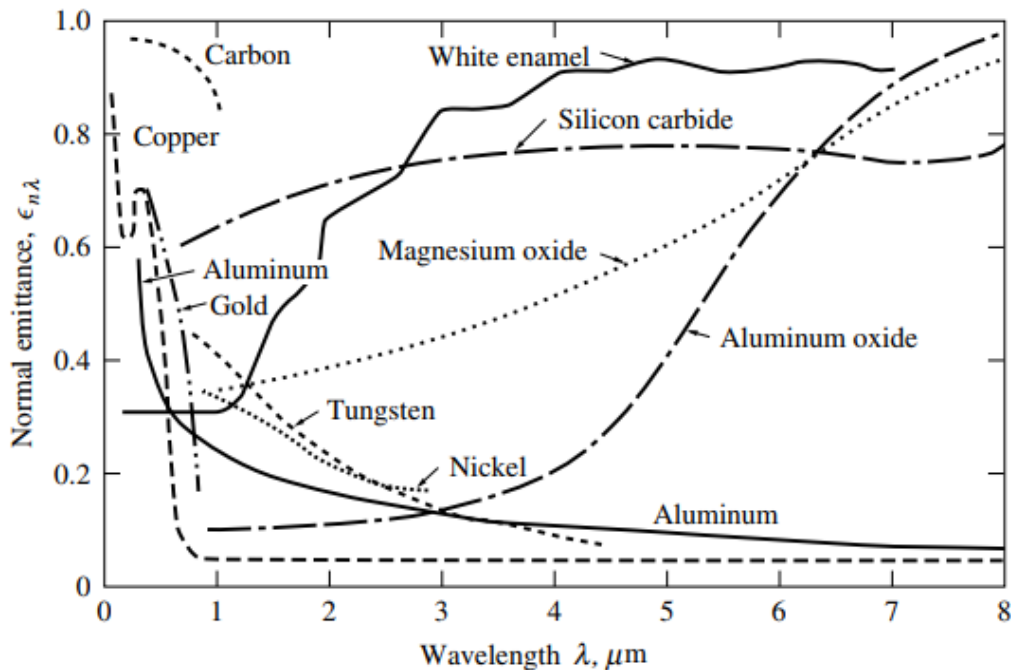
$$\alpha + \rho + \tau = 1. \quad (2.15)$$

Пошто све површине емитују топлотно зрачење на некој температури и обзиром да знамо да апсолутно црно тело на истој температури емитује максималну могућу снагу можемо увести четврту оптичку карактеристику површи:

$$\text{Емитанса, } \epsilon = \frac{\text{енергија емитована са површине}}{\text{енергија емитована са апсолутно црног тела на истој температури}} \quad (2.16)$$

За апсолутно црно тело емитанса има вредност  $\epsilon = 1$ .

Све четири оптичке карактеристике површи неког материјала са зрачењем генерално јесу функције од температуре, таласне дужине и правца простирања зрачења. Зависност емитансе од таласне дужине за неке материјале у правцу који је нормалан на површину тих материјала је приказан на слици 2.3

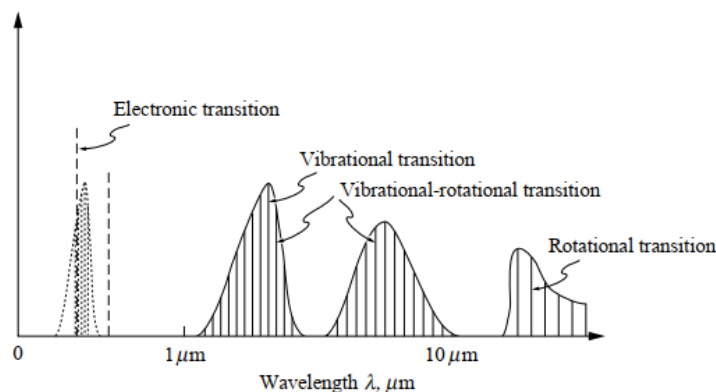


Слика 2.3. Нормална спектрална емисивност за одређене материјале [16].

## 2.1 Радијационе карактеристике гасова

Као и код чврсте материје гас може да апсорбује или емитује електромагнетно зрачење. Сви атоми или молекули гасова носе одређену количину енергије која се састоји од кинетичке енергије и од унутрашње енергије молекула. Унутрашња енергија молекула поседује електронска, вибрациона и ротациона енергетска стања. Фотон може бити апсорбован тако што подиже једно од ова три унутрашња енергетска стања молекула. Молекули могу да спонтано емитују фотон и да на тај начин спусте једно од унутрашњих енергетских стања. Квантна механика постулира да постоји коначан број дискретних енергетских нивоа. Наиме, електрони могу да се крећу око језгара само по одређеним дозвољеним орбитама. Осцилације између језгара молекула могу да се појаве само у одређеним дозвољеним фреквенцијама. Такође језгра могу да ротирају једно око другог само са дозвољеним одређеним ротационим брзинама. Дакле емисија или апсорпција фотона у молекулу се одвија само у одређеним количинама енергије  $h\nu$  и са само одређеним вредностима фреквенције  $\nu$  зрачења.

Од све три наведене врсте промене унутрашње енергије највише је потребно уложити за промену орбите електрона што доводи до апсорпције и емисије у ултраљубичастом или видљивом делу спектра. Код моноатомских гасова могуће је само мењати електронске енергетске нивое. Мања количина енергије је потребна (у односу на електронске енергетске нивое) за промену вибрационих енергетских стања што доводи до појаве спектралних линија у области инфрацрвеног зрачења за таласне дужине између  $1 \mu\text{m}$  и  $15 \mu\text{m}$ . За промену ротационих енергетских стања потребно је уложити још мање енергије у односу на вибрациона стања и њене спектралне линије се налазе у далекој инфрацрвеној области тј. за таласне дужине које су веће од  $10 \mu\text{m}$ . Промена вибрационих енергетских стања је обично праћена променом ротационих енергетских стања. Ако температура гаса није висока гас неће имати слободне јоне и слободне електроне. Апсорпција и емисија фотона се одиграва у такозваним везано-везаним променама и тада имамо дискретне спектралне линије као на слици 2.4



Слика 2.4. Приказ спектралних линија услед промене електронских, вибрационих и ротационих енергетских стања код молекула гаса [18].

Ако апсорпција фотона резултује јонизацијом односно ослобађањем електрона тада се прелази зову везано-слободним. Такође слободни електрон може да се рекомбинује са јоном што доводи до слободно-везаног прелаза. Слободни електрони могу да апсорбују или емитују фотоне што доводи до слободно-слободног прелаза. Како електрони могу да имају произвољну кинетичку енергију, спектар који они стварају је континуалан.

Електромагнетно зрачење се атенуира постепено апсорпцијом. Ако имамо хомогени изотермални слој гаса тада трансмисију или трансмитансу можемо рачунати као

$$\tau_\lambda = e^{-\kappa_\lambda \cdot s} \quad (2.17)$$

где је  $s$  дебљина слоја гаса кроз који зрачење пролази, а  $\kappa_\lambda$  је коефицијент апсорпције. Израз (2.17) је познат као Ламбер-Беров закон. Пошто су молекули гаса много мањи од таласне дужине топлотног зрачења тада из претходног израза можемо наћи спектралну апсорбансу

$$\alpha_\lambda = 1 - \tau_\lambda = 1 - e^{-\kappa_\lambda \cdot s} \quad (2.18)$$

## 2.2 Радијационе карактеристике честичне средине

Медијум са гасом испуњен малим честицама (у чврстом стању) се другачије понаша у интеракцији са топлотним зрачењем у односу на само гасну средину. У таквој средини електромагнетно зрачење може бити расејано поред тога што може бити апсорбовано и трансмитовано.

Расејање може да се одигра у три механизма:

1. Промена путање фотона (дифракцијом) чак и без судара са честицом.
2. Фотон може да продре кроз честицу и да скрене при улазу и излазу *преламањем* или рефракцијом
3. Фотон може да се одбије од честицу *рефлексијом*.

Сва ова три феномена представљају појаву расејања. Апсорпција се такође може одиграти када фотон продре у честицу. Када имамо расејање и апсорпцију израз за трансмитивност или трансмисију кроз медијум испуњен партикуларном средином постаје

$$\tau_\lambda = e^{-(\kappa_\lambda + \sigma_{s\lambda}) \cdot s} = e^{-\beta_\lambda \cdot s} \quad (2.19)$$

где је  $\sigma_{s\lambda}$  коефицијент расејања и  $\beta_\lambda$  је коефицијент атенуације.

Још једна величина која се често користи у опису оптичких и радијационих карактеристика средине кроз коју се простира електромагнетно зрачење је албеда расејања

$$\omega_\lambda = \frac{\sigma_{s\lambda}}{\kappa_\lambda + \sigma_{s\lambda}} = \frac{\sigma_{s\lambda}}{\beta_\lambda}. \quad (2.20)$$

Природа интеракције електромагнетног зрачења и честица је одређена односом величине честице и таласне дужине електромагнетног таласа. Тако можемо да дефинишемо параметар величине

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (2.21)$$

где је  $a$  ефективни радијус честице. У зависности од величине овог параметра разликујемо три врсте расејања:

1. За  $x \ll 1$  имамо *Рејлијево расејање* [19]. Лорд Рејли је уочио да је расејање оваквих релативно малих честица у односу на таласну дужину зрачења пропорционално  $1/\lambda^4$ .
2. За  $x = O(1)$  имамо *Миево расејање*, названо по Густаву Миу [20].
3. За  $x \gg 1$  површина честице се може сматрати нормалном површи и својства расејања се описује преко *геометријске оптике*.

### 3. Дефиниција радијативних својства реалних површина

Ово поглавље се углавном односи на оптичка и радијативна својства непрозирних средина. Ова својства су углавном одређена експерименталним мерењима. Многи експериментални подаци су већ одређени током 50-тих и 60-тих година прошлог века за потребе NASA мисије слања човека на месец. Већина података у вези са радијативним својствима реалних површина могу се наћи у литератури [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

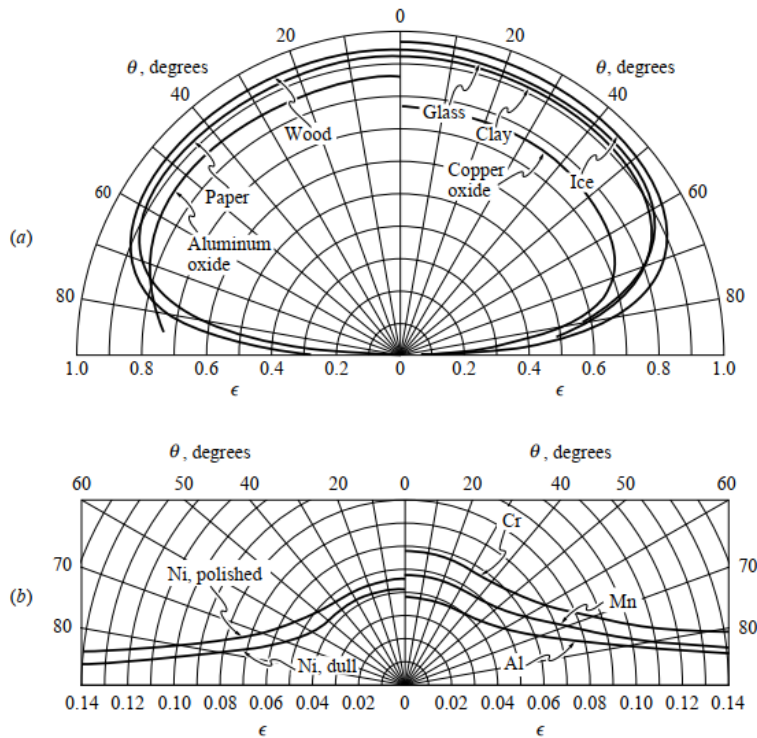
#### 3.1 Емитанса

Радијативно својство за емисију непрозирних површина у случају *спектралне дирекционе емисивности* може да се дефинише као:

$$\varepsilon'_\lambda(T, \lambda, \mathbf{s}_0) = \frac{I_\lambda(T, \lambda, \mathbf{s}_0)}{I_{b\lambda}(T, \lambda)} \quad (3.1)$$

где се пореде спектрална радијанса са дате површи у правцу и смеру вектора  $\mathbf{s}_0$  у односу на радијансу апсолутно црног тела.

Експериментално мерене дирекционе емитансе за одређене материјале могу се видети на слици 3.1.



Слика 3.1. Дирекциона емисивност површи за (a) неметале и (b) за метале [29].

За површи чија је емисивност иста у свим правцима кажемо да су дифузни емитери. Заправо не постоје реалне површи које можемо звати дифузним емитерима пошто електромагнетна теорија предвиђа нулту емисивност за угао  $\theta = \pi/2$  за све материјале.

Спектрална хемисферична емисивност се може дефинисати као однос спектралне емисионе моћи реалне површине у односу на спектралну емисиону моћ апсолутно црног тела

$$\varepsilon_{\lambda}(T, \lambda) = \frac{E_{\lambda}(T, \lambda)}{E_{b\lambda}(T, \lambda)} \quad (3.2)$$

Код изотропних површина<sup>1</sup> однос хемисферичне и дирекционе емисивности може да се напише као

$$\varepsilon_{\lambda}(T, \lambda) = 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon'_{\lambda}(T, \lambda, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (3.3)$$

За дифузне површи  $\varepsilon'_{\lambda}$  не зависи од правца па можемо да напишемо:

$$\varepsilon_{\lambda}(T, \lambda) = \varepsilon'_{\lambda}(T, \lambda). \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> Изотропне површи су оне површи чија радијативна својства не зависе од азимутног угла

Тоталну хемисферичну емисивност можемо дефинисати преко следећег израза:

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{1}{n^2 \sigma T^4} \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(T, \lambda) E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda. \quad (3.5)$$

Ако је спектрална емисивност иста за све таласне дужине тада такву површину називамо сивом (gray surface) и онда важи

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_\lambda(T, \lambda). \quad (3.6)$$

### 3.2 Апсорбанца

Енергија у јединици времена на одређеној таласној дужини која пада на инфинитезималну површину  $dA$  у правцу  $\mathbf{s}_i$  у оквиру инфинитезимално малог просторног угла  $d\Omega_i$  може да се рачуна као

$$I_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i dA d\Omega_i. \quad (3.7)$$

На основу (3.7) можемо да дефинишемо спектралну дирекциону ирадијацију

$$H'_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) = I_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i \quad (3.8)$$

Одавде дефинишемо спектралну дирекциону апсорбанцу

$$\alpha'_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) = \frac{H'_{\lambda,abs}}{H'_\lambda} \quad (3.9)$$

где се  $H'_{\lambda,abs}$  односи на део зрачења од  $H'_\lambda$  који је апсорбовала инфинитезимално мала површина  $dA$ . Под овим условима, овако дефинисана спектрална дирекциона апсорбанца не зависи од спољњег зрачења и представља само својство површине која зависи од локалне температуре, таласне дужине и правца долазећег зрачења.

На основу Кирхофовог закона зрачења спектрална дирекциона емитанса и спектрална дирекциона апсорбанца морају да буду једнаке

$$\alpha'_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) = \varepsilon'_\lambda(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i). \quad (3.10)$$

Једнакост (3.10) важи ако постоји термодинамичка равнотежа, у том случају је апсорбанца у овој форми заиста радијативно површнско својство као и емитанса неког одређеног материјала.

Долазећи топлотни флуks који пада из полупростора на инфинитезималну површину  $dA$  се може рачунати као

$$H_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = \int_{2\pi} H'_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) d\Omega_i = \int_{2\pi} I_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i d\Omega_i. \quad (3.11)$$

Од тога део који се апсорбује је

$$H_{\lambda,abs}(\mathbf{r}, \lambda) = \int_{2\pi} \alpha'_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) I_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i d\Omega_i \quad (3.12)$$

што нас доводи до израза за спектралну хемисферичну (полупросторну) апсорбанцу

$$\alpha_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = \frac{H_{\lambda,abs}(\mathbf{r}, \lambda)}{H_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda)}. \quad (3.13)$$

Ако је зрачење дифузно (спектрална радијанса не зависи од  $\mathbf{s}_i$ ) тада из (3.10) и (3.13) добијамо

$$\alpha_{\lambda}(T, \lambda) = \varepsilon_{\lambda}(T, \lambda). \quad (3.14)$$

За *тоталну* (по свим таласним дужинама) *хемисферичну апсорбанцу* користимо израз

$$\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) H_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} H_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) d\lambda}. \quad (3.15)$$

Под условом да је површина дифузна и изотропна са температуром  $T$  онда можемо видети да важи

$$\alpha(T) = \varepsilon(T). \quad (3.16)$$

### 3.3 Рефлектанса

*Спектрална дирекционо-хемисферична рефлектанса* се дефинише као однос рефлектованог топлотног флуksа који напушта површину  $dA$  у полупростор и топлотног флуksа који пада на ту површ у правцу вектора  $\mathbf{s}_i$  у инфинитезималном просторном углу  $d\Omega_i$  на таласној дужини  $\lambda$

$$\rho_{\lambda}'^h(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) = \frac{\int_{2\pi} dI_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_r) \cos\theta_r d\Omega_r}{H_{\lambda}'(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) d\Omega_i} \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{s}_i$  и  $\mathbf{s}_r$  представљају векторе долазећег и рефлектованог зрачења. Ако поредимо спектралну дирекциону апсорбанцу (3.9) и спектралну дирекционо-хемисферичну рефлектансу тада за непропусну површину важи

$$\rho_{\lambda}'^h(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) = 1 - \alpha_{\lambda}'(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \quad (3.18)$$

Спектрална хемисферично-дирекциона рефлектанса се дефинише као

$$\rho_{\lambda}^{h'}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_r) = \frac{I_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_r)}{H_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda)/\pi}. \quad (3.19)$$

Код дифузног зрачења важи  $\rho_{\lambda}^{h'}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_r) = \rho_{\lambda}'^h(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i)$  за  $\mathbf{s}_i = -\mathbf{s}_r$ . Спектрална хемисферична рефлектанса се дефинише као однос рефлектованог зрачења у свим правцима и зрачења које из свих праваца пада на неку инфинитезималну површину на таласној дужини  $\lambda$

$$\rho_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = \frac{\int_{2\pi} \rho_{\lambda}'^h(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) H_{\lambda}'(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) d\Omega_i}{\int_{2\pi} H_{\lambda}'(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) d\Omega_i} \quad (3.20)$$

Ако погледамо израз за (3.13) види се да за спектралну хемисферичну апсорбансу и спектрално хемисферичну рефлектансу важи релација

$$\rho_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) = 1 - \alpha_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda). \quad (3.21)$$

Тотална хемисферична рефлектанса се дефинише преко израза:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\int_0^{\infty} \rho_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda) \int_{2\pi} I_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i d\Omega_i d\lambda}{\int_0^{\infty} \int_{2\pi} I_{\lambda}(\mathbf{r}, \lambda, \mathbf{s}_i) \cos\theta_i d\Omega_i d\lambda}. \quad (3.22)$$

За дифузну и сиву површину може да се коначно успостави следећа релација:

$$\alpha(T) = 1 - \rho(T) = \varepsilon(T). \quad (3.23)$$



## 4. Једначина преноса топлоте зрачењем у честичној средини

У многим применама од значаја је узимање у обзир интеракције зрачења са средином кроз коју се простире, при чему се мора квантитативно описати ефекат апсорпције, емисије и расејања. Опис преноса топлоте има велику примену у многим инжењерским областима као на пример коришћење и контрола при сагоревању горива (гасовита, течна или чврста горива) при производњи електричне енергије, ракетне пропулзије, код плазме у фузионим реакторима.

### 4.1 Апсорпција

Када зрачење на таласној дужини  $\lambda$  пролази кроз медијум који може да апсорбује њену енергију, тада је инфинитезимална промена спектралне радијансе зрачења на инфинитезимално малом путу  $ds$  пропорционална интензитету тог зрачења по следећој релацији

$$dI_{\lambda,abs} = -\kappa_{\lambda}I_{\lambda}ds, \quad (4.1)$$

где се константа пропорционалности  $\kappa_{\lambda}$  дефинише као (линеарни) коефицијент апсорпције. Негативни предзнак у наведеној релацији означава опадање енергије зрачења на путу при проласку кроз медијум.

При интеграљењу релације (4.1) дуж геометријског пута  $s$  добијамо да је интензитет зрачења на крају пута једнак

$$I_{\lambda}(s) = I_{\lambda}(0)e^{-\int_0^s \kappa_{\lambda} ds} = I_{\lambda}(0)e^{-\tau_{\lambda}}, \quad (4.2)$$

где је  $\tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda} ds$  пређени оптички пут зрачења при апсорпцији. Линеарну апсорпцију средине можемо повезати са апсорбанцом када зрачење пређе пут  $s$  кроз партикуларну средину

$$\alpha_{\lambda} = \frac{I_{\lambda}(s) - I_{\lambda}(0)}{I_{\lambda}(0)} = 1 - e^{-\tau_{\lambda}}. \quad (4.3)$$

## 4.2 Расејање ван посматраног правца простирања зрачења

Губитак енергије зрачења на путу простирања у правцу вектора  $\mathbf{s}$  може да се деси преко расејања поред процеса апсорпције. Апсорпција се разликује од расејања у томе што се апсорбована енергија претвара у унутрашњу енергију средине док се расејана енергија преусмерава путем електромагнетног зрачења. Код расејања поред губитка енергије у правцу простирања постоји феномен појачања енергије у правцу простирања што ће бити посебно разрађено. Губитак енергије зрачења у правцу простирања се описује релацијом

$$dI_{\lambda, sca} = -\sigma_{s\lambda} I_{\lambda} ds, \quad (4.4)$$

где је коефицијент пропорционалности  $\sigma_{s\lambda}$  (линеарни) коефицијент расејања. Може се посебно дефинисати и коефицијент расејања који ће зависити од густине или притиска средине. Такође на аналоган начин као код апсорпције можемо дефинисати оптички пут зрачења само за случај губитка енергије на путу услед расејања.

## 4.3 Атенуација

Атенуација зрачења, ако гледамо простирање електромагнетног таласа дуж уског конуса, процесом апсорпције и расејања се описује преко коефицијента екстинкције односно коефицијента атенуације

$$\beta_{\lambda} = \kappa_{\lambda} + \sigma_{s\lambda}. \quad (4.5)$$

Оптички пређени пут дефинисан на коефицијенту атенуације се рачуна као

$$\tau_{\lambda} = \int_0^s \beta_{\lambda} ds. \quad (4.6)$$

## 4.4 Емисија

Емисија зрачења дуж неког пута у посматраној средини је пропорционална величини те средине одакле рачунамо емисију зрачења. Ако гледамо једнодимензионално емисија је пропорционална дужини пута дуж којег се зрачење простире

$$dI_{\lambda, em} = \kappa_{\lambda} I_{b\lambda} ds \quad (4.7)$$

где је  $\kappa_\lambda$  раније дефинисан коефицијент апсорпције. Ако имамо апсорпционо-емисиону средину на путу простирања зрачења тада диференцијалну промену спектралне радијансе на путу  $ds$  можемо написати

$$dI_\lambda = dI_{\lambda,em} + dI_{\lambda,abs} = \kappa_\lambda I_{b\lambda} ds - \kappa_\lambda I_\lambda ds \quad (4.8)$$

Одавде на крају пута  $s$  спектрална радијанса се рачуна као

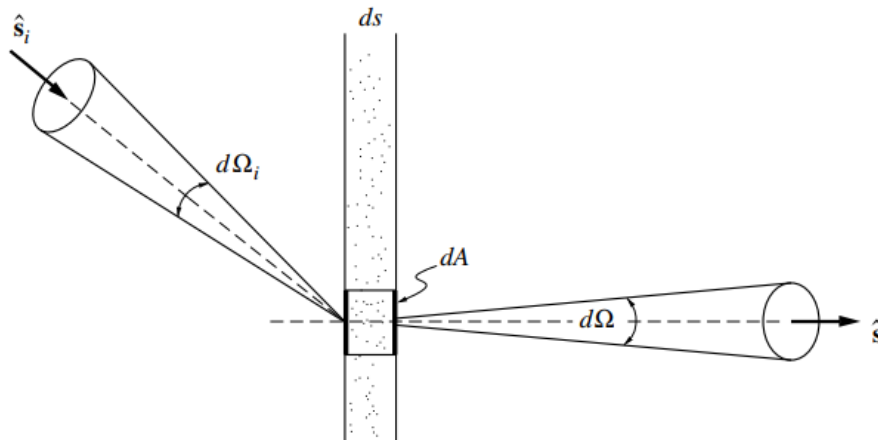
$$I_\lambda(s) = I_\lambda(0)e^{-\tau_\lambda} + I_{b\lambda}(1 - e^{-\tau_\lambda}) \quad (4.9)$$

Ако на крају пута  $s$  гледамо само емисију из изотермалне средине одакле долази зрачење у правцу вектора  $\mathbf{s}$  тада можемо да нађемо емисивност те средине

$$\varepsilon_\lambda = \frac{I_\lambda(s)}{I_{b\lambda}} = 1 - e^{-\tau_\lambda}. \quad (4.10)$$

#### 4.5 Расејање у правцу простирања зрачења

Расејање у правцу простирања зрачења доводи до појачања зрачења у посматраном правцу  $\mathbf{s}$  и овде мора да се урачуна допринос из целог просторног угла одакле долази околно зрачење. При рачунању доприноса околног зрачења из правца  $\mathbf{s}_i$  у правцу  $\mathbf{s}$  можемо да посматрамо енергију електромагнетног таласа која у уском конусу из правца  $\mathbf{s}_i$  пада на елементарну запремину  $dV = dA ds$  и доприноси појачању зрачења у правцу  $\mathbf{s}$  као на слици 4.1.



Слика 4.1. Допринос спектралној радијанси при расејању из околине [18].

Елементарним рачуном може се доћи до израза који описује овај допринос појачању зрачења у правцу  $\mathbf{s}$  расејањем из околног простора

$$\frac{dI_{\lambda,insca}}{ds} = \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\mathbf{s}_i) \Phi_{\lambda}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) d\Omega_i \quad (4.11)$$

Израз  $\Phi_{\lambda}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s})$  представља фазну функцију расејања и описује вероватноћу да ће се зрак из правца  $\mathbf{s}_i$  расејати у правцу  $\mathbf{s}$ . Вероватноћа да ће се зрак расејати у било ком правцу пуног просторног угла мора да буде једнака јединици:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_{\lambda}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) d\Omega_i = 1. \quad (4.12)$$

#### 4.6 Једначина преноса топлоте зрачењем

У средини у којој је успостављена барем локална термодинамичка равнотежа, за квази-стационарне случаје и за промене које нису близу светлосним брзинама на основу израза (4.1), (4.4), (4.7) и (4.11) главна једначина преноса топлотне енергије зрачењем може да се представи као

$$\frac{dI_{\lambda}}{ds} = \mathbf{s} \cdot \nabla I_{\lambda} = \kappa_{\lambda} I_{b\lambda} - \beta_{\lambda} I_{\lambda} + \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\mathbf{s}_i) \Phi_{\lambda}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) d\Omega_i \quad (4.13)$$

где је израз са леве стране извод у правцу  $\mathbf{s}$ .

#### 4.7 Дивергенција флукса топлотног зрачења

За конкретне проблеме у инжењерији, од интереса је наћи релацију која може да опише колику енергију може да емитује нека елементарна запремина  $dV = dx dy dz$  или колико енергије улази у ту запремину из спољне средине. Ако интегралимо једначину (4.13) по свим правцима у пуном просторном углу добијамо следећи израз

$$\int_{4\pi} \mathbf{s} \cdot \nabla I_{\lambda} d\Omega = \int_{4\pi} \kappa_{\lambda} I_{b\lambda} d\Omega - \int_{4\pi} \beta_{\lambda} I_{\lambda} d\Omega + \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\mathbf{s}_i) \Phi_{\lambda}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) d\Omega_i d\Omega \quad (4.14)$$

Када се преуреди ова једначина добија се

$$\nabla \cdot \int_{4\pi} I_\lambda \mathbf{s} d\Omega = 4\pi\kappa_\lambda I_{b\lambda} - \int_{4\pi} \beta_\lambda I_\lambda(\mathbf{s}) d\Omega + \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{s}_i) \left( \int_{4\pi} \Phi_\lambda(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) d\Omega \right) d\Omega_i, \quad (4.15)$$

одакле одмах добијамо дивергенцију топлотног флукса

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\lambda = 4\pi\kappa_\lambda I_{b\lambda} - \beta_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{s}) d\Omega + \sigma_{s\lambda} \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{s}_i) d\Omega_i, \quad (4.16)$$

Оба интеграла на десној страни (4.16) су иста и како важи  $\kappa_\lambda = \beta_\lambda - \sigma_{s\lambda}$  тада имамо израз

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\lambda = \kappa_\lambda \left( 4\pi I_{b\lambda} - \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{s}) d\Omega \right) = \kappa_\lambda (4\pi I_{b\lambda} - G_\lambda). \quad (4.17)$$

## 5. Радијативне карактеристике продуката сагоревања млевеног угља у индустријским котловима

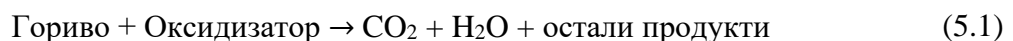
Ово поглавље ће бити посвећено опису оптичких особина мешавине партикуларне средине и насталих гасова као продуката сагоревања које су карактеристичне за већину термоелектрана које за гориво користе угаљ. Циљ овог поглавља је теоријско и нумеричко израчунавање коефицијената апсорпције и расејања који су део нумеричких симулација у овом раду.

Код термоелектрана на угаљ у конвенционалним постројењима угаљ се првобитно припрема за употребу тако што се меље у фини прах чиме се постиже већи степен искоришћења. При сагоревању уситњеног угља у ложиштима котлова се постижу температуре у распону од 1500 К до 2000 К. Топлота која се ослобађа при сагоревању се преноси највише кондукцијом и радијацијом до цеви бојлера. У цевима бојлера вода је у стању паре на температури од око 830 К на притиску приближно 180 бара.

У саставу припреме горива за процес сагоревања користе се млинови који имају улогу млевења и сушења угља пре него што се убаца у ложиште котла. Након што се угаљ измеље и осуши, тако припремљено гориво се удубава кроз горионике у ложиште.

Горионик има улогу мешања уситњеног угља и ваздуха као и паљења. Једно од најважнијих карактеристика горионика јесте брзина удубавања што зависи од топлотног капацитета и квалитета горива. Број и расподела млинова са горионцима утичу на стабилност и облик пламена унутар котла. Код котлова мањих димензија, горионци су постављени на једној страни ложишта. Код котлова већих димензија, као што је случај термоелектрана у Србији, горионци су постављени тангенцијално у односу на центар ложишта. Тангенцијалном оријентацијом се постиже вртложно кретање пламена и продуката сагоревања, што доприноси бољој размени топлоте и ефикаснијем процесу сагоревања. На дну ложишта се налази део котла у виду левка који служи за прихват пепела односно несагорелих производа као што су шљака и пепео.

Општа формула сагоревања угљоводоничних горива при реакцији са оксидизаторима може да се представи у облику:



Као главни оксидизатор се користи ваздух чији је главни састав 79%  $\text{N}_2$  и остатак је углавном  $\text{O}_2$ .

При сагоревању уситњеног угља на температурама око 1500 К главни апсорбери/емитери који учествују у топлотном преносу зрачењем су гасови  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  као и чврсте честице угља, чађи и пепела. У котловима на поменути температурама пренос топлоте конвекцијом и кондукцијом је много мањи у односу на пренос топлоте зрачењем. Зато је примарно за инжењере да се баве топлотним и температурним карактеристикама при

сагоревању горива унутар ложишта котлова користећи се законима преноса топлоте зрачењем. Температуре које се постижу унутар котлова зависе од дизајна котла, брзине убацивања горива, квалитета и радијативних/оптичких карактеристика гасова и честица које су део процеса сагоревања.

Поред молекула гаса воде и угљен-диоксида, појављују се гасови као што су NO, SO<sub>2</sub>, CO и угљоводонични молекули, међутим њихов допринос емисији зрачења је много мањи у великим котловима и пећима у односу на CO<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>O [30].

Емисионе и апсорбционе карактеристике молекула воде и угљен-диоксида и осталих продуката сагоревања су значајне тек на одређеним таласним дужинама. За топлотно/инфрацрвено зрачење од значаја су таласне дужине на 1.38 μm, 1.87 μm, 2.7 μm и 6.3 μm за H<sub>2</sub>O; 1.9 μm, 2.7 μm, 4.3 μm и 15 μm за CO<sub>2</sub>; 2.3 μm и 4.7 μm за CO и 4.0 μm, 4.3 μm, 7.4 μm, 8.7 μm и 19.3 μm за SO<sub>2</sub> [31, 32].

Највећи број фотона, са овим енергијама, се расејава еластично, односно таласна дужина се не мења. Само мали део се расејава нееластично што доводи то такозваног Рамановог расејања. Раманов ефекат је код случаја индустријске производње електричне енергије у котловима неважан. Ако је расејање на једној честици непертурбовано утицајем околних честица, можемо говорити о независном расејању.

Радијативна својства сферних честица радијуса  $a$  односно њихово понашање и интеракција са електромагнетним таласом, таласне дужине  $\lambda$  се одређује на основу три бездимензиона параметра:

1. Комплексни индекс преламања  $m = n - ik$ .
2. Параметар величине  $x = 2\pi a/\lambda$ .
3. Параметра односа  $c/\lambda$ .

Трећи параметар за однос  $c/\lambda \gg 1$  означава да је расејање независно.

Расејање и апсорбција зрачења на једној честици био је предмет разматрања још у 19. веку почевши од Лорд Рејлија [33, 34] који је нашао решења за честице чије су димензије много мање од таласне дужине зрачења ( $x \ll 1$ ). Након њега дански физичар Лудвиг Лоренц [35, 36] 1890. и немачки физичар Густав Мие [20] 1909. на основу Максвелове електромагнетне теорије долазе до решења за случај када честице нису ни превише мале ( $x \ll 1$ ) ни превише велике ( $x \gg 1$ ). Ова теорија је данас општеприхваћена под називом Лоренц-Мие теорија расејања. Лоренц-Мие теорија расејања је веома компликована и овде ће бити дати само њени главни резултати.

За опис ове теорије користе се параметри као што су попречни пресек расејања  $C_{sca}$  и попречни пресек апсорбције  $C_{abs}$ . Параметар попречног пресека атенуације или екстинкције се добија збиром ова два параметра  $C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}$ . Често се уместо ових

параметара користе бездимензиони фактори ефикасности за апсорпцију, расејање и екстинкцију редом:  $Q_{abs} = C_{abs}/\pi a^2$ ,  $Q_{sca} = C_{sca}/\pi a^2$  и  $Q_{ext} = C_{ext}/\pi a^2$ . И очигледно је да важи  $Q_{ext} = Q_{abs} + Q_{sca}$ .

Као помоћне функције које су део Лоренц-Мие теорије расејања користе се такозване амплитудне функције  $S_1(\theta)$  и  $S_2(\theta)$

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos(\theta)) + b_n \tau_n(\cos(\theta))], \quad (5.2)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos(\theta)) + a_n \tau_n(\cos(\theta))], \quad (5.3)$$

где су  $\pi_n$  и  $\tau_n$  функције које су везане за Лежандрове полиноме

$$\pi_n(\cos(\theta)) = \frac{dP_n(\cos(\theta))}{d\cos(\theta)}, \quad (5.4)$$

$$\tau_n(\cos(\theta)) = \cos(\theta) \pi_n(\cos(\theta)) - \sin^2(\theta) \frac{d\pi_n(\cos(\theta))}{d\cos(\theta)}. \quad (5.5)$$

Коефицијенти  $a_n$  и  $b_n$  су Мие коефицијенти расејања као комплексне функције од величина  $x$  и  $y = mx$ :

$$a_n = \frac{\frac{d\psi_n(y)}{dy} \psi_n(x) - m\psi_n(y) \frac{d\psi_n(x)}{dx}}{\frac{d\psi_n(y)}{dy} \zeta_n(x) - m\psi_n(y) \frac{d\zeta_n(x)}{dx}}, \quad (5.6)$$

$$b_n = \frac{m \frac{d\psi_n(y)}{dy} \psi_n(x) - \psi_n(y) \frac{d\psi_n(x)}{dx}}{m \frac{d\psi_n(y)}{dy} \zeta_n(x) - \psi_n(y) \frac{d\zeta_n(x)}{dx}}. \quad (5.7)$$

Функције  $\psi_n$  и  $\zeta_n$  су повезане са Беселовим и Ханкеловим функцијама релацијама:

$$\psi_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad \zeta_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} H_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (5.8)$$

Са овим функцијама можемо наћи параметре ефикасности за расејање и екстинкцију

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (5.9)$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\mathcal{R}(a_n + b_n). \quad (5.10)$$



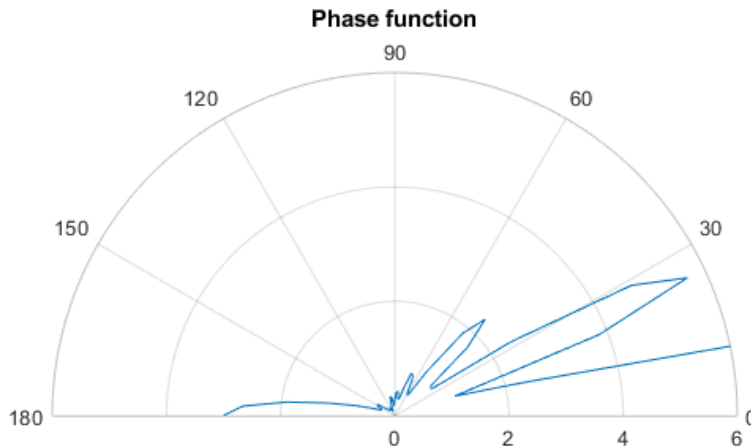
На основу свега наведеног можемо прво да нађемо фазну функцију расејања (4.12) преко израза:

$$\Phi(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}) = \Phi(\theta) = 2 \frac{|S_1|^2 + |S_2|^2}{x^2 Q_{sca}} \quad (5.11)$$

где су  $S_1 = S_1(x, m, \theta)$  и  $S_2 = S_2(x, m, \theta)$  амплитудне функције (5.2) и (5.3).

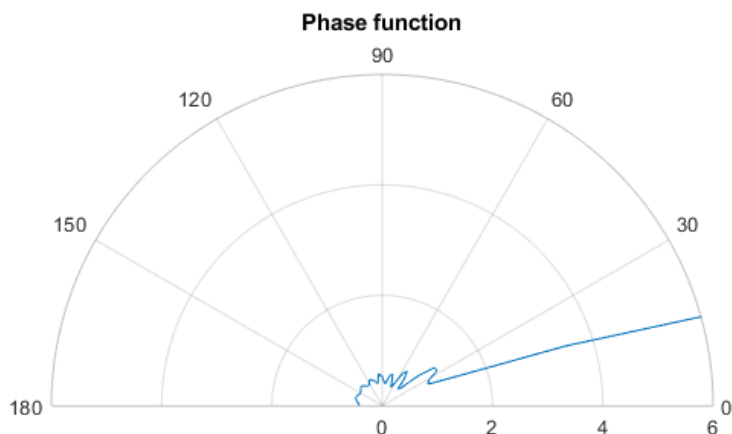
У оквиру нумеричких симулација написан је програм за рачунање фазне функције расејања која даје расподелу вероватноће расејања по угловима у поларном координатном систему. Цео програм је приложен у два фајла *testPhaseFunction.m* и *Phase.m*. Овде можемо дати два случаја нумеричке симулације.

Први случај за диелектричну сферну честицу чији су параметри  $x = 10, m = 2$  је дат на слици 5.1.



Слика 5.1: Расподела вероватноће расејања по угловима за случај диелектричне честице и вредности параметара  $x = 10, m = 2$ .

Други случај је за алуминијумску честицу са параметрима  $x = 10, m = 4.46 - 31.5i$  и дат је на слици 5.2.



Слика 5.2: Расподела вероватноће расејања по угловима за случај алуминијумске честице и вредности параметара  $x = 10, m = 4.46 - 31.5i$ .

Овде можемо навести неке вредности комплексних индекса преламања за типове уситњеног угља који се користе као гориво у термоелектранама у блиско-инфрацрвеној области таласних дужина (Табела 5.1).

Табела 5.1: Вредности индекса преламања за разне типове угља који се користе у индустрији [37].

Тип честица угља	Вредност индекса преламања $m = n - ik$
Антрацит	$2.05 - 0.54i$
Бизмут	$1.85 - 0.22i$
Лигнит	$1.70 - 0.066i$
Летећи пепео	$1.50 - 0.020i$

У току процеса сагоревања на високим температурама (од 1000 °C до 1600 °C) унутар котлова или пећи поред гасова као продукта сагоревања имамо разне типове угљених честица. Најчешћа класификација или подела ових честица које су присутне у пламену је на уситњене угљене честице, деволатизоване угљене честице, чађ и пепео. Уситњене угљене честице су просто сирово гориво које се убацује удувавањем преко горионика. Деволатизоване честице угља (char) настају након термичког процеса испаравања свих испарљивих делова материје. Даље сагоревање доводи до појаве несагоривог остатка материје као што је пепео (ash) и делимично сагореле угљене материје као што је чађ (soot).

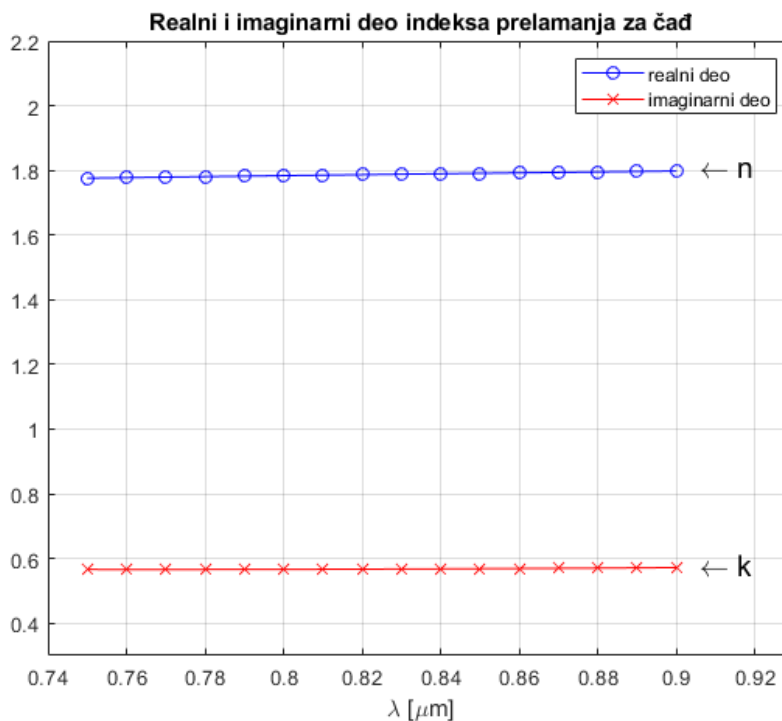
Обично се узима да су димензије уситњеног угља и деволатизованог остатка реда  $100 \mu\text{m}$  и веће; пепео има нешто мање димензије реда од  $10 \mu\text{m}$  до  $30 \mu\text{m}$  међутим честице пепела се групишу међусобно па су најчешће димензије за лигнит од  $75 \mu\text{m}$  до  $90 \mu\text{m}$  и за бизмут од  $38 \mu\text{m}$  до  $45 \mu\text{m}$ ; за чађ су димензије реда величине од  $20 \text{nm}$  до  $60 \text{nm}$  [38].

Програми за израчунавање параметара ефикасности за расејање и екстинкцију су приложени у фајловима *MieQsca.m* и *MieQext.m*. Вредности реалног и комплексног дела индекса преламања за чађ могу да се рачунају по формули [37] за опсег вредности од  $0.4 \mu\text{m}$  до  $30 \mu\text{m}$ :

$$n(\lambda) = 1.811 + 0.1263 \cdot \log(\lambda) + 0.027 \cdot \log(\lambda)^2 + 0.0417 \cdot \log(\lambda)^3 \quad (5.12)$$

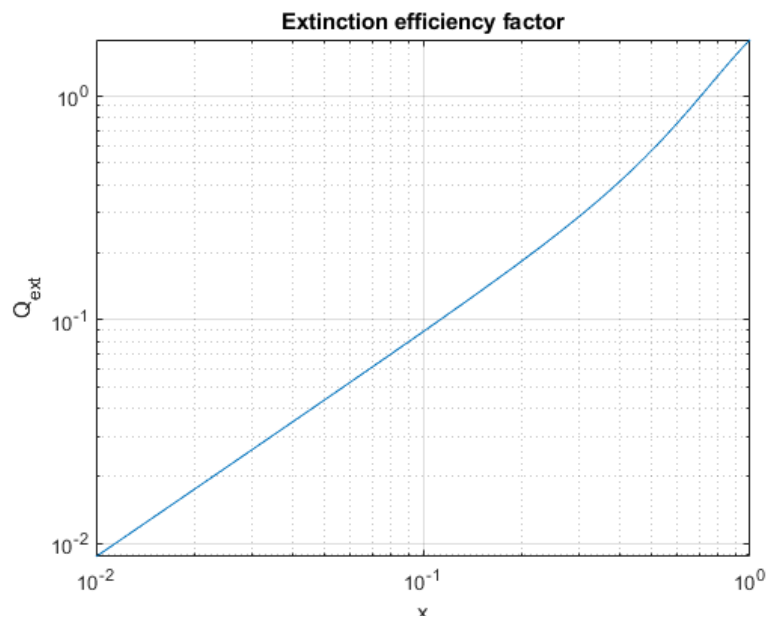
$$k(\lambda) = 0.5821 + 0.1213 \cdot \log(\lambda) + 0.2309 \cdot \log(\lambda)^2 + 0.01 \cdot \log(\lambda)^3 \quad (5.13)$$

где је  $\lambda$  таласна дужина у микронима. Расподела вредности реалног и имагинарног дела индекса преламања у зависности од таласне дужине за чађ је дата на слици 5.4. Програм за штампање графика је дат у фајлу *SootRefractiveIndex.m*.



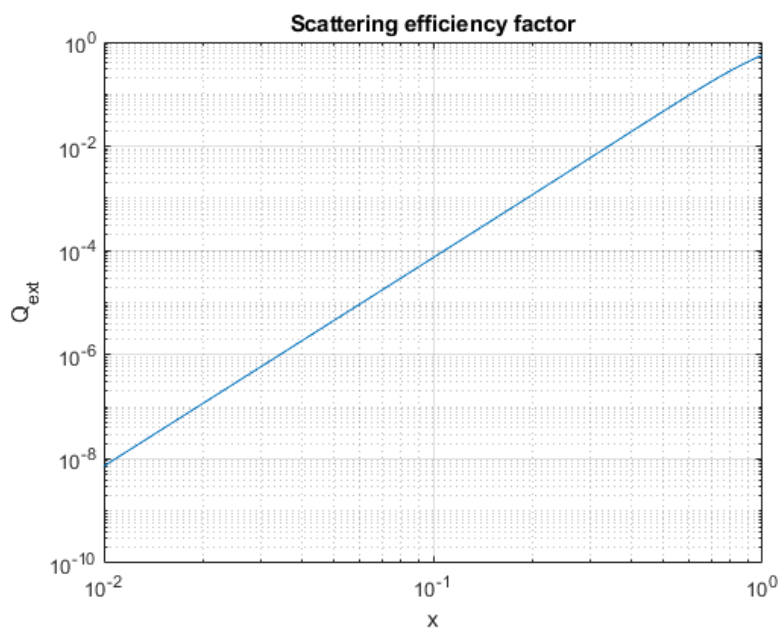
Слика 5.3. Расподела реалног и имагинарног дела индекса преламања по таласним дужинама за чађ.

На основу података за индекс преламања и величину честице чађи, можемо наћи фактор ефикасности за екстинкцију (Слика 5.4).



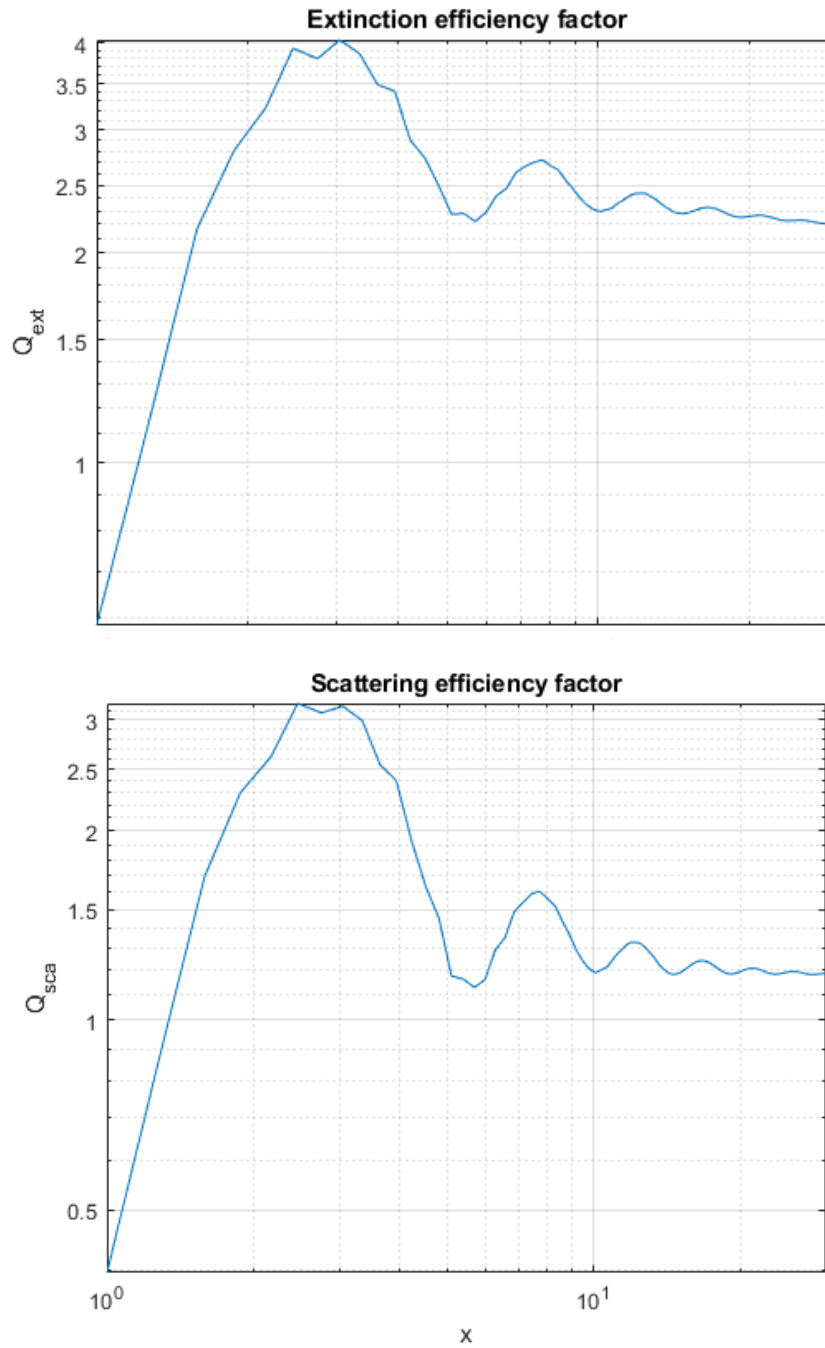
Слика 5.4. Фактор ефикасности за екстинкцију код чађи по Лоренц-Мие теорији.

Такође можемо израчунати фактор ефикасности за расејање тј. расподелу као на слици 5.5.



Слика 5.5. Фактор ефикасности за расејање код чађи по Лоренц-Мие теорији.

Фактори ефикасности за екстинкцију и расејање за угљене честице лигнита су дати на слици (5.6).



Слика 5.6. Фактор ефикасности лигнита за расејање.

Ако све честице имају иста оптичка својства у неком делу простора у коме се врши процес сагоревања тада на основу познавања попречног пресека честица за атенуацију и расејање као и расподеле честица по димензијама можемо да израчунамо коефицијенте расејања и екстинкције:

$$\sigma_{s\lambda} = \pi \int_0^{\infty} Q_{sca} a^2 n(a) da, \quad (5.14)$$

$$\beta_{\lambda} = \pi \int_0^{\infty} Q_{ext} a^2 n(a) da. \quad (5.15)$$

Функција  $n(a)$  је функција дистрибуције честица по димензијама. Најћешћи облик ове функције када имамо неуниформну расподелу по димензијама је дат изразом:

$$n(a) = Aa^{\gamma} e^{-Ba^{\delta}}, 0 \leq a \leq \infty. \quad (5.16)$$

Константе  $A, B, \gamma, \delta$  су позитивни реални бројеви и одређују се мерењима односно емпиријски [40]. Величина која се често користи у рачуну оптичких својстава честица јесте укупна запремина честица по јединици запремине или такозвана запреминска фракција

$$f_v = \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi a^3 n(a) da. \quad (5.17)$$

Однос параметра величине  $x$  и запреминске фракције  $f_v$  за различите типове честица које учествују у радијацији и које су продукти сагоревања угља у котловима термоелектрана је дат на слици 5.7.

Честице са униформном расподелом по димензијама тј. честице униформних димензија се најчешће користе у рачуну у пракси пошто је параметре за неуниформну расподелу тешко одредити. Тако се коефицијенти расејања и атенуације рачунају по изразима:

$$\sigma_{s\lambda} = \pi a^2 N_T Q_{sca} \quad (5.18)$$

$$\beta_{\lambda} = \pi a^2 N_T Q_{ext} \quad (5.19)$$

где  $N_T$  представља број честица по јединици запремине.

За честице чађи чије су димензије у односу на таласну дужину зрачења  $x \ll 1$  можемо сматрати да је расејање електромагнетног таласа на њима Рејлијево расејање. Рејлијево расејање се може рачунски представити преко Лоренц-Мие теорије расејања у лимесу када  $x \rightarrow 0$ . У том случају ефективни пресеци за расејање и апсорпцију се могу рачунати по формулама:

$$Q_{sca} = \frac{8}{3} \cdot \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 \cdot x^4 \quad (5.20)$$

$$Q_{abs} = -4 \cdot \text{Im} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right) \cdot x \quad (5.21)$$

Одавде већ видимо да за  $x \ll 1$  важи да је  $x^4 \ll x$  односно утицај расејања на оптичке особине честице чађи су занемарљиве у односу на апсорпцију. Коефицијент апсорпције из (5.14), (5.15), (5.17) и (5.21) добијамо у облику

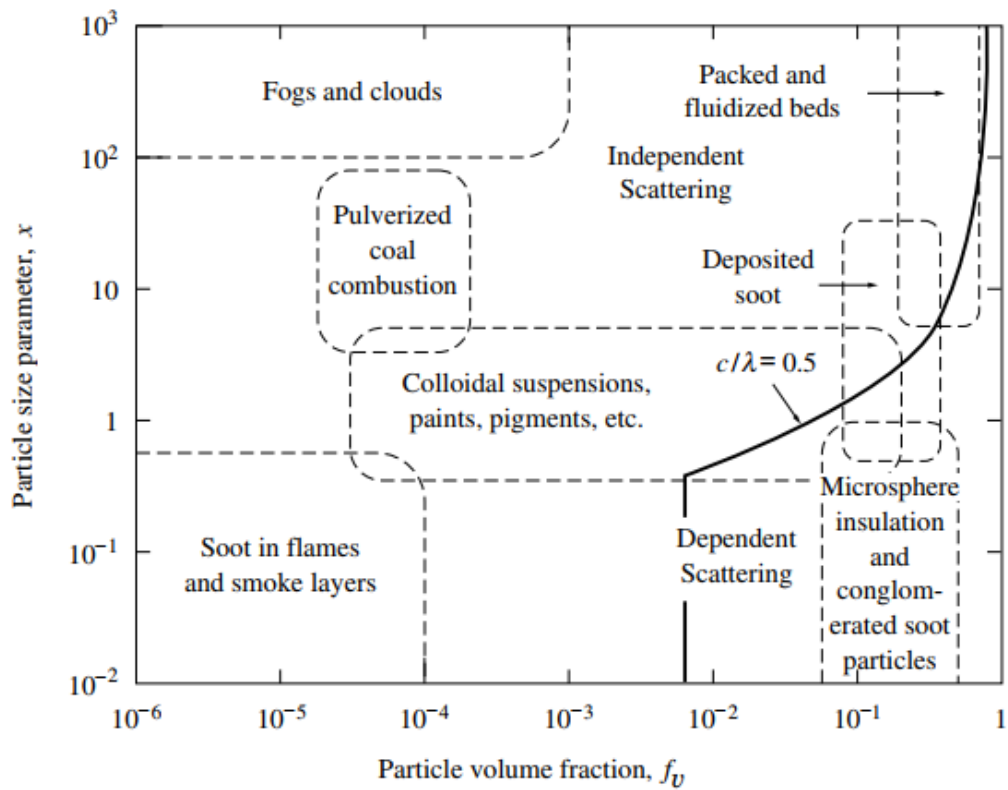
$$\kappa_\lambda = \frac{36\pi n k}{(n^2 - k^2 + 2)^2 + 4n^2 k^2} \frac{f_v}{\lambda} \quad (5.22)$$

Када се утврде оптичка својства свих компоненти горива као и продуката сагоревања тада се укупни коефицијент апсорпције и атенуације за мешавину гасова и честица могу изразити преко релација:

$$\kappa_\lambda = \sum_{i=1}^m \kappa_{p,\lambda,i} + \sum_{j=1}^n \kappa_{g,\lambda,j} \quad (5.23)$$

$$\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sum_{i=1}^m \sigma_{p,\lambda,i} \quad (5.24)$$

Индекси  $p$  и  $g$  се односе на ознаке честичних и гасних компоненти, док бројеви  $m$  и  $n$  представљају укупне бројеве честичних и гасних компоненти честично-гасне мешавине која учествује у процесу сагоревања и дефинише оптичка својства горива на таласној дужини  $\lambda$ .



Слика 5.7. Однос параметра величине честице и запреминске фракције за разне продукте сагоревања [41].



## 6. Експериментална и мерна техника

У овом поглаву ће укратко бити описана експериментална инструментација која се најчешће користи у индустрији и у истраживањима по лабораторијама за мерење и добијање температурног профила.

Постоје три начина преноса или размене топлоте из једног дела средине у другу или са једног тела на друго. То су кондукција, конвекција и радијација. Кондукција се спроводи између два тела или између делова тела на различитим температурама међусобним деловањем суседних молекула који имају различите брзине кретања. Конвекција топлоте се појављује код флуида где долази до мешања материје под условом да постоји разлика у температури или густини унутар самог флуида. Пренос топлоте радијацијом се појављује због чињенице да материја на било којој температури изнад апсолутне нуле емитује електромагнето зрачење. Топлотно зрачење се обично дефинише на интервалу таласних дужина од  $0.4 \mu m$  до  $10000 \mu m$ .

Постоји главна подела мерења температуре пламена у пећима или ложиштима котлова и то су контактне и бесконтактне методе. Контактне методе се углавном користе у случајевима где је доминантан процес кондукција. Бесконтактне методе се користе када имамо случај да је радијација доминантан вид преноса топлоте.

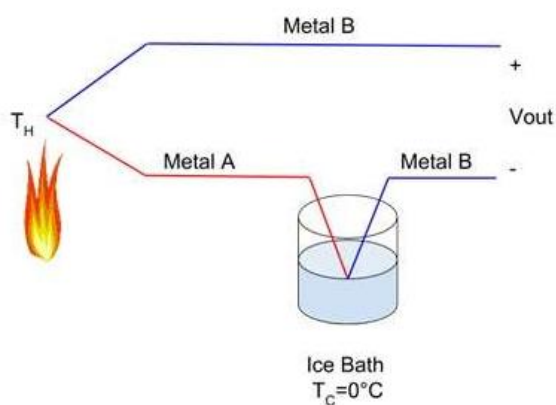
Друга подела би могла да се направи на такозване инвазивне и неинвазивне технике мерења температуре. Кад кажемо инвазивна техника мислимо на уметање сонде у пламену средину односно сондирање. Сондирање је једно од главних техника мерења и контроле температуре у термоелектранама као и уопште у индустрији. Ова техника је погодна за уградњу у коморама за сагоревање фосилних горива. Са њима је могуће поред мерења температуре пратити промене концентрације појединих врста гасова. Такође са њима можемо пратити концентрације, димензије и брзине одређених врста угљених честица и њених продуката при сагоревању као што су чађ и пепео.

### 6.1 Контактне методе

Код контактних метода неопходно је да сонда са сензором буде у контакту са пламеном при чему се постиже мерење температуре помоћу кондукције. Ово захтева да сонда инструмента мора да буде издржљива и робусна да би поднела високе температуре и корозивно разарајућа дејства средине пламена. Ове сонде морају да буду посебно дизајниране користећи се материјалима који су отпорни на високе температуре као и системом воденог или ваздушног хлађења.

### 6.1.1 Термопарови

Термопарови су најкоришћенији сензори у индустрији где је потребно мерити температуру пламена. Основна конструкција термопара се састоји од два проводника који су спојени на крајевима. Загревањем једног краја долази до појаве термоелектричног ефекта (Зебеков ефекат) при чему се у односу на други крај (хладни спој) ствара електромоторна сила односно разлика потенцијала која је пропорционална температурној разлици топлог и хладног споја (Слика 6.1). Од проводника се најчешће користе метали и њихове легуре као што је спој родијум-платина који има задовољајуће карактеристике за индустријске примене [42, 43].



Слика 6.1. Термопар мери температуру  $T_H$  у односу на референтну температуру  $T_C$  на хладном крају који се обично термостатира.

У индустријским применама користе се за мерење температура максимално до 2000 К. Погодни су за уграђивање у коморама за сагоревање, малих су димензија и могу да издрже јаке вибрације. Код термоелектрана се уграђују у већем броју на различитим позицијама и постављају се на зидове ложишта котла. У ширем опсегу температура тачност мерења термопарова се креће између  $\pm 0.5^\circ\text{C}$  и  $\pm 2^\circ\text{C}$  при чему у неким случајевима може да се постигне тачност од  $0.1^\circ\text{C}$  [42]. Најчешће се користе у комбинацији са другим мерним инструментима као што су двобојни пирометри, акустичне методе и ласерска спектроскопија [45, 46]. Обично се користе као контролни инструменти за уочавање процеса који неповољно утичу на процес преношења топлоте као што су зашљакавање и застакљивање зидова котла.

## 6.1.2 Индустијски отпорни термометри на бази платине

Њихов сензор се заснива на промени температуре при загревању или хлађењу. Са оваквим типовима сензора могуће је мерити температуре са веома високом тачношћу, тако што се пропушта мала струја кроз навој од платине чија је електрична отпорност у функцији промене температуре. Платина се овде користи због саме стабилности материјала и линеарне зависности између промене температуре и електричне отпорности платине. Грешка мерења температуре се креће у опсегу од  $\pm 0.01$  °C до 0.2 °C [44].

## 6.1.3 Усисни пирометри

Усисни пирометри раде на принципу увлачења гасова при процесу сагоревања у сонду при чему се при великој брзини гас превлачи преко термопара. Главни процес преношења топлоте је преко конвекције чиме се заправо мери температура гаса који пролази преко термопара [47, 48]. Термопар унутар усисног пирометра је обезбеђен слојем од минералног оксида чиме је заштићен од хемијских реакције при интеракцији са гасовима. Посебно кућиште у којем је смештен термопар има улогу изолације споја од околног зрачења.

Усисни пирометри се најчешће користе у ложиштима котлова у термоелектранама и индустријским пећима чије су димензије довољно велике за уношење инструмента унутар комора за сагоревање горива. Усисни пирометри могу да се користе и за одређивање састава гасова у ложиштима и коморама.

Брзине увлачења гасова се крећу од 5 m/s до 150 m/s у зависности од конструкције и препоруке употребе [49]. Највећи проблем је време које је потребно увлачити гас преко термопара да би се постигла термодинамичка равнотежа и обично је потребно пар минута сачекати да би се температура променила за 100 °C [50].

## 6.2 Бесконтактне методе

Бесконтактни термометри мере температуру пасивном методом односно мерећи емитовано зрачење неког објекта у одређеном интервалу таласних дужина. Једно од главних предности оваквог метода мерења је што не уноси никакве поремећаје или промене у температурно поље које се мери за разлику од контактних метода. Интервал таласних дужина на којима се врши мерење температуре бесконтактном методом се креће од видљивог дела спектра (од 400 nm до 780 nm) до инфрацрвеног дела спектра (до 20  $\mu$ m). Емитована енергија зависи од емисивности површине или средине чија се температура

мери. Емисивност тела/средине може да се мења са променом таласне дужине или температуре тог тела/средине зато се тежи развоју система који могу истовремено да мере температуру и емисивност [51].

### 6.2.1 CCD оптички сензор

CCD (енг. Charged-Coupled Device) уређај се први пут појавио 1969. године. Њени проналазачи су George E. Smith и Willard S. Boyle који су радили у Беловим лабораторијама<sup>2</sup>. Овај оптички сензор може да буде у конфигурацији једнодимензионалног низа (као код спектрометра) или дводимензионалне површи (CCD камера). CCD представља скуп неколико хиљада или неколико милиона оптичких детектора. Појединачни детектор је кондензатор чија је конструкција заснована на метал-оксидном полупроводнику. Ради на принципу фотоефекта и за разлику од обичних фотодиода, детектор (пиксел) акумулира наелектрисања у кондензатору. Ова акумулирана наелектрисања се читавају као напон на кондензатору и на крају се врши аналогно-дигитална конверзија, где се дигитална вредност складишти у меморију чипа. Време читавања код CCD детектора је реда мили секунде. CCD детектори се конструишу у виду интегрисаних кола. Величина пиксела је до десет микрона. Покривају обично спектралну област од 190 nm до 1000 nm. Квантна ефикасност<sup>3</sup> је око деведесет посто [148].

У температурној томографији су најзаступљенији уређаји за мерење температуре. Већина мери зрачење на три таласне дужине (плава, зелена и црвена). Имају могућност да се користе и за мерење температурног поља у инфрацрвеној области спектра. Дакле, користе се као радијациони пирометри и имају широко видно поље. Због тога су погодне да када се поставе у више позиција обухвате цео простор унутар комора, што им омогућава примену у тродимензионалној реконструкцији температурног поља.

Код спектрометра, спектрографа, у излазној равни имамо CCD детектор. Спектрометри се обично користе у ултраљубичастој, видљивој и инфрацрвеној области таласних дужина електромагнетног зрачења. Основна конструкција спектрометра се састоји од: улазног прореза, дисперзионог елемента, оптичког система и детектора у излазној равни. Дисперзиони елемент може да буде дифракциона решетка или призма. Дифракционе решетке имају већу моћ разлагања<sup>4</sup>.

---

<sup>2</sup> Bell Telephone Laboratories

<sup>3</sup> Количник броја упадних фотона које је детектор апсорбовао и броја електрона које је детектор произвео.

<sup>4</sup> Минимално раздвајање две блиске спектралне линије једнаких интензитета.

## 6.2.2 Двобојни и вишебојни пирометри

Код двобојног пирометра имамо, као оптички сензор сендвич фотодиоде, тако да можемо да меримо емитовано зрачење на две таласне дужине. Овде се подразумева да су коефицијенти емисивности емитера на тим таласним дужинама приближно исте. На овај начин, комбинацијом мерења на две блиске таласне дужине, успевамо да отклонимо потребу познавања коефицијента емисивности. Проблем може настати када се емитер не понаша као сиво тело на тим таласним дужинама.

Примена двобојног пирометра је највећа код термоелектрана које користе угаљ, пошто се честице које емитују топлоту понашају, у одређеном спектралном опсегу, као сива тела. Мерење овим инструментом се обавља ако су у пламену присутне честице угља, чађи и пепела. Њихова примена је ограничена због уског видног поља. Мерећи интегрисано зрачење дуж видног поља добија се температура чији је резултат највише отежињен ка делу оптичког пута са највећом температуром [109]. Вишебојни пирометри имају примену код термоелектрана код које користе као гориво битумен или друге типове горива [149].

## 7. Монте Карло метод решавања директног проблема

Једначина преноса топлоте зрачењем (4.13) је петодимензионална<sup>5</sup> интегрално-диференцијална једначина која је веома компликована за решавање. До сада су развијене бројне успешне методе које решавају овај проблем у мање или више ограниченим условима. Једна од познатих метода за решавање јесте метода Сферних хармоника (енг. Spherical Harmonic Method). Ова метода даје апроксимативно решење, до одређене тачности, тако што трансформише једначину преноса топлоте зрачењем у систем парцијалних диференцијалних једначина. Више о овој методи се може наћи у литератури [65, 66, 67, 68]. Друга популарна метода је метода Дискретних ордината (енг. Discrete Ordinate Method). Она је слична методи Сферних хармоника и своди се на решавање система парцијалних диференцијалних једначина [69, 70, 71, 72]. Трећа популарна метода је Зонска метода (енг. The Zonal Method) и она је применљива за апсорбујућу и емитујућу средину са изотропним расејањем. У овој методи средина је подељена на коначан број изотермалних зона, односно воксела и зидних сегмената. Код ње се решава размена топлоте између било које две зоне са тим да се успостави термодинамичка равнотежа. Ова метода је описана у литератури [73, 74, 75, 76, 77].

У последње време најпопуларнија метода решавања преноса топлоте зрачењем је Монте Карло метода. Главни разлог овоме јесте раст процесорске снаге савремених рачунара<sup>6</sup> као и све једноставнија употреба паралелизма у програмирању. Ако кренемо од једначине (4.17), која описује дивергенцију флукса зрачења за инфинитезималну запремину, онда можемо да је преформулишемо у следећем облику:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} = 4\kappa_p \sigma T^4 - \int_A \epsilon(\mathbf{r}') \sigma T^4(\mathbf{r}') \frac{d\mathcal{F}_{dA' \rightarrow dV}}{dV} dA' \\ - \int_V 4\kappa_p(\mathbf{r}'') \sigma T^4(\mathbf{r}'') \frac{d\mathcal{F}_{dV'' \rightarrow dV}}{dV} dV''. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Са десне стране први члан представља укупно емитовано зрачење у простору по јединици запремине. Коефицијент  $\kappa_p$  представља коефицијент апсорпције, остатак првог члана је у ствари Штефан-Болцманов закон зрачења. Други члан израчунава део зрачења који доспева са затворене површине, ако је средина ограничена у неком простору,  $\epsilon(\mathbf{r}')$  је емисивност зида на позицији  $\mathbf{r}'$  док је  $d\mathcal{F}_{dA' \rightarrow dV}$  фракција зрачења које доспева од елементарне површи  $dA'$  до елементарне запремине  $dV$ . Трећи члан представља део зрачења који доспева из околне запремине. Део зрачења  $\mathcal{F}_{dV'' \rightarrow dV}$  је фракција зрачења која долази из околне

<sup>5</sup> Три просторне координате и две за правац простирања.

<sup>6</sup> Пораст броја језгара код CPU, све снажније графичке карте GPU и раст радне фреквенције у GHz што код процесора што код RAM меморије.

запремине/средине од елементарне запремине  $dV''$  до наше посматране запремине  $dV$ . Коефицијент  $\kappa_p(\mathbf{r}'')$  је коефицијент апсорпције на позицији  $\mathbf{r}''$ .

Када се једначина (7.1) интегрални и дискретизује, добија се следећи облик:

$$\int_{V_l} \nabla \cdot \mathbf{q} dV = 4\kappa_{pl}\sigma T_l^4 V_l - \sum_{j=1}^J \varepsilon_j \sigma T^4 A_j \mathcal{F}_{j \rightarrow l} - \sum_{k=1}^K 4\kappa_{pk}\sigma T_k^4 V_k \mathcal{F}_{k \rightarrow l}. \quad (7.2)$$

Температура  $T_k$  је средња вредност температуре у запремини  $V_k$ :

$$\kappa_{pk}\sigma T_k^4 = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \kappa_{pk}\sigma T^4 dV. \quad (7.3)$$

Вредности  $i = 1, \dots, J$  и  $l = 1, \dots, K$  пребројавају сегменте површина и вокселе односно запремине. Вредност  $J$  је укупан број површинских сегмената,  $K$  је укупан број запреминских воксела.

Фракције зрачења које доспевају од  $j$ -тог сегмента до  $l$ -тог воксела  $\mathcal{F}_{j \rightarrow l}$  и од  $k$ -тог воксела до  $l$ -тог воксела  $\mathcal{F}_{k \rightarrow l}$  су такозване READ<sup>7</sup> вредности које се израчунавају статистичком методом односно директном<sup>8</sup> Монте Карло методом [78, 79].

## 7.1 Директни Монте Карло метод

Овде ће бити описан класичан статистички начин израчунавања READ вредности применом Монте Карло метода. О овој методи се може наћи више информација у литератури [80].

### 7.1.1 Координате избацивања/емисије фотона из воксела

Као што је већ речено, цео простор и површ која га затвара делимо на вокселе и зидне сегменте. У најједноставнијем случају узимамо да су воксели облика коцке или уопштеније квадра. Ако узмемо да је температура свуда једнака унутар посматраног воксела тада су координате емисије фотона дате са:

$$x_0 = (R_x - 0.5)\Delta x + x_c, \quad (7.4)$$

$$y_0 = (R_y - 0.5)\Delta y + y_c, \quad (7.5)$$

<sup>7</sup> Енг. Radiant Energy Absorption Distribution.

<sup>8</sup> Енг. Forward Monte Carlo Method.

$$z_0 = (R_z - 0.5)\Delta z + z_c. \quad (7.6)$$

Координате  $x_c, y_c$  и  $z_c$  су координате центра воксела. Величине  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z$  су димензије воксела. Бројеви  $R_x, R_y$  и  $R_z$  су добијени генератором случајних бројева по униформној расподели.

Правац и смер емисије фотона описујемо преко поларних координата:

$$\psi = 2\pi R_\psi, \quad (7.7)$$

$$\theta = \arccos(1 - 2R_\theta). \quad (7.8)$$

Углови емисије  $\psi$  и  $\theta$  су поларни и азимутни угао.

### 7.1.2 Апсорпција унутар медијума

У овом случају, за задате вредности коефицијнта апсорпције  $\kappa_\lambda$  по вокселима, треба наћи укупан пређени пут фотона пре него што се апсорбује у средини. Полази се од једначине (4.3), и одатле ако фотон пређе пут  $l_k$ , тада је веза између генерисаног случајног броја  $R_a$  по униформној расподели и оптичког пута:

$$R_a = e^{-\int_0^{l_k} \kappa_\lambda ds}. \quad (7.9)$$

Ако је коефицијент апсорпције константан дуж целог пута, онда можемо да нађемо укупан пут:

$$l_k = \frac{1}{\kappa_\lambda} \ln \frac{1}{R_a}. \quad (7.10)$$

Када немамо униформан коефицијент апсорпције дуж пута који фотон прелази тада укупан пређени пут можемо израчунати из услова:

$$\sum_k \kappa_{\lambda k} s_k \leq \ln \frac{1}{R_a}. \quad (7.11)$$



### 7.1.3 Расејање унутар медијума

За расејање можемо да користимо аналогну релацију. Ако је коефицијент расејања константан дуж путање фотона  $\sigma_{s\lambda}$  за генерисани случајни број добијен по униформној расподели  $R_\sigma$  пређени пут фотона пре расејања је:

$$l_\sigma = \frac{1}{\sigma_{s\lambda}} \ln \frac{1}{R_\sigma}. \quad (7.12)$$

Када немамо исти коефицијент расејања, већ нам се мења из воксела у воксел, тада пређени пут пре расејања рачунамо из услова:

$$\sum_k \sigma_{s\lambda k} s_k \leq \ln \frac{1}{R_\sigma}. \quad (7.13)$$

Када се деси расејање, поларне углове расејања  $\psi'$  и  $\theta'$  можемо наћи по формулама:

$$R_{\psi'} = \frac{\psi'}{2\pi} \quad (7.14)$$

$$R_{\theta'} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos\theta' + \frac{A_1}{2} \sin^2\theta' \right). \quad (7.15)$$

За изотропно расејање коефицијент  $A_1 = 0$ . Једначину (7.15) треба инверзно решити по  $\theta'$ . Вредности  $R_{\psi'}$  и  $R_{\theta'}$  се добијају преко генератора случајних бројева по равномерној расподели.

### 7.1.4 Расејање са површине зидова котла

За дифузни емитер, поларне углове за правац и смер расејања формирамо преко једначина:

$$\psi_s = 2\pi R_{\psi_s} \quad (7.16)$$

$$\theta_s = \arcsin \left( \sqrt{R_{\theta_s}} \right). \quad (7.17)$$

Бројеви  $R_{\psi_s}$  и  $R_{\theta_s}$  се добијају преко генератора случајних бројева по униформној расподели.

### 7.1.5 Програм за рачунање READ вредности

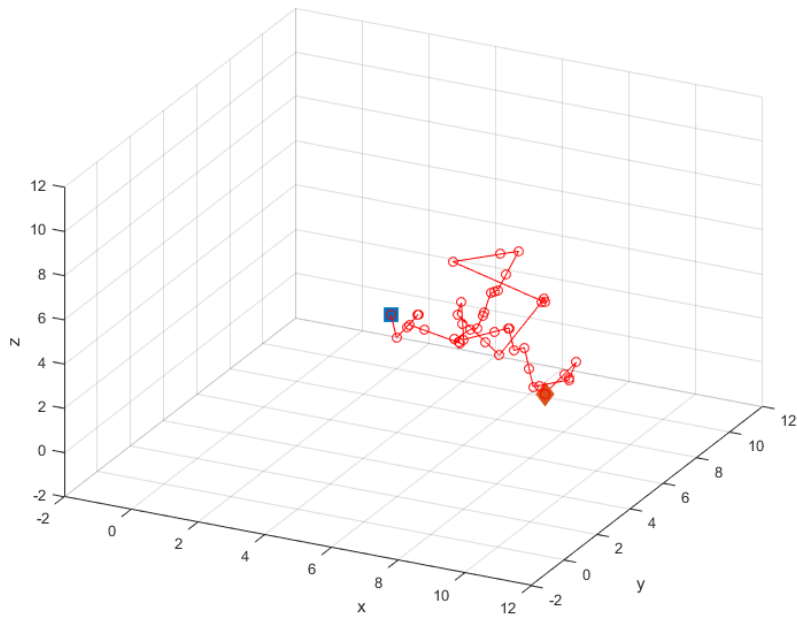
У оквиру дисертације напиасан је програм за рачунање READ вредности. Програм је дат у изворном коду у прилогу (13.4). Простор у коме се рачунају путање фотона је издељен на  $10 \times 10 \times 10$  воксела по  $x, y$  и  $z$  координатама. Такође, зидни сегменти су издељени на  $6 \times 10 \times 10$  сегмената, што формира димензију матрице  $12 \times 12 \times 12$  са 128 елемената који немају никакаву важност (додељена им је вредност нула). Могуће је задати димензије воксела и тиме и целог простора. У програму се задају вредности коефицијената за апсорпцију и расејање. Могуће је засебно за сваки воксел да се задају међусобно различите вредности коефицијената апсорпције и расејања. Такође, може се задати коефицијент емисивности за зидове.

Улаз у програм су координате воксела одакле креће емисија фотона у свим правцима поштујући наведена правила из Монте Карло симулације. Генеришу се случајне вредности за апсорпцију и расејање, и тиме се унапред одређује колики пут ће фотон прећи. Ако до апсорпције има више случајева расејања, онда се сабирају делови пређеног пута по формули (7.11) све док се фотон не заустави до коначне апсорпције. Између свака два расејања треба да се испуни услов (7.13). При сваком тренутку расејања се рачунају нови правци и смерови по формулама (7.14) и (7.15). Када се деси судар са зидовима котла генерише се нови случајни број  $R_\omega$  по униформној расподели. Ако је  $R_\omega > \varepsilon$  тада се рачунају нови правци и смерови расејања по Ламберовом<sup>9</sup> косинусном закону (7.16) и (7.17). Ако је  $R_\omega \leq \varepsilon$  онда се честица апсорбује.

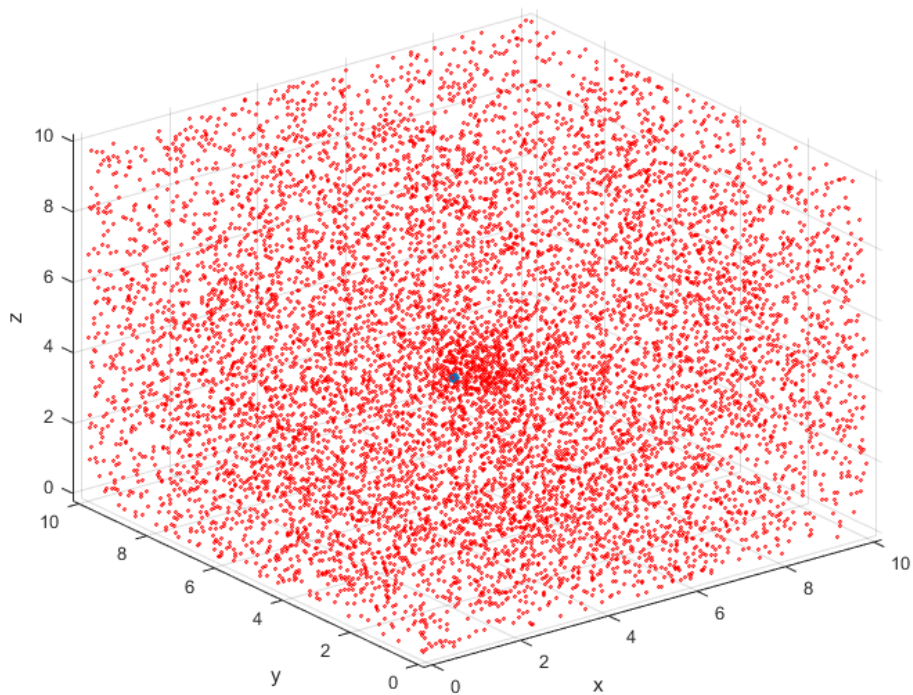
Програм може да идвоји путању једног фотона са свим расејањима пре него што се апсорбује (Слика 7.1). Такође, може да се зада број емитованих фотона и да се добије слика њихових коначних позиција у простору (Слика 7.2).

---

<sup>9</sup> Johann Heinrich Lambert (1728–1777) швајцарски математичар и физичар.



Слика 7.1. Путања једног фотона од почетне позиције која је обележена плавом бојом, до апсорпције која је обележена пуном црвеном бојом.



Слика 7.2. Емисија великог броја фотона из воксела са координатама (5, 5, 5) са приказаним позицијама апсорпције у простору котла.

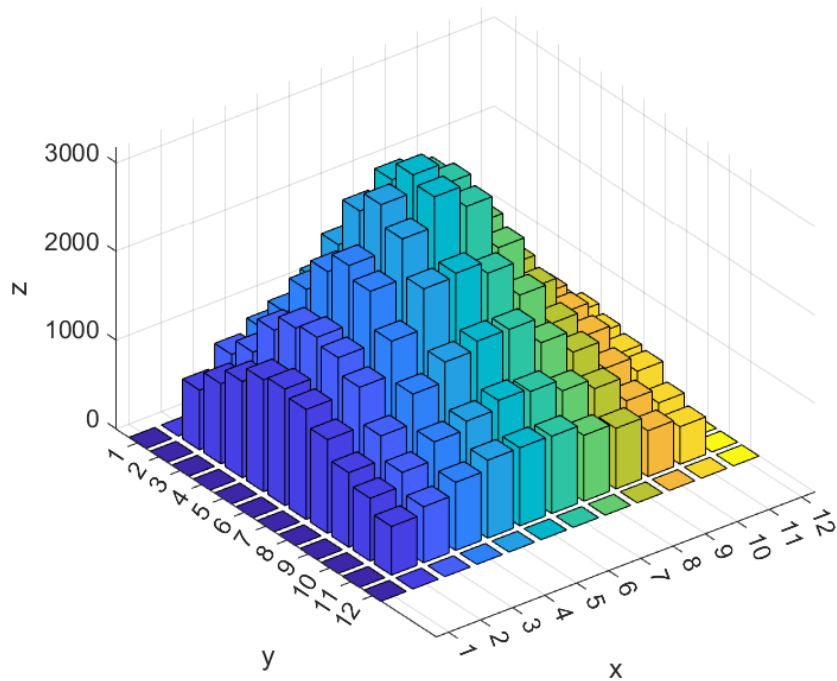
Израчунати бројеви апсорбованих фотона по вокселима и зидним сегментима као и READ вредности за емисију са позиције (5, 5, 5) у простор котла са димензијама  $20\text{ m} \times 20\text{ m} \times 20\text{ m}$  и са поменутом поделом, као и са задатим коефицијентима расејања  $0.02\text{ m}^{-1}$  и апсорпције  $0.04\text{ m}^{-1}$  у свим вокселима, су приказани на табелама и сликама. У овом случају је пуштено  $N = 10^6$  фотона. Табеле са READ вредностима као и са бројевима апсорбованих фотона по вокселима и зидним сегментима су приказане по нивоима од доње до горње стране гледано дуж  $z$ -осе. Вредности са READ вредностима се чувају у 3Д матрици. Први ниво је доња 2Д матрица, други ниво је следећа изнад 2Д матрица итд. Вредности апсорбованих фотона и израчунатих READ вредности су дати у табелама од табеле 7.1 до табеле 7.24., одговарајуће слике расподела су дате од слике 7.3 до 7.14.

Табела 7.1. Број апсорбованих фотона на првом нивоу.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	677	928	1094	1167	1289	1226	1026	905	718	578	0
0	897	1122	1446	1659	1778	1721	1429	1150	852	676	0
0	1102	1528	1833	2232	2458	2335	1972	1450	1050	797	0
0	1257	1709	2225	2773	2958	2791	2312	1727	1233	837	0
0	1310	1754	2418	2988	3166	2874	2312	1743	1277	904	0
0	1236	1683	2303	2711	3066	2839	2246	1672	1226	838	0
0	1062	1485	1885	2338	2355	2230	1862	1367	1092	792	0
0	867	1110	1445	1647	1770	1753	1530	1217	922	719	0
0	702	847	1082	1174	1262	1233	1089	963	711	530	0
0	537	649	746	881	905	883	724	687	520	408	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Табела 7.2. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са првог нивоа.

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	6.80	9.30	11.0	12.0	13.0	12.0	10.0	9.10	7.20	5.80	0.00
0.00	9.00	11.0	14.0	17.0	18.0	17.0	14.0	12.0	8.50	6.80	0.00
0.00	11.0	15.0	18.0	22.0	25.0	23.0	20.0	15.0	11.0	8.00	0.00
0.00	13.0	17.0	22.0	28.0	30.0	28.0	23.0	17.0	12.0	8.40	0.00
0.00	13.0	18.0	24.0	30.0	32.0	29.0	23.0	17.0	13.0	9.00	0.00
0.00	12.0	17.0	23.0	27.0	31.0	28.0	22.0	17.0	12.0	8.40	0.00
0.00	11.0	15.0	19.0	23.0	24.0	22.0	19.0	14.0	11.0	7.90	0.00
0.00	8.70	11.0	14.0	16.0	18.0	18.0	15.0	12.0	9.20	7.20	0.00
0.00	7.00	8.50	11.0	12.0	13.0	12.0	11.0	9.60	7.10	5.30	0.00
0.00	5.40	6.50	7.50	8.80	9.10	8.80	7.20	6.90	5.20	4.10	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



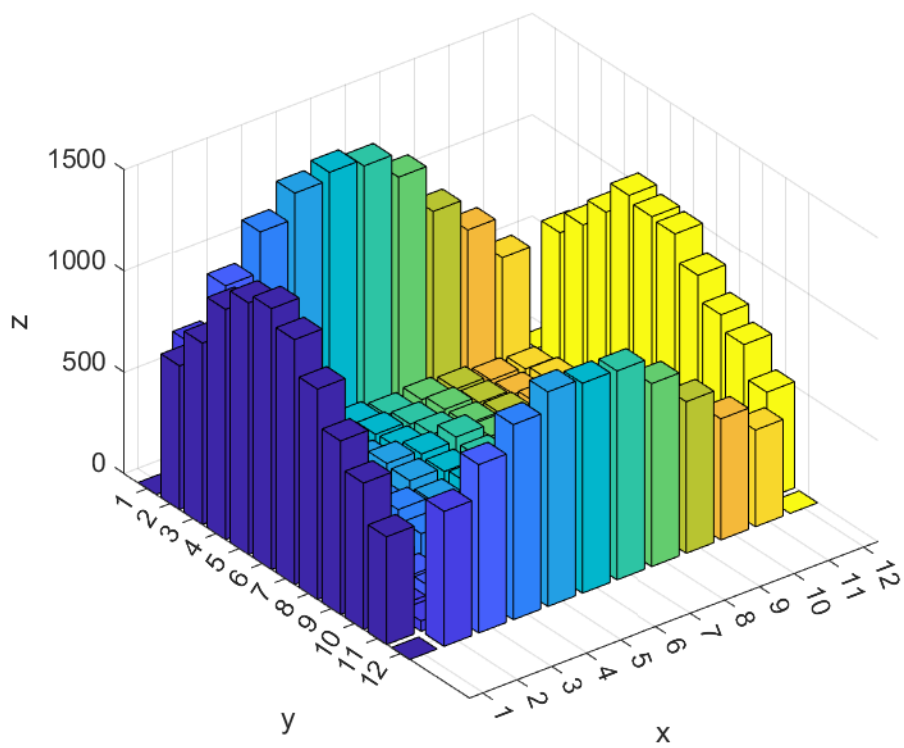
Слика 7.3 Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са првог нивоа из табеле 7.1.

Табела 7.3. Број апсорбованих фотона на другом нивоу.

0	690	874	1108	1225	1251	1218	1130	865	712	542	0
707	37	73	74	78	100	81	80	64	55	37	632
890	62	77	80	119	118	110	100	76	48	60	758
1141	81	103	127	117	127	128	118	100	73	47	908
1218	71	113	135	200	168	184	129	121	92	62	1049
1276	109	118	131	175	157	172	131	129	87	65	1034
1221	87	103	176	151	169	142	120	105	71	62	985
1070	73	86	120	145	154	138	109	101	76	65	905
873	82	65	99	85	105	94	101	92	56	53	737
718	53	69	70	102	78	89	66	56	45	50	682
553	50	56	51	60	64	58	63	51	38	40	526
0	675	811	938	1063	1053	1013	894	769	597	492	0

Табела 7.4. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са другог нивоа.

0.00	5.50	6.60	7.90	8.30	8.70	8.40	8.00	7.00	5.50	4.00	0.00
5.50	0.41	0.54	0.51	0.66	0.85	0.74	0.68	0.58	0.47	0.39	4.80
6.10	0.53	0.67	0.66	0.64	0.79	0.87	0.77	0.63	0.45	0.43	6.40
8.00	0.63	0.83	0.73	0.68	0.93	1.10	0.82	0.65	0.44	0.48	7.10
8.70	0.65	0.78	0.84	0.91	1.10	0.96	0.88	0.71	0.70	0.47	7.10
8.40	0.52	0.79	0.85	1.30	0.94	1.20	1.00	0.83	0.79	0.52	8.00
8.80	0.64	0.84	0.89	1.10	1.20	1.10	1.10	0.68	0.62	0.50	7.00
7.90	0.76	0.74	0.75	0.99	1.10	0.90	0.77	0.73	0.66	0.50	6.60
6.50	0.58	0.56	0.64	0.72	0.97	0.69	0.65	0.67	0.54	0.35	5.60
5.60	0.46	0.60	0.51	0.54	0.62	0.67	0.64	0.46	0.37	0.35	4.90
4.40	0.43	0.43	0.40	0.50	0.57	0.49	0.54	0.39	0.44	0.40	4.30
0.00	5.20	6.10	6.90	7.30	7.20	7.50	7.30	6.00	5.20	4.20	0.00



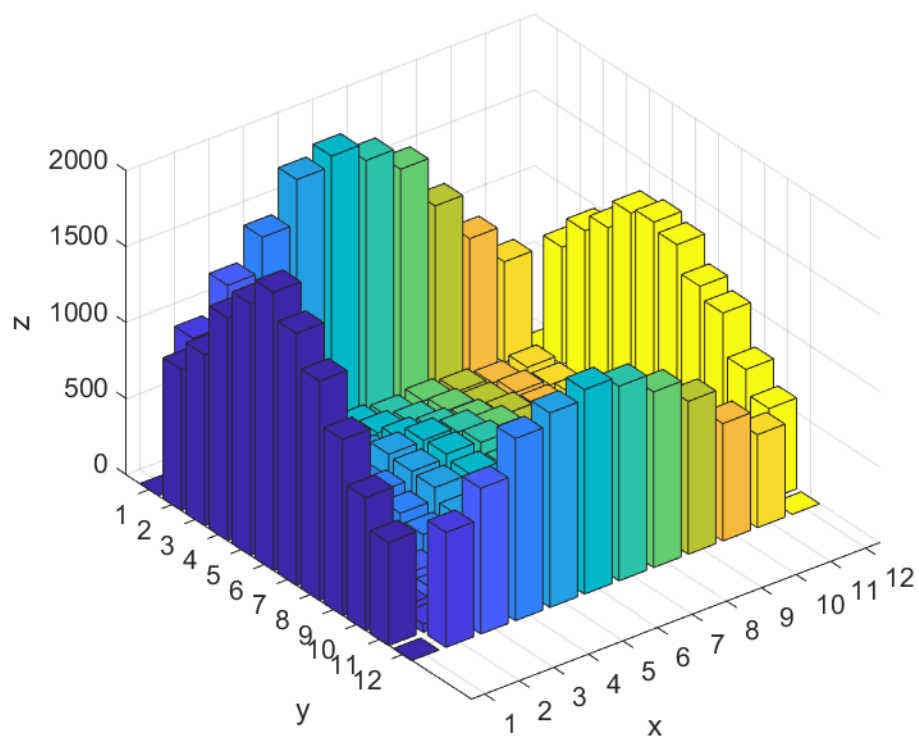
Слика 7.4. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са другог нивоа из табеле 7.3.

Табела 7.5. Број апсорбованих фотона на трећем нивоу.

0	947	1208	1437	1729	1796	1680	1535	1206	903	663	0
927	67	59	118	111	111	89	108	85	52	67	770
1125	79	108	114	157	172	145	143	97	89	51	978
1464	100	130	189	199	228	201	171	130	92	81	1096
1657	101	147	218	316	321	287	228	160	114	72	1291
1831	105	173	251	303	329	318	220	157	98	88	1331
1660	105	174	213	295	300	266	209	158	117	77	1281
1444	100	129	171	212	258	225	166	141	90	69	1106
1159	81	112	133	126	161	152	145	121	69	74	1029
875	65	89	92	100	122	118	100	96	69	69	756
678	55	64	55	94	77	75	67	47	57	59	598
0	756	959	1199	1280	1346	1281	1156	1006	773	612	0

Табела 7.6. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са трећег нивоа.

0.00	9.50	12.0	14.0	17.0	18.0	17.0	15.0	12.0	9.00	6.60	0.00
9.30	0.67	0.59	1.20	1.10	1.10	0.89	1.10	0.85	0.52	0.67	7.70
11.0	0.79	1.10	1.10	1.60	1.70	1.50	1.40	0.97	0.89	0.51	9.80
15.0	1.00	1.30	1.90	2.00	2.30	2.00	1.70	1.30	0.92	0.81	11.0
17.0	1.00	1.50	2.20	3.20	3.20	2.90	2.30	1.60	1.10	0.72	13.0
18.0	1.10	1.70	2.50	3.00	3.30	3.20	2.20	1.60	0.98	0.88	13.0
17.0	1.10	1.70	2.10	3.00	3.00	2.70	2.10	1.60	1.20	0.77	13.0
14.0	1.00	1.30	1.70	2.10	2.60	2.30	1.70	1.40	0.90	0.69	11.0
12.0	0.81	1.10	1.30	1.30	1.60	1.50	1.50	1.20	0.69	0.74	10.0
8.80	0.65	0.89	0.92	1.00	1.20	1.20	1.00	0.96	0.69	0.69	7.60
6.80	0.55	0.64	0.55	0.94	0.77	0.75	0.67	0.47	0.57	0.59	6.00
0.00	7.60	9.60	12.0	13.0	13.0	13.0	12.0	10.0	7.70	6.10	0.00



Слика 7.5. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са трећег нивоа из табеле 7.5.

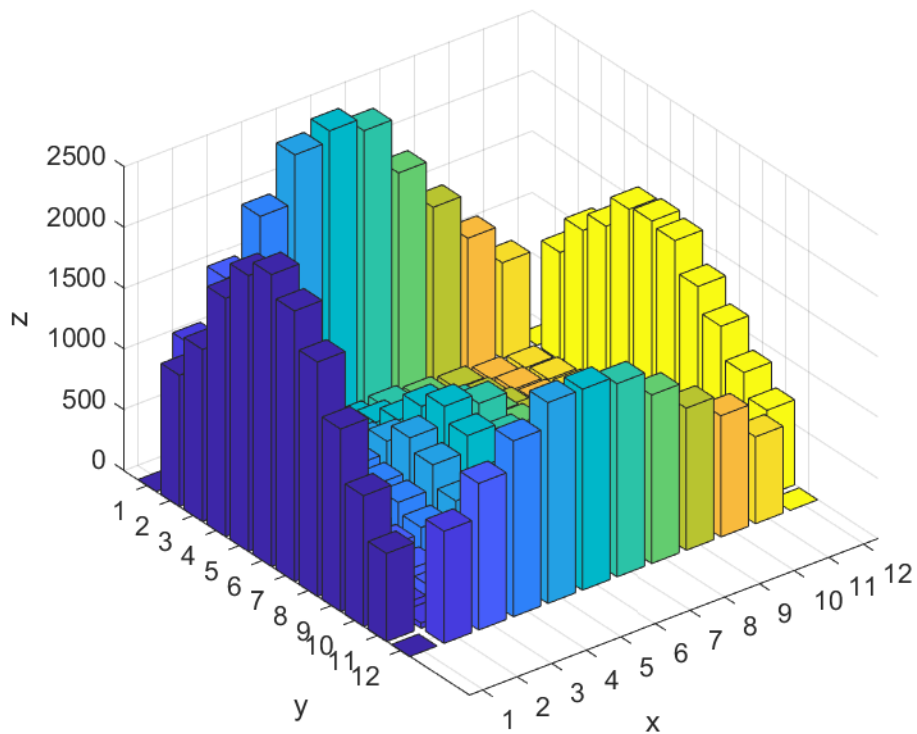
Табела 7.7. Број апсорбованих фотона на четвртм нивоу.

0	1098	1535	1935	2332	2420	2312	1855	1463	1099	788	0
1079	74	103	122	138	138	154	119	97	65	47	887
1415	102	115	181	196	269	199	180	129	104	76	1192
1959	130	188	237	322	411	378	255	172	127	99	1350
2270	131	192	373	470	647	535	361	222	122	95	1613
2402	135	216	345	621	771	685	392	233	143	95	1640
2226	137	224	323	522	653	538	334	225	143	98	1602
1929	117	191	240	349	394	348	235	165	127	94	1348
1502	108	130	172	218	215	208	170	127	113	61	1144
1076	60	97	123	146	152	145	129	100	83	55	887
725	43	79	96	97	99	84	84	82	64	45	700
0	922	1206	1446	1652	1653	1589	1387	1169	997	714	0



Табела 7.8. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са четвртог нивоа.

0.00	11.0	15.0	19.0	23.0	24.0	23.0	19.0	15.0	11.0	7.90	0.00
11.0	0.74	1.00	1.20	1.40	1.40	1.50	1.20	0.97	0.65	0.47	8.90
14.0	1.00	1.20	1.80	2.00	2.70	2.00	1.80	1.30	1.00	0.76	12.0
20.0	1.30	1.90	2.40	3.20	4.10	3.80	2.60	1.70	1.30	0.99	14.0
23.0	1.30	1.90	3.70	4.70	6.50	5.40	3.60	2.20	1.20	0.95	16.0
24.0	1.40	2.20	3.50	6.20	7.70	6.90	3.90	2.30	1.40	0.95	16.0
22.0	1.40	2.20	3.20	5.20	6.50	5.40	3.30	2.30	1.40	0.98	16.0
19.0	1.20	1.90	2.40	3.50	3.90	3.50	2.40	1.70	1.30	0.94	13.0
15.0	1.10	1.30	1.70	2.20	2.20	2.10	1.70	1.30	1.10	0.61	11.0
11.0	0.60	0.97	1.20	1.50	1.50	1.50	1.30	1.00	0.83	0.55	8.90
7.30	0.43	0.79	0.96	0.97	0.99	0.84	0.84	0.82	0.64	0.45	7.00
0.00	9.20	12.0	14.0	17.0	17.0	16.0	14.0	12.0	10.0	7.10	0.00



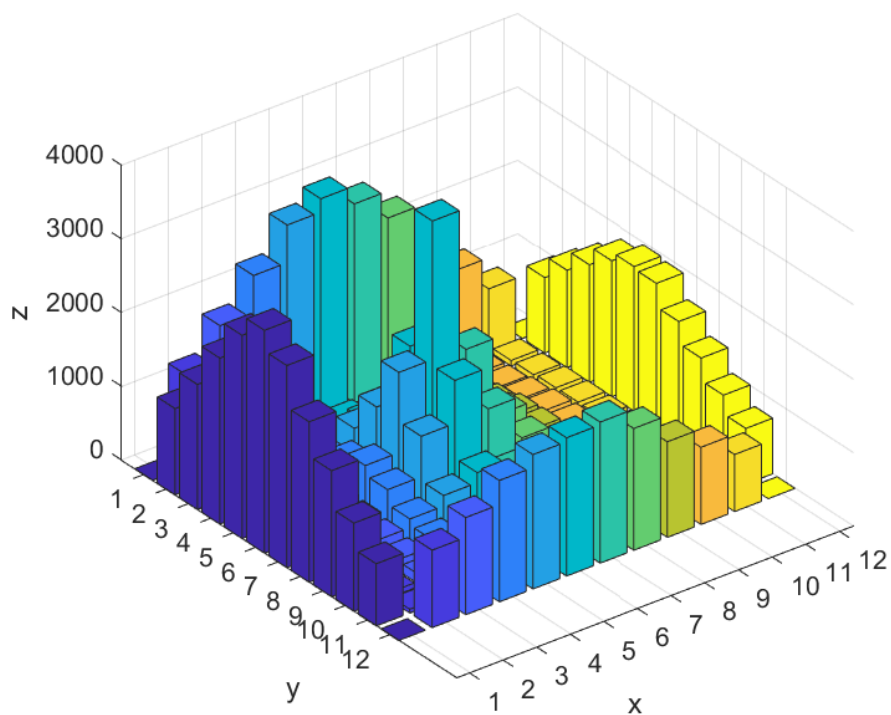
Слика 7.6. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са четвртог нивоа из табеле 7.7.

Табела 7.9. Број апсорбованих фотона на петом нивоу.

0	1253	1748	2253	2763	2945	2700	2334	1646	1271	848	0
1170	95	113	150	181	124	146	135	110	76	74	1023
1695	105	144	218	272	332	314	214	155	91	79	1320
2251	154	224	357	599	662	483	322	216	129	98	1592
2757	190	276	512	1085	1734	1099	556	278	163	101	1844
3023	202	310	663	1752	3631	1715	661	284	166	101	1963
2743	164	266	534	1083	1666	1106	537	265	170	97	1933
2177	131	216	334	477	613	477	365	223	132	96	1613
1711	103	158	248	254	310	265	249	154	98	73	1315
1198	71	129	134	177	185	151	146	98	80	68	1009
844	52	65	101	105	107	100	91	75	59	58	755
0	1051	1319	1647	1823	1876	1914	1652	1297	1047	774	0

Табела 7.10. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са петог нивоа.

0.00	13.0	17.0	23.0	28.0	29.0	27.0	23.0	16.0	13.0	8.50	0.00
12.0	0.95	1.10	1.50	1.80	1.20	1.50	1.40	1.10	0.76	0.74	10.0
17.0	1.10	1.40	2.20	2.70	3.30	3.10	2.10	1.60	0.91	0.79	13.0
23.0	1.50	2.20	3.60	6.00	6.60	4.80	3.20	2.20	1.30	0.98	16.0
28.0	1.90	2.80	5.10	11.0	17.0	11.0	5.60	2.80	1.60	1.00	18.0
30.0	2.00	3.10	6.60	18.0	36.0	17.0	6.60	2.80	1.70	1.00	20.0
27.0	1.60	2.70	5.30	11.0	17.0	11.0	5.40	2.70	1.70	0.97	19.0
22.0	1.30	2.20	3.30	4.80	6.10	4.80	3.70	2.20	1.30	0.96	16.0
17.0	1.00	1.60	2.50	2.50	3.10	2.70	2.50	1.50	0.98	0.73	13.0
12.0	0.71	1.30	1.30	1.80	1.9.0	1.50	1.50	0.98	0.80	0.68	10.0
8.40	0.52	0.65	1.00	1.10	1.10	1.00	0.91	0.75	0.59	0.58	7.60
0.00	11.0	13.0	16.0	18.0	19.0	19.0	17.0	13.0	10.0	7.70	0.00



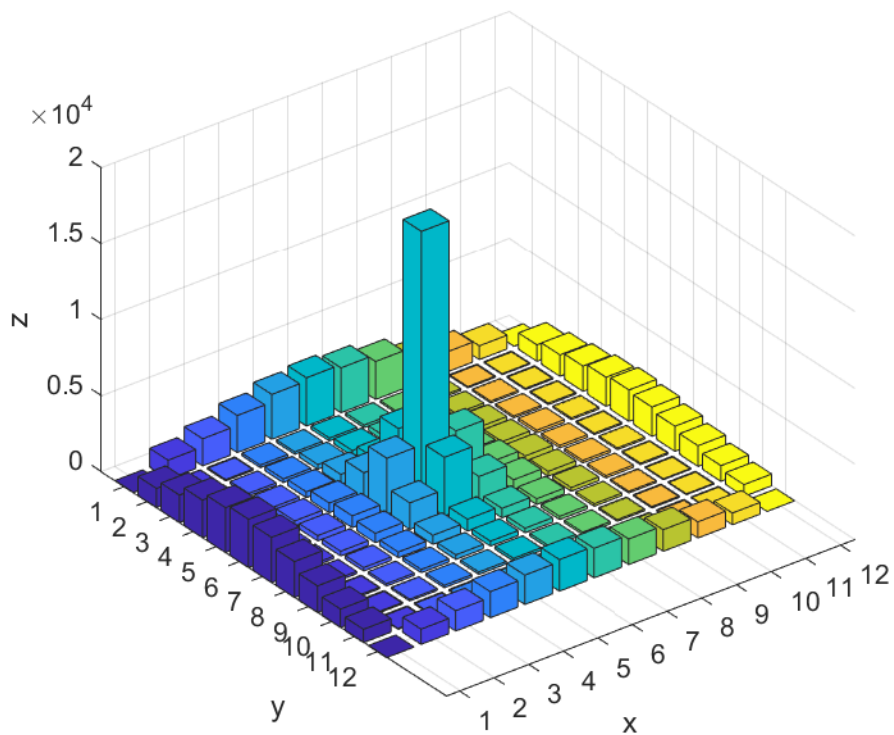
Слика 7.7. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са петог нивоа из табеле 7.9.

Табела 7.11. Број апсорбованих фотона на шестом нивоу.

0	1249	1786	2441	2955	3172	2953	2498	1818	1319	905	0
1255	119	94	171	160	199	177	130	126	81	61	1079
1804	128	167	245	316	360	320	214	173	117	86	1410
2459	165	214	385	652	810	655	393	269	128	102	1662
2956	151	331	635	1749	3786	1707	605	302	179	114	1913
3182	199	351	779	3690	17750	3746	819	345	171	100	2067
2974	167	312	615	1745	3868	1733	643	319	166	117	1928
2372	153	229	373	598	784	622	380	244	154	101	1657
1757	103	156	214	298	324	304	213	165	112	58	1360
1219	85	119	161	160	186	175	153	108	89	57	1036
876	57	85	86	96	110	94	104	95	72	49	776
0	999	1338	1716	1930	2077	1946	1683	1422	1062	768	0

Табела 7.12. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са шестог нивоа.

0.00	13.0	18.0	24.0	30.0	32.0	30.0	25.0	18.0	13.0	9.10	0.00
13.0	1.20	0.94	1.70	1.60	2.00	1.80	1.30	1.30	0.81	0.61	11.0
18.0	1.30	1.70	2.50	3.20	3.60	3.20	2.10	1.70	1.20	0.86	14.0
25.0	1.70	2.10	3.90	6.50	8.10	6.60	3.90	2.70	1.30	1.00	17.0
30.0	1.50	3.30	6.40	18.0	38.0	17.0	6.10	3.00	1.80	1.10	19.0
32.0	2.00	3.50	7.80	37.0	180	38.0	8.20	3.50	1.70	1.00	21.0
30.0	1.70	3.10	6.20	17.0	39.0	17.0	6.40	3.20	1.70	1.20	19.0
24.0	1.500	2.30	3.70	6.00	7.80	6.20	3.80	2.40	1.50	1.00	17.0
18.0	1.0	1.60	2.10	3.00	3.20	3.00	2.10	1.70	1.10	0.58	14.0
12.0	0.85	1.20	1.60	1.60	1.90	1.80	1.50	1.10	0.89	0.57	10.0
8.80	0.57	0.85	0.86	0.96	1.10	0.94	1.00	0.95	0.72	0.49	7.80
0.00	10.0	13.0	17.0	19.0	21.0	19.0	17.0	14.0	11.0	7.70	0.00



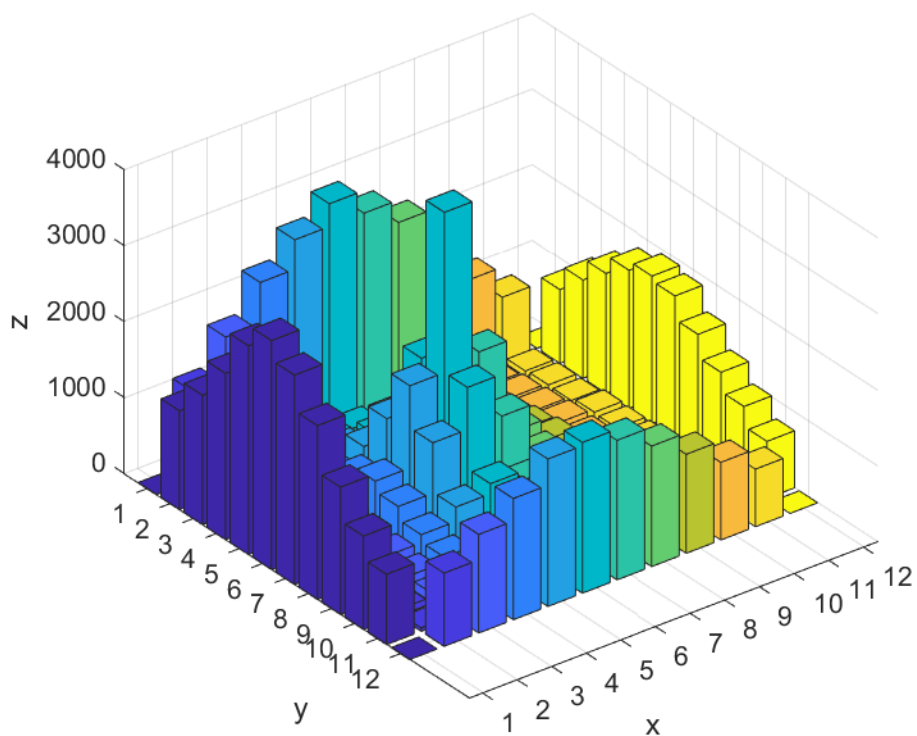
Слика 7.8. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са шестог нивоа из табеле 7.11.

Табела 7.13. Број апсорбованих фотона на седмом нивоу.

0	1194	1723	2266	2653	2952	2653	2356	1735	1245	846	0
1299	92	114	120	147	191	166	160	101	75	74	969
1701	102	138	220	280	312	289	228	134	112	88	1295
2187	125	221	331	524	618	523	333	218	135	81	1578
2748	155	262	496	1088	1709	1146	533	269	166	124	1818
3014	181	319	639	1719	3827	1816	595	315	156	112	1939
2757	174	291	503	1166	1720	1168	504	259	161	117	1875
2290	142	224	329	518	650	529	362	231	123	95	1567
1677	112	164	231	279	305	257	184	145	97	62	1265
1231	86	120	125	176	156	170	154	104	90	70	1012
926	44	65	90	94	96	97	83	92	53	54	751
0	964	1298	1596	1941	1984	1837	1586	1303	1022	758	0

Табела 7.14. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са седмог нивоа.

0.00	12.0	17.0	23.0	27.0	30.0	27.0	24.0	17.0	12.0	8.50	0.00
13.0	0.92	1.10	1.20	1.50	1.90	1.70	1.60	1.00	0.75	0.74	9.70
17.0	1.00	1.40	2.20	2.80	3.10	2.90	2.30	1.30	1.10	0.88	13.0
22.0	1.30	2.20	3.30	5.20	6.20	5.20	3.30	2.20	1.40	0.81	16.0
28.0	1.60	2.60	5.00	11.0	17.0	11.0	5.30	2.70	1.70	1.20	18.0
30.0	1.80	3.20	6.40	17.0	38.0	18.0	6.00	3.20	1.60	1.10	19.0
28.0	1.70	2.90	5.00	12.0	17.0	12.0	5.00	2.60	1.60	1.20	19.0
23.0	1.40	2.20	3.30	5.20	6.50	5.30	3.60	2.30	1.20	0.95	16.0
17.0	1.10	1.60	2.30	2.80	3.10	2.60	1.80	1.50	0.97	0.62	13.0
12.0	0.86	1.20	1.30	1.80	1.60	1.70	1.50	1.00	0.9.0	0.70	10.0
9.30	0.44	0.65	0.90	0.94	0.96	0.97	0.83	0.92	0.53	0.54	7.50
0.00	9.70	13.0	16.0	19.0	20.0	18.0	16.0	13.0	10.0	7.6	0.00



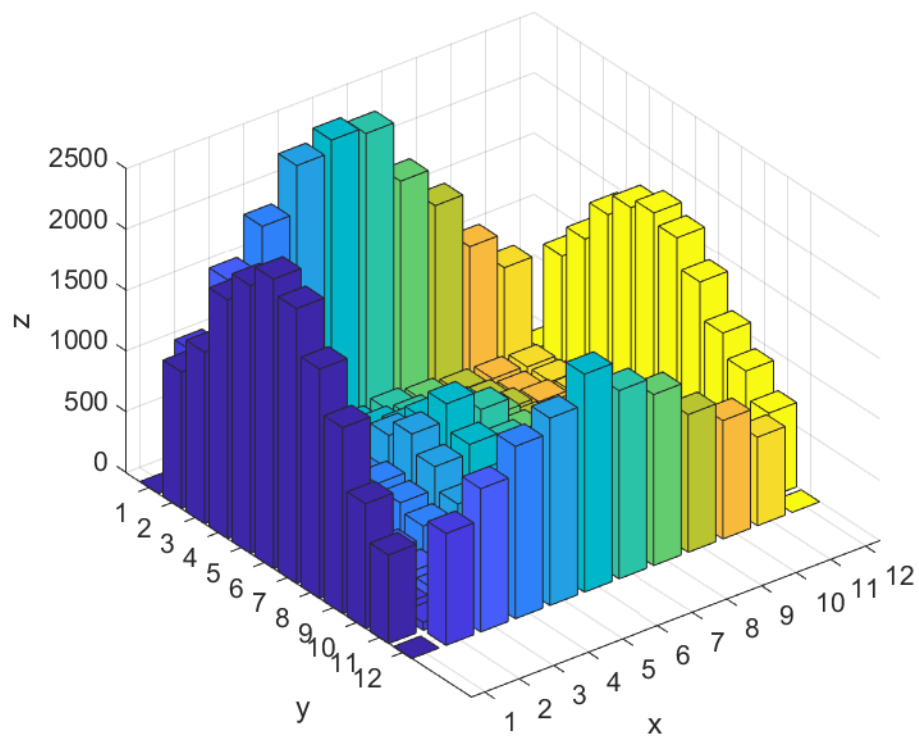
Слика 7.9. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са седмог нивоа из табеле 7.13.

Табела 7.15. Број апсорбованих фотона на осмом нивоу.

0	1057	1539	1869	2260	2360	2305	1804	1493	1046	764	0
1123	80	98	108	143	115	151	122	90	83	71	874
1410	92	132	178	213	236	219	180	125	86	73	1137
1965	122	156	269	307	360	327	239	182	141	107	1461
2203	153	229	315	534	565	533	369	192	144	95	1643
2381	133	212	371	669	808	652	358	219	136	109	1723
2262	152	216	336	524	597	510	358	211	118	90	1641
1888	122	169	268	340	395	339	259	149	137	86	1402
1530	95	128	187	203	231	225	172	123	87	77	1105
1027	81	100	131	144	132	122	108	86	86	56	916
729	65	69	95	93	98	105	75	57	62	50	693
0	920	1179	1418	1541	1793	1549	1407	1133	974	728	0

Табела 7.16. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са осмог нивоа.

0.00	11.0	15.0	19.0	23.0	24.0	23.0	18.0	15.0	10.0	7.60	0.00
11.0	0.80	0.98	1.10	1.40	1.20	1.50	1.20	0.90	0.83	0.71	8.70
14.0	0.92	1.30	1.80	2.10	2.40	2.20	1.80	1.30	0.86	0.73	11.0
20.0	1.20	1.60	2.70	3.10	3.60	3.30	2.40	1.80	1.40	1.10	15.0
22.0	1.50	2.30	3.20	5.30	5.70	5.30	3.70	1.90	1.40	0.95	16.0
24.0	1.30	2.10	3.70	6.70	8.10	6.50	3.60	2.20	1.40	1.10	17.0
23.0	1.50	2.20	3.40	5.20	6.00	5.10	3.60	2.10	1.20	0.90	16.0
19.0	1.20	1.70	2.70	3.40	4.00	3.40	2.60	1.50	1.40	0.86	14.0
15.0	0.95	1.30	1.90	2.00	2.30	2.30	1.70	1.20	0.87	0.77	11.0
10.0	0.81	1.00	1.30	1.40	1.30	1.20	1.10	0.86	0.86	0.56	9.20
7.30	0.65	0.69	0.95	0.93	0.98	1.10	0.75	0.57	0.62	0.50	6.90
0.00	9.20	12.0	14.0	15.0	18.0	16.0	14.0	11.0	9.80	7.30	0.00



Слика 7.10. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са осмог нивоа из табеле 7.15.

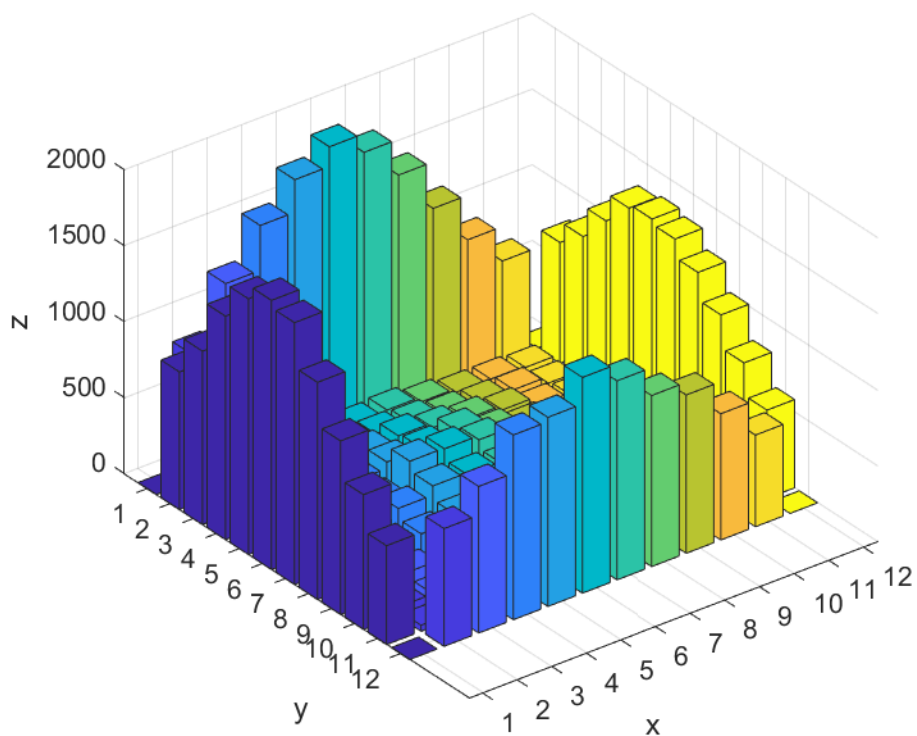
Табела 7.17. Број апсорбованих фотона на деветом нивоу.

0	839	1213	1508	1722	1851	1727	1490	1183	889	662	0
905	63	79	91	93	120	130	97	72	71	60	795
1141	92	109	118	147	161	149	119	107	100	56	933
1470	91	120	180	224	245	211	184	153	93	73	1135
1683	114	167	217	259	264	293	203	157	99	83	1318
1772	106	184	194	363	357	329	235	164	110	74	1345
1724	95	187	239	299	285	271	202	164	99	70	1312
1430	99	157	170	209	226	225	177	119	77	80	1191
1143	94	109	120	153	166	154	146	106	68	67	1010
888	60	62	100	111	122	115	98	85	72	46	793
651	40	60	79	85	78	85	72	61	67	49	581
0	775	965	1216	1245	1420	1310	1126	1042	831	603	0

Табела 7.18. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са деветог нивоа.

0.00	8.40	12.0	15.0	17.0	19.0	17.0	15.0	12.0	8.90	6.60	0.00
9.10	0.63	0.79	0.91	0.93	1.20	1.30	0.97	0.72	0.71	0.60	8.00
11.0	0.92	1.10	1.20	1.50	1.60	1.50	1.20	1.10	1.00	0.56	9.30
15.0	0.91	1.20	1.80	2.20	2.50	2.10	1.80	1.50	0.93	0.73	11.0
17.0	1.10	1.70	2.20	2.60	2.60	2.90	2.00	1.60	0.99	0.83	13.0
18.0	1.10	1.80	1.90	3.60	3.60	3.30	2.40	1.60	1.10	0.74	13.0
17.0	0.95	1.90	2.40	3.00	2.90	2.70	2.00	1.60	0.99	0.70	13.0
14.0	0.99	1.60	1.70	2.10	2.30	2.30	1.80	1.20	0.77	0.80	12.0
11.0	0.94	1.10	1.20	1.50	1.70	1.50	1.50	1.10	0.68	0.67	10.0
8.90	0.60	0.62	1.00	1.10	1.20	1.20	0.98	0.85	0.72	0.46	7.90
6.50	0.40	0.60	0.79	0.85	0.78	0.85	0.72	0.61	0.67	0.49	5.80
0.00	7.80	9.70	12.0	12.0	14.0	13.0	11.0	10.0	8.30	6.00	0.00





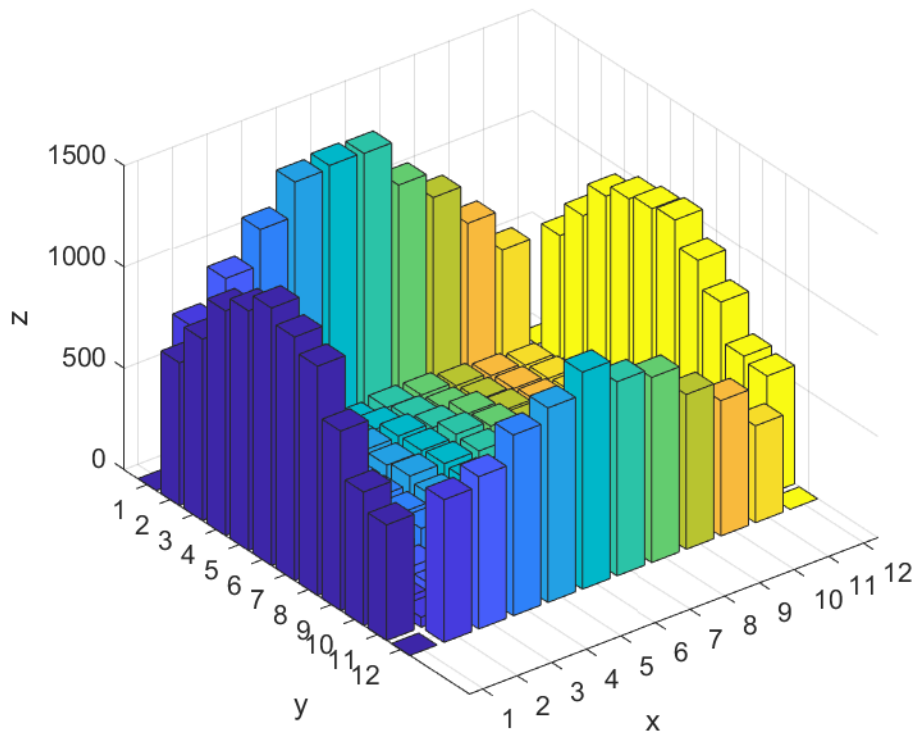
Слика 7.11. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са деветог нивоа из табеле 7.17.

Табела 7.19. Број апсорбованих фотона на десетом нивоу.

0	747	915	1091	1260	1276	1270	1048	921	728	531	0
704	54	60	68	78	71	90	86	66	50	36	610
895	56	87	77	91	123	112	90	72	61	45	783
1109	69	114	129	158	163	139	142	90	73	54	953
1183	78	111	133	159	166	180	155	101	86	73	1014
1271	78	114	137	179	175	172	155	115	98	52	1040
1202	94	108	132	154	168	139	127	103	88	65	1058
1132	82	96	134	139	130	175	110	87	92	55	933
886	55	83	86	106	102	117	93	81	57	59	801
659	58	64	76	90	77	67	84	57	66	43	608
571	50	57	58	79	64	74	43	67	44	39	584
0	704	752	892	960	1071	958	914	764	668	478	0

Табела 7.20. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са десетог нивоа.

0.00	7.50	9.20	11.0	13.0	13.0	13.0	10.0	9.20	7.30	5.30	0.00
7.00	0.54	0.60	0.68	0.78	0.71	0.90	0.86	0.66	0.50	0.36	6.10
9.00	0.56	0.87	0.77	0.91	1.20	1.10	0.90	0.72	0.61	0.45	7.80
11.0	0.69	1.10	1.30	1.60	1.60	1.40	1.40	0.90	0.73	0.54	9.50
12.0	0.78	1.10	1.30	1.60	1.70	1.80	1.60	1.00	0.86	0.73	10.0
13.0	0.78	1.10	1.40	1.80	1.80	1.70	1.60	1.20	0.98	0.52	10.0
12.0	0.94	1.10	1.30	1.50	1.70	1.40	1.30	1.00	0.88	0.65	11.0
11.0	0.82	0.96	1.30	1.40	1.30	1.80	1.10	0.87	0.92	0.55	9.30
8.90	0.55	0.83	0.86	1.10	1.00	1.20	0.93	0.81	0.57	0.59	8.00
6.60	0.58	0.64	0.76	0.90	0.77	0.67	0.84	0.57	0.66	0.43	6.10
5.70	0.50	0.57	0.58	0.79	0.64	0.74	0.43	0.67	0.44	0.39	5.80
0.00	7.00	7.50	8.90	9.60	11.0	9.60	9.10	7.60	6.70	4.80	0.00



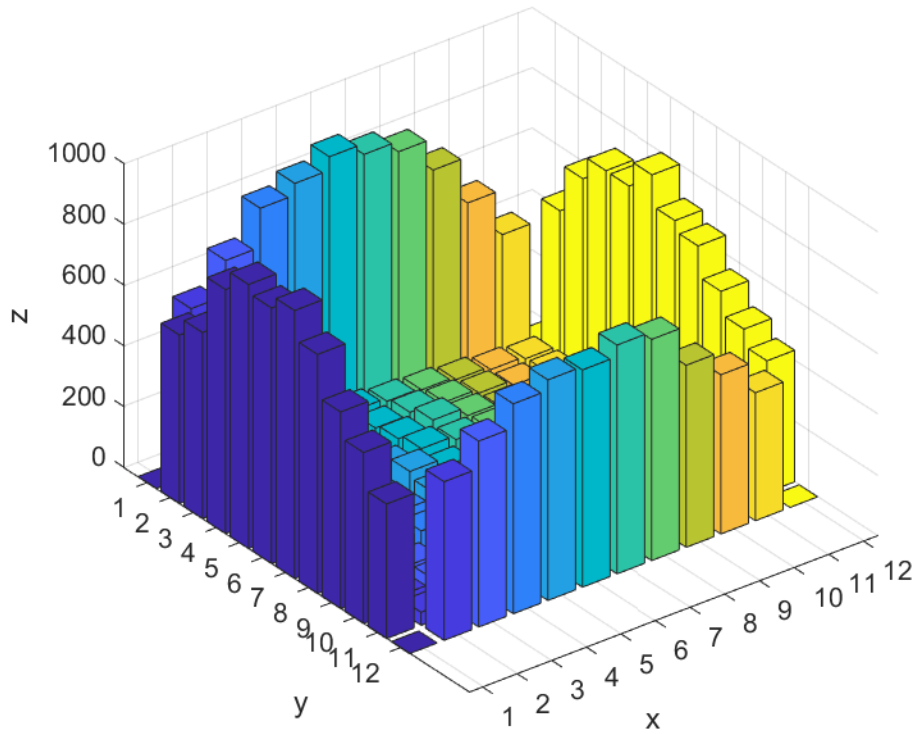
Слика 7.12. Графички приказ расподеле броја апсорбованих фотона по сегментима са десетог нивоа из табеле 7.19.

Табела 7.21. Број апсорбованих фотона на једанестом нивоу.

0	548	663	791	829	873	837	802	698	546	398	0
554	41	54	51	66	85	74	68	58	47	39	482
612	53	67	66	64	79	87	77	63	45	43	637
803	63	83	73	68	93	111	82	65	44	48	713
869	65	78	84	91	110	96	88	71	70	47	712
841	52	79	85	128	94	119	100	83	79	52	798
882	64	84	89	109	117	106	109	68	62	50	697
787	76	74	75	99	106	90	77	73	66	50	663
647	58	56	64	72	97	69	65	67	54	35	563
563	46	60	51	54	62	67	64	46	37	35	488
443	43	43	40	50	57	49	54	39	44	40	433
0	522	612	691	726	715	753	728	599	524	421	0

Табела 7.22. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са једанаестог нивоа.

0.00	5.50	6.60	7.90	8.30	8.70	8.40	8.00	7.00	5.50	4.00	0.00
5.50	0.41	0.54	0.51	0.66	0.85	0.74	0.68	0.58	0.47	0.39	4.80
6.10	0.53	0.67	0.66	0.64	0.79	0.87	0.77	0.63	0.45	0.43	6.40
8.00	0.63	0.83	0.73	0.68	0.93	1.10	0.82	0.65	0.44	0.48	7.10
8.70	0.65	0.78	0.84	0.91	1.10	0.96	0.88	0.71	0.70	0.47	7.10
8.40	0.52	0.79	0.85	1.30	0.94	1.20	1.00	0.83	0.79	0.52	8.00
8.80	0.64	0.84	0.89	1.10	1.20	1.10	1.10	0.68	0.62	0.50	7.00
7.90	0.76	0.74	0.75	0.99	1.10	0.90	0.77	0.73	0.66	0.50	6.60
6.50	0.58	0.56	0.64	0.72	0.97	0.69	0.65	0.67	0.54	0.35	5.60
5.60	0.46	0.60	0.51	0.54	0.62	0.67	0.64	0.46	0.37	0.35	4.90
4.40	0.43	0.43	0.40	0.50	0.57	0.49	0.54	0.39	0.44	0.40	4.30
0.00	5.20	6.10	6.90	7.30	7.20	7.50	7.30	6.00	5.20	4.20	0.00



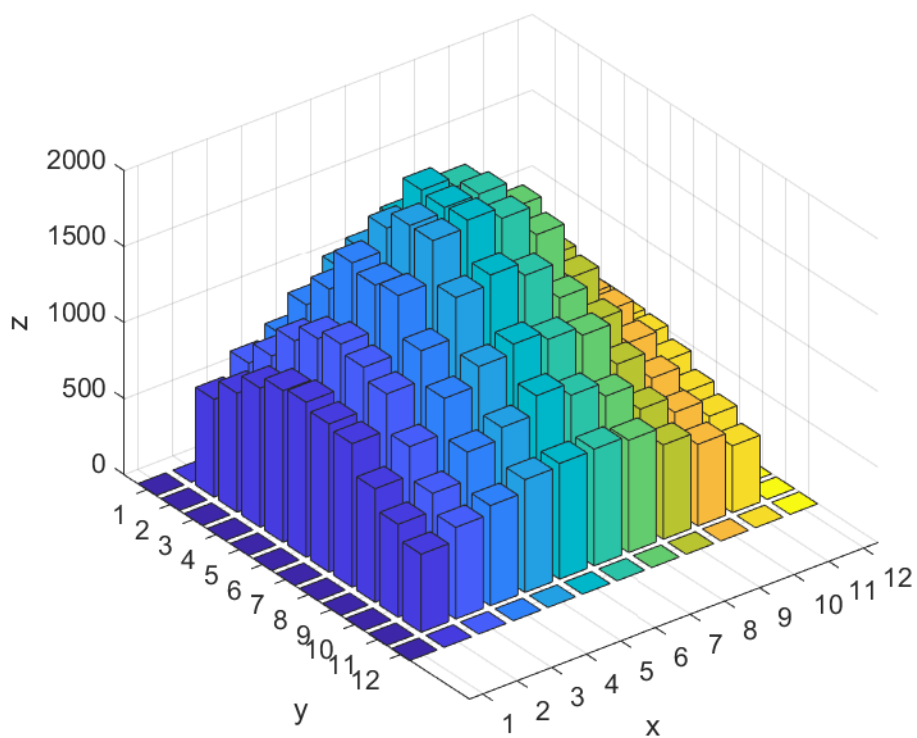
Слика 7.13. Графички приказ расподеле апсорбованих фотона по сегментима са једанаестог нивоа из табеле 7.21.

Табела 7.23. Број апсорбованих фотона на дванаестом нивоу.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	644	795	888	994	1032	1038	975	783	660	513	0
0	783	941	1190	1344	1309	1279	1168	999	791	666	0
0	915	1139	1392	1562	1676	1580	1420	1147	952	765	0
0	997	1252	1664	1805	1968	1903	1639	1303	1001	783	0
0	1020	1316	1616	1921	1952	1953	1778	1368	1017	775	0
0	976	1262	1646	1920	1967	1892	1697	1328	1018	767	0
0	945	1185	1382	1644	1705	1615	1380	1140	911	699	0
0	747	937	1167	1289	1349	1293	1233	955	775	599	0
0	612	728	912	987	1108	1024	930	757	649	536	0
0	514	603	659	742	761	768	739	621	537	440	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Табела 7.24. READ вредности  $\times 10^{-4}$  са дванаестог нивоа.

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	6.40	8.00	8.90	10.0	10.0	10.0	9.80	7.80	6.60	5.10	0.00
0.00	7.80	9.40	12.0	13.0	13.0	13.0	12.0	10.0	7.90	6.70	0.00
0.00	9.20	11.0	14.0	16.0	17.0	16.0	14.0	11.0	9.50	7.70	0.00
0.00	10.0	13.0	17.0	18.0	20.0	19.0	16.0	13.0	10.0	7.80	0.00
0.00	10.0	13.0	16.0	19.0	20.0	20.0	18.0	14.0	10.0	7.80	0.00
0.00	9.80	13.0	16.0	19.0	20.0	19.0	17.0	13.0	10.0	7.70	0.00
0.00	9.50	12.0	14.0	16.0	17.0	16.0	14.0	11.0	9.10	7.00	0.00
0.00	7.50	9.40	12.0	13.0	14.0	13.0	12.0	9.60	7.80	6.00	0.00
0.00	6.10	7.30	9.10	9.90	11.0	10.0	9.30	7.60	6.50	5.40	0.00
0.00	5.10	6.00	6.60	7.40	7.60	7.70	7.40	6.20	5.40	4.40	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

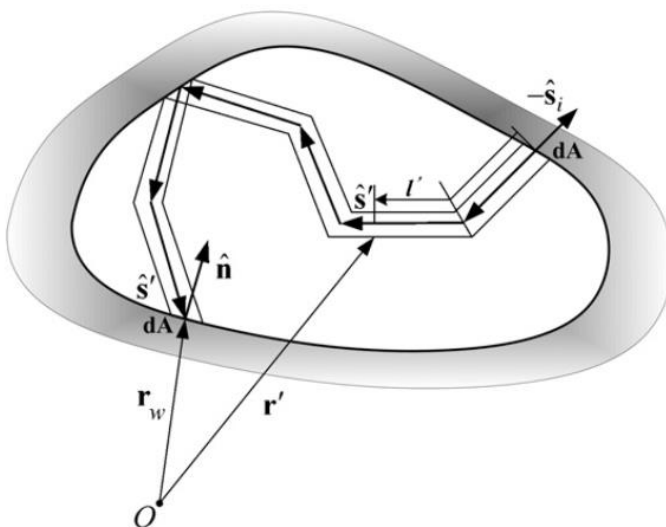


Слика 7.14. Графички приказ расподеле апсорбованих фотона по сегментима са дванаестог нивоа из табеле 7.22.

## 7.2 Обрнути Монте Карло метод

Код директног Монте Карло метода фотон се емитује из неког положаја у простору и прати се његова путања све док се не апсорбује у средини или на зиду. Међутим, ако треба да нађемо READ вредности између воксела и неког детектора који треба да мери зрачење и притом је величина детектора, са можда малим просторним видним углом, много мања у односу на цео простор у коме се врши симулација онда је директни Монте Карло метод доста неефикасан. У простору са великим димензијама  $20\text{ m} \times 20\text{ m} \times 20\text{ m}$  ако користимо стандардни/директни Монте Карло метод, за интеракцију средине са детектором величине  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ , онда бисмо морали да пустимо неколико милијарди фотона да би добили неку статистички прихватљиву вредност. За такве случајеве развијен је обрнути Монте Карло метод<sup>10</sup>(ВМС) [81].

Симулација код обрнутог Монте Карло метода је готово иста као код директног Монте Карло метода са поштовањем правила која су већ наведена. Разлика је у томе што уместо пуштања фотона из сваког воксела из целог простора да бисмо досегли позицију површи детектора, сада пуштамо фотоне са површине дефинисане детектором и гледамо где ти фотони завршавају у простору. Наиме, ако вектором  $\mathbf{r}_i$  обележимо положај површине детектора, вектором нормале  $\mathbf{s}_i$  на површину  $dA$ , тада пратимо цик-цак путању фотона све док га не апсорбује средина или део површи која затвара ту средину (Слика 7.15).



Слика 7.15. Путања фотона у обрнутој Монте Карло методи [81].

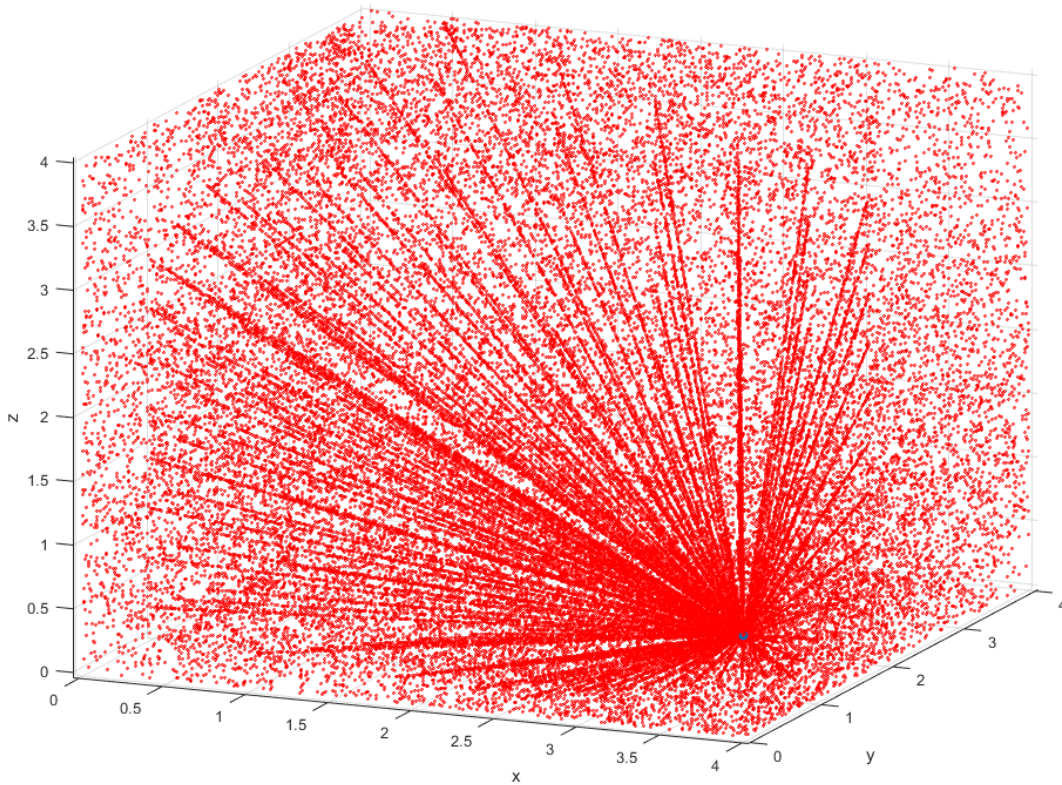
Када пратимо путању фотона онда рачунамо спектралну радијансу дуж те путање поступком:

<sup>10</sup> Енг. Reverse/Backward Monte Carlo.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_1 n} \kappa_{\lambda n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \sum_{i=1}^M \frac{I_{\lambda_1 i}}{M}, \\ \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_k n} \kappa_{\lambda n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \sum_{i=1}^M \frac{I_{\lambda_k i}}{M}, \\ \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_K n} \kappa_{\lambda n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \sum_{i=1}^M \frac{I_{\lambda_K i}}{M}. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Број  $K$  представља број различитих таласних дужина. За симулацију зрачења је развијен програм преко ВМС метода (Слика 7.16) чији је изворни код дат у прилогу 13.5.



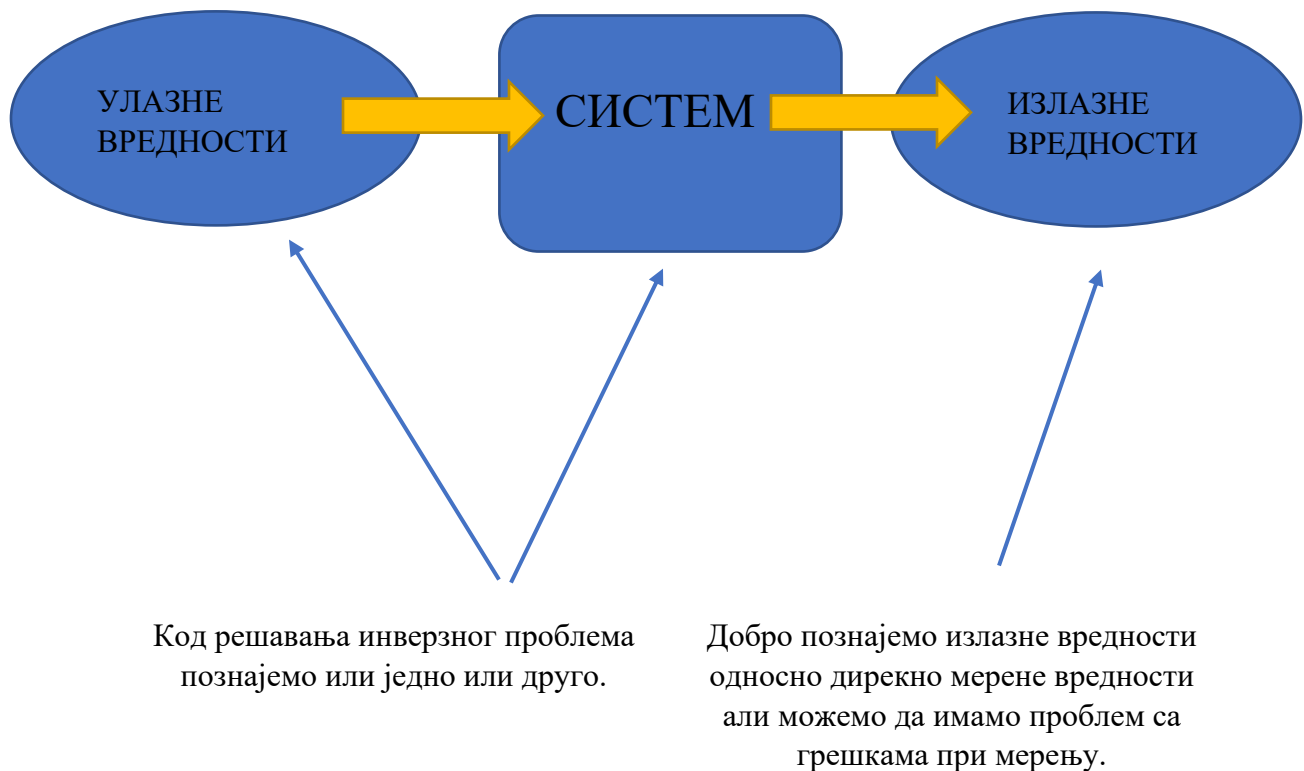
Слика 7.16. Резултат примене ВМС метода за зрачење које долази до детектора на позицији (4, 0, 0.8). Коefицијент апсорпције је 0.4, коefицијент расејања је 0.02. Број различитих праваца је 144 и број емитованих фотона по правцу је 1200.



## 8. Општа анализа решавања инверзног проблема

У овој глави су описани анализа проблема и главни нумерички методи који су важни за реконструкцију или израчунавање физичких параметара који се применом одређених мерних метода (радијациона пирометрија, спектрометрија, CCD камере као оптички сензори итд.) не добијају директним мерењем. За овакав поступак такорећи индиректног мерења треба добро познавати физички/математички модел који описује процес или појаву која је тема истраживања.

Физички/математички модели, који добро описују процес преношења топлоте зрачењем из котлова или пећи сагоревањем разних типова горива до сензора који мере зрачење, постоје већ деценијама и они су споменути у претходној глави. Много већи изазов за примену или развој нових техника решавања представља такозвани инверзни метод решавања и он се може дефинисати преко дијаграма на слици 8.1.



Слика 8.1. Код директног решавања проблема циљ је наћи излазне вредности за дате улазне вредности и познат физичко/математички модел система. Код инверзног проблема треба на основу излазних вредности наћи или улазне вредности или нумеричко-математички опис система.

У пракси инверзни проблеми најчешће представљају озбиљне изазове за нумеричку обраду података и дефинишу се као лоше-постављени (енг. ill-posed) или лоше-условљени (енг. ill-conditioned) проблеми. Сам термин је сковао француски математичар Жак Адамар<sup>11</sup> који је решавао проблеме из математичке физике. Адамар је дефинисао термин добро-постављен (енг. well-posed) проблем насупрот лоше-постављеном проблему ако проблем испуњава три особине:

1. Егзистенција решења: Проблем мора да има решење.
2. Јединственост решења: Мора да постоји само једно решење проблема.
3. Стабилност: Решење мора да буде континуална функција улазних вредности.

Чак иако је проблем добро постављен он може да буде лоше условљен што значи да мале грешке, које се обавезно појављују код директног мерења (излазне вредности), узрокују у инверзном рачунању појаву огромних грешки код добијања улазних вредности (Слика 8.1).

Грешке које су суперпониране на излазне вредности се инверзним нумеричким поступком увећавају неколико хиљада и више пута и постају део решења добијених улазних вредности. Методи који обуздавају ово увећање грешака у рачуну при инверзном поступку се зову Регуларизациони методи. Један од најпознатијих регуларизационих метода који је коришћен и у овој дисертацији је Тихоновљева Регуларизација. Назив је добила по руском математичару и геофизичару Андреју Тихонову<sup>12</sup>.

Математички/физички модел који се користи у овој дисертацији као и већина проблема обраде података или томографије у науци и техници припада класи проблема која је описана Фредхолмовим интегралним једначинама. Ове интегралне једначине су назване по шведском математичару Ерику Фредхолму<sup>13</sup>. Ова класа једначина се појављује у нумеричким моделима које треба инверзно решавати у геофизици (лоцирање нафтних и гасних налазишта), медицинској физици (СТ скенирање, електро-кардиографија, итд.), обради слика (астрономија, астрофизика, итд.), деконволуцији одговора мерног инструмента код обраде сигнала, итд.

Фредхолмове линеарне интегралне једначине су дефинисане на следећи начин:

$$f(x) = g(x) + \gamma \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (8.1)$$

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (8.2)$$

<sup>11</sup> Jacques Salomon Hadamard (1865-1963).

<sup>12</sup> Андрéй Николаéвич Тiхонов (1906-1993).

<sup>13</sup> Erik Ivar Fredholm (1866-1927).

Овде се функција  $K(x, y)$  назива кернел и дефинисана је на интервалу  $a \leq x, y \leq b$ , функцију  $g(x)$  сматрамо познатом и дефинисана је на истом интервалу. Функцију  $f(y)$  треба одредити и она је дефинисана на интервалу  $[a, b]$ . Параметар  $\gamma$  је константа.

Једначина (8.1) се назива линеарна Фредхолмова интегрална једначина друге врсте и њене особине и методе решавања су описане у литератури [52, 53, 55, 56]. Једначина (8.2) је позната као линеарна Фредхолмова интегрална једначина прве врсте. Она је исто описана са њеним особинама у литератури [57, 58].

У овом раду се сусрећемо са линеарном и нелинеарном Фредхолмовом интегралном једначином прве врсте. У многим проблемима у пракси се јавља проблем као што је нелинеарна Фредхолмова интегрална једначина прве врсте у облику:

$$g(x) = \int_a^b \tilde{K}(x, y, f(y)) dy \quad (8.3)$$

где се функција  $\tilde{K}(x, y, f(y))$  не може написати у форми  $K(x, y)f(y)$ .

## 8.1 Развој по сингуларним вредностима и Пикаров услов

Добар математички апарат који анализира решење линеарне Фредхолмове интегралне једначине прве врсте јесте Развој по сингуларним вредностима. Наиме, можемо да дефинишемо унутрашњи, скаларни производ, двеју функција  $\phi$  и  $\psi$  на интервалу од 0 до 1:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_0^1 \phi(t)\psi(t) dt. \quad (8.4)$$

За функцију  $\phi$  2-норма је дефинисана као

$$\|\phi\|_2 = \langle \phi | \phi \rangle^{1/2} = \left( \int_0^1 \phi(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (8.5)$$

За кернел функцију  $K(s, t)$  кажемо да је квадратно интеграбилна ако је интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)^2 ds dt < \infty \quad (8.6)$$

коначан. Из функционалне анализе и векторских простора је познато да било коју квадратно интеграбилну функцију  $K(s, t)$  можемо развити по сингуларним вредностима:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(s) v_i(t) \quad (8.7)$$

где се функције  $u_i$  и  $v_i$  називају леве и десне сингуларне функције. Ове функције су ортонормиране и важи:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}, i = 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Величине  $\mu_i$  се зову сингуларне вредности и оне формирају нерастући низ:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq 0. \quad (8.9)$$

Ако имамо само коначан број ненултих сингуларних вредности онда за кернел кажемо да је дегенерисан.

Једна од најважнијих особина које кернел задовољава је такозвана фундаментална релација:

$$\int_0^1 K(s, t) v_i(t) dt = \mu_i u_i(s), i = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

О развоју по сингуларним вредностима више информација се може пронаћи у литератури [59].

Леве и десне сингуларне функције формирају базис у простору  $L_2([0, 1])$  квадратно интегралних функција. На основу тога функције  $f$  и  $g$  можемо да развијемо:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i | f \rangle v_i(t), \quad (8.11)$$

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i | g \rangle u_i(s). \quad (8.12)$$

Ако сада убацимо развој по  $f$  (8.11) у једначину (8.2) и употребимо фундаменталну релацију (8.10) добијамо:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^1 K(s, t) \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i | f \rangle v_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i | f \rangle \int_0^1 K(s, t) v_i(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i | f \rangle \mu_i u_i(s). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Из једначина (8.12) и (8.13) добијамо следећу релацију:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i | g \rangle u_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \langle v_i | f \rangle u_i(s) \quad (8.14)$$

Одавде видимо да важи  $\langle v_i | f \rangle = \langle u_i | g \rangle / \mu_i$  за  $i = 1, 2, \dots$  што можемо да заменимо у једначину (8.11) и да коначно нађемо инверзно решење једначине (8.2) у облику

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u_i | g \rangle}{\mu_i} v_i(t). \quad (8.15)$$

Пошто функција мора да буде квадратно интегрална тада треба да буде испуњен следећи услов:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 f(t)^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\langle u_i | g \rangle}{\mu_i} \right)^2 < \infty. \quad (8.16)$$

Овај услов се назива Пикаров услов по француском математичару Шарл Емил Пикару<sup>14</sup>.

Главни резултат Пикаровог услова каже да скаларни производ  $\langle u_i | g \rangle$  мора брже да опада ка нули у односу на сингуларне вредности  $\mu_i$  да би инверзно решење (8.15) постојало. Међутим тешкоће са решавањем Фредхолмове интегралне једначине не престају са овом спознајом. Наиме, чак и да су идеална мерења без грешки у питању и да је Пикаров услов испуњен ако додамо мало пертурбација на функцију  $g$  у виду мерних грешака у неком тренутку опадања  $\langle u_i | g \rangle$  у односу на  $\mu_i$  то опадање ће престати и скаларни производ ће се сатурисати због дејства пертурбација. Како имамо равнање  $\langle u_i | g \rangle$  са дејством грешака услед пораста  $i$  сингуларне вредности ће наставити да опадају чиме ће на крају бити нарушен Пикаров услов. Ово је у суштини опис појаве поменутог лоше условљеног проблема односно проблема са стабилношћу решења.

Оно што може да буде проблем при решавању линеарне Фредхолмове интегралне једначине прве врсте јесте нула простор. Нула простор, ако је нетривијалан, доводи до тога да инверзно решење проблема није јединствено. Нула простор у векторском простору функција разапињу све оне функције  $f_n \neq 0$  за које је испуњено да важи

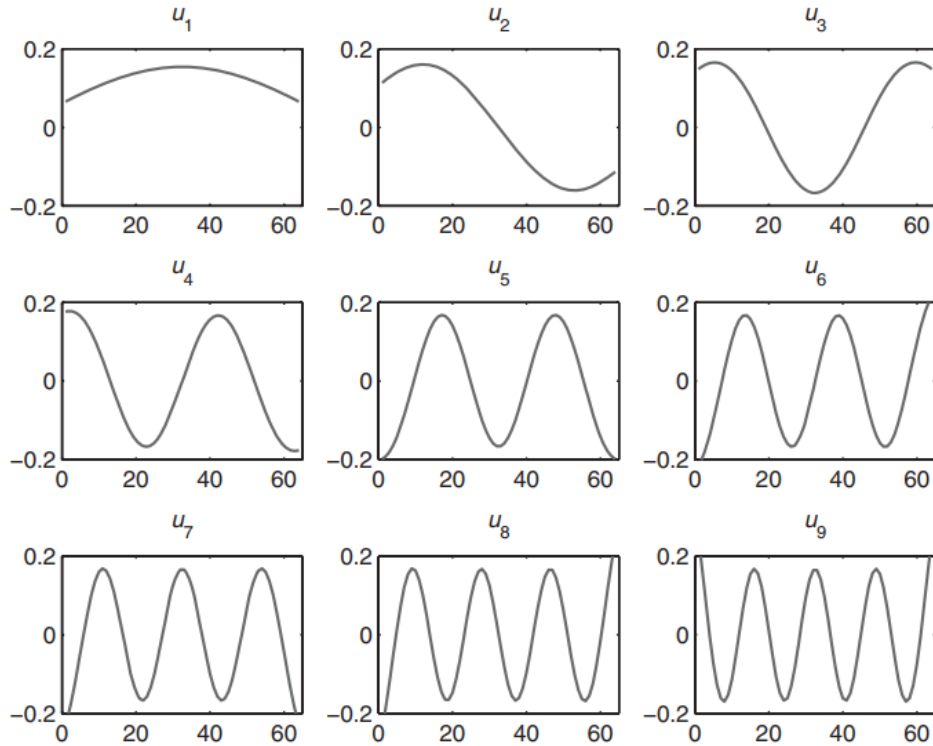
$$\int_0^1 K(s, t) f_n(t) dt = 0. \quad (8.17)$$

Овакве функције које формирају нула простор кернела  $K(s, t)$  се називају анихилатори.

<sup>14</sup> Charles Émile Picard (1856-1941)

Базис оваквог нула простора чине базисне сингуларне функције  $v_i(t)$  и из фундаменталне релације (8.10) важи да су њене одговарајуће сингуларне вредности  $\mu_i = 0$ .

Такође, може се показати [60] анализирајући сингуларне функције  $u_i$  и  $v_i$ , преко Фуријеове трансформације, да се сингуларне функције понашају као Фуријеове функције  $e^{iks}/\sqrt{2\pi}$  у смислу да малим вредностима  $i$ , односно малим сингуларним вредностима  $\mu_i$ , одговарају ниске фреквенције  $k$  код Фуријеових функција. Већим сингуларним вредностима одговарају Фуријеове функције са вишим фреквенцијама (Слика 8.2).



Слика 8.2. Пораст фреквенције осциловања сингуларне функције  $u_i$  са порастом редног броја  $i$  [62].

## 8.2 Дискретизација инверзног проблема

Да би наш физички модел у виду линеарне Фредхолмове интегралне једначине првог реда могли да решавамо преко рачунара потребно је извршити дискретизацију и свести проблем на матричан облик. Дакле, треба прећи из бесконачнодимензионалног простора непрекидних функција у коначнодимензионални векторски простор у којем важе правила из линеарне алгебре.

Релацију (8.2) можемо свести на облик:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j K(s_i, t_j) f(t_j) = g(s_i) - E_n(s_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.18)$$

Коефицијенти  $\omega_j$   $j = 1, \dots, n$  су оговарајући коефицијенти отежињења. Вредности  $E_n(s_i)$  представљају грешке дискретизације. Грешка дискретизације улази у коначан рачун нашег решења тако да семпловане вредности тачног решења  $f_j$  замењујемо са апроксимативним решењима  $\tilde{f}_j$ :

$$\sum_{j=1}^n \omega_j K(s_i, t_j) \tilde{f}(t_j) = g(s_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.19)$$

На овај начин добијамо матричан облик система линеарних једначина:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 K(s_1, t_1) & \omega_2 K(s_1, t_2) & \cdots & \omega_n K(s_1, t_n) \\ \omega_1 K(s_2, t_1) & \omega_2 K(s_2, t_2) & \cdots & \omega_n K(s_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 K(s_m, t_1) & \omega_2 K(s_m, t_2) & \cdots & \omega_n K(s_m, t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

и можемо да напишемо у облику  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  где је  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  матрица.

## 8.3 Декомпозиција по сингуларним вредностима и кондициони број

Детаљнији опис за декомпозицију по сингуларним вредностима се може наћи у литератури [61, 62]. Ова метода спада у ред значајних техника разлагања матрица чија примена иде од налажења псеудоинверза, одређивања ранга матрице као и кернела (нула простора). Примењује се у разним областима науке и инжењерије, обраде сигнала (енг. signal processing), методе најмањих квадрата, обраде слика (енг. image processing) итд.

Нека је  $A$  реална матрица са димензијама  $m \times n$  чији је ранг  $r \leq \min(m, n)$ . Разлагање по сингуларним вредностима SVD (Singular Value Decomposition) је јединствено разлагање за дату матрицу

$$A = U\Sigma V^T$$

где су  $U$  и  $V$  ортогоналне матрице тако да увек важи  $U^T U = I_m$  и  $V^T V = I_n$ . Матрица  $\Sigma$  садржи сингуларне вредности матрице  $A$  на њеној псеудодијагонали са нулама на осталим позицијама. Ово разлагање можемо представити матрично на следећи начин:

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Из једначине (8.21)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$  су вектори колоне матрице  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  сингуларне вредности матрице  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и налазе се на дијагонали матрице  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  вектори колоне матрице  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Сингуларне вредности представљају квадратне корене свосјтвених вредности матрице  $A^T A$ . Сингуларне вредности по дијагонали матрице  $\Sigma$  задовољавају поредак  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ . Ранг неке матрице  $A$ ,  $rank(A) = r$ , је димензија векторског простора којег граде вектори колоне или вектори врсте те матрице.

Нека је  $A = U\Sigma V^T$  декомпозиција по сингуларним вредностима, матрица је димензија  $m \times n$ , ранга  $rank(A) = r$ . Тада важи:

1.  $AV = U\Sigma$  и 
$$\begin{cases} A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, & i = 1, \dots, r \\ A\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, & i = r + 1, \dots, r + (n - r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Row(A) = span\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \\ Null(A) = span\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{r+(n-r)}\} \end{cases}$$
2.  $A^T A = V(\Sigma^T \Sigma)V^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
3.  $A^T AV = V(\Sigma^T \Sigma)$  
$$\begin{cases} A^T A\mathbf{v}_i = \sigma_i^T \mathbf{v}_i, & i = 1, \dots, r \\ A^T A\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, & i = r + 1, \dots, r + (n - r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Row(A^T A) = span\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \\ Null(A^T A) = span\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{r+(n-r)}\} \end{cases}$$
4.  $U^T A = \Sigma V^T$  и 
$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^T A = \sigma_i \mathbf{v}_i^T, & i = 1, \dots, r \\ \mathbf{u}_i^T A = \mathbf{0}, & i = r + 1, \dots, r + (m - r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Col(A) = span\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \\ Null(A^T) = span\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+(m-r)}\} \end{cases}$$
5.  $AA^T = U(\Sigma \Sigma^T)U^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
6.  $AA^T U = U(\Sigma \Sigma^T)$  и 
$$\begin{cases} AA^T \mathbf{u}_i = \sigma_i^2 \mathbf{u}_i, & i = 1, \dots, r \\ AA^T \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, & i = r + 1, \dots, r + (m - r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Row(AA^T) = span\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \\ Null(AA^T) = span\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+(m-r)}\} \end{cases}$$
7. Декомпозиција матрице  $A$  по сингуларним вредностима:



$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T.$$

Овде треба напоменути да ознаке  $Row(\mathbf{A})$ ,  $Col(\mathbf{A})$  и  $Null(\mathbf{A})$  означавају векторске просторе који су формираны редом од вектора врста матрице  $\mathbf{A}$ , вектора колона матрице  $\mathbf{A}$  и нула потпросотор матрице  $\mathbf{A}$  (кернел, потпростор који формирају сви вектори  $\mathbf{x}$  за које важи  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ). Може да се покаже да за  $n > r$  вектори  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  могу да формирају ортонормални базис у кернелу  $Null(\mathbf{A})$ . Наиме пошто важи  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  за  $i = 1, \dots, r$  вектори  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  формирају ортонормални базис у простору  $Row(\mathbf{A})$  док вектори  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  формирају ортонормални базис у простору  $Col(\mathbf{A})$ . Зато може да се запише:

$$\mathbb{R}^n = Row(\mathbf{A}) \perp Null(\mathbf{A}) = span\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \perp span\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}.$$

Ако важи  $m > r$  тада додатних  $m - r$  вектора  $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$  могу да формирају базис у простору  $Null(\mathbf{A}^T)$ . Како важи  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  за  $i = 1, \dots, r$  тада вектори  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  формирају ортонормални базис у простору  $Col(\mathbf{A})$  док вектори  $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$  обезбеђују базис за кернел  $Null(\mathbf{A}^T)$ . Дакле важи:

$$\mathbb{R}^m = Col(\mathbf{A}) \perp Null(\mathbf{A}^T) = span\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \perp span\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\}.$$

Овде се може увести важна величина која се зове кондициони број матрице:

$$cond(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}. \quad (8.22)$$

Кондициони број се рачуна као однос највеће и најмање сингуларне вредности. Ова вредност је индикатор инвертибилности матрице  $\mathbf{A}$ . Ако је њена вредност мала, тада је могуће без великих грешака наћи инверз матрице. Ако је велика, онда можемо наћи инверз са великим грешкама. При огромним вредностима кондиционог броја, немогуће је наћи инверз матрице.

## 8.4 Анализа и решавање система једначина преко декомпозиције по сингуларним вредностима

Декомпозиција по сингуларним вредностима има велику улогу у анализи и решавању система линеарних једначина. Да би смо решили систем једначина у облику

$$Ax = b \quad (8.23)$$

треба да нађемо инверз или псеудоинверз матрице  $A$ . Псеудоинверз матрице  $A$  преко декомпозиције по сингуларним вредностима је облика:

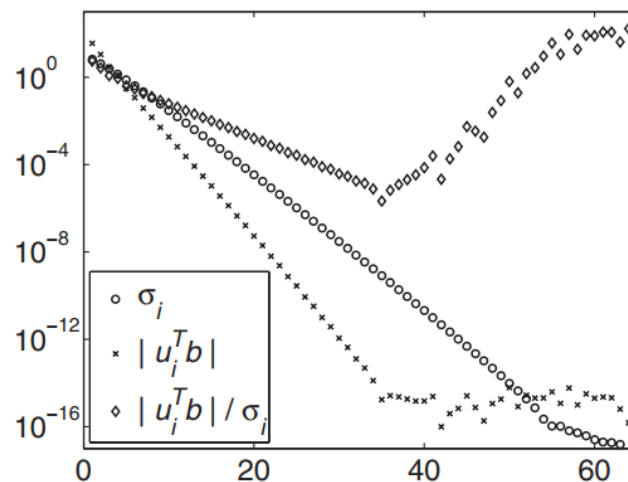
$$A^\dagger = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} v_i u_i^T \quad (8.24)$$

Решавање система (8.23) применом псеудоинверза (8.24) даје решење у облику

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \quad (8.25)$$

Резултат решењавања система, са матрицама које имају мале вредности кондиционог броја, на овај начин је скоро исти као код класичног начина решавања система једначина преко Гаусове елиминације или LU декомпозиције. Када имамо проблем са осетљивим матрицама, онда Гаусова елиминација и LU декомпозиција нису применљиве. Начин решавања преко (8.25) нам даје моћан алат који премашује могућности класичних метода.

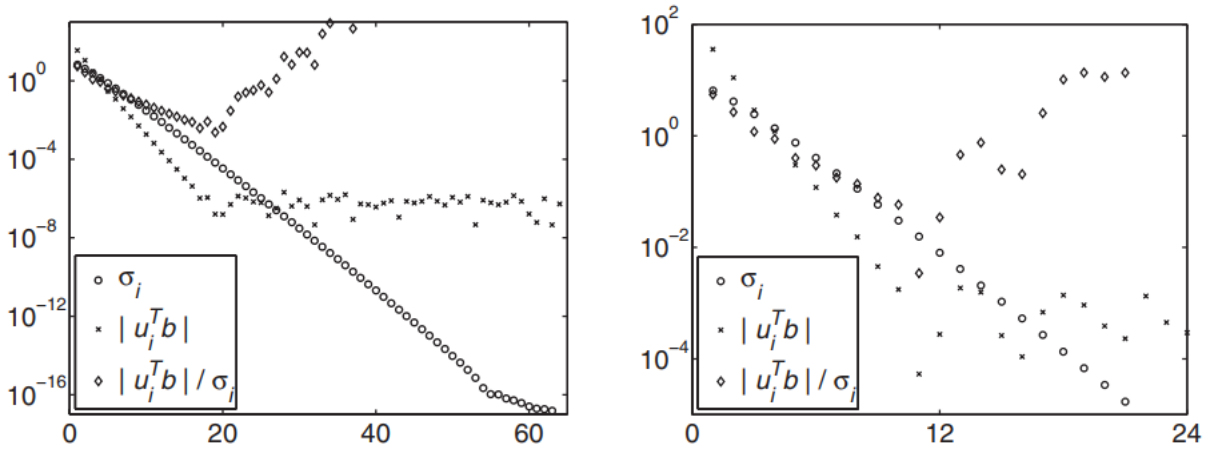
Типичан пример употребе декомпозиције по сингуларним вредностима као алата за анализу проблема може се видети на слици 8.3.



Слика 8.3. Пример односа коефицијента  $|u_i^T b|$  и  $\sigma_i$  у случају када немамо никакав шум односно флукуације код мерених вредности  $b$  [63].

На слици 8.3 је узето да нема флукуација, односно гршака мерења  $\mathbf{b}$ , и можемо да видимо да коефицијенти  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$  брже опадају у односу на сингуларне вредности  $\sigma_i$  све док редни број  $i$  не достигне вредност 35. Након ове вредности коефицијенти  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$  су већ толико мали да су упоредиви са вредношћу  $\|\mathbf{b}\|_2 \cdot \text{eps}(1)$  где је  $\text{eps}(1)$  машинско епсилон, односно машинска тачност, рачунара и због тога се ови коефицијенти сатуришу отприлике након  $i > 35$ . Оно што видимо на овом примеру је чак и да имамо идеалан случај мерења, где немамо никаквих грешака, тачност решавања инверзног проблема је ограничена због грешака заокруживања и због машинске тачности рачунара.

На истом примеру можемо видети типичан проблем ако додамо у једном случају мало шума, а у другом случају више шума као на слици 8.4.



Слика 8.4. На левој слици видимо деловање шума на низ  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}| / \sigma_i$  који престаје да опада након 20. итерације. На десној слици видимо деловање већег шума и као последицу тога да низ  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}| / \sigma_i$  престаје да опада након 11. итерације [63].

Као и у векторском простору непрекидних функција тако и у коначнодимензионом векторском простору можемо да се руководимо Пикаровим правилом. Наиме, добро апроксимативно решење (8.25) можемо постићи ако сумирамо само опадајуће члананове низа  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}| / \sigma_i$  односно до тренутка док низ  $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$  не почне да се устаљује због деловања шума. Ово је један облик регуларизације и управо ово одсецање или атенуирање чланова низа “на вишим фреквенцијама”, као вид филтрирања, представља суштину Тихоновљеве регуларизације.

## 8.5 Тихоновљева регуларизација

Код осетљивих<sup>15</sup> система линеарних једначина (8.23), без додавања пертурбација, решавање без регуларизације може да доведе до задовољавајуће тачног решења. Међутим са чак врло малим пертурбацијама пронађено решење је далеко од правог. То колико далеко пронађено решење може да одступи од правог решења може да се измери преко већ поменутог кондиционог броја (8.22).

Наш идеални систем, без утицаја грешака мерења  $\mathbf{b}^{exact}$ , са тачним решењем  $\mathbf{x}^{exact}$  можемо да прикажемо преко следећег система:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{exact} = \mathbf{b}^{exact}. \quad (8.26)$$

Ако на наша мерења додамо пертурбације у виду вектора  $\mathbf{e}$  тада ће наш систем изгледати

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = \mathbf{b}^{exact} + \mathbf{e}. \quad (8.27)$$

Из литературе [64] је познато да кондициони број успоставља релацију између релативних грешки:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{exact} - \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}^{exact}\|_2} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{b}^{exact}\|_2}. \quad (8.28)$$

Очигледно је да ако је кондициони број огроман да ће решење, без регуларизације,  $\mathbf{x}$  бити далеко од тачног решења  $\mathbf{x}^{exact}$ .

Тихоновљева регуларизација замењује псеудоинверз при решавању система без регуларизације

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (8.29)$$

у облик са регуларизацијом

$$\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^r \varphi_i(\lambda) \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (8.30)$$

где је  $\varphi_i(\lambda)$  такозвани филтер фактор који зависи од регуларизационог параметра  $\lambda$

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \begin{cases} 1, & \sigma_i \gg \lambda \\ \sigma_i^2 / \lambda^2, & \sigma_i \ll \lambda \end{cases} \quad (8.31)$$

<sup>15</sup> Велики кондициони број  $\text{cond}(\mathbf{A}) \sim 10^4$

Тихоновљева регуларизација је у суштини решавање линеарног система једначина  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , користећи погодно одабрану регуларизацију  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $p \leq n$  као филтер у форми

$$\mathbf{x}_{reg} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{Lx}\|^2 \} \quad (8.32)$$

Код стандардне Тихоновљеве регуларизације важи да је регуларизациона матрица уствари јединична матрица  $\mathbf{L} = \mathbf{I}_n$ .

Овде треба наћи прави однос регуларизационог фактора  $\lambda$  према сингуларним вредностима  $\sigma_i$ . Ако је регуларизациони фактор превише мали у односу на сингуларне вредности, тада су филтер фактори приближно 1, што значи да наша регуларизација као филтер пропушта скоро све што треба и што не треба, ово се зове *under-smoothing*. Ако је регуларизациони фактор превише велики у односу на сингуларне вредности, тада филтер фактори имају јако мале вредности и тиме врше атенуацију на цео спектар сингуларних вредности, ово се зове *over-smoothing*.

## 8.6 Решавање нелинеарног облика Фредхолмове интегралне једначине

У нашем случају решавање инверзног проблема не можемо свести на матричан облик односно линеарни систем једначина. Решавање нелинеарног система једначина се обавља преко разних градијентних и стохастичких метода. Стохастичке методе, иако су робусне и веома добре за решавање проблема, не могу најчешће довољно брзо да конвергирају до решења за разлику од градијентних детерминистичких метода. Детерминистичке градијентне методе јесу брже, али њихова мана је што веома тешко налазе глобални минимум хиперповрши, која је описана преко методе најмањих квадрата. Врло често детерминистичке оптимизационе методе се заглављују у локалним минимумима и проналажење доброг решења зависи од одабраних иницијалних вредности, односно од задатог почетног решења.

За сада, не постоји у литератури довољно ефикасан алгоритам за решавање система нелинеарних једначина, са великим бројем непознатих, реда неколико стотина, који може по брзини да се пореди са решавањем линеарног система. Док решавање линеарног система са регуларизацијом захтева време у ms, решавање нелинеарног система потроши неколико минута. Ово и није неки велики проблем за велике системе, који су доста инертни, па самим тим не могу брзо и нагло да мењају параметре које меримо.

Решавања нелинеарне Фредхолмове интегралне једначине прве врсте је приказано, у овом раду, код решавања једнодимензионалног, дводимензионалног и тродимензионалног проблема. Код дводимензионалног проблема је представљено решавање у једном специфичном матричном облику у комбинацији са Бајесовим закључивањем. Код тродимензионалног проблема је приказано решавање у општем облику.

## 9. Решавање једнодимензионалног проблема

У овом поглављу је описана нова метода за одређивање температурне расподеле пламена унутар ложишта котла термоелектране на угаљ. Осим температурне расподеле овај метод омогућава одређивање средње вредности оптичких коефицијената у пламену. Код ове методе је коришћена спектроскопска метода. Овде је дат експериментални поступак мерења и детаљан математички модел који је коришћен за решавање инверзног проблема и анализу мерених података.

### 9.1 Увод

Мониторинг температурне расподеле, унутар ложишта котла за термоелектрану, која за гориво користи угаљ, је од есенцијалног значаја за постизање ефикасног сагоревања и за максимално искоришћавање топлоте зрачења. Добра контрола процеса сагоревања омогућава избегавање великих температурних флукуација као и флукуације притиска. Такође, са добром контролом се постиже мање генерисање продуката сагоревања, као што су чађ и пепео и материја које су опасне по животну средину.

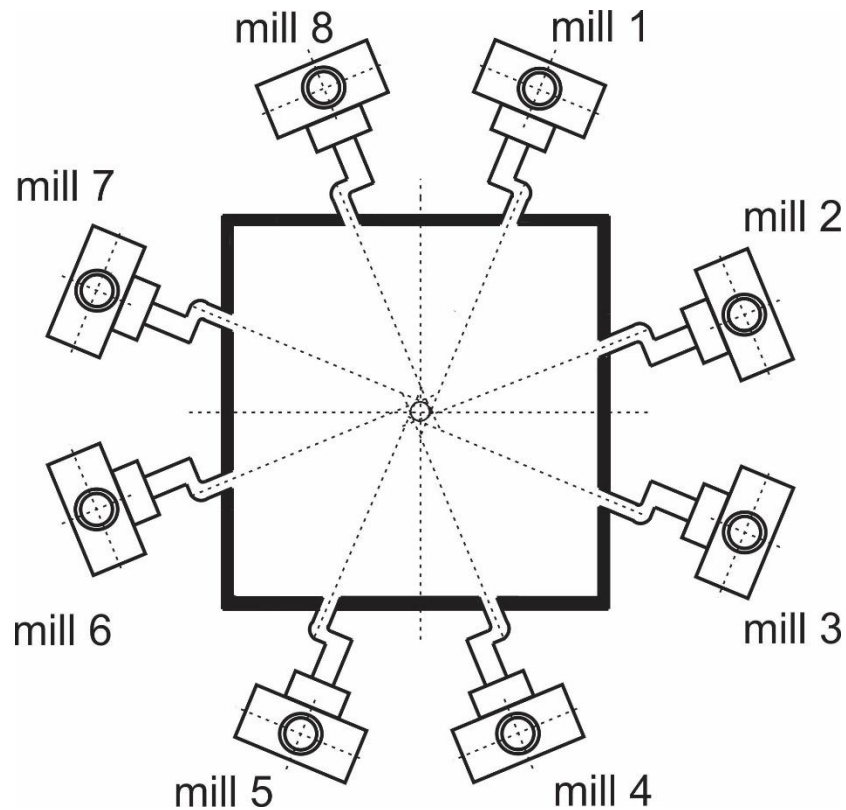
Већина термоелектрана на угаљ је опремљена са механизмом за позиционирање и контролу жиге пламена. Ово се постиже са неколико горионика који су распоређени на различитим позицијама и чија је улога да удубљају мешавину горива и ваздуха у ложиште котла. Горионици су повезани са млиновима за угаљ чија је улога да мељу угаљ и да на тај начин омогуће ефикасније сагоревање угљеног праха. Са контролом брзине удубљавања мешавине ваздуха и горива код сваког горионика омогућава се обликовање пламена, као и позиционирање његове жиге.

Типичан пример за позиционирање пламена дат је на слици 9.1 где је приказан попречни пресек котла термоелектране на угаљ, Никола Тесла, Блок Б. Млинови у овој термоелектрани формирају тангенцијалну конфигурацију.

Температурно поље унутар термоелектране, симетричност пламена, као и садржај несагорелих честица, су веома важни параметри у контроли процеса сагоревања. Ефикасност искоришћавања топлоте при сагоревању зависи од облика пламена и расподеле температурног поља [84, 85]. Неоптимална расподела температурног поља производи проблеме као што су застакљивање и зашљакавање зидова котла као и високу емисију штетних продуката сагоревања, као што је емисија  $\text{NO}_x$  гасова [86, 87, 88]. Предуго излагање зидова котла пламену на високим температурама може да доведе до деградације, пуцања или корозије.

Последњих неколико деценија су развијени и описани бројни системи за мерење дистрибуције температуре унутар котла [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104]. Кратак резиме предности и недостатака најчешће коришћених мерних

инструментата и метода у температурној томографији код лабораторијских, комерцијалних, индустријских пећи, котлова или комора за сагоревање је дат у табели 9.1.



Слика 9.1. Попречни пресек котла са осам тангенцијално постављених млинова унутар термоелектране на угаљ, Никола Тесла, снаге 630 MW.

У овом раду је описана једнодимензионална реконструкција температурне расподеле пламена унутар ложишта котла. Узето је да се честице понашају као сива тела. Као мерни инструмент коришћен је спектрометар. Инверзни проблем реконструкције температурне расподеле и коефицијента атенуације је решен методом најмањег квадрата односно применом Levenberg-Marquardt оптимизационог метода. Прво, је описана експериментална и мерна поставка унутар термоелектране. Затим, је показан алгоритам и математички модел за реконструкцију. Тест, симулација стабилности алгоритма, као и процена гешке су приказани на крају.

Табела 9.1. Резиме предности и недостатака мерних метода за мерење температуре.

Назив инструмента или сензора за мерење температуре	Предности	Недостаци
Термопар	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Рад на високим температурама.</li> <li>• Ниска цена.</li> <li>• Робусност и једноставна употреба.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Утицај топлотног зрачења на тачност мерења.</li> </ul>
Усисни пирометар	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Релативно једноставна употреба.</li> <li>• Често се користи код индустријских мерења температуре.</li> <li>• Утицај зрачења је елиминисан</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Није препоручљиво за мерење температуре пламена у малим пећима/котловима због утицаја на динамику сагоревања</li> <li>• Велика инертност што онемогућава мерења брзих температурних промена.</li> </ul>
Двобојни пирометар	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Неинвазивни метод мерења температуре</li> <li>• Може се користити када је емисивност тела непозната.</li> <li>• Може се користити код мерења температуре средине или тела које се понаша као сиво тело.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Није једноставно за употребу код постројења великих размера.</li> </ul>
CCD камера	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Могуће је добијање 2Д и 3Д температурне расподеле пламена.</li> <li>• Погодно за мониторинг температурног поља.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Захтева унапред познавање коефицијента атенуације.</li> <li>• CCD сензор мери у спектралној области у којој доминирају апсорпциони и емисиони молекулски спектри гасова пламена.</li> </ul>

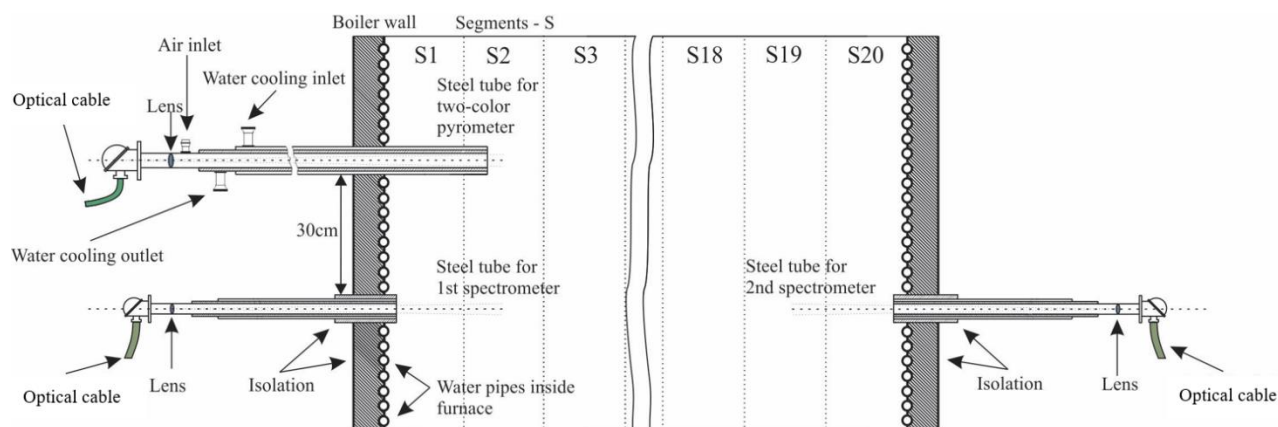


## 9.2 Поставка мерења

Мерења су обављена у термоелектрани Никола Тесла Б, која има снагу од 630 MW. Млинови са горионицима су тангенцијално постављени и на тај начин омогућавају контролу позиције пламена. Димензије котла су 20 m × 20 m односно његов хоризонтални пресек. Примарно гориво је лигнит, а секундарно је уље за ложење.

Сонде са оптиком су постављене једна наспрот другој на супротним зидовима котла (Слика 9.2). Обе сонде су направљене од нерђајућег челика и цев је била провучена кроз зидове котла. Део са фокусирајућим сочивом и светловодом у сонди налазио се ван котла. Оваква конфигурација пружа заштиту од разарајућих деловања високотемпературне средине. Две сонде су биле постављене дуж исте оптичке осе и повезане светловодима са спектрометрима. Овде је коришћен спектрометар Аутога 4000 (Слика 8.4) и мерења су вршена на 40 таласних дужина између 800 nm и 900 nm.

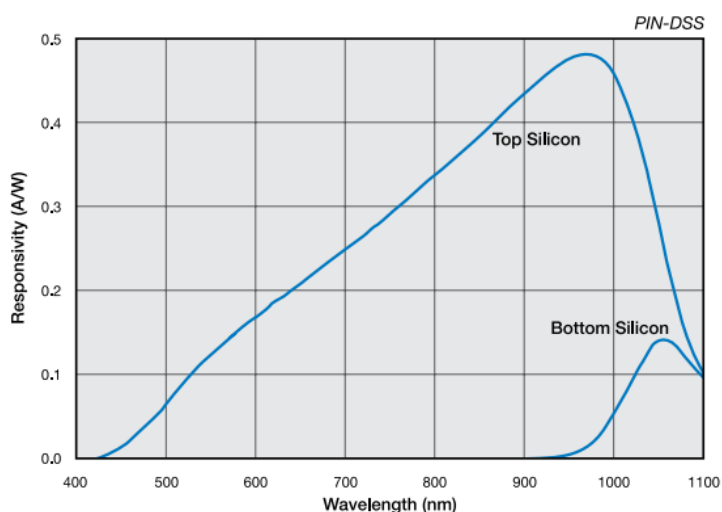
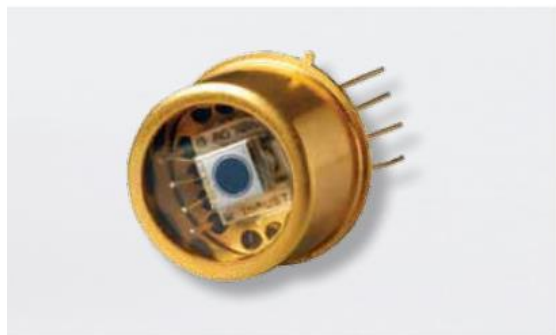
Видно поље обе сонде је уско ( $< 0.2^\circ$ ), чиме је доста смањен утицај зрачења које потиче од расејања из унутрашњости котла. На овај начин је значајно био смањен измерени сигнал. Наш циљ је био да добијемо температурни профил пламена у опсегу температура између 750 °C и 1600 °C. Због најбољег односа сигнал/шум као и због избегавања емисионих и апсорпционих спектралних линија гасова унутар котла одабрана одабране су таласне дужине за мерење у поменутом опсегу. Динамички опсег овог спектрометра је  $10^6$ . Однос сигнал/шум на целом спектру је 300:1. Оптичка резолуција је дата у табели 9.2.



Слика 9.2. Простор унутар котла са две монтиране сонде од нерђајућег челика које су повезане преко светловода са спектрометрима. Горе лево је сонда двобојног пирометра. Простор између два зида је сегментиран ради добијања профила пламена.

Да би се мерења спектрометра упоредила са додатним независним мерењем коришћена је сонда двобојног пирометра. Пирометар се налазио у 8 m дугачкој сонди/цеви од нерђајућег челика. Овако дугачка цев је послужила за позиционирање сонде у пламену унутар котла. Максимална дубина на којој је могла да се позиционира сонда је била 6 m. Померањем сонде двобојног пирометра на одређене позиције било је могуће мерити температуру на тим местима и овај поступак/метод је описан у раду [105]. Цев за двобојни пирометар је морала да се хлади ради заштите од термомеханичких оштећења.

Сензор двобојног пирометра је тзв. сендвич детектор, чији је произвођач OSI Optoelectronics. Горња фотодиода је PIN-DSS са највећом осетљивошћу на 950 nm, доња фотодиода је исто PIN-DSS са највећом осетљивошћу на 1050 nm (Слика 9.3). Однос сигнала на ове две таласне дужине омогућава да рачунање температуре буде независно од емисивности средине/објекта.



Слика 9.3. На левој страни је приказана сендвич фотодиода. На десној страни је спектрални одзив фотодиоде [106].

Оптичке осе сонди спектрометра и двобојног пирометра су биле паралелне и на међусобном растојању од 30 cm. Таласне дужине спектрометра су биле одабране како би се избегле емисионе и апсорпционе линије гасова у ложишту котла. Спектрометар је био калибрисан преко лабораторијског црног тела на Физичком факултету у Београду, на катедри за метрологију, и то на три температуре: 1151 °C, 1251 °C и 1352 °C. Са овом калибрацијом је израчуната и осетљивост спектрометра.

Табела 9.2. Резолуција спектрометра у зависности од опсега таласних дужина [107].

Модел	Отвор улазног прореа	Опсег спектра	Резолуција (nm)
Aurora 4000	10 $\mu\text{m}$	200-347 nm	0.14
		226-369 nm	0.18
		310-404 nm	0.16
		319-455 nm	0.13
		400-480 nm	0.08
		423-547 nm	0.12
		480-568 nm	0.12
		546-653 nm	0.12
		568-634 nm	0.09
		654-754 nm	0.10
		748-837 nm	0.23
		794-876 nm	0.24
		876-940 nm	0.20
940-1100 nm	0.20		



Слика 9.4. Спектрометар Aurora 4000.

Са двобојним пирометром извршено је мерење температуре на седам позиција и то са једне стране котла: 0m, 1 m, ..., 6m. Током мерења млинови електране су радили у три режима убацивања горива. Сваки режим рада је производио различите позиције пламена (i) позиција центра пламена ближе двобојном пирометру и спектрометру, (ii) позиција пламена у центру котла и (iii) позиција пламена даље од двобојног пирометра и ближе другом спектрометру. Промена режима је трајала око 30 min.

### 9.3 Теоријске основе и алгоритам решавања инверзног проблема

На слици 8.2 простор је дискретизован између два спектрометра на  $N$  сегмената. Растојање између два спектрометра је  $L$  па је дужина једног сегмента  $\Delta x = L/N$ . Сваком сегменту је придружена температура  $T_k, k = 1, \dots, N$  и коефицијент атенуације  $\alpha_k, k = 1, \dots, N$ . Ради поједностављења проблема сматраћемо да сви сегменти имају средњу вредност коефицијента атенуације  $\alpha$ .

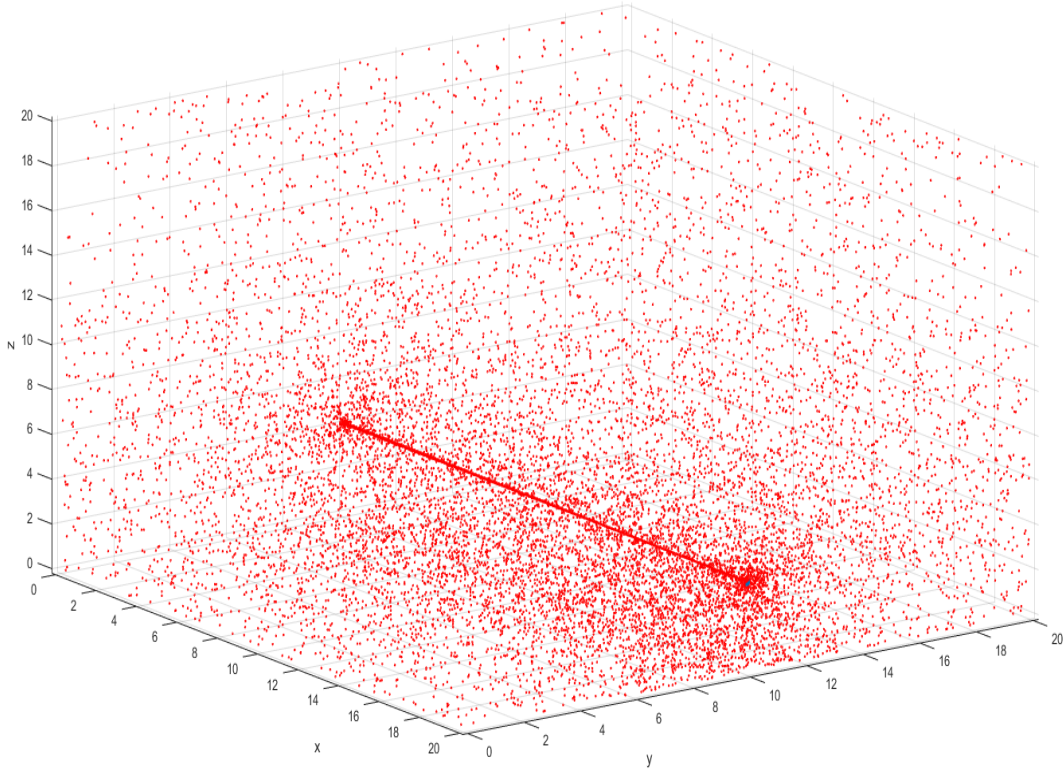
Сваки сегмент зрачи и доприноси спектралном радијансом по Виновом закону зрачења:

$$I_k(\lambda_m, T_k) = \varepsilon_k \frac{C_1}{\lambda_m^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_m T_k}} \quad (9.1)$$

где су  $C_1$  и  $C_2$  прва и друга радијациона константа. Спектралну радијансу меримо на  $\lambda_m, m = 1, \dots, M$  таласних дужина. У области таласних дужина између 500 nm и 1000 nm можемо честице које зраче да апроксимирамо као да су сива тела. Многи аутори су користили ову апроксимацију, која даје задовољавајуће резултате, и то се може видети у литератури [108, 109, 110, 111, 112].

Овде смо занемарили утицај зрачења са зидова, пошто зидови имају водено хлађење, такође температура зидова је знатно мања у односу на зрачење самог пламена у котлу. Многи фактори као што су таласна дужина, притисак и концентрација честица, утичу на вредности коефицијента атенуације. Да би смо проценили утицај варирања коефицијената атенуације на зрачење, а тиме и на мерење температуре, мењали смо у симулацији њене вредности у опсегу од  $0.055 \text{ m}^{-1}$  до  $0.075 \text{ m}^{-1}$ . Показује се да је утицај овог варирања веома мали на промену температуре. Максимална промена температуре услед варирања коефицијената атенуације, односно допринос неодређености у процењивању температуре, је око  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  и то највише код зидова котла. Циљ овог рада је био да се прати промена положаја жиже, центра пламена у котлу, тако да грешке у рачунању коефицијента атенуације нису од велике важности. Допринос расејања на мерење температуре је добрим делом елиминисан због уског видног поља сонди.

Директан проблем може да се реши применом поменуће ВМС (поглавље 7.2) Монте Карло методе (Слика 9.5). Овде су за коефицијенте апсорпције и расејања коришћене вредности  $0.04 \text{ m}^{-1}$  и  $0.02 \text{ m}^{-1}$ .



Слика 9.5. Резултат примене ВМС методе за решавање директног проблема у једнодимензионалном случају. Угао под којим сонде гледају у унутрашњост котла је мали ( $< 0.2^\circ$ ).

Код инверзног решавања дискретизујемо систем нелинеарних једначина за мерења које врше обе сонде. Ако меримо са леве стране, (позиција где је двобојни пирометар) на  $\lambda_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  таласних дужина тада добијемо следећи систем нелинеарних једначина:

$$\frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_{l1}}} = \frac{1}{N} \left( \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_2}} + \dots + e^{-\alpha \cdot (K-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_K}} + \dots + e^{-\alpha \cdot (N-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_N}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_{l2}}} &= \frac{1}{N} \left( \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_2}} + \dots + e^{-\alpha \cdot (K-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_K}} + \dots \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha \cdot (N-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_N}} \right) \\
&\quad \vdots \\
\frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_{lM}}} &= \frac{1}{N} \left( \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_2}} + \dots + e^{-\alpha \cdot (K-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_K}} \right. \\
&\quad \left. + \dots + e^{-\alpha \cdot (N-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_N}} \right)
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Код мерења са десне стране, на истим таласним дужинама, добијамо следећи додатни систем једначина:

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_{r1}}} &= \frac{1}{N} \left( e^{-\alpha \cdot (N-1) \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot (N-2) \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_2}} + \dots \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha \cdot (N-K) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_K}} + \dots + \frac{C_1}{\lambda_1^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_1 \cdot T_N}} \right) \\
\frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_{r2}}} &= \frac{1}{N} \left( e^{-\alpha \cdot (N-1) \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot (N-2) \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_2}} + \dots \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha \cdot (N-K) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_K}} + \dots + \frac{C_1}{\lambda_2^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_2 \cdot T_N}} \right) \\
&\quad \vdots \\
\frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_{rM}}} &= \frac{1}{N} \left( e^{-\alpha \cdot (N-1) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_1}} + e^{-\alpha \cdot (N-2) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_2}} + \dots \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha \cdot (N-K) \cdot \Delta x} \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_K}} + \dots + \frac{C_1}{\lambda_M^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda_M \cdot T_N}} \right)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Температуре  $T_{lm}, T_{rm}, m = 1, \dots, M$  су ефективне температуре које мери спектрометар, на различитим таласним дужинама, са леве и десне стране. Са овим системима (9.2) и (9.3) имамо  $2M$  једначина са  $N + 1$  непознатих вредности.

Да би смо решили овај нелинеарни систем преко методе најмањих квадрата увешћемо ознаке  $S_{left}(j) = e^{\frac{-c_2}{\lambda_j \cdot T_{lj}}}$ ,  $D_{left}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\alpha \cdot \Delta x \cdot (i-1)} e^{\frac{-c_2}{\lambda_j \cdot T_i}}$ ,  $S_{right}(j) = e^{\frac{-c_2}{\lambda_j \cdot T_{rj}}}$  и  $D_{right}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\alpha \cdot \Delta x \cdot (N-i)} e^{\frac{-c_2}{\lambda_j \cdot T_i}}$ . Функција грешке која се минимизује је облика:

$$F(T_1, \dots, T_N, \alpha) = \sum_{j=1}^M (S_{left}(j) - D_{left}(j))^2 + \sum_{j=1}^M (S_{right}(j) - D_{right}(j))^2 \quad (9.4)$$

Систем (9.4) може да се реши преко Levenberg-Marquardt оптимизационог метода.

Једноставна процена утицаја рефлексије са зида на спектрометар, који је на супротној позицији, може да се обави на следећи начин: прво предпоставимо да нема уопште рефлексије и да до левог спектрометра долази зрачење од пламена  $I_{left}(\lambda, T_l) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{\frac{-c_2}{\lambda T_l}}$ , а да са десног зида у правцу позиције левог спектрометра долази зрачење дато изразом  $(1 - \varepsilon)e^{-\alpha L} I_{right}(\lambda, T_r)$  при чему је  $I_{right}(\lambda, T_r) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{\frac{-c_2}{\lambda T_r}}$ . Температуре  $T_l$  и  $T_r$  су ефективне мерене температуре на левој и десној страни унутрашњости котла. Кориговану вредност коју треба да мери леви спектрометар можемо да напишемо у облику

$$I_{left,corrected}(\lambda, T_l) = I_{left}(\lambda, T_l) + (1 - \varepsilon)e^{-\alpha L} I_{right}(\lambda, T_r),$$

односно у облику

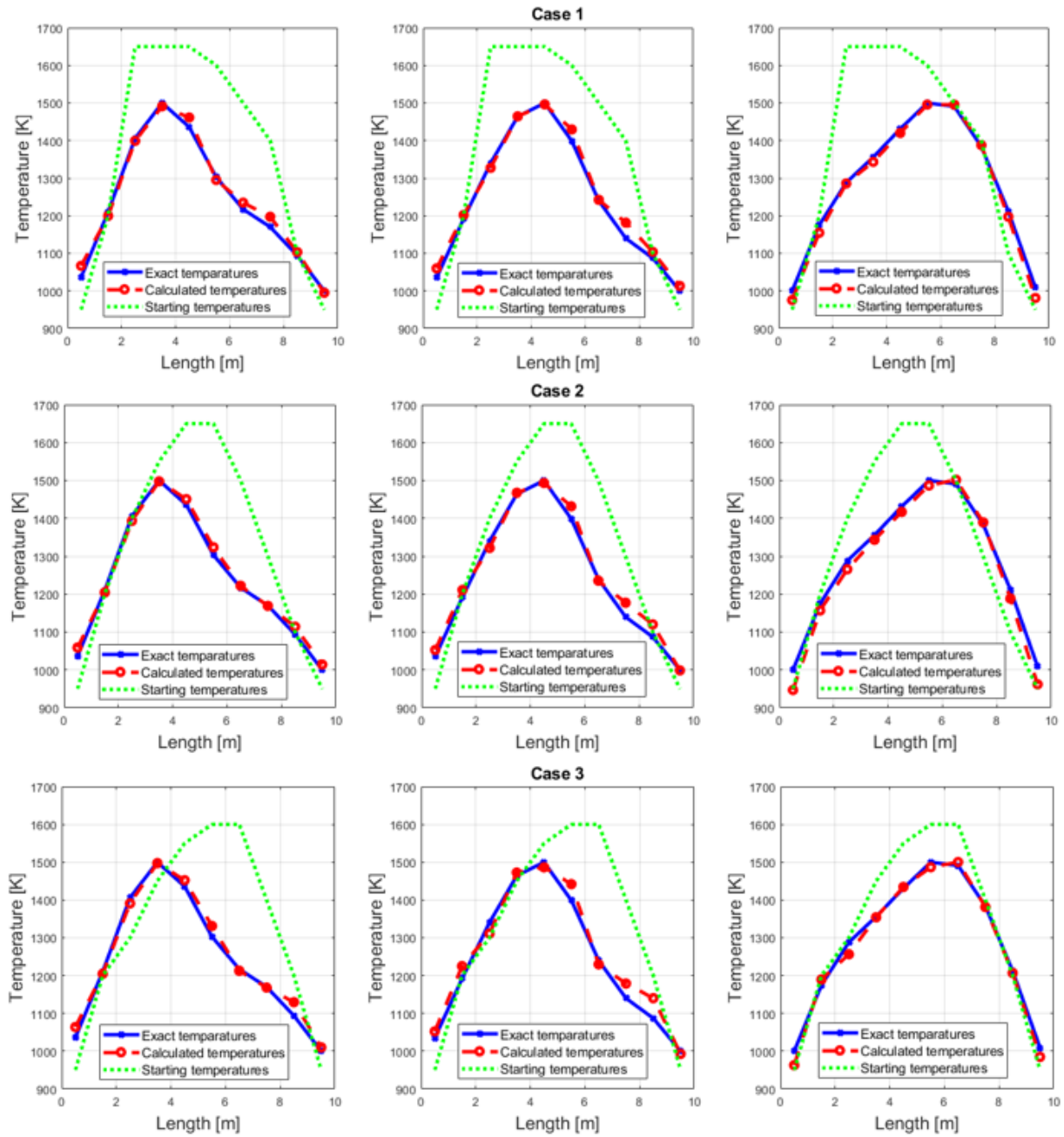
$$\frac{e^{\frac{-c_2}{\lambda T_{l,corrected}}}}{\lambda^5} = e^{\frac{-c_2}{\lambda T_l}} + (1 - \varepsilon)e^{-\alpha L} e^{\frac{-c_2}{\lambda T_r}}.$$

Одавде видимо, ако убацимо нумеричке вредности у ове формуле добијамо да је  $e^{\frac{-c_2}{\lambda T_l}} = 3.67 \cdot 10^{-6}$ ,  $e^{\frac{-c_2}{\lambda T_{l,corrected}}} = 3.7810^{-6}$ , за  $\lambda = 804 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ,  $\varepsilon = 0.9$ ,  $\alpha = 0.065 \text{ m}^{-1}$ ,  $L = 20 \text{ m}$ ,  $T_l = 1430 \text{ K}$ ,  $T_r = 1436 \text{ K}$ . Такође можемо да добијемо да је  $T_{l,corrected} = 1434 \text{ K}$ . Из овог рачуна добијамо да је релативна грешка занемаривања рефлексије зрачења са зидова мања од 1%.

## 9.4 Тестирање поузданости алгоритма кроз симулацију

За потребе тестирања смо генерисали различите облике температурног поља унутар котла. Такође, генерисане су различите расподеле честица угља и продуката сагоревања по сегментима. Најпре је тестиран алгоритам за реконструисање температурног поља тако што смо задавали различите иницијалне расподеле температуре по сегментима, а онда смо пуштали алгоритам да конвергира ка решењу што се може видети на слици 9.6.

Промена концентрације честица по сегментима доводи до промене коефицијента атенуације. Овде смо тестирали промену коефицијента атенуације услед неуниформне расподеле концентрација честица. Оно што је пронађено јесте да овакав утицај на реконструкцију температурно поља има веома мали утицај на укупну грешку односно израчунату температурну неодређеност.



Слика 9.6. Симулација за три различите расподеле температурног поља које оба спектрометра мере гледано по колонама. По врстама имамо различите задате иницијалне вредности температурног поља, одакле алгоритам почиње да конвергира ка решењу. Зелена тачкаста крива представља иницијалну расподелу. Плава пуна крива представља тачно решење. Црвена (тачка-црта) представља пронађено решење.



Овај рачун је приказан у табели 9.3. Варијације су прављене у односу на базне вредности коефицијента атенуације, која је узета да буде  $\alpha_0 = 0.055 \text{ m}^{-1}$ . На пример варијација од 20 % изнад  $\alpha_0$  се рачуна као

$$\alpha_{20}(i) = \alpha_0 + 0.2\alpha_0 \text{rand}(i),$$

где је  $i$  позиција односно број сегмента унутар котла,  $\text{rand}(i)$  је генератор случајних бројева са униформном расподелом.

Табела 9.3.  $L$  представља растојање од леве сонде.  $T_0, T_{20}, T_{50}, T_{120}$  су температурни профили са 0%, 20%, 50% and 120% варијације коефицијента атенуације.

$L(\text{m})$	$T_0(\text{K})$	$T_{20}(\text{K})$	$T_{50}(\text{K})$	$T_{120}(\text{K})$
0.5	1084	1089	1092	1082
1.5	1189	1192	1186	1179
2.5	1226	1229	1221	1219
3.5	1419	1421	1417	1418
4.5	1497	1497	1497	1498
5.5	1427	1428	1432	1414
6.5	1249	1244	1259	1225
7.5	1175	1176	1179	1171
8.5	1099	1100	1095	1105
9.5	1002	1000	996	1017

Систем нелинеарних једначина (9.2) и (9.3) преко методе намањих квадрата (9.4) формира хиперповрш, чија је димензија једнака броју непознатих умањен за једну димензију. Алгоритам ради тако што тражи локацију минимума на тој хиперповрши. Тачност пронађеног решења зависи од иницијалне позиције одакле алгоритам почиње да конвергира ка минимуму. На слици 9.9 су задате три различите позиције за три различита глобална минимума и алгоритам као што је показано успева да конвергира ка решењу. Ово показује да је алгоритам стабилан. Овде смо имали десет непознатих температура са непознатом средњом вредношћу коефицијента атенуације. Мерење је симулирано са двадесет таласних

дужина између 800 nm и 900 nm тако да смо имали 40 нелинарних једначина са 11 непознатих.

Одабирање иницијалне расподеле температуре зависи од емпиријског знања за дате услове рада у котлу и могуће је пронаћи у литератури оптималне вредности температуре и коефицијента атенуације које могу да се очекују унутар котлова термоелектрана или унутар индустријских пећи. Најпоузданија и најразумнија претпоставка је да расподела температуре унутар котла има конкаван облик, и да се максимум налази између зидова котла.

## 9.5 Резултати

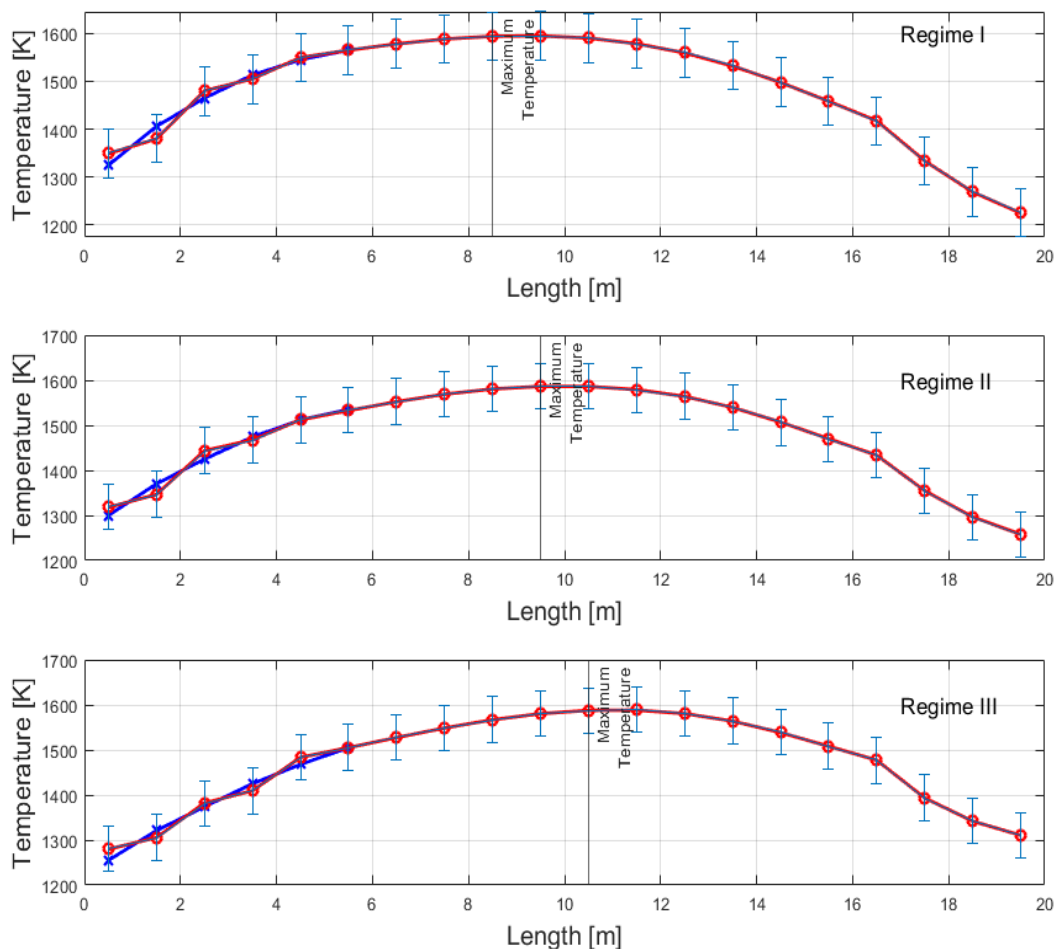
За мерења на 40 таласних дужина између 800 nm и 900 nm, са мерењем са леве и десне стране котла, са иницијалном вредношћу коефицијента атенуације  $0.07 \text{ m}^{-1}$ , добили смо расподеле температуре по сегментима у поменутом три режима рада млинова, као на слици 9.7, као и израчунати коефицијент атенуације  $0.061 \text{ m}^{-1}$ .

На слици 9.7 имамо плавом бојом измерене температуре употребом двобојног пирометра, на шест позиција, у три режима рада млинова. Црвена крива даје реконструкцију расподеле температурног поља, у три режима рада млинова, дуж једне димензије унутар котла, мерењем преко спектрометара са леве и са десне стране. За реконструкцију температурног поља коришћен је Levenberg-Marquardt оптимизациони алгоритам.

Као што се види, шест измерених температура преко двобојног пирометра су независна мерења у односу на мерења спектрометара, и постоји добро међусобно поклапање. Дубље није било могуће мерити са двобојним пирометром због дужине сонде која је морала да се уноси унутар котла.

Употребом великог броја симулација услед дискретизације температуре и рачунања средње вредности коефицијента атенуације без урачунавања реалне и континуалне расподеле ових параметара добијамо да је највећа неодређеност температуре коју алгоритам даје  $u_a = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Укупна неодређеност мерења је комбинација неодређености услед калибрације спектрометара, неодређености услед дискретизације, стандардне девијације мерења, стабилности рада котла и грешке услед нумеричких итерација алгоритма. Установили смо да је максимална неодређеност услед калибрације спектрометара  $15^\circ\text{C}$ . Дискретизација, сегментација са нумеричким итерацијама уносе неодређеност од  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ .



Слика 9.7. Расподела температуре по сегментима у три режима рада млинова котла.

Максимална неодређеност метода је:

$$u_{method} = \sqrt{u_a^2 + u_{cal.}^2 + u_{sd}^2 + u_{stability}^2} = 50^\circ\text{C}. \quad (9.5)$$

Процењивање грешке метода мерења температуре у котлу је урађено на начин који је описан у литератури [105, 113, 115]. Овај рад за мерење једнодимензионалног температурног профила у термоелектрони је објављен у часопису *Combustion Science and Technology* [115].

## 10. Решавање дводимензионалног проблема

У овом поглављу је дат нови приступ реконструкције дводимензионалне расподеле температуре, у ложишту котла термоелектрана, које раде на угаљ. Овај нови метод подразумева мерење температуре и коефицијената апсорпције и расејања преко четири сонде које су повезане са спектрометрима. Итеративна Тихоновљева регуларизација заједно са Бајесовим закључивањем омогућава решавање слабо-постављеног (енг. ill-posed) инверзног проблема. Овај метод реконструкције се показује много бржим од већ постојећих и сличних метода, што га чини погодним за мониторинг процеса сагоревања унутар котла у реалном времену. Симулација мерења и реконструкције овом спектрометријском методом заснива се на претпоставци да су честице угља и њених продуката сагоревања сива тела у довољно малом интервалу таласних дужина. Ради испитивања стабилности алгоритма вештачки је суперпониран шум на мерене вредности и показане су границе могућности реконструкције методе. Овај метод се заснива на претходном раду, у једнодимензионалном случају, и тестиран је на подацима које смо добили приликом мерења у термоелектрани.

### 10.1 Увод

Праћење процеса сагоревања угља у ложиштима котла термоелектрана и у индустријским пећима, у великим размерама, је једно од најизазовнијих проблема за решавање из области физике и хемије. Циљ праћења у енергетици и у индустрији је добијање температурног профила пламена у реалном времену. Овим праћењем се омогућава добијање највеће могуће ефикасности у искоришћавању ослобођене топлоте, затим мања концентрација продуката сагоревања као што су чађ и пепео, мање ослобађање штетних материја које загађују околину [85].

До сада је развијен велики број разних техника и метода мерења температуре у пећима или котловима. Најчешће коришћене методе се заснивају на принципу рада двобојног пирометра и термопарова. У последње време, највише су заступљене бесконтактне методе базиране на CCD камерама и спектрометрима. Предност бесконтактних у односу на контактне методе је што можемо да извршимо реконструкцију профила пламена. Контактне методе не могу дуго да се користе за мониторинг температуре, у великим котловима, на високим температурама, због термичких, хемијских и механичких оштећања која могу да настану.

Процена температурне дистрибуције, на основу познатих оптичких особина, је објављена у бројним радовима [116, 117, 118, 119]. Истовремена реконструкција температурног профила и униформне расподеле коефицијента атенуације у једној димензије је показана у радовима [105, 115, 120]. Реконструкција дводимензионалног температурног профила, који је испуњен апсорбујућим и емитујућим честицама, која се

понашају као сива тела, је приказана у радовима [121, 122]. Реконструкција 3Д температурног поља употребом CCD камера је описана у литератури [98, 116, 123]. Такође, постоје реконструкционе методе базиране на ВМС Монте Карло методи за истовремено одређивање температурног профила пламена и оптичких својстава средине у две димензије [81, 124].

Употреба обраде слика, при добијању температурне расподеле са CCD камерама, је једно од најчешћих метода реконструкције. Обично се користи једна или две таласне дужине, као код двобојног пирометра. Код двобојног пирометра, користан принцип неконтакног мерења температуре, је што се са мерењем, на две таласне дужине, отклања потреба познавања емисивности тела или средине. Ако ове две таласне дужине нису блиске и ако то утиче на промену емисивности онда употреба принципа мерења двобојног пирометра није применљива. Емисивност тела се мења са променом таласне дужине, међутим у неким случајевима у довољно малом интервалу таласних дужина ову промену можемо занемарити.

Ако је емисивност тела независна од промене таласне дужине, за такво тело кажемо да је сиво тело, односно сиви извор зрачења. Многи истраживачи у пракси у довољно ограниченим условима су претпостављали да је пламен сиви извор зрачења [125, 126]. Ова претпоставка је оправдана у пећима великих димензија.

У реалности, апроксимирање зрачења тела као да је сиво, је оправдано у ограниченом интервалу таласних дужина. Штавише, постоји метод употребом спектрометра који може да процени да ли средина, или тело, које се снима, може да се добро апроксимира као сиви извор зрачења. Овај метод је објављен у раду [14]. У овом раду експериментално мерење је спроведено у термоелектрани која ради на угаљ. За пламен, који као гориво користи угаљ, утврђено је да се може сматрати да је сиви извор зрачења у опсегу таласних дужина од 500 nm до 1000 nm. Такође, поред температуре, могуће је овим поступком одредити емисивност пламена употребом двобојног пирометра. У пламену, у којем доминира чађ, оптичке особине честица зависе од таласне дужине зрачења. Међутим, у пракси се показује да се пламен у унутрашњости великих котлова понаша као сиви извор зрачења [127].

Веома коришћена метода у температурној томографији је неинвазивна оптичка дијагностичка метода, са ласерима која подразумева озрачивање пламена ласером и читавање трансмисије. Оптички сензор детектује атенуацију емисије ласерског зрака. У том смислу имамо међу најновијим методама мултиспектралну апсорпциону томографију под називом MTADS (енг. Multispectral Tomographic Absorption Deflection Spectroscopy) која користи Бајесово закључивање [128]. Овај метод омогућава мерење температуре и концентрацију молекула гаса.

Оптичка емисиона томографија је нашироко коришћена техника за температурну томографију, која омогућава реконструкцију температурног профила пламена и оптичке особине средине. То је неинвазивна метода коју карактерише једноставност употребе у односу на ласерске технике мерења температуре. Са више CCD камера, ова метода хвата

више пројекција пламна [129, 130]. У решавању инверзних проблема користи се LSQR алгоритам (енг. Least Square QR Decomposition) као и Тихоновљева регуларизација (енг. Tikhonov Regularization with a Generalized Singular Value Decomposition).

Међу најновијим техникама реконструкције 3Д температурног профила користи се посебна LFC (енг. Light Field Camera) камера [129]. У раду са овим камерама, као алгоритми за решавање инверзног проблема, користе се Levenberg-Marquardt и NNLS (енг. Non-Negative Least Squares) методи. Истраживачи су у раду [132] предложили истовремену реконструкцију 3Д температурног профила и запреминске фракције чађи користећи WNNLS (енг. Weighted Non-Negative Least Squares) алгоритам. Недостатак ове нелинеарне методе је значајно време израчунавања које није погодно за мониторинг у реалном времену.

У неким случајевима је разрађен и значајан допринос емисије, апсорпције и рефлексије са зидова комора за сагоревање [133]. Овде је примењен нови приступ решавања инверзног проблема у два корака, за реконструкцију региона са нижом температуром, и региона са вишом температуром, користећи ATSIR (енг. Adaptive Threshold Segmentation Iterative Regularization) метод. У овом раду је упоређен ATSIR алгоритам са LSQR-PS (енг. Prior Smoothness LSQR). Показује се да је LSQR-PS значајно бржи. Међутим, ATSIR рачуна са бољом тачношћу, са временом израчунавања од 553 s за аксијално-симетричан пламен односно 605 s за пламен који није аксијално-симетричан.

Реконструкција температуре и концентрације, која се заснива на Тихоновљевој регуларизацији и Бајесовом закључивању, је показана у радовима [134, 135] који користе хиперспектралну апсорпциону томографију или НАТ (енг. Hyperspectral Absorption Tomography) као и CAMES (енг. Covariance Matrix Adaptation Method). Ови алгоритми су стабилни и доста тачни у решавању инверзног проблема. Међутим, цела ова метода има значајне недостатке за употребу код великих система, котлова, комора за сагоревање итд. Ласерска апсорпциона томографија има значајан недостатак за коришћење код великих пећи или котлова пошто зрак може значајно да атенуира.

## 10.2 Опис модела и решавање директног проблема

Математичко-физички модел мора да узиме у обзир геометрију ложишта котла где се врши процес сагоревања и услове који ту ваљају. Наиме, снага блока Б термоелектране на угаљ Никола Тесла је 630 MW и има тангенцијалну конфигурацију млинова, као на слици 9.1. Ова конфигурација омогућава, услед вртложног кретања пламена, контролу позиције центра пламена. Димензије хоризонталног пресека термоелектране су 20 m × 20 m. Лигнит се користи као примарно гориво, док се лож уље користи као секундарно, као средство за покретање и стабилизацију процеса сагоревања.

За одређивање 2Д температурне дистрибуције пламена узели смо у обзир постављање сонди за мерење по угловима котла. Све сонде су направљене од нерђајућег челика због заштите и прогуране су кроз отворе тако да гледају у унутрашњост котла, и

постављене су на истој висини. Сонде су светловодима повезане са четири иста спектрометра. За симулацију смо узели Аутога 4000 спектрометре и мерење зрачења на таласним дужинама између 700 nm и 900 nm. Оптика сонди треба да симулира мерење под специфичним видним пољем. Угао по хоризонтали треба да обухвата барем 90 °, док угао по вертикали треба да је веома мали ( $< 2^\circ$ ).

У нашој студији за емисивност зидова узимамо вредност од 0.8. Пламен унутар описаног видног поља се понаша као сиви извор зрачења који може да апсорбује, емитује и изотропно расејава зрачење. Средина унутар котла је подељена на  $M = 10 \times 10 = 100$  запреминских елемената (воксела) и зид је подељен на  $N = J - M = 10 \times 4 = 40$  сегмената. Сонде са истим описаним видним пољима су смештене у угловима котла као на слици 10.1.

$i=4$	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	$i=3$
140	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	111
139	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	112
138	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	113
137	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	114
136	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	115
135	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	116
134	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	117
133	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	118
132	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	119
131	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	120
$i=1$	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121	$i=2$

Слика 10.1. Издељен и нумерисан хоризонтални попречни пресек  $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ . Зидни сегменти су означени бројевима од 101 до 140. По угловима ознаке  $i = 1, 2, 3,$  и 4, представљају позиције сонди спектрометра.

Интензитет зрачења или спектрална радијанса може да се апроксимира Виновим законом зрачења (једначина 9.1) за области између 800 K и 2000 K и за таласне дужине између 300 nm и 1000 nm [18].

Зрачење које доспева у оквиру видног поља до сонди, на таласној дужини  $\lambda_k$ , може да се изрази као:

$$P_{\lambda_k, i} = \sum_{j=1}^M R_{dg}(j \rightarrow i) 4\pi K_{aj} I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta V_{gj} + \sum_{j=m+1}^J R_{dw}(j \rightarrow i) \varepsilon_{wj} \pi I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta S_{wj} \quad (10.1)$$

где су са  $k = 1, \dots, M$  нумерисане различите таласне дужине на којима се врши мерење, са  $i = 1, \dots, 4$  су нумерисане позиције сонди. У првој суми једначине (10.1) израз  $4\pi K_{aj} I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta V_{gj}$  представља укупну енергију коју у простор емитује  $j$ -ти воксел на таласној дужини  $\lambda_k$ , где је коефицијент апсорпције унутар тог воксела  $K_{aj}$ , температура је  $T_j$ . Друга сума садржи израз  $\varepsilon_{wj} \pi I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta S_{wj}$  који означава укупну енергију коју зидни сегмент  $\Delta S_{wj}$ , са емисивношћу  $\varepsilon_{wj}$ , на температури  $T_j$ , емитује унутар котла. Изрази унутар ових сума  $R_{dg}(j \rightarrow i)$  и  $R_{dw}(j \rightarrow i)$  представљају оне делове енергије које доспевају до  $i$ -те сонде, а потичу од  $j$ -тог воксела и зидног сегмента. Ово су уствари поменуте READ вредности.

Фракција зрачења  $R_{dg}(j \rightarrow i)$  се може поделити на два дела. Први део представља фракцију зрачења које директно доспева до сонди, други део доспева индиректно:

$$R_{dg}(j \rightarrow i) = R_{dg}^d(j \rightarrow i) + R_{dg}^{in}(j \rightarrow i). \quad (10.2)$$

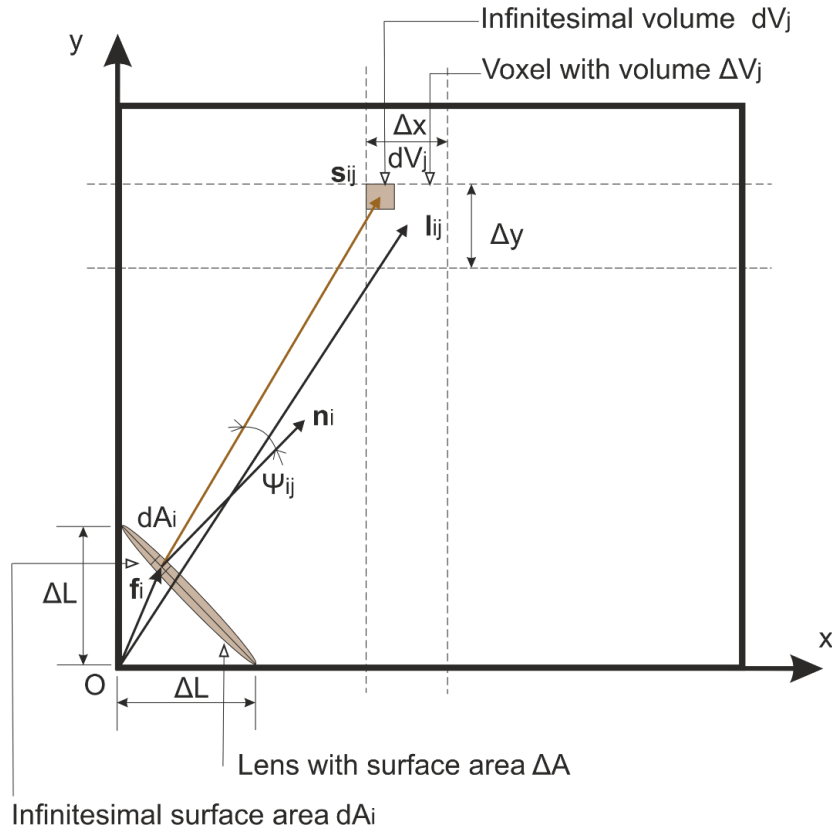
Дакле први део израза (10.2) представља део зрачења које од  $j$ -тог воксела доспева до  $i$ -те сонде након што је на том путу апсорбовано и расејано. Израз (10.2) може да се напише нешто опширније:

$$R_{dg}(j \rightarrow i) = R_{dg}^d(j \rightarrow i) + \sum_{k=1}^M R_{dg}^s(j \rightarrow k) R_{dg}^d(k \rightarrow i) + \sum_{k=m+1}^J R_{dg}^s(j \rightarrow k) \frac{1 - \varepsilon_{wk}}{\varepsilon_{wk}} R_{dw}^d(k \rightarrow i). \quad (10.3)$$

Фракција енергије  $R_{dg}^s(j \rightarrow k)$  је онај део енергије који се емитује од  $j$ -тог воксела, расејава се, односно доспева до  $k$ -тог воксела, док је  $R_{dg}^d(k \rightarrow i)$  фракција која се емитује од  $k$ -тог воксела и доспева директно до  $i$ -те сонде. Овакав начин рачунања доспевања зрачења до сонди је описан у литератури [136, 137, 138]. Фракције  $R_{dg}^s(j \rightarrow k)$  су READ вредности које се одређују Монте Карло симулацијом. Рачунање директне фракције  $R_{dg}^d(j \rightarrow i)$  може да се



обави без Монте Карло симулације и зато треба пронаћи одговарајући аналитички израз полазећи од слике 10.2.



Слика 10.2. Дводимензионална унутрашњост котла са геометријским релацијама између сочива и инфинитезималне запремине  $dV_j$  као делића воксела  $\Delta V_j$  (са димензијама  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ).

Ако користимо зонски модел [18] за размену енергије између запремине  $\Delta V_j$  и површине отвора сонде, односно површине сочива  $\Delta A_i$  тада имамо релацију за топлотни флукс:

$$Q_{\lambda_k, j \rightarrow i} = \int_{\Delta V_j} \int_{\Delta A_i} \beta_j \left( (1 - \omega) \pi I_{b\lambda_k}(T_j) + \frac{\omega}{4} G \right) e^{-\tau_{ji}} \frac{\cos(\psi_{ij})}{\pi S_{ij}^2} dA_i dV_j, \quad (10.4)$$

$$\tau_{ji} = \int_0^{S_{ij}} \beta_j ds, \beta_j = K_{aj} + K_{sj}, \omega = \frac{K_{sj}}{K_{aj} + K_{sj}}$$

где су  $K_{aj}$  и  $K_{sj}$  коефицијенти апсорпције и расејања,  $\tau_{ji}$  је оптичка дебљина средине. Топлотни флукс  $\frac{\omega}{4}G$  који улази у запремину од суседних воксела је већ укључен у (10.3). Оно што нас занима јесте  $Q_{\lambda_k, j \rightarrow i}$  које представља енергију која од воксела  $\Delta V_j$  долази директно до површине  $\Delta A_i$ . Зато флукс  $G$  у једначини (10.4) треба да занемаримо.

Угао између вектора  $\mathbf{n}_i$  (вектор нормале на површини  $dA_i$  са слике 10.2) и позиције инфинитезималне запремине  $dV_j$  је  $\psi_{ij}$ . Растојање између  $dA_i$  и  $dV_j$  је  $S_{ij} = \|\mathbf{s}_{ij}\|$ . Вектор  $\mathbf{l}_{ij}$  претставља позицију центра воксела  $\Delta V_j$  и вектор  $\mathbf{f}_i$  је позиција инфинитезималне површине  $dA_i$ . Такође, топлотна енергија  $Q_{\lambda_k, j \rightarrow i}$  из (10.4) се може изразити као

$$Q_{\lambda_k, j \rightarrow i} = R_{dg}^d(j \rightarrow i) 4\pi K_{aj} I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta V_j. \quad (10.5)$$

На основу једначина (10.4) и (10.5) можемо пронаћи израз за фракцију енергије која директно доспева од воксела  $\Delta V_j$  до сонде спектрометра:

$$R_{dg}^d(j \rightarrow i) = \frac{1}{\Delta V_j} \int_{\Delta V_j} \int_{\Delta A_i} e^{-\tau_{ji}} \frac{\cos(\psi_{ij})}{4\pi S_{ij}^2} dA_i dV_j. \quad (10.6)$$

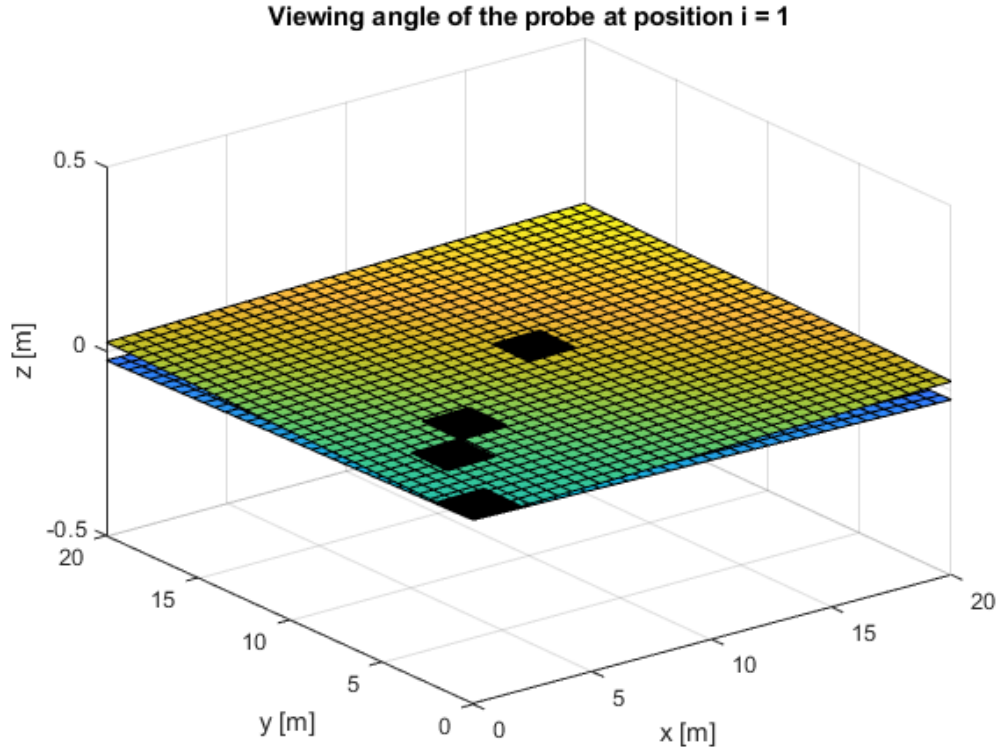
### 10.3 Решавање инверзног проблема

Да би смо направили брз алгоритам за решавање инверзног проблема, приморани смо да упростимо наш модел (10.3). Упрошћавање нашег модела се састоји у томе да занемарујемо зрачење које доспева са зидова. Ово је оправдано пошто зидови котла иначе имају водено хлађење те је температура на којој зидови зраче много мања од температуре самог пламена. Дискретизација простора, занемаривање зрачења са зидова уносе грешку у рачунању температурног профила пламена. Ове грешке можемо да проценимо и да утврдимо стабилност алгоритма на основу уношења вештачки генерисаног шума (преко случајних вредности) на симулиране мерене вредности у решавању инверзног проблема.

Као што је већ споменуто, видно поље наших сонди са све четири позиције мора да буде најмање  $90^\circ$  по хоризонтали и јако мали по вертикали ( $< 2^\circ$ ), као што је показано на слици 10.3. Запремине воксела нису исте већ се повећавају са удаљавањем, дуж дијагонале хоризонталног пресека котла од сонде. Запремине воксела зависе од растојања  $l_{ij} = \|\mathbf{l}_{ij}\|$  њихових центара до позиције сонде.

Из једначине (10.1) можемо поменути упрошћавањем да напишемо следећи израз:

$$P_{\lambda_k, i} = \sum_{j=1}^M R_{dg}(j \rightarrow i) 4\pi K_{aj} I_{b\lambda_k}(T_j) \Delta V_{gj} = \sum_{j=1}^M G_{ij} I_{b\lambda_k}(T_j). \quad (10.7)$$



Слика 10.3. Геометријски изглед видног поља сонде на првој позицији. Затамњени квадрати на горњој површи су сегменти воксела 91, 72, 63 и 46 са слике 10.1.

Четири независна мерења са различитих позиција даје следећи линеарни систем једначина:

$$\begin{bmatrix} P_{\lambda_k,1} \\ P_{\lambda_k,2} \\ P_{\lambda_k,3} \\ P_{\lambda_k,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots & G_{1,100} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{2,100} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & \cdots & G_{3,100} \\ G_{4,1} & G_{4,2} & \cdots & G_{4,100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{b\lambda_k}(T_1) \\ I_{b\lambda_k}(T_2) \\ \vdots \\ I_{b\lambda_k}(T_{100}) \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Систем (10.8) можемо да напишемо у једноставнијој форми:

$$\mathbf{P}_{\lambda_k} = \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k}. \quad (10.9)$$

Ранг овог система је очигледно  $\text{rank}(\mathbf{G}) \leq 4$ , односно ово је подоређен систем (недовољно дефинисан) што га чини веома тешким за решавање. Велики део решења овог система може да лежи у кернелу оператора  $\mathbf{G}$ . Проблем је лоше условљен, што значи да решење не постоји или није јединствено. Такође, решења система (10.9) могу да буду веома осетљива на грешке у мерењу. У оваквом случају подоређеног система прибегава се примени Бајесовог закључивања. Односно, недостатак због подоређености, се надокнађује добрим

претпоставкама о понашању пламена у котлу, док се велика остљивост на флукуације у мерењу обуздава применом Тихоновљеве регуларизације.

Код Бајесове парадигме, све променљиве се третирају као случајне величине. Систем (10.9) се Бајесовом стохастичком формом приказује у облику:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E} \quad (10.10)$$

где  $\mathbf{E}$  представља укупну грешку мерења. Променљиве  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{X}$  имају Гаусову густину расподеле вероватноће:

$$\mathbf{E} \sim \pi_{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{X} \sim \pi_{\mathbf{X}}.$$

Бајесова формула даје постериор дистрибуцију решења  $\mathbf{I}_{b\lambda_k}$  под условом да смо имали мерења  $\mathbf{P}_{\lambda_k}$ :

$$\pi_{\mathbf{X}|\mathbf{B}}(\mathbf{I}_{b\lambda_k}|\mathbf{P}_{\lambda_k}) = \frac{\pi_{\mathbf{B}|\mathbf{X}}(\mathbf{P}_{\lambda_k}|\mathbf{I}_{b\lambda_k}) \cdot \pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{I}_{b\lambda_k})}{\pi_{\mathbf{B}}(\mathbf{P}_{\lambda_k})} \propto \pi_{\mathbf{E}}(\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k}) \cdot \pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{I}_{b\lambda_k}). \quad (10.11)$$

Гаусове расподеле густине вероватноће за променљиве  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{X}$  могу да се дају у форми:

$$\mathbf{E} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Gamma}) \quad (10.12)$$

где су  $\mathbf{\Sigma}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  матрице коваријансе и  $\boldsymbol{\mu}$  је средња вредност случајне променљиве  $\mathbf{X}$ . На основу израза (10.12) можемо да напишемо:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{I}_{b\lambda_k}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{I}_{b\lambda_k}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{I}_{b\lambda_k}\right), \\ \pi_{\mathbf{B}|\mathbf{X}}(\mathbf{P}_{\lambda_k}|\mathbf{I}_{b\lambda_k}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k})\right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Ако изразе (10.13) заменимо у (10.11), са упрошћењем, можемо да добијемо густину расподеле

$$\pi_{\mathbf{X}|\mathbf{B}}(\mathbf{I}_{b\lambda_k}|\mathbf{P}_{\lambda_k}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k})^T (\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k}) - \frac{1}{2}\mathbf{I}_{b\lambda_k}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{I}_{b\lambda_k}\right). \quad (10.14)$$

Максимум постериор густине вероватноће се постиже минимизацијом израза у експоненту (10.14):

$$\mathbf{I}_{b\lambda_k\alpha} = \arg \min \left( \|\mathbf{P}_{\lambda_k} - \mathbf{G}\mathbf{I}_{b\lambda_k}\|^2 + \alpha \|\mathbf{R}\mathbf{I}_{b\lambda_k}\|^2 \right) \quad (10.15)$$

Где је  $\alpha$  регуларизациони параметар, матрица  $\mathbf{R}$  је добијена из декомпозиције Чолеског из матрице  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ , другим речима  $\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .

Минимизација (10.15) се постиже Тихоновљевом регуларизацијом или Конјугованом градијентном методом најмањих квадрата (CGLS). Наиме, у раду [139] је показано да решење прекондиционираног<sup>16</sup> CGLS метода лежи у векторском простору

$$\text{span}\{\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}_{(1)}^T, \mathbf{\Gamma}\mathbf{g}_{(2)}^T, \mathbf{\Gamma}\mathbf{g}_{(3)}^T, \mathbf{\Gamma}\mathbf{g}_{(4)}^T\}$$

где  $\mathbf{g}_{(1)}, \mathbf{g}_{(2)}, \mathbf{g}_{(3)}, \mathbf{g}_{(4)}$  представљају векторе врста матрице  $\mathbf{G}$ . Ово значи да решење не мора бити обавезно ортогонално на нула простор оператора  $\mathbf{G}$ . Овде смо тестирали оба алгорита (Тихоновљева регуларизација [138] и CGLS метод) и добили смо иста решења. Једина битна разлика је у брзини израчунавања, односно конвергирања ка решењу. Тихоновљева итеративна регуларизација конвергира много брже и у мање итерација ка решењу у односу на CGLS метод.

Код Тихоновљеве итеративне регуларизације, систем (10.9) можемо да видимо у облику:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^\delta \quad (10.16)$$

где је  $\mathbf{b}^\delta$  вектор са измереним вредностима који садржи грешке  $\mathbf{e}$ . Ако са  $\mathbf{b}$  означимо вектор са измереним тачним вредностима које су непознате због утицаја грешке онда можемо да напишемо:

$$\mathbf{b}^\delta = \mathbf{b} + \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\| \leq \delta \quad (10.17)$$

где је  $\delta$  процена величине грешке. Алгоритам за Итеративну Тихоновљеву регуларизацију се одвија у два главна корака:

1. Иницијализација:
  - 1.1 Постављање почетног решења  $\mathbf{x}$  најчешће као нула вектора.
  - 1.2 Проналажење матрице коваријансе  $\mathbf{\Gamma}$  и израчунавање инверза  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ .
  - 1.3 Постављање  $\tau > 1$  као сигурносне мере за оптималну регуларизацију.
  - 1.4 Постављање  $k = 0$ .
  - 1.5 Постављање иницијалних параметара  $\alpha_k = \alpha_0 q^k, \alpha_0 > 0, 0 < q < 1, k = 0, 1, 2, \dots$
  - 1.6 Израчунавање резидуума  $\mathbf{r} = \mathbf{b}^\delta - \mathbf{Ax}$ .
2. Итерација:
 

Докле је год ( $\|\mathbf{r}\| > \tau\delta$ )

  - 2.1 Израчунај  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha_k \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{r}$ .
  - 2.2 Постави  $k = k + 1$ .
  - 2.3 Постави  $\alpha_k = \alpha_0 q^k$ .
  - 2.4 Израчунај  $\mathbf{r} = \mathbf{b}^\delta - \mathbf{Ax}$ .

---

<sup>16</sup> Са одабраном матрицом регуларизације.

Изградња матрице коваријансе  $\mathbf{\Gamma}$  захтева неколико корака. У првом кораку морамо да одредимо вектор средње вредности температура  $\boldsymbol{\mu}_T$  унутар видног поља сонди и да нађемо матрицу коваријансе  $\mathbf{\Gamma}_T$  која има дијагоналну форму:

$$\mathbf{\Gamma}_T = \begin{bmatrix} \sigma_{1T}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{100T}^2 \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Затим се изврши Чолески факторизација:

$$\mathbf{\Gamma}_T = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1. \quad (10.19)$$

Онда, формирамо случајну променљиву, која има Гаусову нормалну стандардну расподелу  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{100}$ , и искористимо је да бисмо добили случајну променљиву  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{100}$

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu}_T + \mathbf{R}_1^T \mathbf{W}. \quad (10.20)$$

На основу  $\mathbf{Z}$  променљиве формирамо нову променљиву

$$\mathbf{X} = \frac{C1}{\lambda^5} e^{-\frac{C2}{\lambda \cdot \mathbf{Z}}} \quad (10.21)$$

Са великим бројем  $Nr$  случајних променљивих  $\mathbf{X}_i$  које су добијене преко израза (10.21) и (10.20) долазимо до матрице коваријансе

$$\mathbf{\Gamma} = cov(\mathbf{X}) = \frac{1}{Nr} \sum_{i=1}^{Nr} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^T \quad (10.22)$$

Вектор средње вредности температуре  $\boldsymbol{\mu}_T$  из (10.20) се може проценити преко CFD<sup>17</sup> симулације или преко нашег алгорита:

1. Постави температуре  $T_i$  у сваком вокселу  $i$  на максималне вредности.
2. Иницијализуј скуп индекса за вокселе -  $idx$
3. Докле год  $idx$  није празан понављај следеће кораке:
  - 3.1. Нађи све векторе  $\mathbf{X}_i$  (укупно их има колико и воксела у подели простора) који су такви да је температура само  $i$  - тог воксела умањена за вредност  $dT$ .
  - 3.2. Израчунај све векторе  $\mathbf{P}_i = \mathbf{G}\mathbf{X}_i$
  - 3.3. Постави вредност Булове променљиве  $flag$  на false.
  - 3.4. За свако  $i$  изврши итеративно

<sup>17</sup> Енг. Computational fluid dynamics.

- 3.4.1. Ако је било која компонента вектора  $\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{\lambda_k}$  негативна онда избаци  $i$  из скупа индекса  $idx$  и постави  $flag$  на вредност true.
- 3.5. Ако  $flag$  има вредност true онда се врати на корак 3.
- 3.6. Израчунај норму свих вектора  $\|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{\lambda_k}\|_2$ .
- 3.7. Нађи минимум норме (за неко  $j$ ) и смањи  $T_j$  за вредност  $dT$ .

У кораку 3.1. вредност  $dT$  за централне вокселе се сетује на мање вредности. Даље од центра се  $dT$  сетује на веће вредности, зато што се близу зидова могу очекивати најмање температуре и на тај начин се омогућава бржа конвергенција алгоритма. Добијена дискретна расподела температура изгледа као да има флукуација, зато ту расподелу треба фитовати глатком кривом (полиномијалном функцијом).

## 10.4 Свођење на једнодимензионални случај

Као што је поменуто у уводу, овај нови метод смо тестирали на експерименталне податке у једнодимензионалном случају које смо добили мерењима у термоелектрани на угаљ [115].

Расподела температуре у једној димензији је одређена, дуж оптичке осе, између две хоризонтално постављене сонде спектрометра, које су окренуте једна према другој. Обе сонде, са оптиком, су направљене од нерђајућег челика са ваздушним хлађењем и биле су увучене кроз зидове котла, као што је приказано на слици 9.2. Да би се мерења ових сонди спектрометра упоредила са неким независним мерењима коришћен је двобојни пирометар. У мерењима су коришћена два идентична спектрометра Аутога 4000 за мерење спектралне радијансе на таласним дужинама између 750 nm и 900 nm. Спектрометри су били повезани са сондама преко оптичких каблова. У мерењима смо минимизовали утицај расејаног зрачења, тако што смо сузили видно поље обе сонде ( $<0.2^\circ$ ). Наш циљ је био мерење температура између 750 °C и 1500 °C.

У овом моделу смо занемарили расејање и зрачење са зидова. Са таквим упрошћењем можемо да користимо једначину (10.4) да бисмо направили формулу за топлотно зрачење у једнодимензионалном случају:

$$Q_{\lambda_k, j \rightarrow i} = \int_{\Delta V_j} \int_{\Delta A_i} K_{aj} I_{b\lambda_k}(T_j) e^{-\tau_{ji}} \frac{\cos(\psi_{ij})}{S_{ij}^2} dA_i dV_j. \quad (10.23)$$

Једначину (10.4) можемо да дискретизујемо и да на тај начин формирамо систем једначина који користимо за решавање инверзног проблема:

$$P_{1,\lambda_k} = \sum_{i=1}^N \left( K_a \Delta A e^{-(K_a+K_s)D_{1i}} \frac{\Delta V_{1i}}{D_{1i}^2} \right) \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda_k T_i}}, \quad (10.24)$$

$$P_{2,\lambda_k} = \sum_{i=1}^N \left( K_a \Delta A e^{-(K_a+K_s)D_{2i}} \frac{\Delta V_{2i}}{D_{2i}^2} \right) \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda_k T_i}}.$$

Топлотно зрачење  $P_{1,\lambda_k}$  на таласној дужини  $\lambda_k$  је мерено преко прве сонде, зрачење  $P_{2,\lambda_k}$  је мерено преко друге сонде. Број  $N$  је број сегмената у котлу дуж оптичке осе обе сонде. Површина отвора сонде је означена са  $\Delta A$ . За решавање система (10.24) хтели смо истовремено процењивање коефицијената апсорпције и расејања  $K_a, K_s$  поред рачунања температура  $T_i$ . Запремине сегмената које виде прва и друга сонда могу да се рачунају по формулама:

$$\Delta V_{1i} = \frac{4}{3} [i^3 - (i-1)^3] \Delta x^3 \tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right), \quad (10.25)$$

$$\Delta V_{2i} = \frac{4}{3} [(N-i+1)^3 - (N-i)^3] \Delta x^3 \tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Растојања од центара сегмената до прве и друге сонде се рачунају као:

$$\begin{aligned} D_{1i} &= \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x, \\ D_{2i} &= \left(N - i + \frac{1}{2}\right) \Delta x. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Ознака  $i = 1, \dots, N$  представља индекс  $i$ -тог сегмента и  $\Delta\varphi, \Delta\theta < 0.2^\circ$  представљају углове у хоризонталној и вертикалној равни. Величина  $\Delta x$  је дужина једног сегмента,  $L = \Delta x \cdot N$  је укупно растојање између зидова котла.

За истовремено одређивање температурног поља и коефицијената апсорпције и емисије  $K_a, K_s$  ограничили смо опсег вредности у ком наш алгоритам треба да тражи оптимална решења:

$$\begin{aligned} K_{a,min} &< K_a < K_{a,max} \\ K_{s,min} &< K_s < K_{s,max} \end{aligned} \quad (10.27)$$

Са оваквом поставком можемо да дефинишемо функцију коју минимизујемо:

$$R(\mathbf{T}, K_a, K_s) = \frac{\|\mathbf{G}_\lambda \mathbf{I}_{b\lambda}(\mathbf{T}) - \mathbf{P}_\lambda\|}{\|\mathbf{P}_\lambda\|} \quad (10.28)$$



Ознаке из (10.28) се односе на векторе:

$$\mathbf{P}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\lambda_1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\lambda_S} \end{bmatrix}, \mathbf{G}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\lambda_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\lambda_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{\lambda_S} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{b\lambda}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\lambda_1}(\mathbf{T}) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\lambda_S}(\mathbf{T}) \end{bmatrix}.$$

Истовремено одређивање температурног профила и коефицијената се може обавити ако користимо Итеративну Тихоновљеву регуларизацију за дато  $K_a, K_s$  и  $\mathbf{P}_{\lambda_k}$ , где  $k = 1, \dots, S$  нумерише таласне дужине, итерација налази температурно поље  $\mathbf{T}$ . Направили смо функцију која тражи  $\mathbf{T}$  и користи  $K_a, K_s$  за дато  $\mathbf{P}_\lambda$  тражи минимум функције  $R(\mathbf{T}, K_a, K_s)$ . Користили смо Nelder-Mead Simplex метод минимизације [141].

Користили смо за тестирање и Trust Region Reflective алгоритам за оптимизацију. У ту сврху морали смо да формирамо већи број мерења од непознатих величина које одређујемо. Ако имамо двадесет сегмената са двадесет температура и још две непознате (апсорпција и расејање) онда смо због алгоритма морали да меримо на барем дванаест различитих таласних дужина. Овај одабир броја таласних дужина у комбинацији са две сонде на супротним позицијама даје укупно двадесет четири мерења. Поменути Trust Region Reflective алгоритам конвергира брже ка решењу у односу на Nelder-Mead Simplex метод.

## 10.5 Резултати и дискусија

За једнодимензионални случај, код реконструкције температурног профила, прво треба да нађемо средњу вредност температурне расподеле  $\boldsymbol{\mu}$  и стандардну девијацију  $\sigma$  односно матрицу коваријансе  $\boldsymbol{\Gamma}$ . Са  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\Gamma}$  можемо да одредимо опсег у коме очекујемо да постоје наша решења. У нашем случају користили смо емпиријско знање због рада у термоелектрани и CFD симулације за различита померања температурног профила унутар ложишта котла.

Вредност  $N_{st}$  представља број различитих могућих облика температурног профила при стабилизацији рада термоелектране  $\boldsymbol{\mu}_i, i = 1, \dots, N_{st}$  при чему је  $\boldsymbol{\mu}$  средња вредност

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{N_{st}} \sum_{i=1}^{N_{st}} \boldsymbol{\mu}_i. \quad (10.29)$$

На овај начин можемо да конструишемо матрицу коваријансе:

$$\boldsymbol{\Gamma}_T = \begin{bmatrix} \sigma_{1T}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{20T}^2 \end{bmatrix}, \quad (10.30)$$

где смо узели  $\sigma_{jT}, j = 1, \dots, 20$  између 100 К и 200 К. На основу овога можемо да нађемо  $\mathbf{G}$  матрицу из (10.22). Са овом поставком можемо да очекујемо да се наш температурни профил може наћи у области која је дефинисана са  $\mu$  и стандардним девијацијама које се налазе у матрици коваријансе  $\mathbf{G}_T$ .

Током мерења термоелектрана је радила у три режима функционисања млинова у котлу. Сваки режим одговара различитој позицији жиже пламена у котлу. Температуре сегмената за сва три режима су, са центром пламена (I) ближе двобојном пирометру, (II) у центру корла, и (III) даље од двобојног пирометра (као на слици 10.4). Промена режима је трајала 30 минута. Оптички систем за две сонде спектрометра је подешен током престанка рада термоелектране. Центрирање обе сонде је рађено помоћу ласерске диоде.

Директно мерење концентрација честица [105] је урађено сакупљањем узорака са сондом за екстракцију са воденим хлађењем, израчуната средња вредност коефицијента атунације се креће између  $0.059 \text{ m}^{-1}$  и  $0.065 \text{ m}^{-1}$  за сва три режима рада млинова.

Истраживали смо утицај грешке мерења на процес реконструкције температурног поља која може да потиче од вектора  $\mathbf{P}_{\lambda_k}$  такође и од матрице  $\mathbf{G}$ . Ове грешке можемо да уведемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{\lambda_k}(i) &= P_{\lambda_k}(i) + \Delta P_{\lambda_k}(i), \Delta P_{\lambda_k}(i) = \zeta_1 \text{randn}(i), i = 1, \dots, N_p \\ \widetilde{G}(i, j) &= G(i, j) + \Delta G(i, j), \Delta G(i, j) = \zeta_2 \text{randn}(i, j), i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, N_s \end{aligned} \quad (10.31)$$

где је  $\text{randn}$  генератор случајних вредности са коефицијентима  $\zeta_1, \zeta_2$ . Променљиве  $N_p$  и  $N_s$  представљају боријеве сонди и сегмената, респективно.

Можемо дефинисати грешку реконструкције температурног поља, као и релативну грешку израчунате температуре у сваком вокселу:

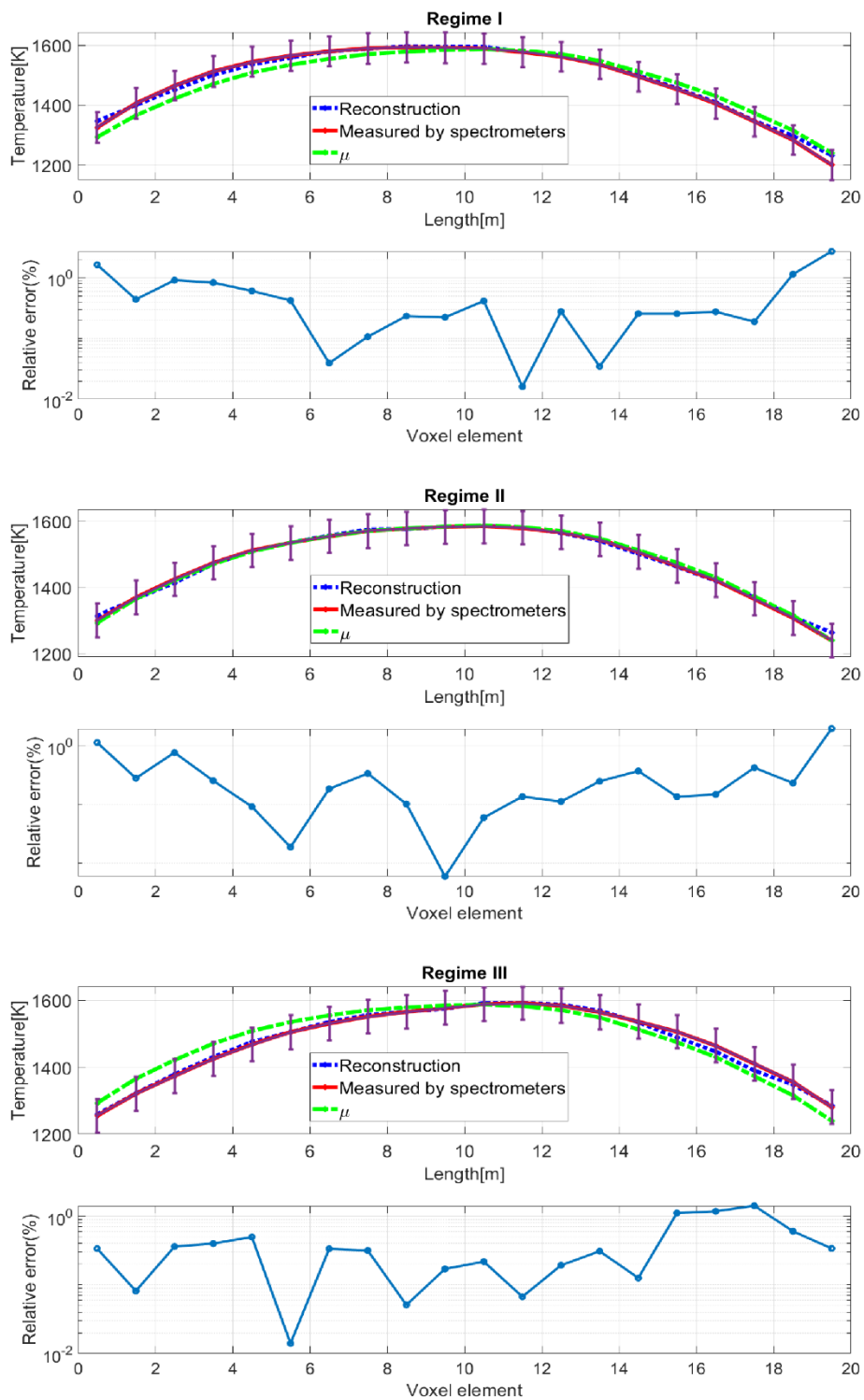
$$Q_{recon} = \frac{100 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i^{recon} - T_i^{exact})^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i^{exact}}, \quad (10.32)$$

$$Q_{rel,i} = 100 \frac{|T_i^{recon} - T_i^{exact}|}{T_i^{exact}}. \quad (10.33)$$

Ефекат утицаја грешке мерења (10.31) на процес реконструкције температурног поља и коефицијената апсорпције и расејања је дат у табели 10.1.

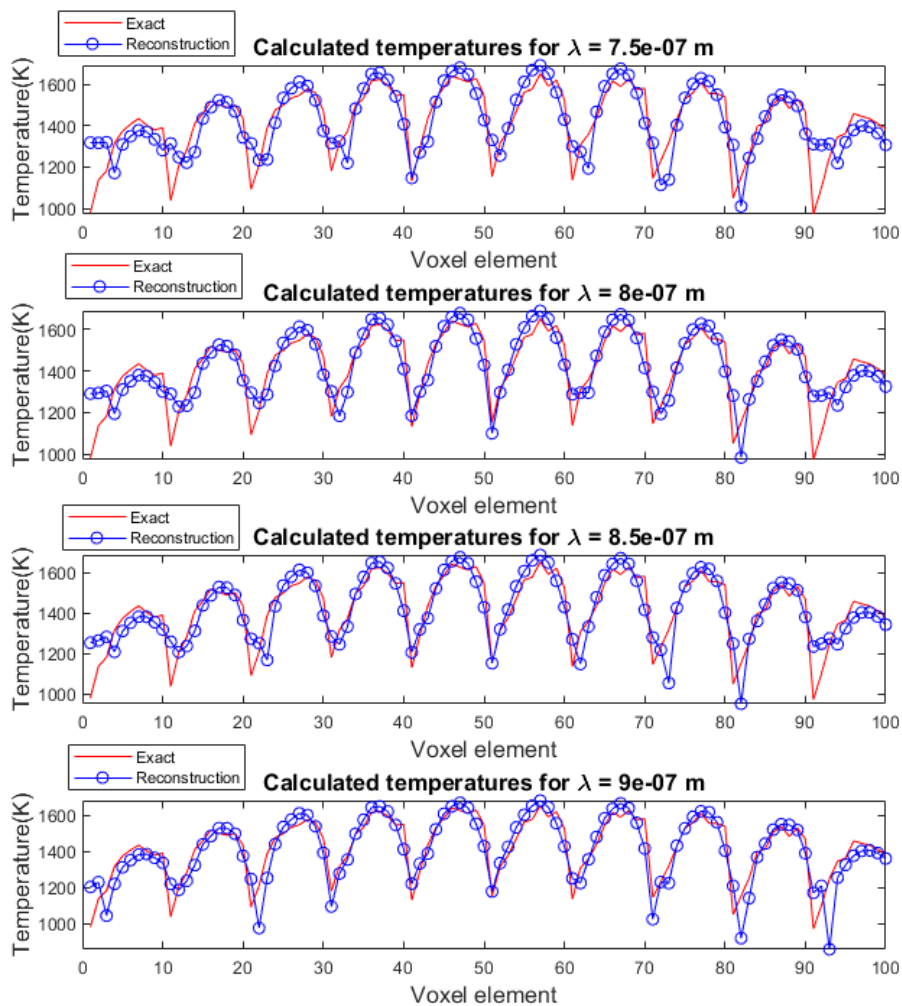
Табела 10.1. Ефикасност утицаја флукуација (грешки мерења и дискретизације) које потичу из вектора  $\mathbf{P}_{\lambda_k}$  и матрице  $\mathbf{G}$  на реконструкцију температурног профила и коефицијената апсорпције за различите вредности  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ .

$\zeta_1$	$\zeta_2$	$K_a$ (m <sup>-1</sup> )	$K_s$ (m <sup>-1</sup> )	$Q_{recon}$ (%)
0.00	0.00	0.026	0.036	0.64
0.001		0.025	0.035	0.72
0.005		0.021	0.026	1.18
0.01		0.018	0.013	1.63
0.05		0.016	0.014	2.72
0.1		0.011	0.012	5.52
0.00	0.001	0.026	0.036	0.63
0.001		0.026	0.036	0.67
0.005		0.020	0.020	1.40
0.01		0.019	0.012	1.70
0.05		0.011	0.011	3.16
0.1		0.011	0.094	5.74
0.00	0.005	0.025	0.036	0.68
0.001		0.023	0.025	0.80
0.005		0.020	0.013	1.24
0.01		0.020	0.014	1.52
0.05		0.014	0.012	3.00
0.1		0.011	0.095	5.81
0.00	0.01	0.026	0.036	0.65
0.001		0.023	0.025	0.77
0.005		0.020	0.014	1.23
0.01		0.019	0.013	1.40
0.05		0.014	0.012	2.96
0.1		0.011	0.040	6.05
0.00	0.05	0.026	0.036	0.81
0.001		0.021	0.017	0.91
0.005		0.020	0.014	1.58
0.01		0.019	0.012	1.91
0.05		0.011	0.011	3.59
0.1		0.011	0.1	6.47



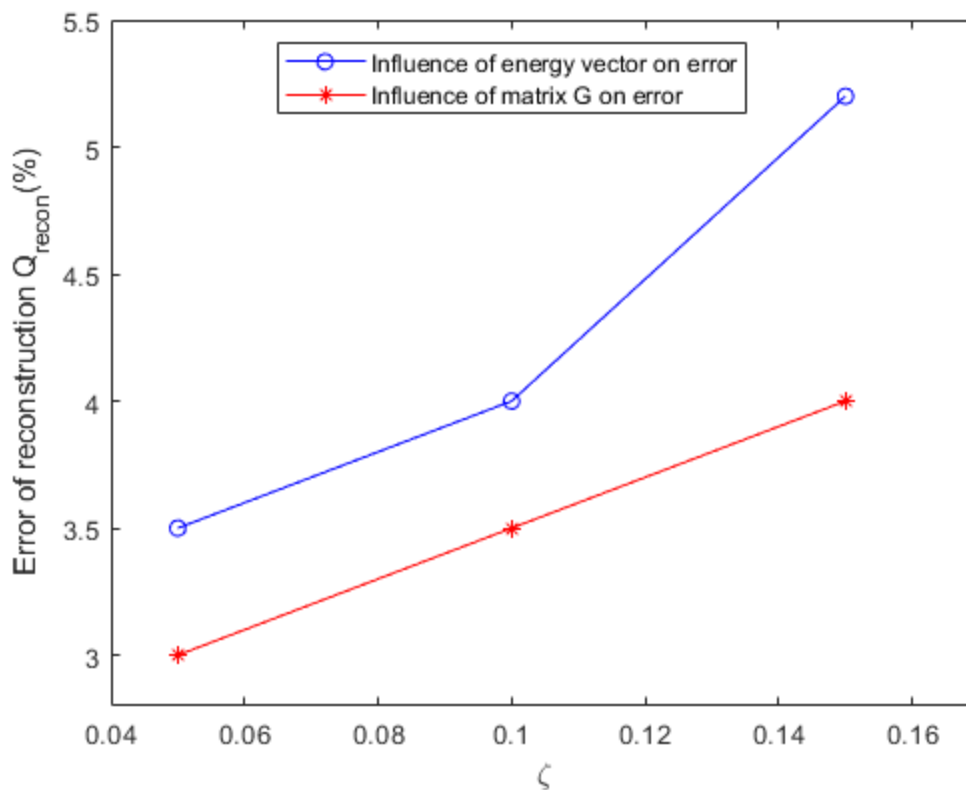
Слика 10.4. Добијени реконструисани температурни профили, за сва три режима рада млинова котла, са одговарајућим релативним грешкама мерења. Зеленом бојом означена расподела односи се на средњу вредност температурног профила.

Код дводимензионалног случаја расподела температурног поља по вокселима није изабрана произвољно. Распон температура је изабран између 800 К и 1800 К, што је изабрано на основу услова рада термоелектрана у литератури [142] као и на основу емпиријског знања рада у термоелектрани [105, 115]. Када је температура постављена за симулацију, тада реконструкцију можемо видети на различитим таласним дужинама, као на слици 10.5. У овом случају смо изабрали четири различите таласне дужине.



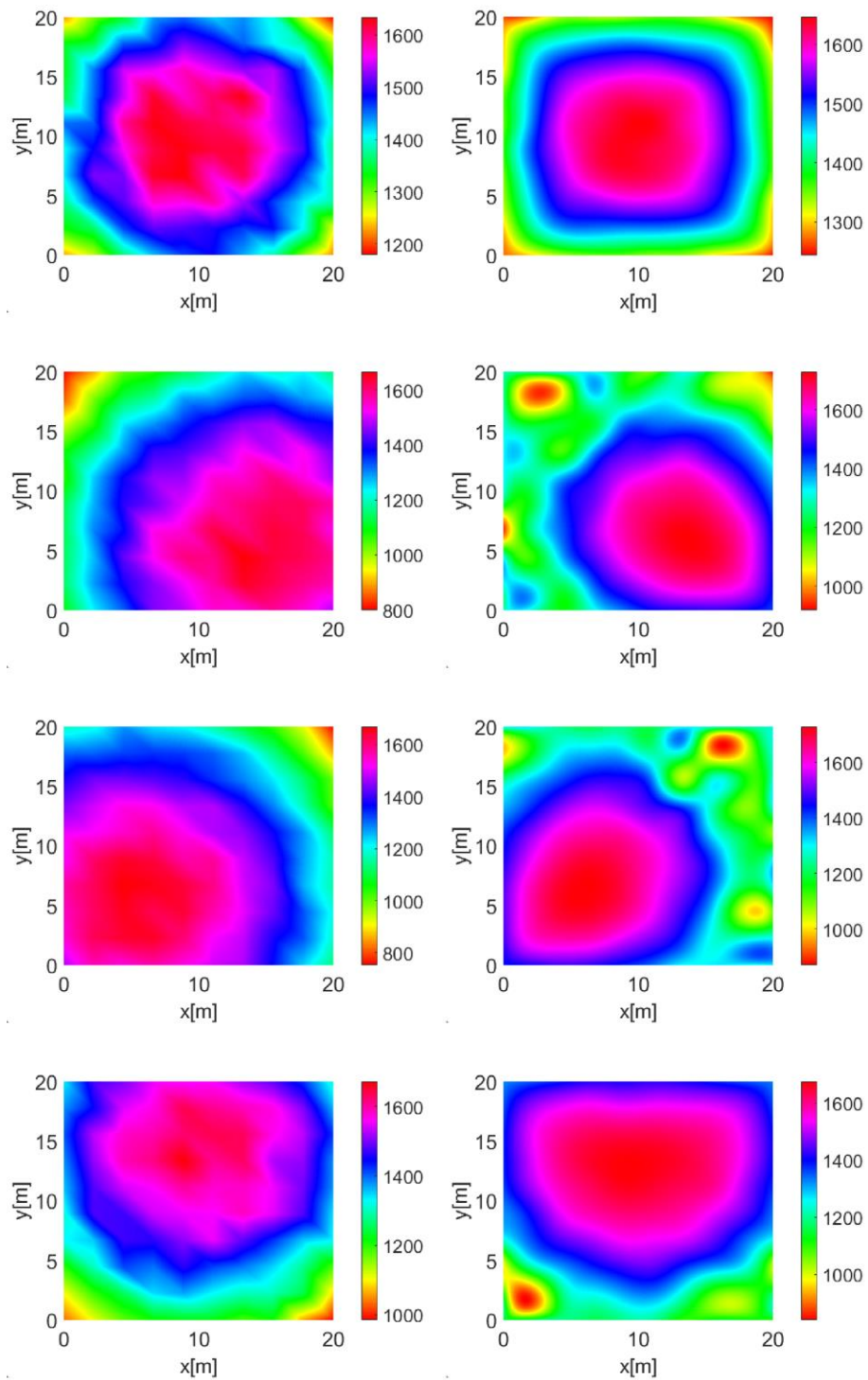
Слика 10.5. Задати и реконструисани температурни профили на четири различите таласне дужине.

После пар стотина урађених симулација употребом формула (10.32) и (10.33) добили смо резултате грешака реконструкције као што је приказано на слици 10.6.



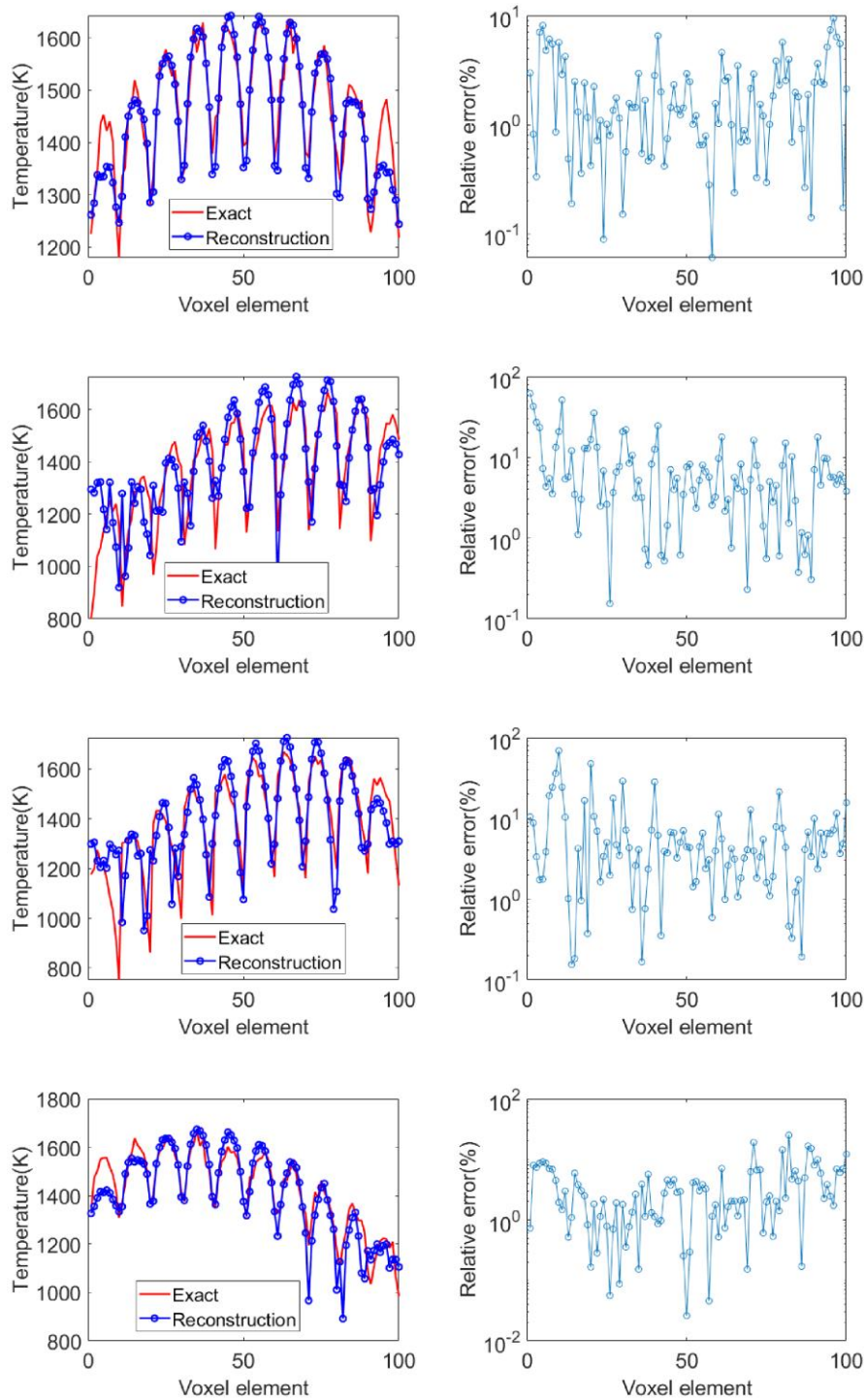
Слика 10.6. Утицај грешке мерења и дискретизације матрице  $\mathbf{G}$  и вектора  $P_{\lambda_k}$  на реконструкцију температурног профила пламена.

На следећим сликама приказали смо дводимензионалне температурне профиле пламена на четири таласне дужине. Коначни температурни профили у симулацији на различитим позицијама су дати на слици 10.7.



Слика 10.7. На левој страни слике су задате дводимензионалне температурне расподеле пламена. На десној страни су приказани одговарајући реконструисани температурни профили.

Релативне грешке реконструисања температуре (10.33) из симулација за различите позиције као на слици 10.7 су дате на слици 10.8.



Слика 10.8. Поређење између задатог и реконструисаног температурног профила као и одговарајуће релативне грешке.



У овом раду смо поредили време реконструкције нашег алгоритма са неколико метода у литератури. За програмирање и реконструкцију смо користили десктоп РС опремљен са Intel® i5-10400F процесором на 4.3 GHz и са 32 GB RAM меморије.

Аутори у објављеном раду (Multiparameter gas sensing with linear hyperspectral absorption tomography) [134], са линеарним НАТ алгоритмом, су успели да добију време реконструкције од 6.7 секунди. Такође друга група аутора у раду (Simultaneous measurement of flame temperature and species concentration distribution from nonlinear tomographic absorption spectroscopy) [135] су успели да реконструишу дводимензионалну расподелу температуре и концентрације честица за време од 2000 секунди.

Нашој методи је потребно време од 0.08 секунди за реконструкцију дводимензионалне расподеле температуре са познавањем коефицијената апсорпције и расејања и 1.3 секунди за једnodимензионалну реконструкцију температуре заједно са коефицијентима апсорпције и расејања.

Овај рад за реконструкцију једnodимензионалног и дводимензионалног профила пламена у котлу термоелектране на угаљ је објављен у часопису International Journal of Thermal Sciences [143].

## 11. Решавање тродимензионалног проблема

У овом поглављу је представљен нов начин реконструисања тродимензионалне расподеле температурног поља унутар ложишта котла термоелектране на угаљ, или унутар лабораторијске коморе за сагоревање и испитивање. Коришћена је спектрометријска метода, где је главно тежиште решавања томографског проблема базирано на коришћењу талсних дужина уместо великог броја инструмената позиционираних на разним местима унутар котла или коморе. Овај метод решавања томографског проблема је урађен за случај приближно аксијално симетричног облика пламена због велике комплексности и тежине проблема пошто се јавља велики број непознатих параметара које треба решити. Такође, урађено је и пар случајева за несиметричан облик пламена. Директан проблем је решен применом ВМС Монте Карло методе. Инверзан проблем није било могуће решити линеарним матричним методама због природе физичко-математичког модела мерења топлотног зрачења услед истовременог процењивања температурног профила и коефицијената апсорпције. За решавање инверзног проблема коришћена је добро позната градијентна оптимизациона метода Trust Region Reflective. Показује се да је ова метода довољно брза и ефикасна за примену.

### 11.1 Увод

Топлотно зрачење је доминантан облик преношења топлоте код комора или пећи где се развијају високе температуре. Најчешћи методи који се користе у индустрији за мерење температуре јесу примена термопарова и оптичких пирометара. Са термопаровима можемо мерити температуре само на одређеним позицијама и притом се морају монтирати на дугачким сондама које треба да се уносе унутар пламена чиме директно излажемо цео мерни инструмент утицају високих температура. До сада није пронађен ефикасан метод за добијање тродимензионалног профила пламена применом оптичких пирометара.

Тек у последњих десетак година имамо развој нових мерних метода за тродимензионалну реконструкцију температурног поља и оптичких карактеристика средине и то углавном применом CCD камера као оптичких детектора, директне Монте Карло методе (FMC) и конјуговано градинентне методе CG, CGS (енг. Conjugate Gradient Squared) као и CGSTAB методе (стабилисане конјуговано градијентне методе) за решавање инверзног проблема [42, 116, 123]. Решавање директног проблема применом обрнуте Монте Карло методе (BMC) је почело да се користи нешто касније у истраживањима уз LSQR метод најмањих квадрата (са QR декомпозицијом матрица) за решавање инверзног проблема [82, 83]. Разлог овоме је велика ефикасност односно много мањи број итерација, реда неколико стотина пута у односу на директни Монте Карло метод када су у питању детектори малих димензија.

Треба рећи да се многи аутори у истраживачким радовима позивају на литературу [18, 38, 42, 144, 146] што се се тиче коришћења и употребе коефицијената апсорпције и расејања. Са овим је могуће обезбедити из литературе знање о оптичким својствима средине и користити их у практичне сврхе. Такође могуће је унапред обезбедити та знања на основу CFD симулација.

## 11.2 Поставка и решавање директног проблема

Директни проблем у тродимензионалном случају је решен применом ВМС Монте Карло методе. Цео простор у коме се одвија процес сагоревања је облика квадра и издељен је на  $10 \times 10 \times 10$  воксела. Зидови коморе/котла су издељени на  $10 \times 10$  сегмената. Четири сонде спектрометра са великим видним пољем су постављене у четири угла коморе. Све сонде су усмерене дуж дијагонала базе квадра (погледати слике 11.1, 11.2, 11.3 и 11.4).

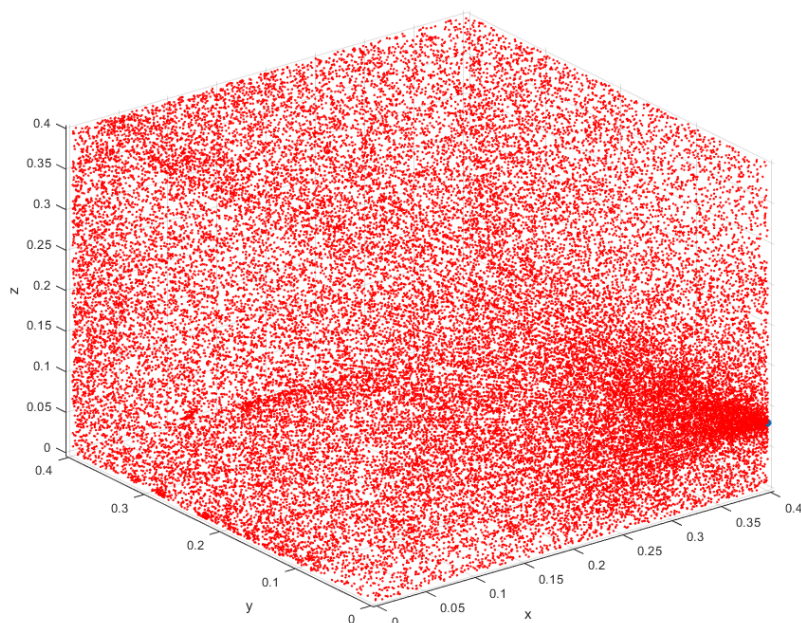
Сваком сегменту су додељени исти коефицијенти апсорпције и расејања. Расејање фотона по честицама угља сматрамо да је изотропно. По зидовима се фотони расејавају дифузно. При решавању директног проблема можемо поћи од система једначина (7.20) и овде ћемо још једном написати тај систем који се односи на мерење једне сонде спектрометра:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_1 n} \kappa_{\lambda_1 n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{\lambda_1, i}, \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_k n} \kappa_{\lambda_k n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{\lambda_k, i}, \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_K n} \kappa_{\lambda_K n} \left( \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{\lambda_K, i}. \end{cases} \quad (11.1)$$

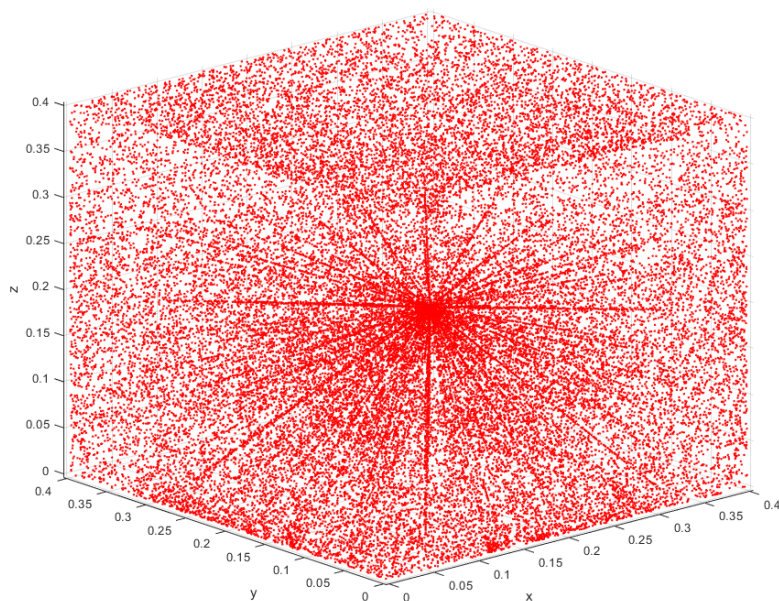
Овај систем можемо да представимо у облику (11.3). У овом систему једначина, ознака

$$\langle l_n \rangle_{si} = \frac{1}{S} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^M l_{isn} \quad (11.2)$$

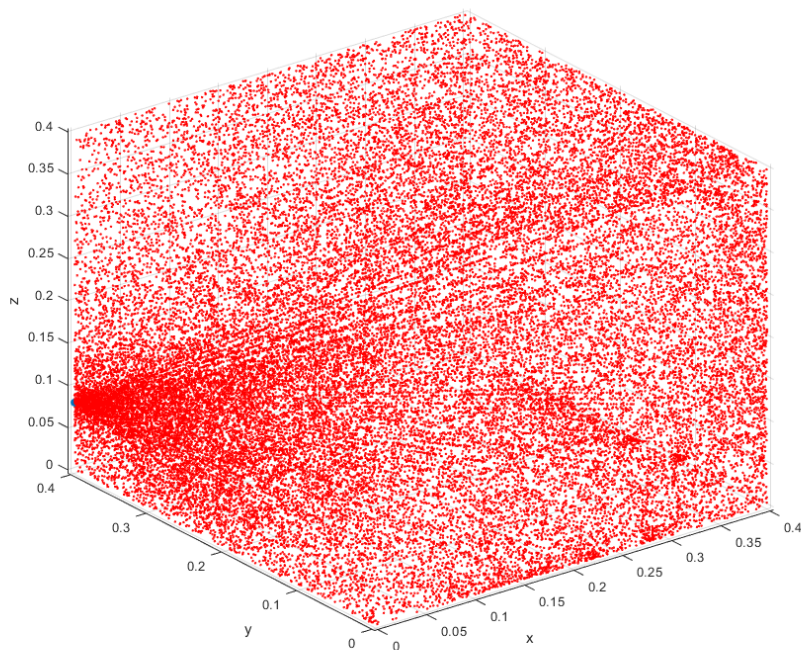




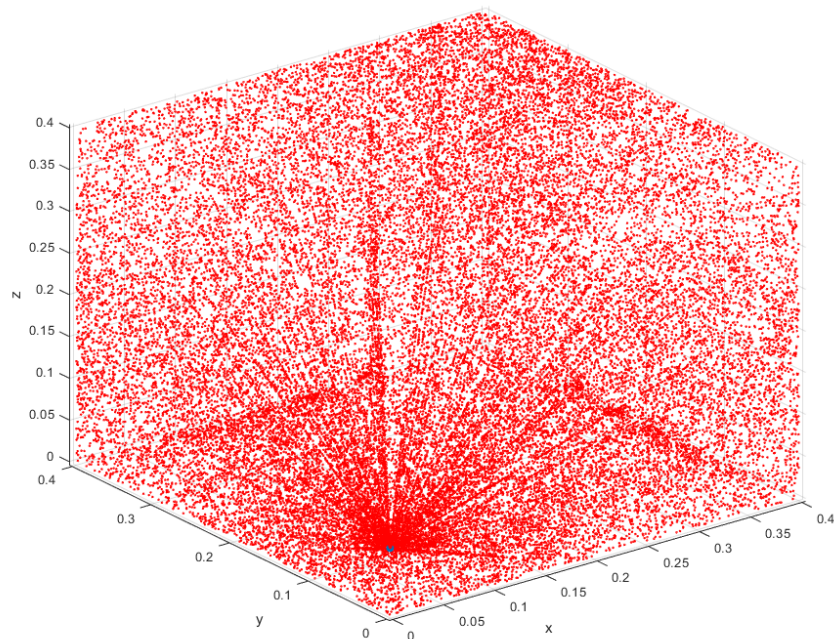
Слика 11.1. Резултат ВМС метода за одређивања топлотног флуksа који из унутрашњости коморе долази до прве сонде.



Слика 11.2. Резултат ВМС метода за одређивања топлотног флуksа који из унутрашњости коморе долази до друге сонде.



Слика 11.3. Резултат ВМС метода за одређивања топлотног флукса који из унутрашњости коморе долази до треће сонде.



Слика 11.4. Резултат ВМС метода за одређивања топлотног флукса који из унутрашњости коморе долази до четврте сонде.

### 11.3 Решавање инверзног проблема

Ако се погледа једначина (7.18) види се да је у питању интегрална једначина. Ову једначину за случај  $l_i < l$  можемо мало боље да преформулишемо на следећи начин:

$$I_i(\lambda_k) = \int_0^{l_i} \kappa_{\lambda_k}(l') \frac{C_1}{\lambda_k^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_k T(l')}\right) dl'. \quad (11.7)$$

Још једноставније, ова једначина има следећи облик:

$$I_i(\lambda_k) = \int_0^{l_i} \tilde{K}(l', \lambda_k, T(l')) dl'. \quad (11.8)$$

Једначину (11.8) односно (11.7) можемо да класификујемо као нелинеарну Фредхолмову интегралну једначину прве врсте. У математичкој теорији показује се да је могуће решити проблем облика (11.8) под одређеним условом<sup>18</sup>. Генерално гледано, тешко је наћи тачно решење овог проблема. Међутим, показује се да нумеричким итеративним методама можемо да нађемо апроксимативно решење. Та апроксимативна решења конвергирају тачном решењу са повећањем броја итерација и штавише тај низ формира Кошијев низ. Дакле, узастопни елементи низа постају произвољно близу један другом за довољно велике индексе елемената. Ово је показано у раду [147].

У систему једначина (11.3) имамо на десној страни суму интеграла облика (11.8). Ово су суме криволинијских интеграла прве врсте што можемо да видимо као:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{\lambda_k, i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{l_i} \tilde{K}(l', \lambda_k, T(l')) dl' = \int_L \frac{1}{M} \tilde{K}(l', \lambda_k, T(l')) dl' = \tilde{I}(\lambda_k),$$

што говори да опет добијамо исту класу интегралне једначине са истим особинама као и (11.8), пошто су  $l_i$  за  $i = 1, \dots, M$  путање од исте позиције (где је сонда) до различитих

---

<sup>18</sup> Услов је да подинтегрална функција (11.8) мора да буде диференцијабилна и ограничена на датом интервалу.





$$(T_{m,1}, \dots, T_{m,N}) = \underset{(T_1, \dots, T_N)}{\operatorname{argmin}} \sum_{p=1}^4 \sum_{k=1}^K \left( \tilde{I}_p(\lambda_k) - \sum_{n=1}^N I_{b\lambda_k}(T_n) \kappa_{\lambda_k n} \langle l_{np} \rangle_{si} \right)^2. \quad (11.11)$$

## 11.4 Резултати и дискусија

Директан проблем је решен, као што је речено, у резолуцији  $10 \times 10 \times 10$  воксела применом ВМС методе са пуштањем  $500 \times 2000$  фотона из све четири позиције око пламена. Задате вредности коефицијената апсорпције и расејања су  $\kappa = 0.09 \text{ m}^{-1}$  и  $\sigma = 0.08 \text{ m}^{-1}$  и  $\theta_{max} = 53^\circ$  отвором сонде.

Да би се олакшало и убрзало решавање инверзног проблема број подела воксела односно резолуција је смањена на  $5 \times 5 \times 5$  воксела. Снимање је урађено на 40 таласних таласних дужина између 780 nm и 900 nm. Са ВМС методом су добијене средње слободне путање фотона које долазе до сонди на све четири позиције. На тај начин су добијене четири тродимензионалне матрице  $\mathbf{M}_{lsr,10 \times 10 \times 10,1}$ ,  $\mathbf{M}_{lsr,10 \times 10 \times 10,2}$ ,  $\mathbf{M}_{lsr,10 \times 10 \times 10,3}$  и  $\mathbf{M}_{lsr,10 \times 10 \times 10,4}$  величина по  $10 \times 10 \times 10$  које садрже (11.2) елементе. За алгоритам инверзног начина решавања, ове матрице су препаковане у мање величине  $5 \times 5 \times 5$ , и то на следећи начин:

$$M_{lsr,5 \times 5 \times 5,p}(i, j, k) = \sum_{k'=2(k-1)+1}^{2k} \sum_{j'=2(j-1)+1}^{2j} \sum_{i'=2(i-1)+1}^{2i} M_{lsr,10 \times 10 \times 10,p}(i', j', k'). \quad (11.12)$$

Индекс  $p = 1, \dots, 4$  се односи на позицију сонде. За нумеричко тестирање задат је облик пламена који је описан функцијом:

$$T(x, y, z) = k_1 \exp \left( - \left( k_2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R^2} + \frac{z^2}{Z^2} \right)^2 \right) + T_0, \quad (11.13)$$

где су  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $R$ ,  $Z$  и  $T_0$  реални и позитивни коефицијенти. На овај облик пламена суперпониране су случајне вредности из генератора случајних бројева по нормалној расподели, тако да се добија приближно осно симетрични облик пламена. Резултати реконструкције су приказани на сликама од 11.5 до 11.17. Да би смо могли на нижој резолуцији да поредимо реконструисано температурно поље са задатим температурним пољем (у резолуцији  $10 \times 10 \times 10$ ) урађена је следећа трансформација, односно усредњавање у групама по 8 воксела из температурног поља више резолуције:

$$T_{5 \times 5 \times 5}(i, j, k) = \frac{1}{8} \sum_{k'=2(k-1)+1}^{2k} \sum_{j'=2(j-1)+1}^{2j} \sum_{i'=2(i-1)+1}^{2i} T_{10 \times 10 \times 10}(i', j', k'). \quad (11.14)$$

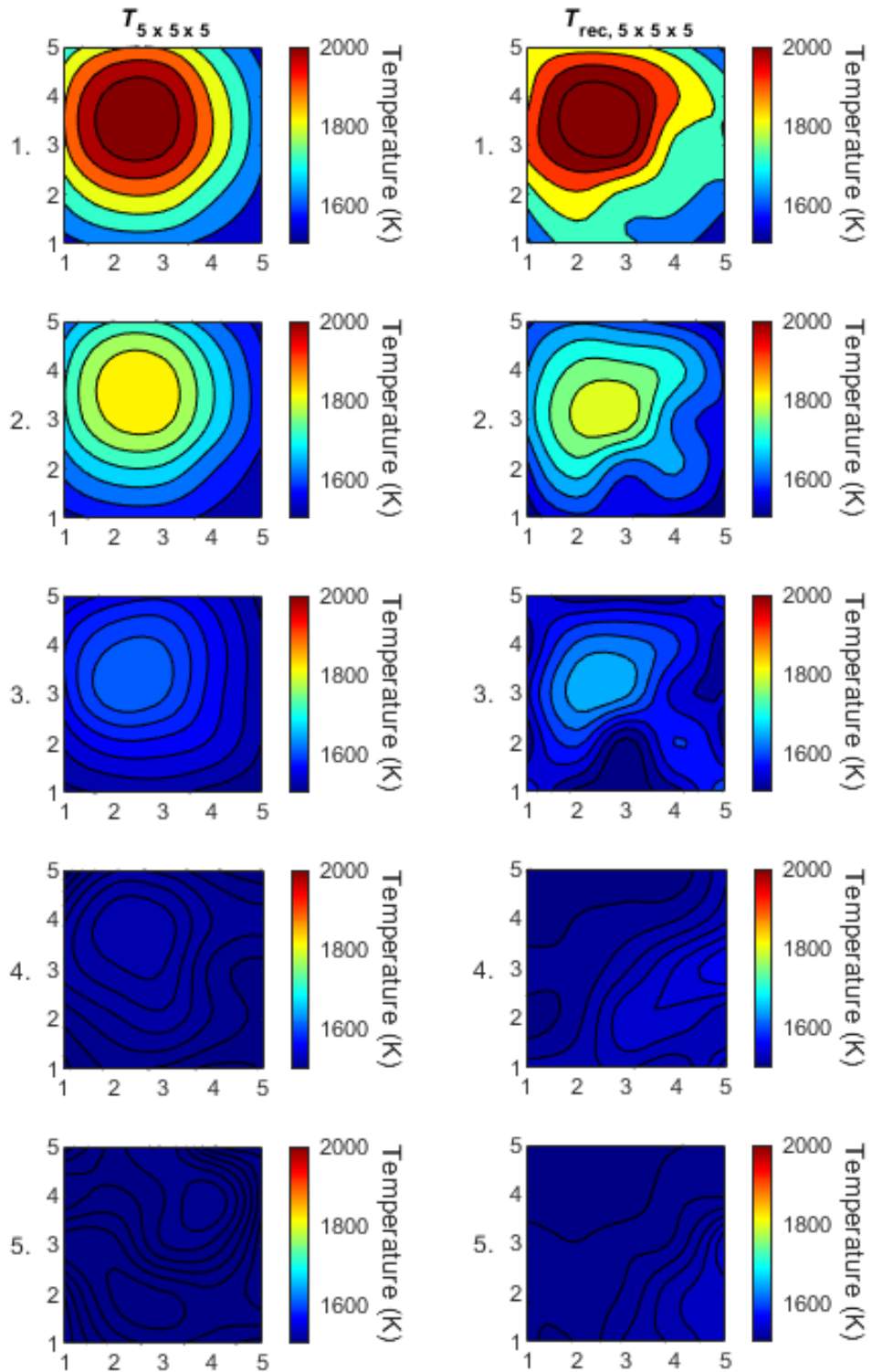
Да би смо имали увид у утицај грешака мерења и шума на процес реконструкције температурног поља, на излазне сигнале  $\tilde{I}_p(\lambda_k) = \tilde{I}(p, k)$  смо суперпонирали шум из генератора случајних вредности по нормалној расподели, на следћи начин:

$$\tilde{I}(p, k) = \tilde{I}_{exact}(p, k)(1 + \xi randn(p, k)). \quad (11.15)$$

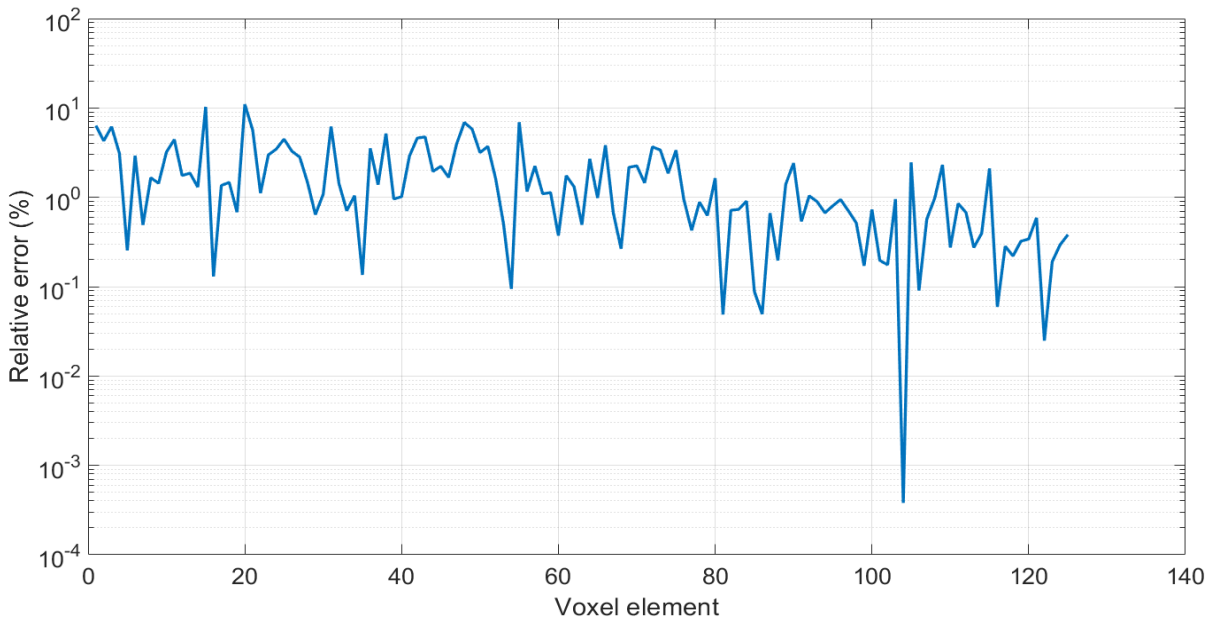
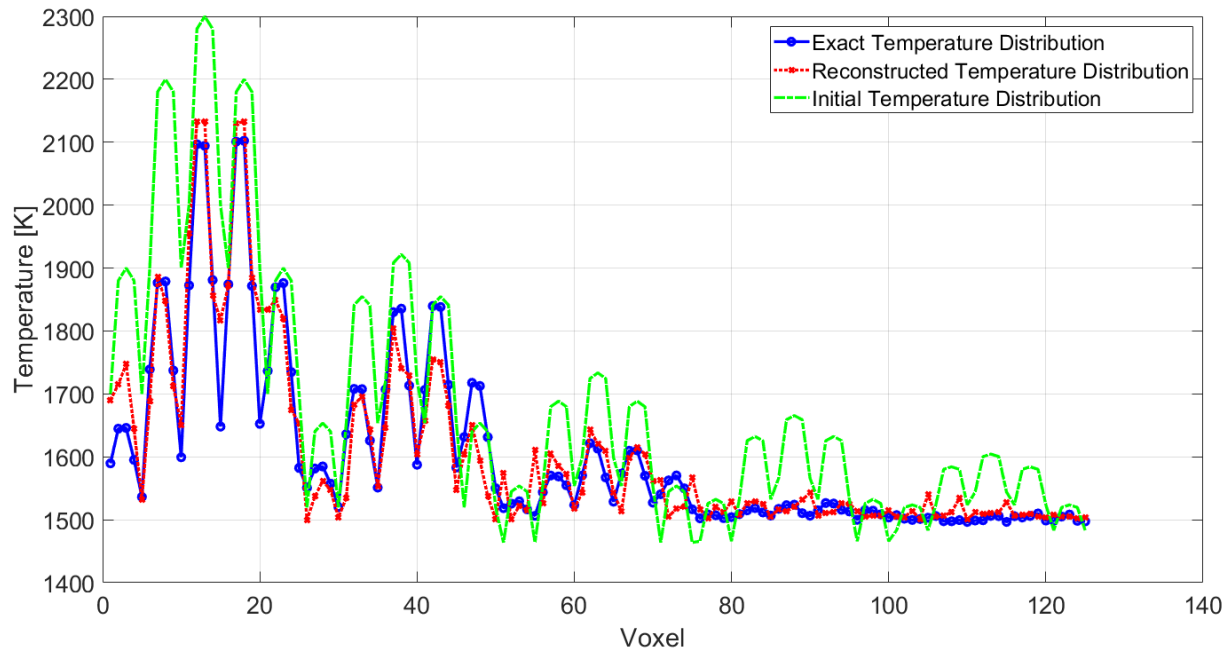
Такође смо дефинисали грешку реконструкције температурног поља, као и релативну грешку израчунате температуре у сваком вокселу:

$$Q_{recon} = \frac{100 \cdot \sqrt{\frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N T_{rec\ 5 \times 5 \times 5, i} - T_{5 \times 5 \times 5, i})^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{5 \times 5 \times 5, i}} \quad (11.16)$$

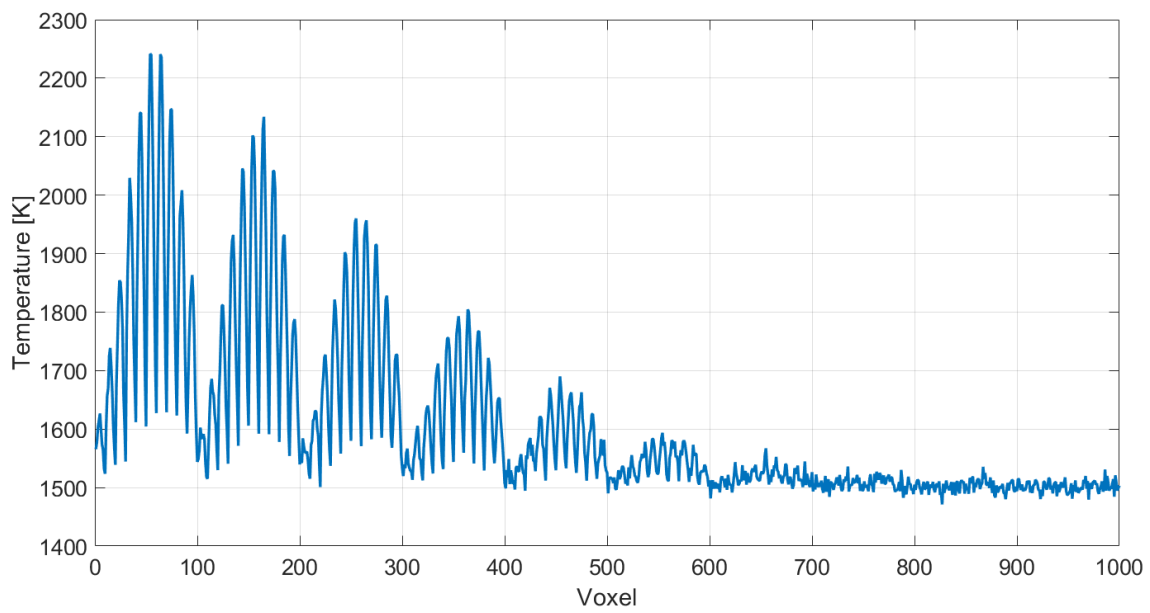
$$Q_{rel, i} = 100 \cdot \frac{|T_{rec\ 5 \times 5 \times 5, i} - T_{5 \times 5 \times 5, i}|}{T_{5 \times 5 \times 5, i}}. \quad (11.17)$$



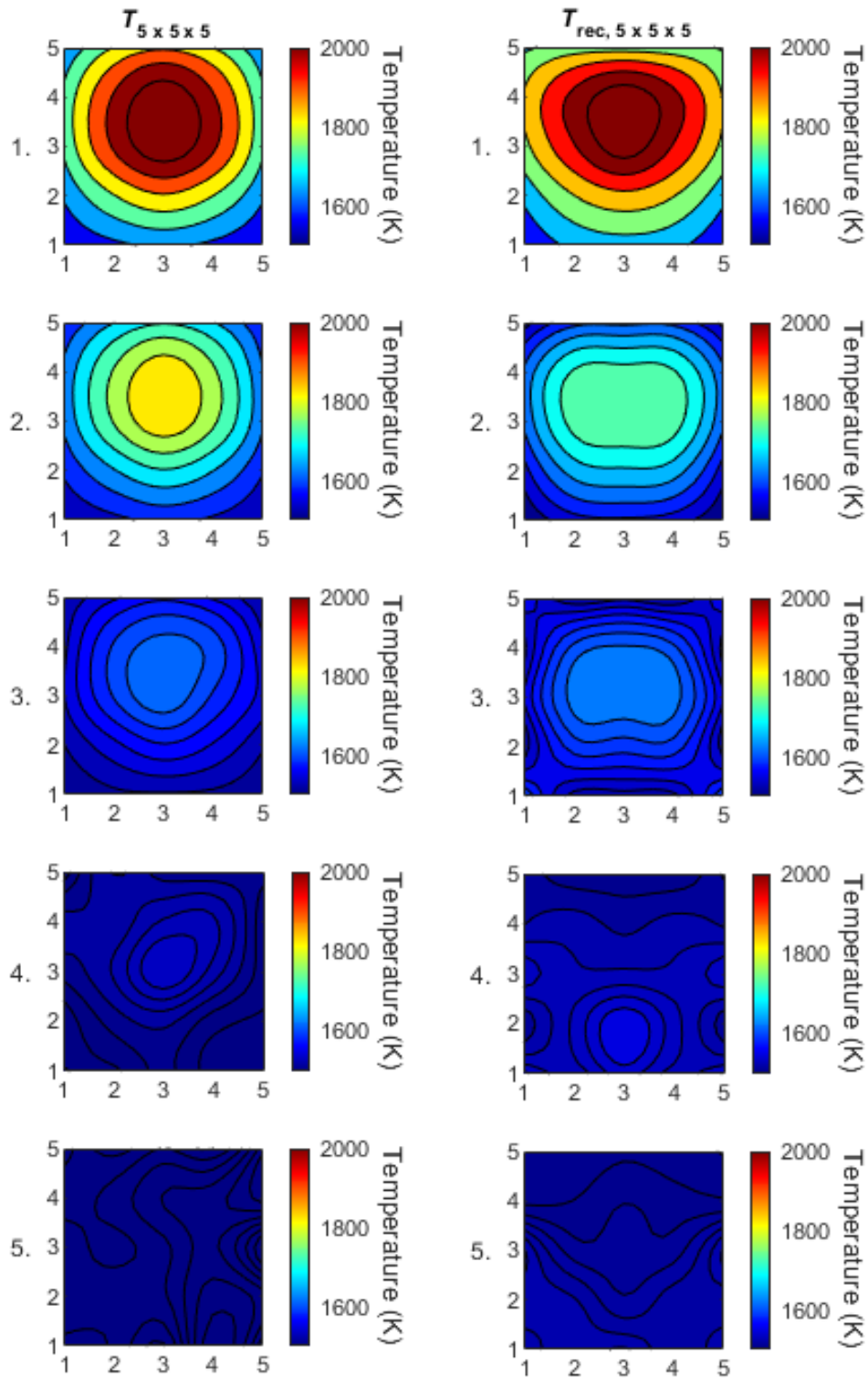
Слика 11.5. Хоризонтални пресеци усредњене задате температурне расподеле  $T_{5 \times 5 \times 5}$  и реконструисане температурне расподеле  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$  за први положај пламена. Нумерисане врсте представљају слајсове по висини сегментираног простора.



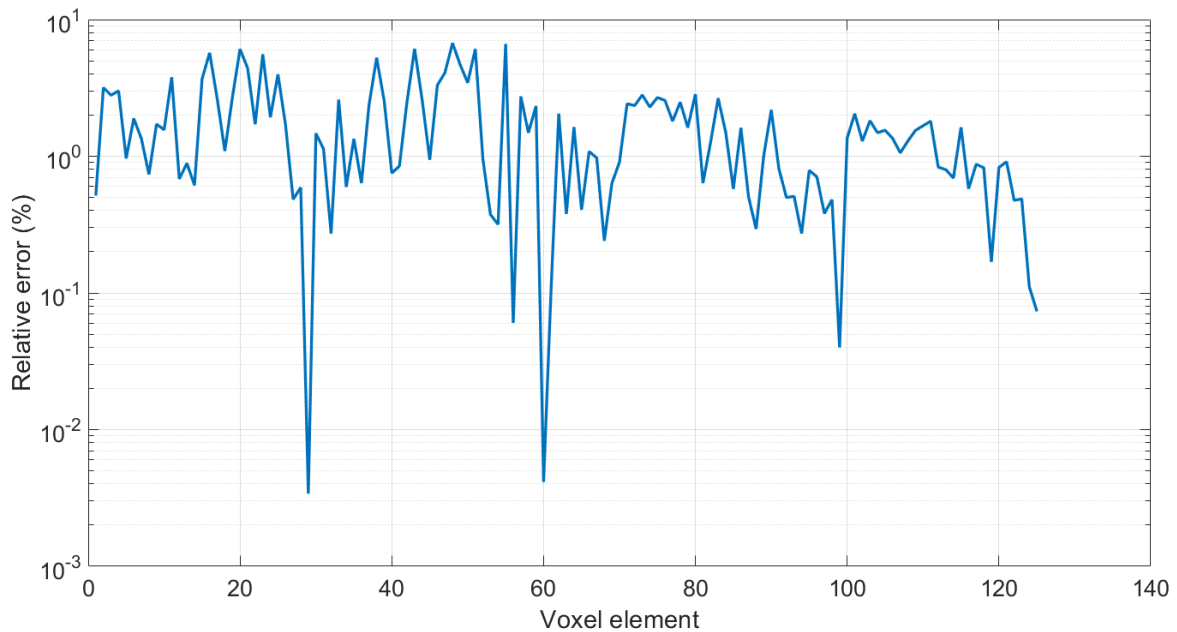
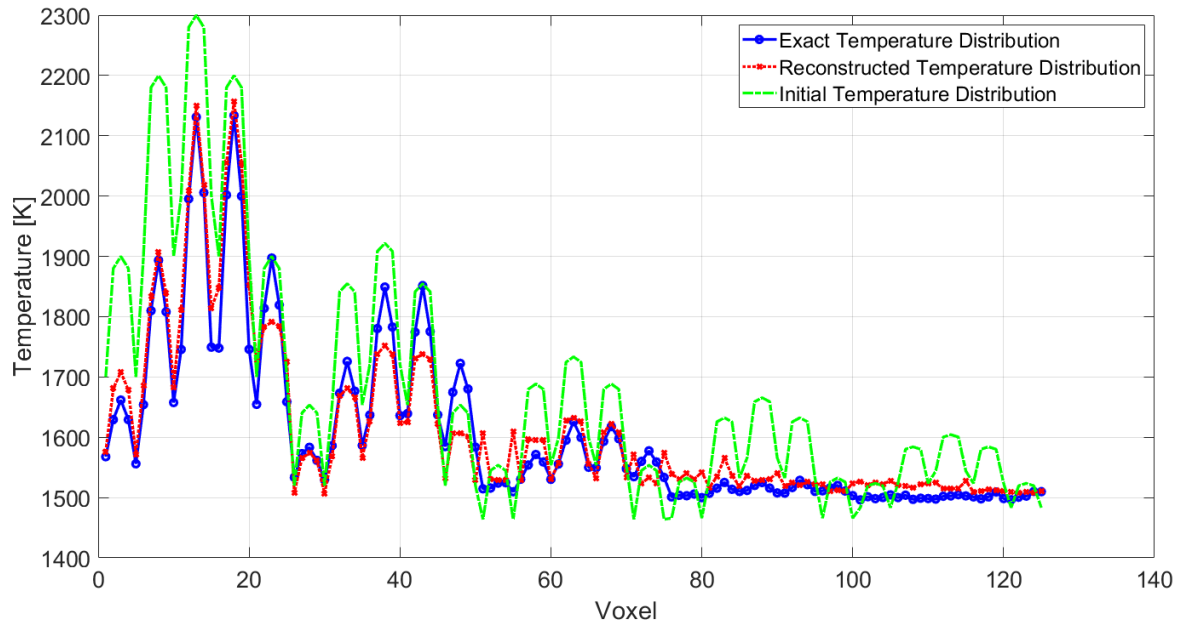
Слика 11.6. Температурна расподела по вокселима за случај са слике 11.5. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доња слика даје одговарајуће релативне грешке реконструкције за горњу слику.



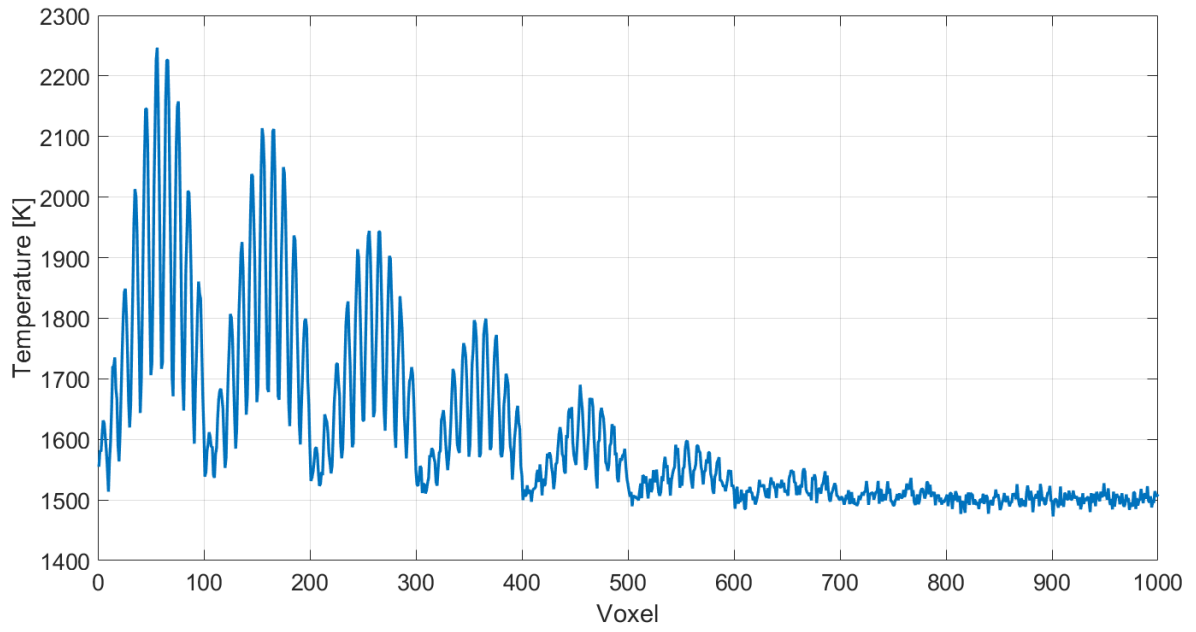
Слика 11.7. Расподела температура  $T_{10 \times 10 \times 10}$  по вокселима за случај са слике 11.5



Слика 11.8. Хоризонтални пресеци усредњене задате температурне расподеле  $T_{5 \times 5 \times 5}$  и реконструисане температурне расподеле  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$  за други положај пламена. Нумерисане врсте представљају слајсове по висини сегментираног простора.

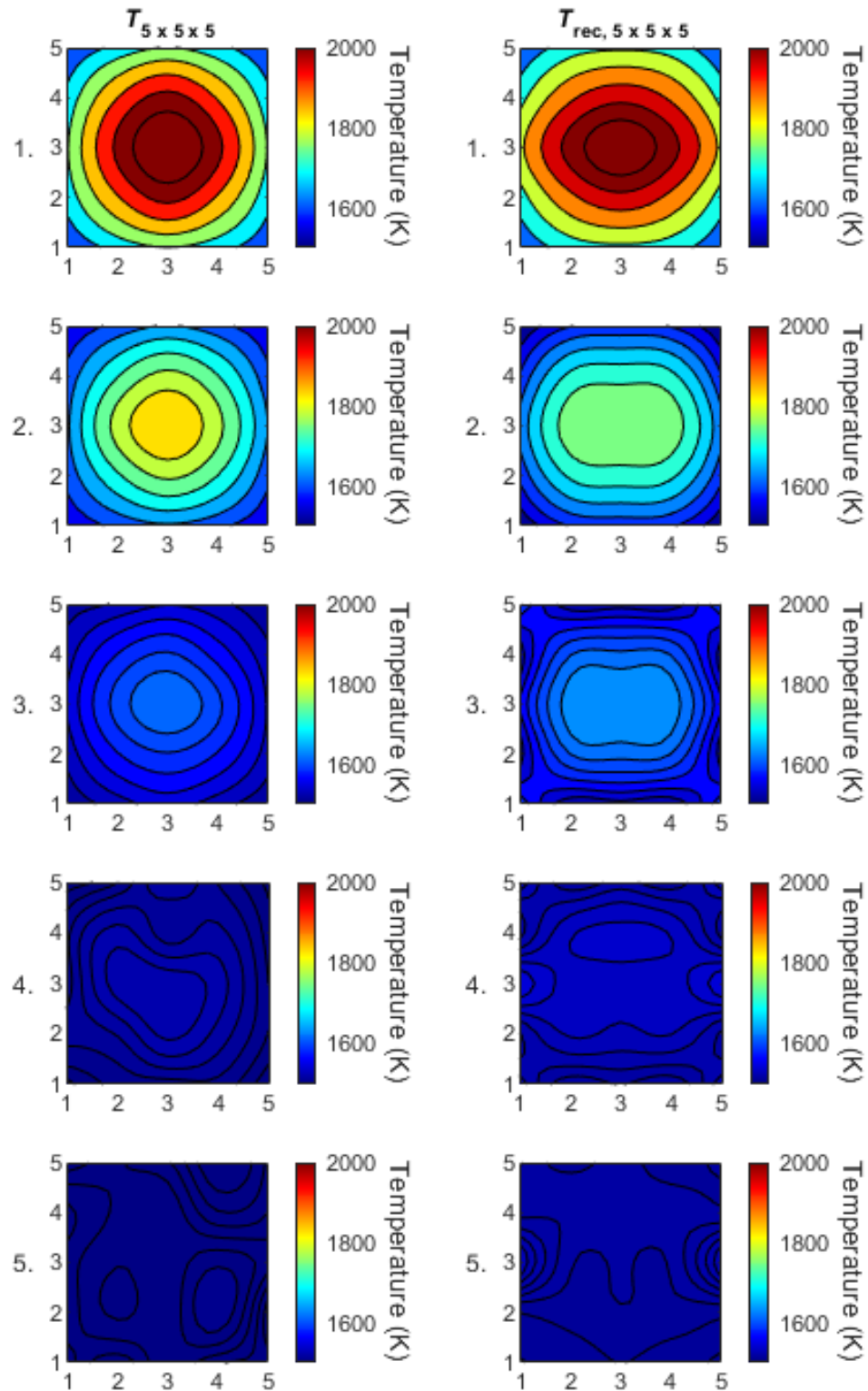


Слика 11.9. Температурна расподела по вокселима за случај са слике 11.8. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доња слика даје одговарајуће релативне грешке реконструкције за горњу слику.

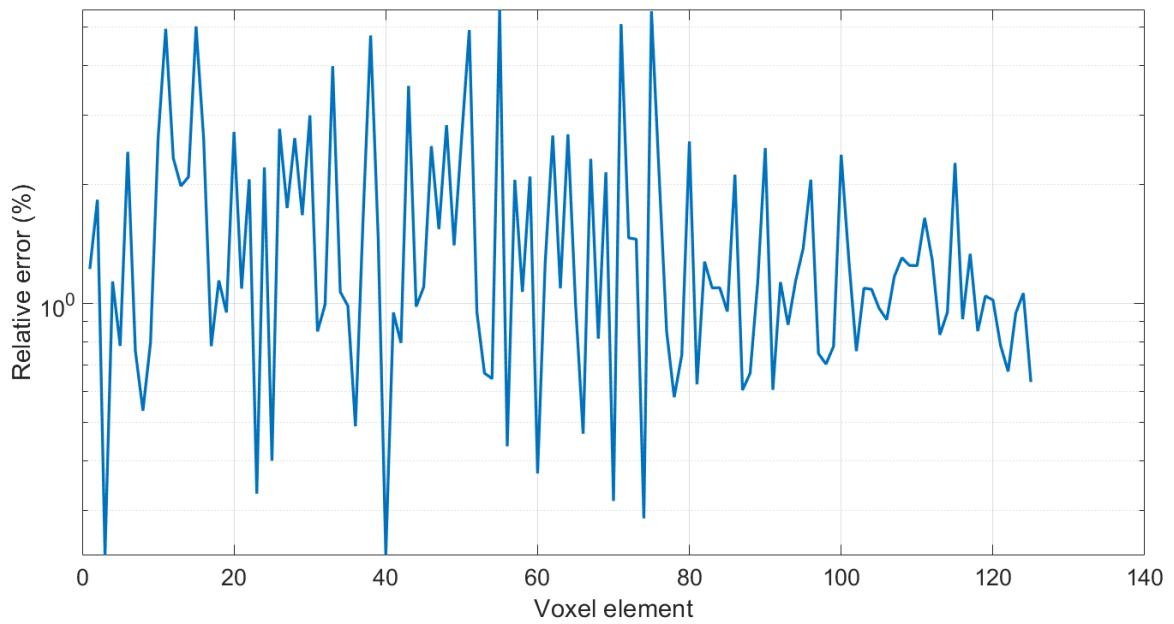
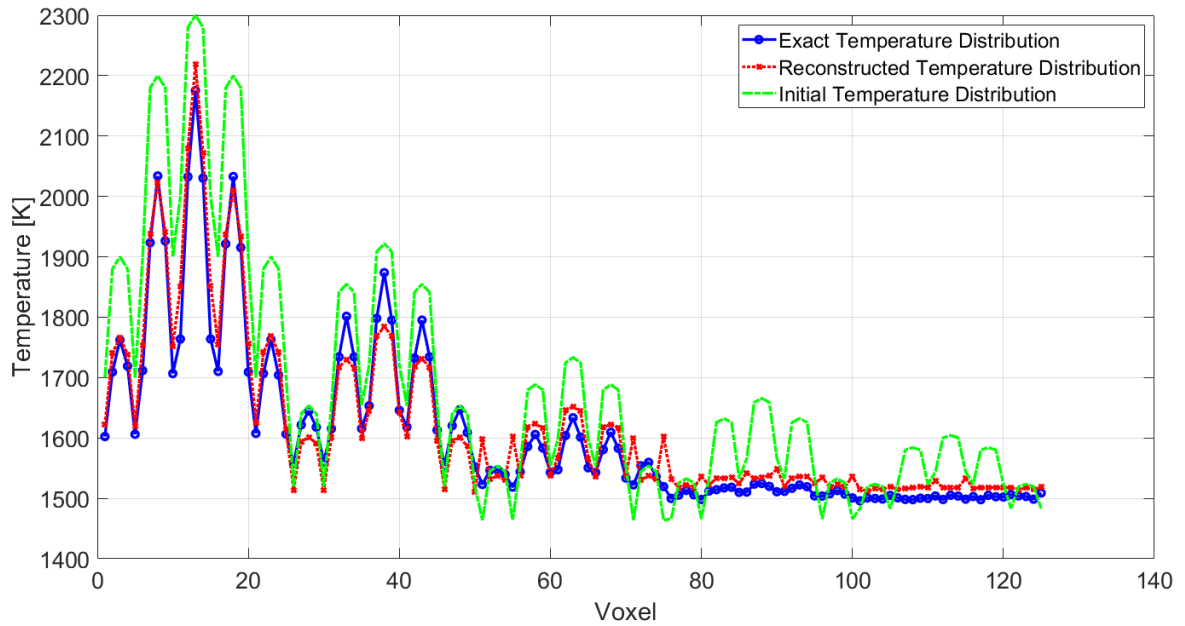


Слика 11.10. Расподела температура  $T_{10 \times 10 \times 10}$  по вокселима за случај на слици 11.8.

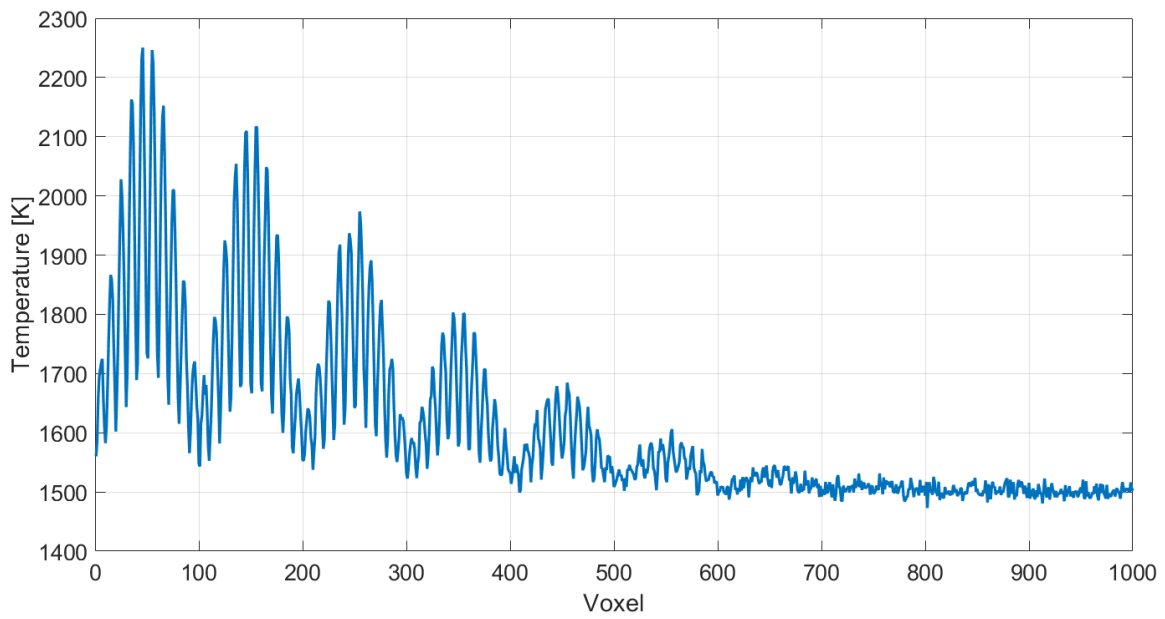




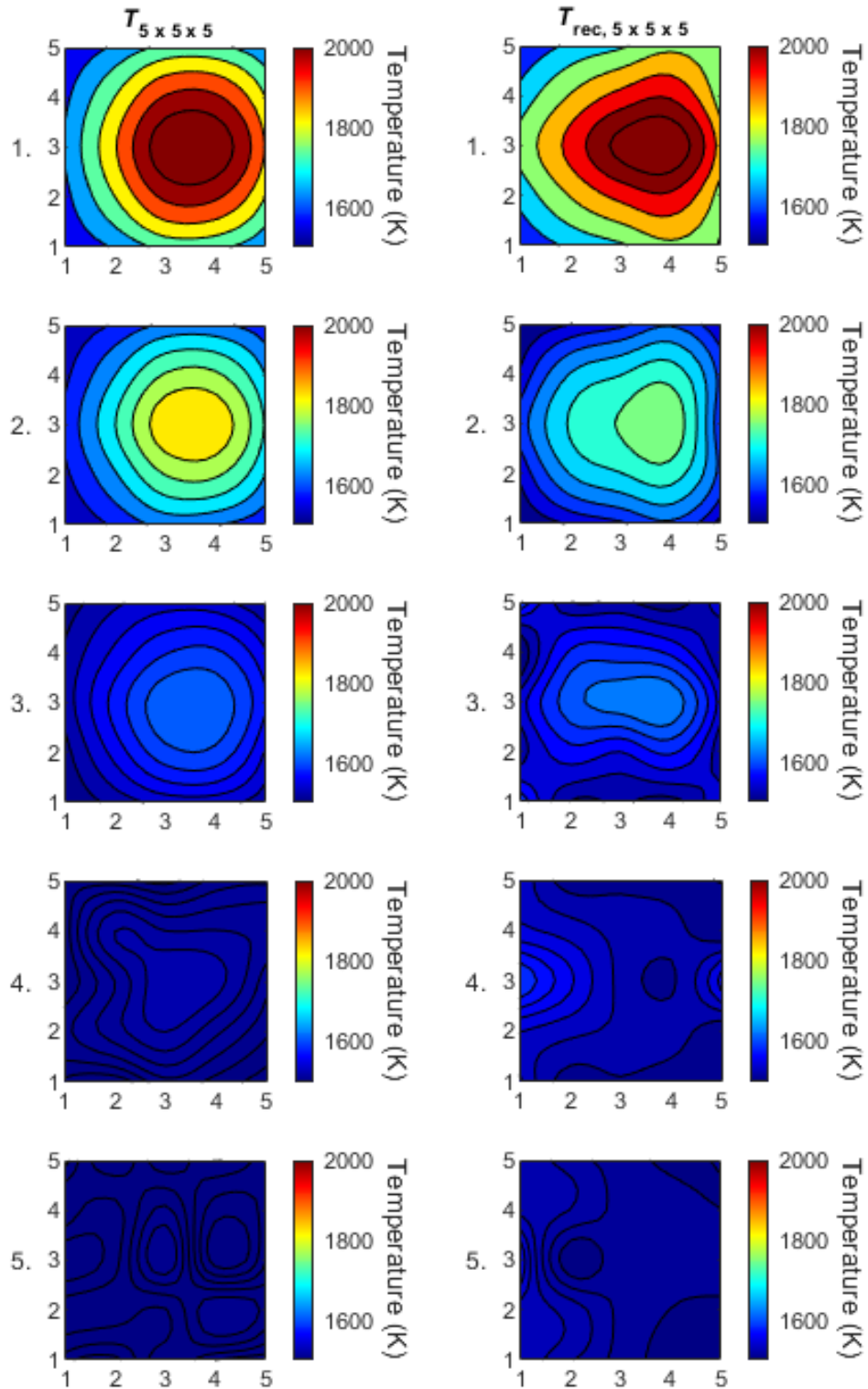
Слика 11.11. Хоризонтални пресеци усредњене задате температурне расподеле  $T_{5 \times 5 \times 5}$  и реконструисане температурне расподеле  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$  за трећи положај пламена. Нумерисане врсте представљају слајсове по висини сегментираног простора.



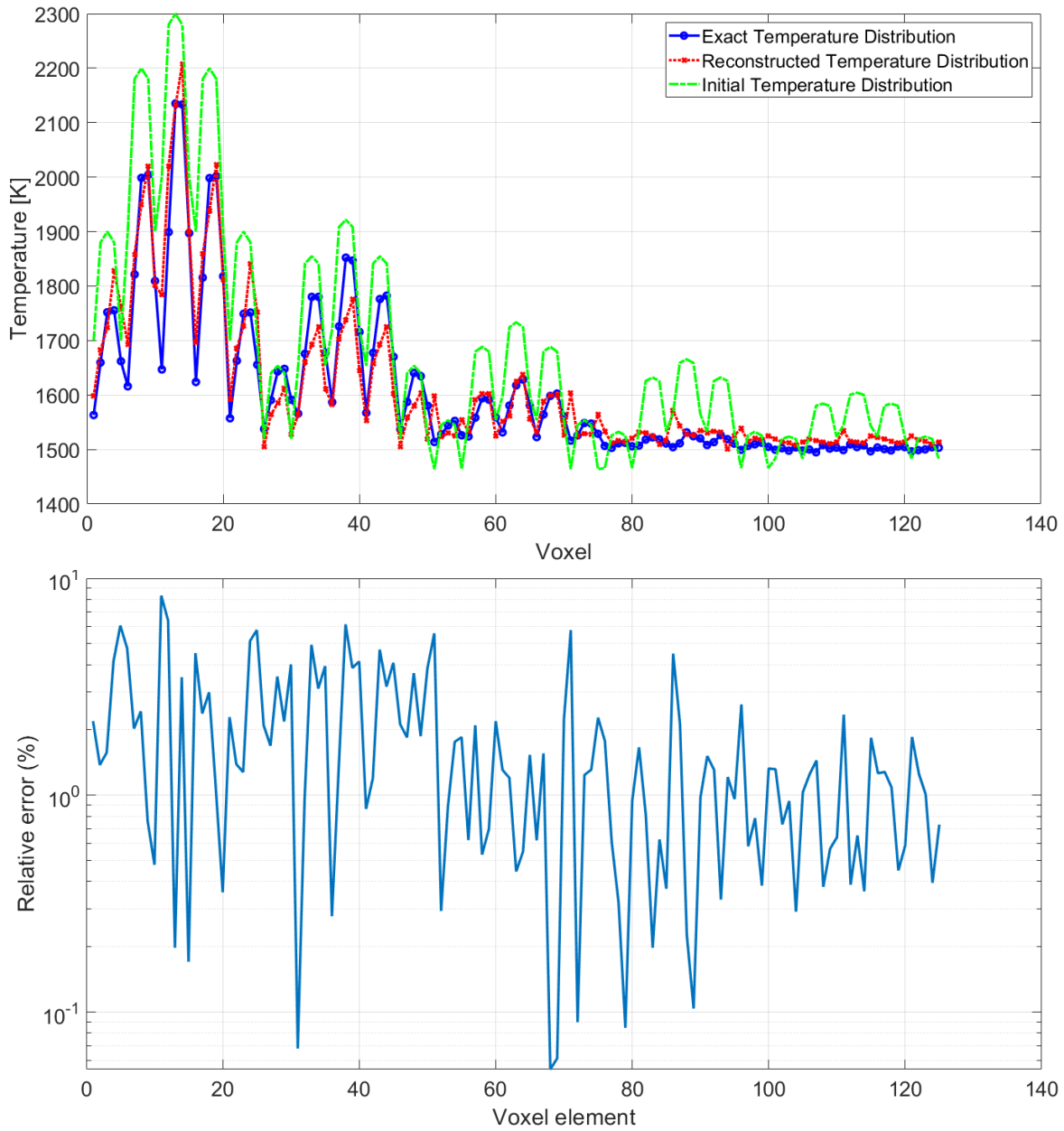
Слика 11.12. Температурна расподела по вокселима за случај са слике 11.11. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доња слика даје одговарајуће релативне грешке реконструкције за горњу слику.



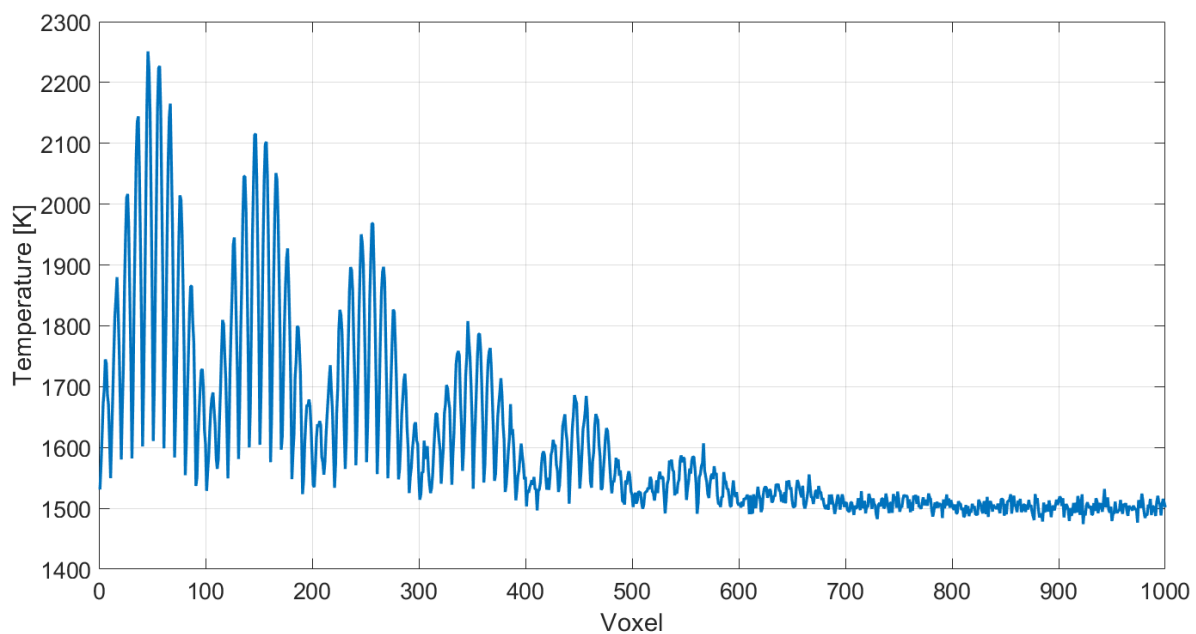
Слика 11.13. Расподела температура  $T_{10 \times 10 \times 10}$  по вокселима за случај на слици 11.11.



Слика 11.14. Хоризонтални пресеци усредњене задате температурне расподеле  $T_{5 \times 5 \times 5}$  и реконструисане температурне расподеле  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$  за четврти положај пламена. Нумерисане врсте представљају слајсове по висини сегментираног простора.

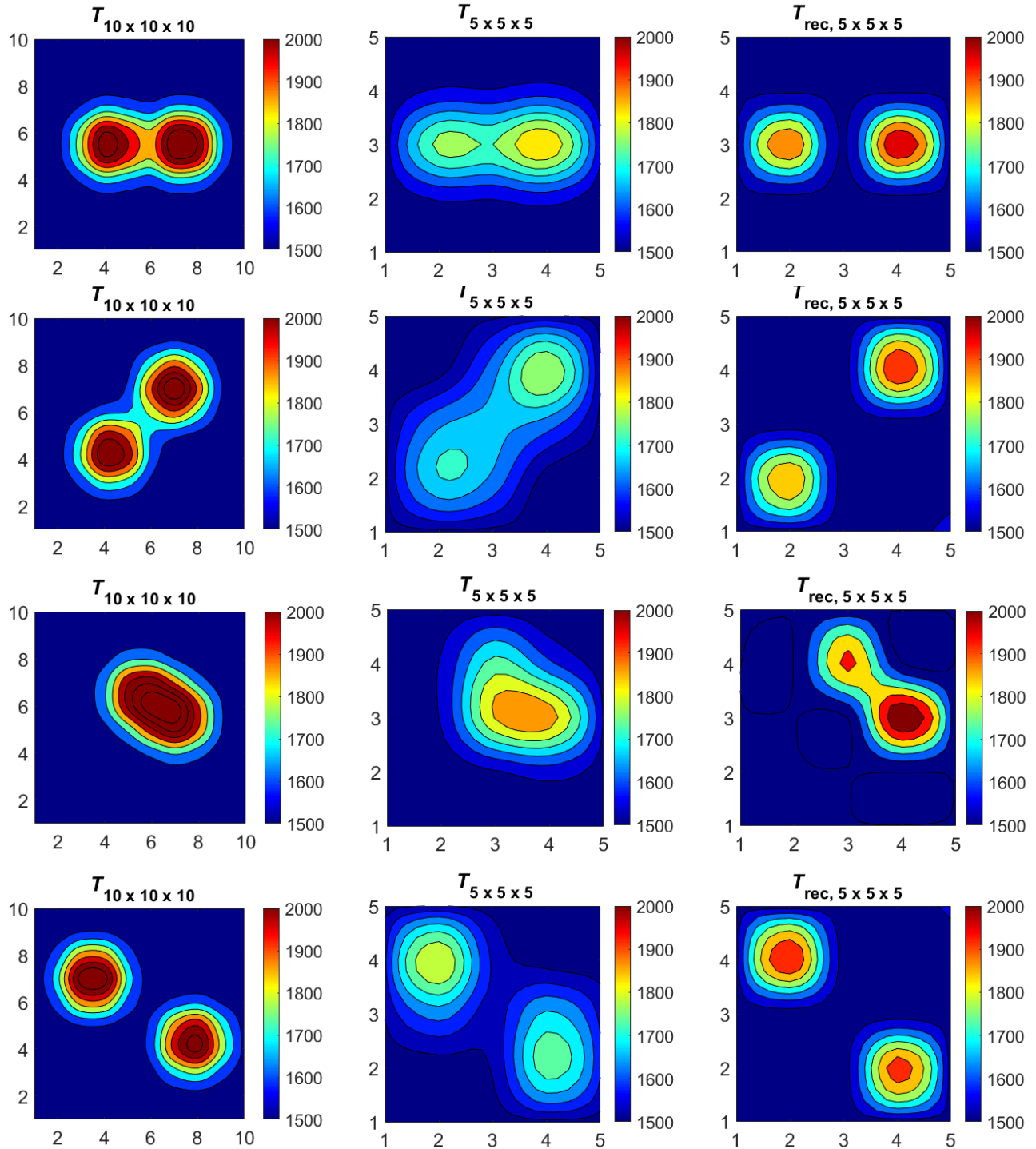


Слика 11.15. Температурна расподела по вокселима за случај са слике 11.14. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доња слика даје одговарајуће релативне грешке реконструкције за горњу слику.

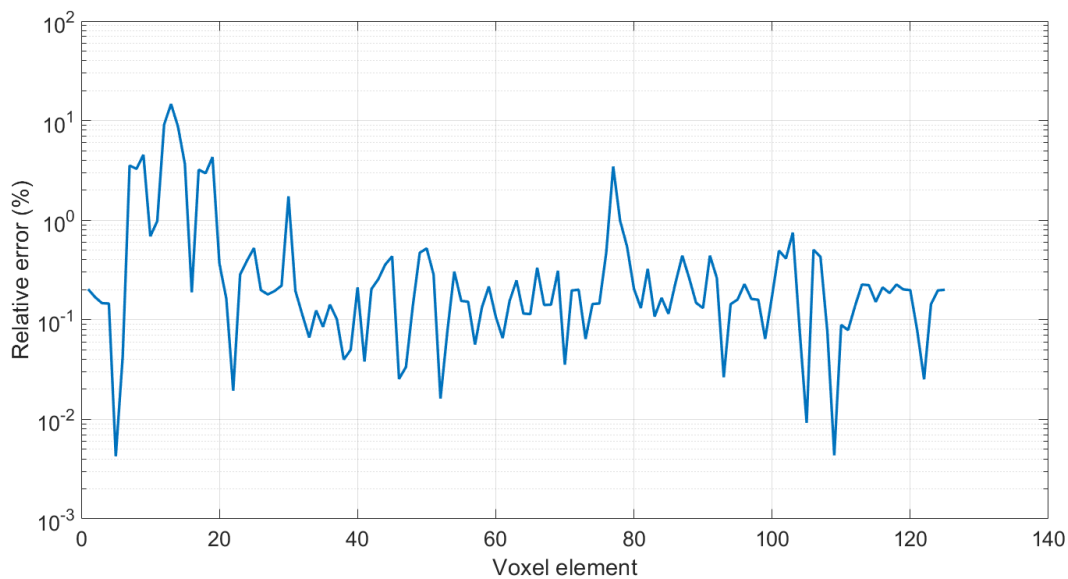
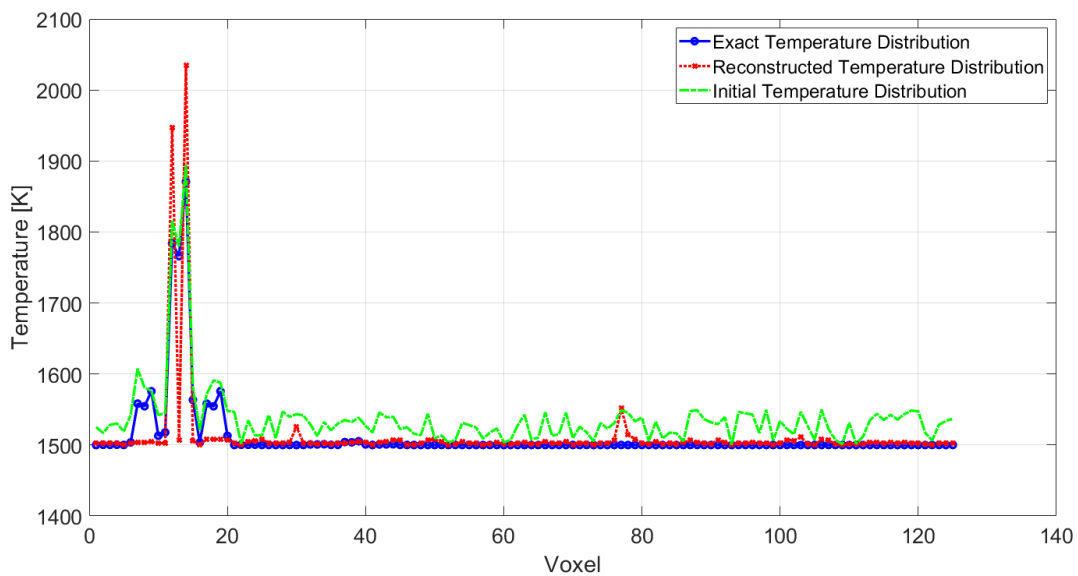


Слика 11.16. Расподела температура  $T_{10 \times 10 \times 10}$  по вокселима за случај на слици 11.16.

За несиметричан облик пламена урађено је пар случајева реконструкције као што се може видети на слици 11.17.

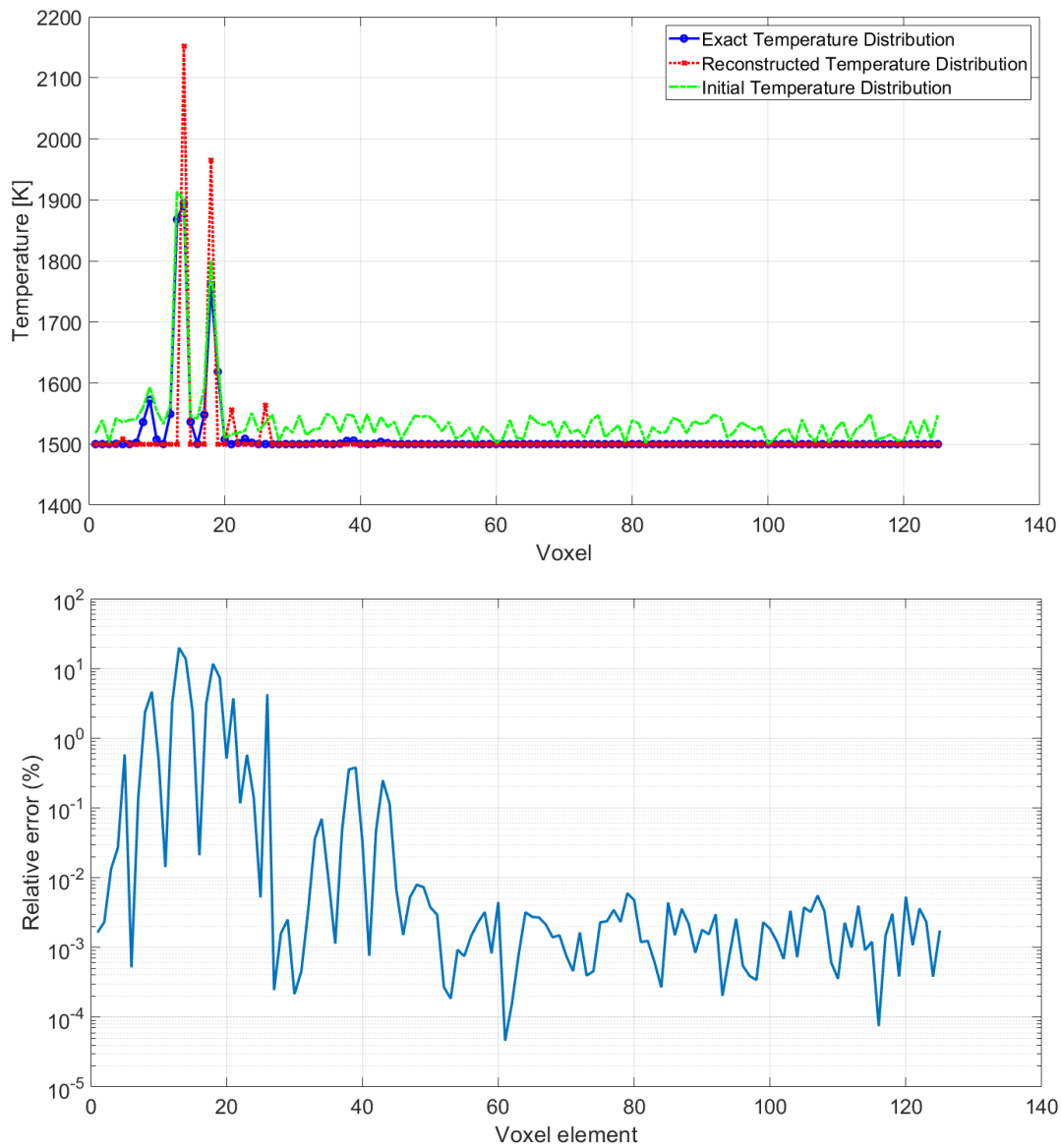


Слика 11.17. Хоризонтални пресек пламена на првом од десет нивоа гледано по висини за  $T_{10 \times 10 \times 10}$ , односно први нивоји за расподеле  $T_{5 \times 5 \times 5}$  и  $T_{rec, 5 \times 5 \times 5}$ . Овде је рађена реконструкција за несиметричан и сложен облик пламена. Прва колона (лево) даје задате температурне расподеле са различитим померањима у комори. Друга колона даје на нижој подели простора задате расподеле температуре. Трећа колона приказује одговарајуће реконструисане температурне расподеле.

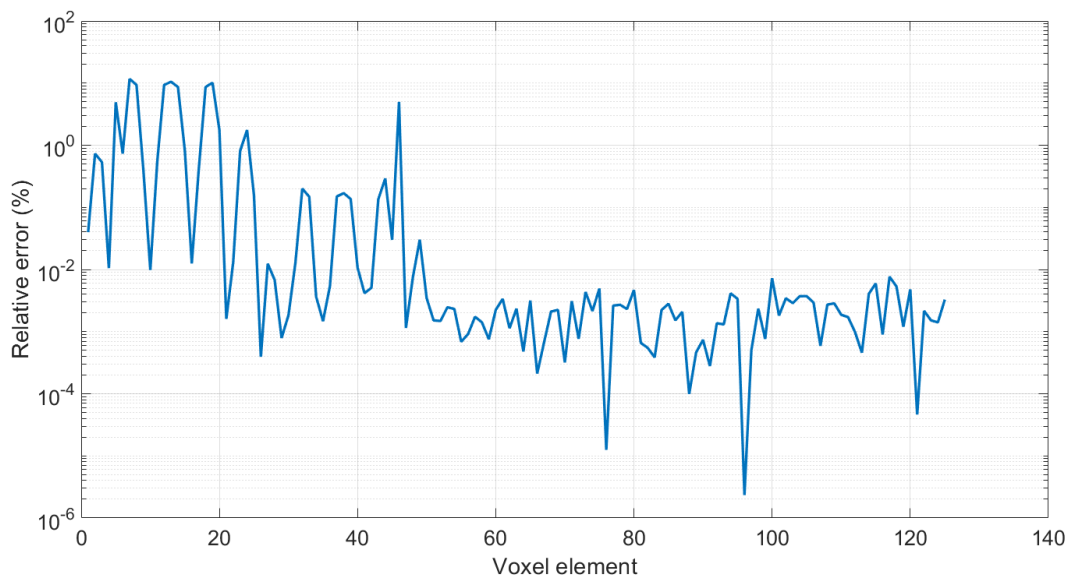
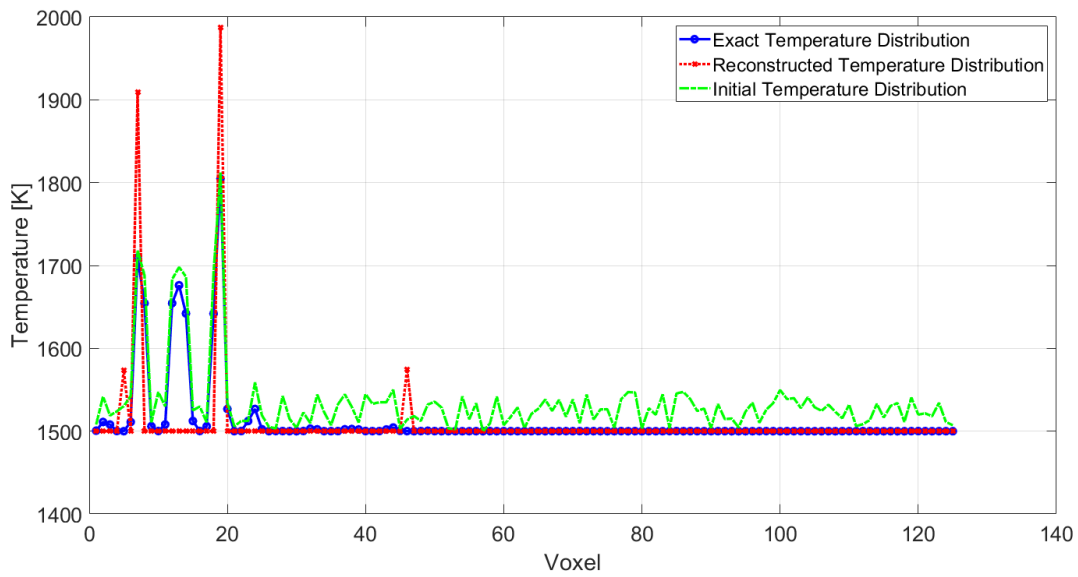


Слика 11.18. Температурна расподела по вокселима за случај из прве врсте са слике 11.17. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доњи део се односи на одговарајуће релативне грешке реконструкције

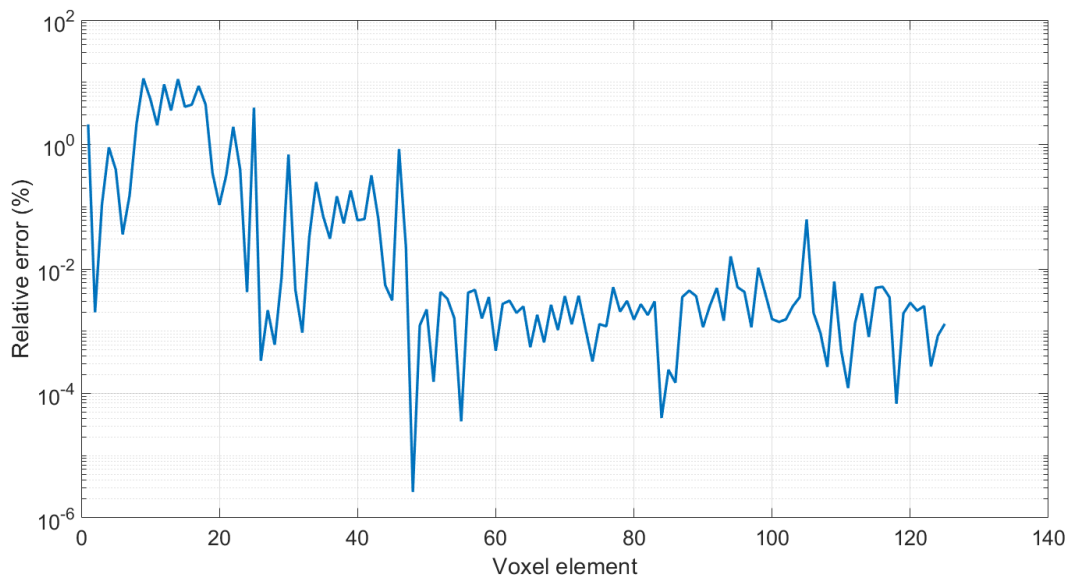
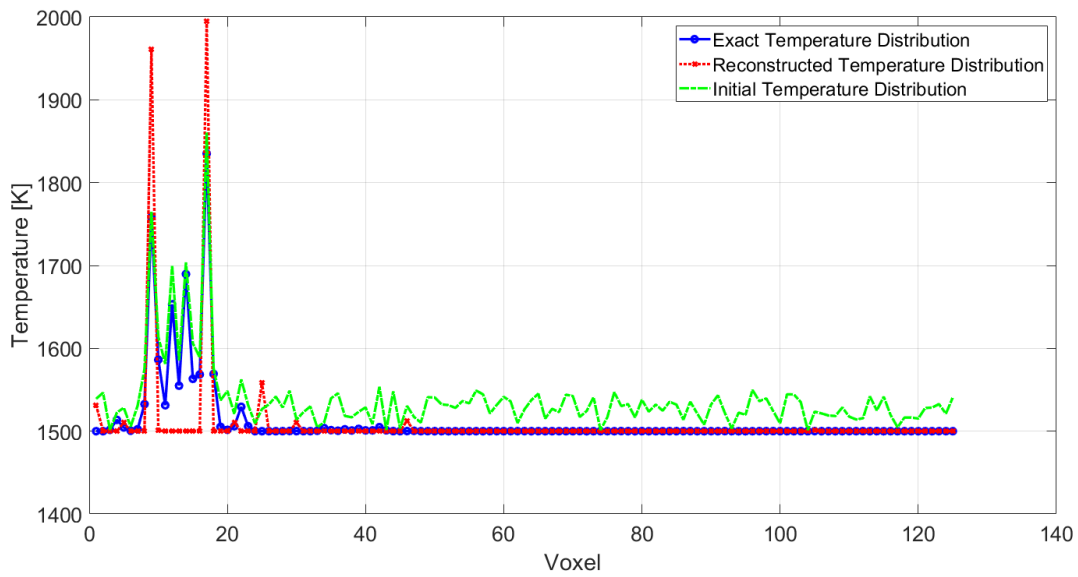




Слика 11.19. Температурна расподела по вокселима за случај из друге врсте са слике 11.17. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доњи део се односи на одговарајуће релативне грешке реконструкције температурне



Слика 11.20. Температурна расподела по вокселима за случај из треће врсте са слике 11.17. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доњи део се односи на одговарајуће релативне грешке реконструкције температуре



Слика 11.21. Температурна расподела по вокселима за случај из четврте врсте са слике 11.17. Плава линија је задата  $T_{5 \times 5 \times 5}$  температурна расподела, црвена је реконструисана температурна расподела. Зелена боја означава почетну расподелу која је дата као почетно решење одакле оптимизациони алгоритам креће да конвергира ка решењу. Доњи део се односи на одговарајуће релативне грешке реконструкције

Користећи једначину (11.17) добили смо грешке реконструисања температурне расподеле пламена по вокселима, што је приказано у табели 11.1.

Табела 11.1 Грешке реконструисања расподеле температуре по вокселима за сва четири случаја са слика 11.5, 11.8, 11.11 и 11.14.

$\xi$	Позиција пламена	$Q_{recon}$ (%)
0.00	1	2.01
0.01		3.08
0.05		4.53
0.00	2	2.41
0.01		3.04
0.05		4.00
0.00	3	1.97
0.01		2.84
0.05		5.00
0.00	4	2.58
0.01		3.50
0.05		4.92

За решавање инверзног проблема, користили смо оптимизациони метод Trust Region Reflective на десктоп рачунару са Intel® i5-10400F процесором на 4.3 GHz и са 32 GB RAM меморије. Време, које је потребно за реконструкцију температурног поља, је око 50 s. За решавање директног проблема преко ВМС методе користили смо паралелно четири од шест језгра, са колико овај процесор располаже. Време израчунавања топлотног флукса за све четири сонде преко ВМС методе је око 150 s.

Са Levenberg-Marquardt алгоритмом смо испробавали реконструкцију са мањим бројем таласних дужина, што се показало неуспешним. Trust Region Reflective захтева више једначина од броја непознатих, зато је одабрано 40 таласних дужина, мада може и нешто мањи број. Ово сугерише да број одабирања таласних дужина има битну улогу, систем нелинеарних једначина треба да буде преодређен.

## 12. Закључак

Главни резултат овог рада, је нови метод и принцип реконструисања расподеле температурног поља унутар ложишта котла код термоелектрана на угаљ, или унутар комора у којима се врши процес сагоревања. Нови метод, састоји се у томе, да је могуће добити температурни профил, мерењем зрачења на више таласних дужина, употребом једино спектрометара, што значајно смањује број коришћења мерних инструмената и поједностављује процес мерења.

Старије методе реконструкције тродимензионалне температурне расподеле су подразумевале распоређивање већег броја мерних инструмената, на различитим висинама унутар коморе, да би се постигла прегледност процеса сагоревања у унутрашњости котла, пећи или коморе за сагоревање. Ово представља велики технички изазов за такву конструкцију, што доводи до усложњавања и поскупљивања израде читавог система. Такође, мултиспектралне камере и систем одашилч-пријемника код ласерске апсорпционе спектроскопије чини процес примене мерења компликованијим и скупљим. Наш метод је знатно једноставнији и јефтинији за употребу.

У овој тези су разрађени, и приложени, програми који се користе за решавање директног проблема који се базирају на Монте Карло симулацији. Упоредно је коришћење два типа Монте Карло симуларања, преноса топлотног зрачења, FMC и VMC. Други тип се показује супериорнијим, поготово за случајеве код којих имамо отворе сонди односно детекторе малих димензија у односу на димензије котла или коморе.

Такође, приложени су и програми, који на основу електромагнетне теорије расејања зрачења на честицама угља или продуката сагоревања, омогућавају израчунавање оптичких особина партикуларне средине у којој се налази пламен. На основу ових програма и стандардне литературе, могуће је добро проценити коефицијенте апсорпције и расејања.

Код решавања инверзног проблема дата је општа слика коришћења главних математичких метода и софтверских алата који се користе у пракси и истраживањима код температурне томографије. Овај рад у математичкој и физичкој анализи показује да код решавања инверзног проблема у температурној томографији доминирају одавно познати математички проблеми решавања линеарних и нелинеарних Фредхолмових интегралних једначина. Код CCD камера систем је могуће линеаризовати па се процес решавања обично своди на неки тип регуларизације, најчешће Тихоновљеву регуларизацију. Међутим сама природа, односно физика, а тиме и математички модел, показује да увек имамо посла са нелинеарним интегралним једначинама и да је за истовремено одређивање температуре пламена и оптичких карактеристика средине неопходно користити неки облик нелинеарних оптимизационих метода. Спектрометар као инструмент, још више истиче ову нелинеарност математичког модела и зато је начин решавања инверзног проблема другачији него код CCD камере. CCD камера даје добру просторну резолуцију температурног поља, али има слабу спектралну резолуцију. Спектрометар, са друге стране, има слабу просторну резолуцију, али зато има бољу спектралну резолуцију зрачења.

Код нове методе мерења, у случају одређивања једнодимензионалног профила пламена, где смо користили упарене сонде, које су биле уперене једна према другој, и постављене на супротним странама котла, дали смо експерименталну поставку и математички модел рачунања долазећег зрачења. Тестирали смо и показали коришћење оптимизационог метода који може да решава инверзни проблем у разумном времену, за неколико минута, са могућношћу добијања средње вредности атенуације средине.

Код дводимензионалног одређивања температурног профила, смо ради скраћивања времена решавања инверзног проблема, свели систем на линеаран односно матрични облик уз помоћ Бајесовог закључивања и теорије вероватноће. Овај начин захтева добро познавање очекиване температурне расподеле пламена у котлу, што може да се обави применом CFD софтверког алата за симулацију. На овај начин конструисана матрица коваријансе формира регуларизациону матрицу. Са овим приступом, показује се да чак и веома пододређени системи могу да се решавају применом Тихоновљеве регуларизације. Код овог новог начина решавања постигли смо велико убрзање решавања инверзног проблема, које се креће у распону времена од неколико секунди до једне минуте. Ако се решава само температурни профил са уношењем вредности оптичких коефицијената из литературе постиже се време решавања од неколико десетина милисекунди.

Тродимензионални проблем је решен применом ВМС Монте Карло метода, за директни проблем, и градијентне методе за случај решавања инверзног проблема. Дат је детаљан нови математичко-физички модел рачунања топлотног зрачења, за случај коришћења спектрометра, који се базира на статистичком начину одређивања излазних/мерених величина. На основу тога, конструисан је модел за инверзно решавање проблема. Грешке одређивања температуре по вокселима се крећу до 100 °C. Време израчунавања температурног профила је мање од једне минуте.

Главно унапређење за даљи развој ове нове методе може да се постигне развојем бољих алгоритама за решавање инверзног проблема. Тренд у микроелектроници, са појављивањем јачих микропроцесора, графичких карти, и бржих и већих RAM меморија иде у прилог коришћењу нове методе. Такође, литература везана за примењену математику је још увек оскудна у случају решавања нелинеарних интегралних једначина, што остаје суштински проблем.

### 13. Литература

- [1] X Xiao, C.W. Choi, I. K. Puri, Temperature measurements in steady two-dimensional partially premixed flames using laser interferometric holography, *Combust. Flame* 120 (30) (1993) 318-332.
- [2] S. Kampamann, A. Leipertz, K. Döbbeling, J. Haumann, Th. Sattelmayer, Twodimensional temperature measurements in a technical combustor with laser Rayleigh scattering, *Appl. Opt.* 32 (30) (1993) 6167-6172.
- [3] A. Lawitzki, I. Plath, W. Stricker, J. Bittner, U. Meirer and K. Khose-Höinghaus, Laser-induced fluorescence determination of flame temperatures in comparison with CARS measurements, *Appl. Phys. B Photophysics Laser Chem.* 50, 513-518 (1990).
- [4] F. Wang, K. F. Cen, N. Li, J. B. Jeffries, Q. X. Huang, J. H. Yan, and Y. Chi, Two-dimensional tomography for gas concentration and temperature distributions based on tunable diode laser absorption spectroscopy, *Meas. Sci Technol.* 21 (2010).
- [5] K.J. Young, S. N. Ireland, M. C. Melendez-Cervates, R. Stones, On the systematic error associated with the measurement of temperature using acoustic pyrometry in combustion products of unknown mixture, *Measur. Sci Technol.* 9 (1) (1998) 1-5.
- [6] F. Wang, D. Liu, K. F. Cen, J. H. Yan, Q. X. Huang, Y. Chi, Efficient inverse radiation analysis of temperature distribution in participating medium based on backward Monte Carlo method, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* 109 (12-13) (2008) 2171-2181.
- [7] H. Jiang, T. McComiskey, Y. Qian, Y. I. Jeong, K. T. Rhee, and J. C. Kent, A New High-Speed Spectral Infrared Imaging Device Applied for Flame Studies, *Combust. Sci. Technol.* 90, 341-356 (1993).
- [8] Y. Huang, Y. Yan, and G. Riley, Vision-based measurements of temperature distribution in a 500 kW model furnace using the two-color method, *Meas. J. Int. Meas. Confed.* 28, 175-183 (2000).
- [9] Backstrom D., Johansson R., Anderson K., Johansson F., Clausen S., Fateev A. Measurements and modeling of particle radiation in coal flames, *Energy & Fuels* 28 (2014) 2199-2210.
- [10] Carlos Romero, Xianchang Li, Shahla Keyvan, Rodney Rossow, Spectrometer based combustion monitoring for flame stoichiometry and temperature control, *Applied Thermal Engineering* 25 (2005) 659-676.
- [11] Shahla Keyvan, Rodney Rossow, Carlos Romero, Xianchang Li, Comparison between visible and near-IR flame spectra from natural gas-fired furnace for blackbody temperature measurements, *Fuel* 83 (2004) 1175-1181.
- [12] Sun Yipeng, Lou Chun, Zhou Huaichun, A simple judgment method of gray property of flames based on spectral analysis and the two-color method for measurements of temperatures and emissivity, *Proceedings of the Combustion Institute* 33 (2011) 735-741.

- [13] Lin Ma, Weiwei Cai,<sup>1</sup> Andrew W. Caswell, Thilo Kraetschmer, Scott T. Sanders, Sukesh Roy, and James R. Gord, Tomographic imaging of temperature and chemical species based on hyperspectral absorption spectroscopy, *Optics Express* Vol. 17, Issue 10, pp. 8602-8613 (2009), <https://doi.org/10.1364/OE.17.008602>.
- [14] Shu Zheng, Weiguang Cai, Chen Zhao, Dengke Li, Jian Zhang, Qiang Lu, On the measurement of flame temperature and emissivity based on multispectral imaging technique, *Measurement*, Volume 196, 15 June 2022, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111272>.
- [15] Planck M., Distribution of energy in spectrum, *Annalen der Physik* (1901), vol. 4, no 3, pp. 553-563.
- [16] White, F.M.: *Heat Transfer*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
- [17] Jhon R. Howell, Robert Siegel, M. Pinar Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, CRC Press, Taylor & Francis Group (2010).
- [18] Michael F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Elsevier (2013).
- [19] Rayleigh L.: *Phil. Mag.*, vol 12, 1881.
- [20] Mie, G. A.: Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen, *Annalen der Physik*, vol. 25, pp. 377-445 (1908).
- [21] Goldsmith, A., and T.E. Waterman: Thermophysical properties of solid materials, Technical Report WADC TR 58-476, Armour Research Foundation (1959).
- [22] Gubareff, G. G., J. E. Janssen, and R. H. Torborg, Thermal radiation properties survey, Honeywell Research Center, Minneapolis, MI, (1960).
- [23] Wood, W. D., H. W. Deem, and C.F. Lucks, *Thermal Radiative Properties*, Plenum Publishing Company, New York (1964).
- [24] Svet, D. I., *Thermal Radiation: Metals, Semiconductors, Ceramics, Partly Transparent Bodies, and Films*, Plenum Publishing Company, New York (1965).
- [25] Edwards, D. K., and I. Catton, Radiation characteristics of rough and oxidized metals, in *Adv. Thermophys. Properties Extreme Temp. Pressures*, ed S. Gratch, ASME, pp. 189-199 (1965).
- [26] Touloukian, Y. S., and D. P. DeWitt (eds.), *Thermal Radiative Properties: Metallic Elements and Alloys*, vol. 7 of *Thermophysical Properties of Matter*, Plenum Press, New York (1970).
- [27] Touloukian, Y. S., and D. P. DeWitt (eds.), *Thermal Radiative Properties: Nonmetallic Solids*, vol. 8 of *Thermophysical Properties of Matter*, Plenum Press, New York (1972).
- [28] Touloukian, Y. S., and D. P. DeWitt, and R.S. Hertz (eds.), *Thermal Radiative Properties: Coatings*, vol. 9 of *Thermophysical Properties of Matter*, Plenum Press, New York (1973).
- [29] Schmidt, E., and E. R. G. Eckert, Über die Richtungsverteilung der Wärmestrahlung von Oberflächen, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, vol. 7 p. 175 (1935).



- [30] Sarofim, A. F. and Hottel, H. C., Sixth International Heat Transfer Conference, Vol. 6, 1978, p. 199.
- [31] Edwards, D. K., *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, 1976.
- [32] Modak, A. T., *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 1979, 21, 131.
- [33] Rayleigh L., On the light from the sky, its polarization and colour, *Phil. Mag.*, vol 41, pp. 107-120, 274-279, 1871.
- [34] Rayleigh L., *Phil. Mag.*, vol. 12, 1881.
- [35] Lorenz, L.: *Videnskab SelskabSkrifter*, vol. 6, Copenhagen, Denmark, 1890.
- [36] Lorenz, L.: *Oeuvres Scientifiques*, vol. 1, Copenhagen, Denmark, p. 405, 1898.
- [37] Viskanta, R., A. Ugna and M. Mengüç, Predictions of radiative properties of pulverized coal and fly-ash polydispersions, ASME paper no. 81-HT-24, 1981.
- [38] Changisk Kim and Noam Lior, Easily computable good approximations for spectral radiative properties of particle-gas components and mixture in pulverized coal combustors, *Fuel* Vol. 74 No. 12, pp. 1891-1902, 1995.
- [39] Chang, H. and Charalampopoulos, T. T., Determination of the wavelength dependence of refractive indices of flame soot, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 430, pp. 577-591, 1990.
- [40] Deirmendjian, D., *Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions*, Elsevier, New York, 1969.
- [41] Tien, C. L., and B. L. Drolen, Thermal radiation in particulate media with dependent and independent scattering, *Annual Review of Numerical Fluid Mechanics and Heat Transfer*, vol. 1, Hemisphere, New York, pp. 1-32, 1987.
- [42] H. C. Zhou, S. D. Han, F. Sheng, and C. G. Zheng, Visualisation of three-dimensional temperature distributions in a large-scale furnace via regularized reconstruction from radiative energy images, *Nical studies, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 72, 361-383, 2002.
- [43] R. E. Bedford, Reference tables for platinum 40% rhodium/platinum 20% rhodium thermocouples, *Rev. Sci. Instrum.* 36, 1571-1580, 1965.
- [44] P. R. N. Childs, J. R. Greenwood, and C. A. Long, Review of temperature measurement, *Review of Scientific Instruments*, vol. 71, pp. 2959-2978, 2000.
- [45] F. Birol, *Key World Energy Statistics*, Int. Energy Agency, 80, 2017.
- [46] S. M. Godoy and F. C. Lockwood, Development of a two-colour infrared pyrometer for coal particle temperature measurements during devolatilization, *Fuel* 77, 995-999, 1998.
- [47] J. S. Newman, P. A. C., Simple aspirated thermocouple for use in fires, *Journal of Fire and Flammability* 10 (4), 326-336, 1979.

- [48] A. Z'Graggen, H. F., A. Steinfeld., Gas temperature measurement in thermal radiating environments using a suction thermocouple apparatus, *Measurement Science and Technology* 18 (11), 2007.
- [49] L. G. Blevis, W.M.P., Modeling of bare and aspirated thermocouples in compartment fires, *Fire Safety Journal* 33 (4), 131-138, 1999.
- [50] S.C. Kim, A. H., On the temperature measurement bias and time response of an aspirated thermocouple in fire environment, *Journal of Fire Sciences* 26 (6), 2008.
- [51] P. Herve, J. Cedelle, and I. Negreanu, Infrared technique for simultaneous determination of temperature and emissivity, *Infrared Physics & Technology*, vol. 55, pp. 1-10, 2012.
- [52] Atkinson, K., A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equation of the Second Kind, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1976.
- [53] Baker, C. T. H., and Miller, G. F., *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods*, Academic Press, London, 1982.
- [54] Banach, S., *Théorie des Opérations Linéaires*, Hafner, New York, 1932.
- [55] Delves, L. M., and Mohamed, J. L., *Computational Method for Integral Equations*, Cambridge Press, Cambridge, 1985.
- [56] Delves, L. M., and Walsh, J., *Numerical Solution of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [57] Kress, R., *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [58] Smithies, F., *Integral Equations*, Cambridge University Press, London, 1958.
- [59] R. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd ed., Springer, Heidelberg, 1999.
- [60] P. C. Hansen, M. Kilmer, and R. H. Kjellden, Exploiting residual information in the parameter choice for discrete ill-posed problems, *BIT*, 46 (2006), pp. 41–59.
- [61] Å. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [62] L. N. Trefethen and D. Bau, III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [63] P. C. Hansen, *Discrete Inverse Problems Insight and Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2010.
- [64] Esam M. A. Hussein, *Computed Radiation Imaging Physics and Mathematics of Forward and Inverse Problems*, Elsevier, 2011.
- [65] Jeans, J. H.: “The equations of radiative transfer of energy,” *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, vol. 78, pp. 28–36, 1917.
- [66] Kourganoff, V.: *Basic Methods in Transfer Problems*, Dover Publications, New York, 1963.
- [67] Davison, B.: *Neutron Transport Theory*, Oxford University Press, London, 1958.

- [68] Murray, R. L.: Nuclear Reactor Physics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1957.
- [69] Fiveland, W. A.: “A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures,” ASME Paper 82-HT-20, 1982.
- [70] Fiveland, W. A.: “Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method,” Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 2, no. 4, pp. 309–316, Oct 1988.
- [71] Hyde, D. J., and J. S. Truelove: “The discrete ordinates approximation for multidimensional radiant heat transfer in furnaces,” Technical Report VKAEA Report No. AERE-R 8502, Thermodynamics Division, AERE Harwell, Oxfordshire, February 1977.
- [72] Truelove, J. S.: “Three-dimensional radiation in absorbing–emitting–scattering media using the discrete ordinates approximation,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 39, no. 1, pp. 27–31, 1988.
- [73] Hottel, H. C., and E. S. Cohen: “Radiant heat exchange in a gas-filled enclosure: Allowance for nonuniformity of gas temperature,” AIChE Journal, vol. 4, pp. 3–14, 1958.
- [74] Hottel, H. C., and A. F. Sarofim: Radiative Transfer, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [75] Walther, V. A., J. Dorr, and E. Eller: “Mathematische Berechnung der Temperaturverteilung in der Glasschmelze mit Berücksichtigung von Wärmeleitung und Wärmestrahlung,” Glastechnische Berichte, vol. 26, pp. 133–140, 1953.
- [76] Einstein, T. H.: “Radiant heat transfer to absorbing gases enclosed between parallel flat plates with flow and conduction,” NASA TR R-154, 1963.
- [77] Einstein, T. H.: “Radiant heat transfer to absorbing gases enclosed in a circular pipe with conduction, gas flow, and internal heat generation,” NASA TR R-156, 1963.
- [78] Taniguchi, H., Yang, W.-J., Kudo K., Hayasaka, H., Oguma, M., Kusama, A., Nakamachi, I., and Okigami, N., Radiant transfer in gas filled enclosures by radiant energy absorption distribution method, Heat Transfer, Proc. Int. Heat Transfer Conf., 8th, San Francisco, 1986, Vol. 2, pp. 757-762, 1986.
- [79] Taniguchi, H., Kudo, K., and Yang, W.-J. Advances in computational heat transfer by Monte Carlo method, Comput. Mech. '88, Theory Appl., Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, GA, 1988, Vol. 2, pp. 56ii1-56ii4, 1988.
- [80] Wen-Jei Yang, Hiroshi Taniguchi, Kazuhiko Kudo, Advances in Heat Transfer – Radiative Heat Transfer by the Monte Carlo Method, Academic Press, Vol. 27, 1995.
- [81] Michael F. Modest, Backward Monte Carlo Simulations in Radiative Heat Transfer, Journal of Heat Transfer, vol. 125, 2003.
- [82] Dong Liu, Fei Wang, Kefa Cen, Jianhua Yan, Qunxing Huang, and Yong Chi, Noncontact temperature measurement by means of CCD cameras in a participating medium, OPTICS LETTERS / Vol. 33, No. 5 / March 1, 2008.

- [83] Fei Wang, Dong Liu, Ke-fa Cen, Jian-hua Yan, Qun-xing Huang, Yong Chi, Efficient inverse radiation analysis of temperature distribution in participating medium based on backward Monte Carlo method, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 109 (2008) 2171–2181.
- [84] Askarova, A. S., S. A. Bolegenova, V. Yu, and A. B. Maximov. 2012. Mathematical simulation of pulverized coal in combustion chamber. *Procedia Eng* 42:1150–56.
- [85] Kuang, M., Z. Li, Y. Zhang, X. Chen, J. Jia, Q. Zhu, et al. 2012. Asymmetric combustion characteristics and NO<sub>x</sub> emissions of a down-fired 300MW utility boiler at different boiler loads. *Energy*. 37 (1):580–90. doi:10.1016/j.energy.2011.10.046.
- [86] Ballester, J., and T. García-Armingol. 2010. Diagnostic techniques for the monitoring and control of practical flames. *Prog. Energy Combust. Sci* 36 (4):375–411. doi:10.1016/j.pecs.2009.11.005.
- [87] Fang, Q., H. Wang, Y. Wei, L. Lei, X. Duan, H. Zhou, et al. 2010. Numerical simulations of the slagging characteristics in a down-fired, pulverized-coal boiler furnace. *Fuel Process. Technol.* 91 (1):88–96. doi:10.1016/j.fuproc.2009.08.022.
- [88] Lou, C., and H. C. Zhou. 2005. Deduction of the two-dimensional distribution of temperature in a cross section of a boiler furnace from images of flame radiation. *Combust. Flame* 143 (1–2):97–105. doi:10.1016/j.combustflame.2005.05.005.
- [89] Ayling, A. B., and I. W. Smith. 1972. Measured temperatures of burning pulverized-fuel particles, and the nature of the primary reaction product. *Combust. Flame* 18 (2):173–84. doi:10.1016/S0010-2180(72)80133-0.
- [90] Cheng, Q., X. Zhang, Z. Wang, H. Zhou, S. Shao, et al. 2014. Simultaneous measurement of three-dimensional temperature distributions and radiative properties based on radiation image processing technology in a gas-fired pilot tubular furnace. *Heat Transf. Eng.* 35(6–8):770–79. doi:10.1080/08832323.2013.838096.
- [91] Clausen, S. 1996. Local measurement of gas temperature with an infrared fiber-optic probe. *Meas. Sci. Technol* 7 (6):888–96. doi:10.1088/0957-0233/7/6/005.
- [92] Jorgensen, F. R. A., and M. Zuiderwyk. 1985. Two-color pyrometer measurement of the temperature of individual combusting particles. *J. Phys. E* 18 (6):486–91. doi:10.1088/0022-3735/18/6/006.
- [93] Joutsenoja, T., J. Stenberg, R. Hernberg, M. Aho, et al. 1997. Pyrometric measurement of the temperature and size of individual combusting fuel particles. *Applied Optics*. 36(7):1525–35. doi:10.1364/AO.36.001525.
- [94] Khatami, R., and Y. A. Levendis. 2011. On the deduction of single coal particle combustion temperature from three-color optical pyrometry. *Combust. Flame* 158 (9):1822–36. doi:10.1016/j.combustflame.2011.01.007.

- [95] Khose-Hoinghaus, K., R. S. Barlow, M. Alden, and J. Wolrfum. 2005. Combustion at the focus: Laser diagnostic and control. *Proc. Combust. Inst* 30 (1):89–123. doi:10.1016/j.proci.2004.08.274.
- [96] Levendis, Y. A., K. R. Estrada, and H. C. Hottel. 1992. Development of multicolor pyrometers to monitor the transient response of burning carbonaceous particles. *Rev. Sci. Instrum* 63 (7):3608–22. doi:10.1063/1.1143586.
- [97] Li, W., C. Lou, Y. Sun, and H. Zhou. 2011. Estimation of radiative properties and temperature distributions in coal-fired boiler furnaces by a portable image processing system. *Experimental Thermal and Fluid Science* 35 (2):416–21. doi:10.1016/j.expthermflusci.2010.10.005.
- [98] Liu, D., F. Wang, J. H. Yan, Q. X. Huang, Y. Chi, K. F. Cen, et al. 2008. Inverse radiation problem of temperature field in three-dimensional rectangular enclosure containing inhomogeneous, anisotropically scattering media. *Int. J. Heat Mass Transf.* 51(13–14):3434–41. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.11.007.
- [99] Marjanović, A., Vujnovic, S., and Đurovc, Ž. 2020. One approach to temperature distribution control in thermal power plant boilers. *Combustion science and technology* 61. *Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, Taylor & Francis doi:10.1080/00051144.2020.1733792.
- [100] Schroeder, A. R., D. M. Thompson, G. G. Daves, R. O. Buckius, H. Krier, J. E. Peters, et al. 1992. Simultaneous particle morphology and temperature measurements of burning pulverized coal. *Symp. (Int.) Combust.* 24(1):1161–69. doi:10.1016/S0082-0784(06)80137-2.
- [101] Zhou, H.-C., Y.-B. Hou, D.-L. Chen, C.-G. Zheng, et al. 2002. An inverse radiative transfer problem of simultaneously estimating profiles of temperature and radiative parameters from boundary intensity and temperature measurements. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 74(5):605–20. doi:10.1016/S0022-4073(01)002746.
- [102] Niu, Z. T., H. Qi, Z. Y. Zhu, K. F. Li, Y. T. Ren, and M. J. He. 2021. A novel parametric level set method coupled with Tikhonov regularization for tomographic laser absorption reconstruction, *Appl. Therm. Eng* 201:117819. doi:10.1016/j.applthermaleng. 2021.117819.
- [103] Shui, C., J. Huang, H. Liu, W. Cai, and S. T. Sanders. 2021. Tomographic absorption spectroscopy based on dictionary learning. *Opt. Express* 29 (22):36400. doi:10.1364/OE.440709.
- [104] Zhang, B., W.-J. Peng, L. Jian, Z.-H. Li, C.-L. Xu, et al. 2021. A fast tomographic reconstruction method for flame temperature distribution measurement based on direct solution algorithm. *Front. Energy Res* 9:790581. doi:10.3389/fenrg.2021.790581.
- [105] Lukovic, M., Vicic, M., Popovic, Z., Zekovic, Lj., Kasalica, B., and Belca, I. 2018. Two-color pyrometerbased method for measuring temperature profiles and attenuation coefficients in a coal power plant. *Combustion science and technology*, Taylor & Francis doi:10.1080/00102202.2018.1481401.

- [106] <https://www.osioptoelectronics.com/products/photodetectors/two-color-sandwich-photodiodes>.
- [107] <https://www.cnilaser.com/Aurora4000.htm>.
- [108] Li, W., C. Lou, Y. Sun, and H. Zhou. 2011. Estimation of radiative properties and temperature distributions in coal-fired boiler furnaces by a portable image processing system. *Experimental Thermal and Fluid Science* 35 (2):416–21. doi:10.1016/j.expthermflusci.2010.10.005.
- [109] Snow Draper, T., Zeltner, D., Tree, D., Xue, J., and Tsiava, R., et al. 2012. Two-dimensional flame temperature and emissivity measurements of pulverized oxy-coal flames. *Appl. Energy* 95 38–44. doi:10.1016/j.apenergy.2012.01.062.
- [110] Wang, F., X. J. Wang, Y. Z. Ma, J. H. Yan, Y. Chi, C. Y. Wei, M. J. Ni, K. F. Cen, et al. 2002. The research on the estimation for the NO<sub>x</sub> emissive concentration of the pulverized coal boiler by the flame image processing technique. *Fuel*. 81(16):2113–20. doi:10.1016/S0016-2361(02)00145-X.
- [111] Yang, C., H. Zhou, and Z. Huang. 2008. Visualization of 3-D temperature distribution in a 300 MW, twin-furnace, coal-fired boiler. *J China Univ Min Technol* 18 (1):0033–7. doi:10.1016/S1006-1266(08)60007-3.
- [112] Jiang, Z., Z. Luo, and H. Zhou. 2009. A simple measurement method of temperature and emissivity of coal-fired flames from visible radiation image and its application in a CFB boiler furnace. *Fuel* 88 (6):980–87. doi:10.1016/j.fuel.2008.12.014.
- [113] Rinaldi, F., and B. Najafi. 2013. Temperature Measurement in WTE Boilers Using Suction Pyrometers. *Sensors (Switzerland)* 13 (11):15633–55. doi:10.3390/s131115633.
- [114] Backstrom, D., Johansson, R., Andersson, K., Johansson, F., Clausen, S., and Fateev, A. 2014. Measurement and modelling of particle Radiation in Coal Flames. *Energy & Fuels* 28:2199–2210.
- [115] Milos Mosaic, Ivan Belca, Milos Vivic & Becko Kasalica (2022): 1D TEMPERATURE TOMOGRAPHY OF A FLAME, BASED ON VIS-NIR SPECTROMETRY, *Combustion Science and Technology*, DOI: 10.1080/00102202.2022.2093608.
- [116] L.-H. Liu, et al., Inverse radiation problem of temperature field in three-dimensional rectangular furnaces, *Int. Commun. Heat Mass Tran.* 26 (2) (1999) 239–248.
- [117] L. Dong, et al., Simulation study on reconstruction model of three-dimensional temperature distribution within visible range in furnace, *Chin. Phys. B* 17 (4) (2008) 1312–1317.
- [118] C.E. Siewert, An inverse source problem in radiation transfer, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 50 (6) (1993) 603–609.
- [119] C.E. Siewert, A radiative-transfer inverse-source problem for f sphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 52 (2) (1994) 157–160.

- [120] L.H. Liu, Simultaneous identification of temperature profile and absorption coefficient in one-dimensional semitransparent medium by inverse radiation analysis, *Int. Commun. Heat Mass Tran.* 27 (5) (2000) 635–643.
- [121] H.C. Zhou, S.D. Han, Simultaneous reconstruction of temperature distribution, absorptivity of wall surface and absorption coefficient of medium in a 2-D furnace system, *Int. J. Heat Mass Tran.* 46 (14) (2003) 2645–2653.
- [122] L. Dong, et al., Fast reconstruction of two-dimensional temperature distribution in participating medium, *Acta Phys. Sin.* 57 (8) (2008) 4812–4816.
- [123] L.-H. Liu, et al., Inverse radiation problem of source term in three-dimensional complicated geometric semitransparent media, *Int. J. Therm. Sci.* 40 (6) (2001) 528–538.
- [124] D. Liu, J.H. Yan, F. Wang, Q.X. Huang, Y. Chi, K.F. Cen, Inverse radiation analysis of simultaneous estimation of temperature field and radiative properties in a two-dimensional participating medium, *Int. J. Heat Mass Tran.* 53 (2010) 4474–4481.
- [125] Huai-Chun Zhou, Chun Lou, Qiang Cheng, Zhiwei Jiang, He Jin, Benyuan Huang, Zhenlin Pei, Chuanxin Lu, Experimental investigations on visualization of threedimensional temperature distributions in a large-scale pulverized-coal-fired boiler furnace, in: *Proceedings of the Combustion Institute*, vol. 30, 2005, pp. 1699–1706.
- [126] Phillip M. Brisley, Gang Lu, Yong Yan, Steve Cornwell, Three-dimensional temperature measurement of combustion flames using a single monochromatic CCD camera, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 54 (4) (AUGUST 2005).
- [127] A. Gaydon, H. Wolfhard, *Flames; Their Structure, Radiation and Temperature*, Chapman and Hall, London, 1970.
- [128] Z. Niu, H. Qi, Z. Zhu, Y. Ren, M. He, B. Gao, Nonlinear multispectral tomographic absorption deflection spectroscopy based on Bayesian estimation for spatially resolved multiparameter measurement in methane flame exhaust, *Fuel* 357 (2024) 129981, <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.129981>.
- [129] G. Legros, P. Joulain, J.-P. Vantelon, A. Fuentes, D. Bertheau, J.L. Torero, Soot volume fraction measurements in a three-dimensional laminar diffusion flame established in microgravity, *Combust. Sci. Technol.* 178 (2006) 813–835.
- [130] M. M. Hossain, G. Lu, Y. Yan, Soot volume fraction profiling of asymmetric diffusion flames through tomographic imaging, in: *2014 IEEE International Conference on Imaging Systems and Techniques (IST) Proceedings*, 2014, pp. 427–431.
- [131] J. Sun, C. Xu, B. Zhang, M.M. Hossain, S. Wang, H. Qi, et al., Three-dimensional temperature field measurement of flame using a single light field camera, *Opt. Express* 24 (2016) 1118–1132.

- [132] Q. Qi, C. Xu, M.M. Hossain, J. Li, B. Zhang, J. Li, Simultaneous reconstruction of flame temperature and soot volume fraction through weighted non-negative least squares and light field imaging techniques, *Fuel* 336 (2023) 126837, <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.126837>.
- [133] Z. Niu, H. Qi, B. Gao, L. Wei, Y. Ren, M. He, F. Wang, Three-dimensional inhomogeneous temperature tomography of confined-space flame coupled with wall radiation effect by instantaneous light field, *Int. J. Heat Mass Transf.* 211 (2023) 124282. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124282>.
- [134] S.J. Grauer, J. Emmert, S.T. Sanders, S. Wagner, K.J. Daun, Multiparameter gas sensing with linear hyperspectral absorption tomography, *Meas. Sci. Technol.* 30 (2019) 105401.
- [135] J.W. Shi, H. Qi, J.Y. Zhang, Y.T. Ren, L.M. Ruan, Y. Zhang, Simultaneous measurement of flame temperature and species concentration distribution from nonlinear tomographic absorption spectroscopy, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 241 (2020) 106693.
- [136] Huai-Chun Zhou, Shu-Dong Han, Chun Lou, Hao Liu, A new model of radiative image formation used in visualization of 3-D temperature distributions in largescale furnaces, *Numer. Heat Tran. B* 42 (2002) 243±258.
- [137] Huai-Chun Zhou, Feng Sheng, Shu-Dong Han, Yong-Li Huang, Chu-Guang Zheng, Reconstruction of temperature distribution in a 2-D absorbing-emitting system from radiant energy images, *JSME International Journal, Series B* 43 (1) (2000).
- [138] Huai-Chun Zhou, Feng Sheng, Shu-Dong Han, Chu-Guang Zheng, A fast algorithm for calculation of radiative energy distributions received by pinhole IMAGE-FORMATION process from 2D rectangular enclosures, numerical heat transfer, Part A: applications, *An International Journal of Computation and Methodology* 38 (7) (2000) 757–773.
- [139] D. Calvetti, F. Pitolli, E. Somersalo, B. Vantaggi, Bayes meets Krylov: statistically inspired preconditioners for CGLS, *SIAM Rev.* 60 (No2) (2018) 429–461.
- [140] Alessandro Buccini, Marco Donatelli, Lothar Reichel, Iterated Tikhonov regularization with a general penalty term, *Numer. Lin. Algebra Appl.* 00 (2017) 1–19.
- [141] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright, Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions, *Society for Industrial and Applied Mathematics* 9 (1) (1998) 112–147.
- [142] W.L. Grosshandler, A.T. Modak, Radiation from nonhomogeneous combustion products, in: 18th Symp. (Int.) on Combustion, The Combustion Institute, 1981, pp. 601–609.
- [143] Milos Mosaic, Edib Dobardzic, Milos Vicic, Becko Kasalica, Mirjana Sarvan, Ivan Belca, 2D temperature tomography of a flame, based on VIS-NIR spectrometry, *International Journal of Thermal Sciences* 201 (2024) 108991.
- [144] Viskanta R, Mengüç- MP. Radiation heat transfer in combustion systems. *Prog Energy Combust Sci* 1987; 13:97–160.



- [145] Goodwin DG, Mitchner M., Flyash radiative properties and effects on radiative heat transfer in coal-fired system. *Int J Heat Mass Transfer* 1989;32(4):627–38.
- [146] Marakis JG, Papapavlou C, Kakaras E., A parametric study of radiative heat transfer in pulverized coal furnaces. *Int J Heat Mass Transfer* 2000; 43:2961–71.
- [147] Akbar H. Borzabadi, and Omid S. Fard, Approximate Solution of Nonlinear Fredholm Integral Equations of the First Kind via Converting to Optimization Problems, *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical and Computational Sciences* Vol:1, No:9, 2007.
- [148] Братислав обрадовић, Лабораторија савремене физике, Универзитет у Београду, Физички факултет, 2012.
- [149] Milentije Luković, Emisiona jednodimenziona tomografija temperaturnog profila u ložištu kotla termoelektrane korišćenjem radijacione pirometrije - doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet, 2019.

## 14. Прилог

У овом поглављу су дати програми за нумеричко израчунавање и симулацију процеса и добијања мерених физичких величина у програмском језику и развојном окружењу MATLAB који су битни за резултате у оквиру тезе.

### 14.1 Програм за рачунање фазне функције за расејање електромагнетног таласа на честици

Овде су приложена два скрипт програма. Главни програм је под називом testPhaseFunction.m који позива функцију Phase.m.

#### 14.1.1 Фajл testPhaseFunction.m

```
clear all;
close all;
clc;
%%
theta = pi/3;
x = 10;
m = 2;
N = 30;

fPhase = @(theta) Phase(theta,x,m,N).*sin(theta);
X = 0:pi/50:pi;
Y = fPhase(X);
Y2 = Phase(X,x,m,N);
q = trapz(X,Y)/2
%%
figure(1);
polarplot(X,Y2)
thetalim([0,180])
rlim([0,6])
```

#### 14.1.2 Фajл Phase.m

```
function Phi = Phase(theta,x,m,N)

    m = real(m)-imag(m)*1i;
    h = 1e-8;
    % Psi function in radiative properties
    Psi = @(n,z) (pi*z/2).^0.5.*besselj(n+0.5,z);
    dPsi = @(n,z) (Psi(n,z+h)-Psi(n,z-h))./(2*h);

    % Zeta function in radiative properties
```

```

Zeta = @(n,z) (pi*z./2).^ (0.5) .*besselh(n+0.5,z);
dZeta = @(n,z) (Zeta(n,z+h)-Zeta(n,z-h))./(2*h);

% Mie scattering coefficients
a = @(n,x,m) (dPsi(n,m.*x)*Psi(n,x)-
m.*Psi(n,m.*x)*dPsi(n,x))/(dPsi(n,m.*x)*Zeta(n,x)-m.*Psi(n,m.*x)*dZeta(n,x));
b = @(n,x,m) (m.*dPsi(n,m.*x)*Psi(n,x)-
Psi(n,m.*x)*dPsi(n,x))/(m.*dPsi(n,m.*x)*Zeta(n,x)-Psi(n,m.*x)*dZeta(n,x));

pi_n = @(theta,n) (legendreP(n,cos(theta)+h)-legendreP(n,cos(theta)-
h))./(2*h);
pi_nx = @(x,n) (legendreP(n,x+h)-legendreP(n,x-h))./(2*h);
dpi_n = @(theta,n) (pi_nx(cos(theta)+h,n)-pi_nx(cos(theta)-h,n))./(2*h);
tau_n = @(theta,n) cos(theta).*pi_n(theta,n)-
sin(theta).^2.*dpi_n(theta,n);

S1c = 0;
S2c = 0;
Qsca = 0;

for i = 1:N
    S1c =
S1c+((2*i+1)/(i*(i+1))).*(a(i,x,m).*pi_n(theta,i)+b(i,x,m).*tau_n(theta,i));
    S2c =
S2c+((2*i+1)/(i*(i+1))).*(b(i,x,m).*pi_n(theta,i)+a(i,x,m).*tau_n(theta,i));
    Qsca = Qsca +
(2./(x.^2)).*(2*i+1).*((abs(a(i,x,m))).^2+(abs(b(i,x,m))).^2);
end

Phi = 2*(abs(S1c).^2+abs(S2c).^2)./(x.^2.*Qsca);
end

```

## 14.2 Програми за рачунање фактора ефикасности за расејање и екстинкцију

### 14.2.1 Фајл MieQsca.m

```

function Qsca = MieQsca(x,m,N)

m = real(m)-imag(m)*1i;
h = 1e-8;
% Psi function in radiative properties
Psi = @(n,z) (pi*z/2).^ (0.5) .*besselj(n+0.5,z);
dPsi = @(n,z) (Psi(n,z+h)-Psi(n,z-h))./(2*h);

% Zeta function in radiative properties
Zeta = @(n,z) (pi*z./2).^ (0.5) .*besselh(n+0.5,z);
dZeta = @(n,z) (Zeta(n,z+h)-Zeta(n,z-h))./(2*h);

% Mie scattering coefficients

```

```

    a = @(n,x,m) (dPsi(n,m.*x)*Psi(n,x)-
m.*Psi(n,m.*x)*dPsi(n,x))./(dPsi(n,m.*x)*Zeta(n,x)-
m.*Psi(n,m.*x)*dZeta(n,x));
    b = @(n,x,m) (m.*dPsi(n,m.*x)*Psi(n,x)-
Psi(n,m.*x)*dPsi(n,x))./(m.*dPsi(n,m.*x)*Zeta(n,x)-Psi(n,m.*x)*dZeta(n,x));

    Qsca = 0;
    if length(x) == 1
        for j = 1:N
            Qsca = Qsca +
(2./(x.^2)).*(2*j+1).*((abs(a(j,x,m))).^2+(abs(b(j,x,m))).^2);
        end
    else
        M = length(x);
        Qsca = zeros(1,M);
        for i = 1:M
            for j = 1:N
                Qsca(i) = Qsca(i) +
(2./(x(i).^2)).*(2*j+1).*((abs(a(j,x(i),m))).^2+(abs(b(j,x(i),m))).^2);
            end
        end
    end
end
end
end

```

## 14.2.2 Файл MieQext.m

```

function Qext = MieQext(x,m,N)

    m = real(m)-imag(m)*1i;
    h = 1e-8;
    % Psi function in radiative properties
    Psi = @(n,z) (pi*z/2).^(0.5).*besselj(n+0.5,z);
    dPsi = @(n,z) (Psi(n,z+h)-Psi(n,z-h))./(2*h);

    % Zeta function in radiative properties
    Zeta = @(n,z) (pi*z./2).^(0.5).*besselh(n+0.5,z);
    dZeta = @(n,z) (Zeta(n,z+h)-Zeta(n,z-h))./(2*h);

    % Mie scattering coefficients
    a = @(n,x,m) (dPsi(n,m.*x).*Psi(n,x)-
m.*Psi(n,m.*x).*dPsi(n,x))./(dPsi(n,m.*x).*Zeta(n,x)-
m.*Psi(n,m.*x).*dZeta(n,x));
    b = @(n,x,m) (m.*dPsi(n,m.*x).*Psi(n,x)-
Psi(n,m.*x).*dPsi(n,x))./(m.*dPsi(n,m.*x).*Zeta(n,x)-
Psi(n,m.*x).*dZeta(n,x));

```

```

Qext = 0;
if length(x) == 1
    for j = 1:N
        Qext = Qext + (2./(x.^2)).*(2*j+1).*real(a(j,x,m)+b(j,x,m));
    end
else
    M = length(x);
    Qext = zeros(1,M);
    for i = 1:M
        for j = 1:N
            Qext(i) = Qext(i) +
((2./(x(i).^2)).*(2*j+1)).*real(a(j,x(i),m)+b(j,x(i),m));
        end
    end
end
end
end

```

## 14.3 Програм за рачунање комплексне величине индекса преламања

### 14.3.1 Фајл SootRefractiveIndex.m

```

%% Chang and Charalampopoulos (1990) for SOOT
% lam is the wavelength in microns
nf = @(lam) 1.811+0.1263.*log(lam)+0.027.*log(lam).^2+0.0417.*log(lam).^3
kf = @(lam) 0.5821+0.1213.*log(lam)+0.2309.*log(lam).^2+0.01*log(lam).^3
nf(0.8)
kf(0.8)
figure(7)
lambdax = 0.75:0.01:0.9;
plot(lambdax,nf(lambdax),'-ob',lambdax,kf(lambdax),'-xr')
ylim([0.3 2.2]);
xlim([0.74 0.93])
grid on;
legend('realni deo', 'imaginarni deo')
xlabel('\lambda [{}\mu{}m]')
title('Realni i imaginarni deo indeksa prelamanja za ?a?')
txt = '\leftarrow n';
text(0.906,1.81,txt,'FontSize',14)
txt = '\leftarrow k';
text(0.906,0.58,txt,'FontSize',14)

```

## 14.4 Програм за рачунање READ вредности у Монте Карло симулацији

```

clear all;
close all;
clc;
%%

```

```

L = 1; % duzina segmenta

N = 1000000; % broj emitovanih fotona;
Ns = 10; % broj segmenata

ks = 0;
kp = 0;
kss = 0;
kpp = 0;

epsilon = 1e-10;
flag_paralelno = 0;

kapa = 0.04; % koeficijent apsorpcije
sigma = 0.02; % koeficijent rasejanja

Px = 10;
Py = 10;
Pz = 10;

X = L;
Y = L;
Z = L;

% Raspodela koeficijenta apsorpcije
for i = 1:10
    K(:, :, i) = kapa*ones(10,10);
end
% Raspodela koeficijenta rasejanja
for i = 1:10
    Kr(:, :, i) = sigma*ones(10,10);
end

eepsilon = 0.8; % Emisivnost zidova
omega = sigma/(sigma+eepsilon); % Scattering albedo for furnace walls.

S = 0; % Suma svih predjenih puteva
Tau = 0; % Suma predjenih optickih puteva
Taur = 0; % Suma predjenih optickih puteva za rasejanje

k21 = 0;
k23 = 0;
k24 = 0;
k25 = 0;
k26 = 0;
k27 = 0;
k28 = 0;

%%
tic
for i = 1:N
    %fprintf("%%%%%%%%%\n");
    xc = zeros(100,1);
    yc = zeros(100,1);
    zc = zeros(100,1);

```

```

% Slučajni broj za predjeni put foftona
Rk = rand(1,1);
Rkr = rand(1,1);

flag_završena_apsorpcija = 0;
flag_kraj_kotla = 0;
flag_racun_pogresan = 0;
S = 0;
% Generisanje pocetnog položaja emisije fotona
Tau = 0; % Suma predjenih optickih puteva
Taur = 0; % Suma predjenih optickih puteva za rasejanje

Px = 5;
Py = 5;
Pz = 5;

xp = L*(Px-1+rand(1,1));
yp = L*(Py-1+rand(1,1));
zp = L*(Pz-1+rand(1,1));

kpp = 0;

xpp = xp;
ypp = yp;
zpp = zp;

ks = 1;
xc(ks) = xpp;
yc(ks) = ypp;
zc(ks) = zpp;

psi = 2*pi*rand(1,1);
theta = acos(1-2*rand(1,1));

flag_paralelno = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 0;
flag_vec_je_na_granici = 0;
%disp(0)
%fprintf("i = %d. Novi pocetak\n",i);
while flag_završena_apsorpcija ~= 1 || flag_kraj_kotla ~= 1
    %disp(1);
    if flag_paralelno == 0
        %disp(180*psi/pi)
        flag_vec_je_na_granici = 0;
        % Unutar vokselu rastojanje od tacke emisije do kraja vokselu
        sk(1) = (Px*L-xp)/(1*sin(theta)*cos(psi));
        sk(2) = (Py*L-yp)/(1*sin(theta)*sin(psi));
        sk(3) = (Pz*L-zp)/(1*cos(theta));
        sk(4) = ((Px-1)*L-xp)/(1*sin(theta)*cos(psi));
        sk(5) = ((Py-1)*L-yp)/(1*sin(theta)*sin(psi));
        sk(6) = ((Pz-1)*L-zp)/(1*cos(theta));

        sk(abs(sk)<epsilon) = 0;
        if flag_preslo_u_drugi_voksel == 0

```

```

        svec = sk(sk > 0 | sk == 0);
else
    svec = sk(sk > 0);
end

sp = min(svec);
kpp = kpp+1;
Spp(kpp) = sp;
%fprintf("Px = %d, Py = %d, Pz = %d, psi = %f, sp =
%f\n",Px,Py,Pz,psi*180/pi,sp);
S = S + sp;
%Si(ks) = S;

Tau = Tau + sp*K(Px,Py,Pz);
Taur = Taur + sp*Kr(Px,Py,Pz);

% 1. Ima absorpcije i ima rasejanja
% 2. Nema absorpcije i ima rasejanja
if (Tau) >= log(1/Rk) && Taur >= log(1/Rkr) || (Tau) < log(1/Rk) &&
Taur >= log(1/Rkr) % Završava se absorpcija i ima rasejanja u kocki
    %flag_vec_je_na_granici = 0;

    % Moze da izleti iz vokselu
    %Putanja u vokselu do novog rasejanja
    t = (1/(sp*Kr(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rkr)-Taur)+1;
    %fprintf("2. sp = %f, t = %f, psi = %f, Taur = %f, Rkr =
%f\n",sp,t,psi*180/pi,Taur,Rkr);
    %Taur = 0;
    %spr = sp;
    %Taur = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp;
    %S = S-sp+t*spr;
    %Si(ks) = S;
    % Cestica se absorbovala pre rasejanja
    if (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) > log(1/Rk)
        %disp(21)
        k21 = k21+1;
        kp = kp + 1;
        t = (1/(K(Px,Py,Pz)*sp))*(log(1/Rk)-Tau+sp*K(Px,Py,Pz));
        x(kp) = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
        y(kp) = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
        z(kp) = zp+t*sp*cos(theta);
        if (y(kp) -10*L) > 0
            fprintf("Van granica!");
            return;
        end
        S = S -sp + t*sp; % Ukupan predjeni put do kraja absorpcije
        Tau = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz);
        flag_završena_apSORpcija = 1;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        Si(ks) = S;

```



```

        break;

    else
        %disp(22)
        while (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) < log(1/Rk) %
Cestica se rasejala pre apsorpcije
        %disp(23)
        k23 = k23+1;
        % Trenutni položaj cestice u trenutku rasejanja
        xx = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
        yy = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
        zz = zp+t*sp*cos(theta);

        ks = ks+1;
        xc(ks) = xx;
        yc(ks) = yy;
        zc(ks) = zz;
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod izotropnog rasejanja
        Psir = 2*pi*Rpsi;
        Thetar = acos(1-2*Rtheta);
        %psi = Psir; %%%%%%%%%%%
        %theta = Thetar; %%%%%%%%%%%
        % Racunam rastojanje od mesta rasejanja do kraja
        % vokselu u pravcu rasejanja
        sr(1) = (Px*L-xx)/(1*sin(Thetar)*cos(Psir));
        sr(2) = (Py*L-yy)/(1*sin(Thetar)*sin(Psir));
        sr(3) = (Pz*L-zz)/(1*cos(Thetar));
        sr(4) = ((Px-1)*L-xx)/(1*sin(Thetar)*cos(Psir));
        sr(5) = ((Py-1)*L-yy)/(1*sin(Thetar)*sin(Psir));
        sr(6) = ((Pz-1)*L-zz)/(1*cos(Thetar));
        sr(abs(sr)<epsilon) = 0;
        %svec = s(s > 0 | s == 0);

        if flag_preslo_u_drugi_voksel == 0
            svec = sr(sr > 0 | sr == 0);
        else
            svec = sr(sr > 0);

        end
        %
        spr = min(svec);

        Taur =spr*Kr(Px,Py,Pz);

        %Cestica se nece rasejati pre kraja puta i završice se
        %apsorpcija
        if Taur < log(1/Rkr) && (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp)
+ spr*K(Px,Py,Pz) > log(1/Rk)
            %disp(24)
            k24 = k24+1;

```

```

        tp = t;
        flag_završena_apsorpcija = 1;
        kp = kp + 1;
        t = (1/(spr*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-(Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp));
        x(kp) = xx+t*spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
        y(kp) = yy+t*spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
        z(kp) = zz+t*spr*cos(Thetar);
        if (y(kp) -10*L) > 0
            fprintf("Van granica!");
            return;
        end
        S = S -sp+tp*sp + t*spr; % Ukupan predjeni put do kraja

apsorbicije
        Tau = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*spr*K(Px,Py,Pz);
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        Si(ks) = S;
        break;
        %Cestica se neće rasejati pre kraja puta i izleće van
        %vokselu
        elseif Taur < log(1/Rkr) && (Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) + spr*K(Px,Py,Pz) < log(1/Rk)
            %disp(25)
            k25 = k25+1;
            xp = xx+spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
            yp = yy+spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
            zp = zz+spr*cos(Thetar);
            theta = Thetar;
            psi = Psir;
            flag_vec_je_na_granici = 1;
            %Tau = Taur + spr*K(Px,Py,Pz);
            S = S-sp+t*sp+spr;
            Tau = Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz)+spr*K(Px,Py,Pz);
            ks = ks+1;
            Si(ks) = S;
            xc(ks) = xp;
            yc(ks) = yp;
            zc(ks) = zp;
            %disp(180*psi/pi)
            break;
            % Cestica se opet rasejava pre apsorpcije
        elseif Taur > log(1/Rkr) && (Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) + spr*K(Px,Py,Pz) < log(1/Rk)
            %disp(26)
            k26 = k26+1;
            tpp = log(1/Rkr)/(spr*Kr(Px,Py,Pz));
            xp = xx;
            yp = yy;
            zp = zz;
            %tt = tpp;
            S = S+(t-1)*sp+spr;

```

```

        Tau=Tau+sp*K(Px,Py,Pz)*(t-1)+spr*K(Px,Py,Pz);
        t = tpp;
        theta = Thetar;
        psi = Psir;
        sp = spr;
        %disp(180*psi/pi)
    else % Taur > log(1/Rkr) && Taur + spr*K(Px,Py,Pz) >
log(1/Rk) % Imamo rasejanje i absorpciju
        %disp(27)
        tp = log(1/Rkr)/(spr*Kr(Px,Py,Pz));
        if (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) +
tp*spr*K(Px,Py,Pz) > log(1/Rk) % Imamo absorpciju pre rasejanja
            %disp(27)
            k27 = k27+1;
            kp = kp + 1;
            tpp = t;
            flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
            t = (1/(spr*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-(Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp));
            x(kp) = xx+t*spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
            y(kp) = yy+t*spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
            z(kp) = zz+t*spr*cos(Thetar);
            if (y(kp) -10*L) > 0
                fprintf("Van granica!");
                return;
            end
            S = S-sp+tpp*sp+t*spr;
            Tau = Tau - sp*K(Px,Py,Pz)*(tpp-1)+t*spr*K(Px,Py,Pz);
            ks = ks+1;
            xc(ks) = x(kp);
            yc(ks) = y(kp);
            zc(ks) = z(kp);
            break;
        else
            %disp(28);
            k28 = k28+1;
            %tpp = log(1/Rkr)/(tp*spr*Kr(Px,Py,Pz));
            xp = xx;
            yp = yy;
            zp = zz;
            %t = tp;
            S = S+(t-1)*sp+1*spr;
            Tau=Tau+sp*K(Px,Py,Pz)*(t-1)+spr*1*K(Px,Py,Pz);
            t = tp;
            theta = Thetar;
            psi = Psir;
            sp = spr;
            %f = msgbox("Scattering before absorption!");
            %fprintf("28. Scattering before absorption!!!\n")
        end
    end
end
end
end
% Zavrsi spoljnu while petlju i program
if flag_zavrsena_apsorpcija == 1;

```

```

        break;
    end

    end

    % Ako je u kocki, zavrсило u kocki.
    if (Tau) >= log(1/Rk) && Taur <= log(1/Rkr) % Ako nema rasejanja u kocki
i ima absorpcije
        %disp(40);
        kp = kp + 1;
        t = (1/(sp*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-Tau)+1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        x(kp) = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
        y(kp) = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
        z(kp) = zp+t*sp*cos(theta);

        if (y(kp) -10*L) > 0
            fprintf("Van granica!");
            return;
        end

        S = S +(t-1)*sp; % Ukupan predjeni put do kraja apsorbcije
        Tau = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz);
        flag_zavrseana_apsorpcija = 1;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        Si(ks) = S;
        break;
    else
        % Ako nije u kocki t < 1
        %
        % Nova pocetna pozicija
        %disp(29)
        if flag_vec_je_na_granici == 0;
            %disp(41)
            xp = xp+sp*sin(theta)*cos(psi);
            yp = yp+sp*sin(theta)*sin(psi);
            zp = zp+sp*cos(theta);
        end

        % Da li foton pada na zid kotla
        if abs(zp - 10*L) < epsilon
            %disp(31)
            Romega = rand(1,1);
            if Romega > eepsilon
                %disp(36)
                %kp = kp + 1;
                %x(kp) = xp;
                %y(kp) = yp;
                %z(kp) = zp;
                ks = ks+1;
                xc(ks) = xp;
                yc(ks) = yp;
            end
        end
    end
end

```

```

zc(ks) = zp;

%disp(180*psi/pi)
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja

psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = pi;

xy_var = [cos(thetay) 0 sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [-sin(thetay) 0 cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta = acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));

Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(zp - 0) < epsilon
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;

```

```

%y(kp) = yp;
%z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = xp;
yc(ks) = yp;
zc(ks) = zp;

%disp(180*psi/pi)
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja
psi = 2*pi*Rpsi;
%theta = acos(1-2*Rtheta)/2;
theta = acos(sqrt(1-Rtheta));

%disp(180*psi/pi)
%fprintf("Py = %d, ks = %d\n",Py,ks)
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
kp = kp + 1;
x(kp) = xp;
y(kp) = yp;
z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = x(kp);
yc(ks) = y(kp);
zc(ks) = z(kp);
flag_zavrshena_apsorpcija = 1;
flag_kraj_kotla = 1;
flag_zavrshena_apsorpcija = 1;
flag_kraj_kotla = 1;
break;
end
elseif abs(xp - 10*L) < epsilon
%disp(33)
Romega = rand(1,1);
if Romega > eepsilon
%disp(36)
%kp = kp + 1;
%x(kp) = xp;
%y(kp) = yp;
%z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = xp;
yc(ks) = yp;
zc(ks) = zp;

%disp(180*psi/pi)
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice

```

```

Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja

psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);
thetay = -pi/2;
xy_var = [cos(thetay) 0 sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [-sin(thetay) 0 cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
theta = acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));

Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
kp = kp + 1;
x(kp) = xp;
y(kp) = yp;
z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = x(kp);
yc(ks) = y(kp);
zc(ks) = z(kp);
flag_završena_apsorpcija = 1;
flag_kraj_kotla = 1;
flag_završena_apsorpcija = 1;
flag_kraj_kotla = 1;
break;
end
elseif abs(xp - 0) < epsilon
%disp(34)
Romega = rand(1,1);
if Romega > eepsilon
%disp(36)
%kp = kp + 1;
%x(kp) = xp;
%y(kp) = yp;
%z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = xp;
yc(ks) = yp;
zc(ks) = zp;

%disp(180*psi/pi)
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);

```

```

% Uglovi kod difuznog rasejanja
psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = pi/2;

xy_var = [cos(thetay) 0 sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [-sin(thetay) 0 cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta = acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(yp - 10*L) < epsilon
    %disp(35)
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);

```



```

% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja
psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = pi/2;

xy_var = [1 0 0]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 cos(thetay) -sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [0 sin(thetay) cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta = acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(yp - 0) < epsilon
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eeppilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)

```

```

% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja cestice
Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja
psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = -pi/2;

xy_var = [1 0 0]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 cos(thetay) -sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [0 sin(thetay) cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta = acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
else
    %disp(37);
    %disp(180*psi/pi)
    % Ako ne pada naci naredni voksel u koji foton prelazi
    rr(1) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 x = 0 y = 0
    rr(2) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z < 0 x = 0 y = 0
    rr(3) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % x > 0 z = 0 y = 0
    rr(4) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % x < 0 z = 0 y = 0

```

```

rr(5) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % y > 0 x = 0 z = 0
rr(6) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % y < 0 x = 0 z = 0
rr(7) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 y = 0
rr(8) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 y = 0
rr(9) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && y > 0 x = 0
rr(10) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z > 0 && y < 0 x = 0
rr(11) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 y = 0
rr(12) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 y = 0
rr(13) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && y > 0 x = 0
rr(14) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && y < 0 x = 0
rr(15) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 && y < 0
rr(16) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 && y < 0
rr(17) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 && y > 0
rr(18) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 && y > 0
rr(19) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 && y < 0
rr(20) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 && y < 0
rr(21) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 && y > 0
rr(22) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 && y > 0
rr(23) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x < 0 && y < 0
rr(24) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x > 0 && y < 0
rr(25) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x > 0 && y > 0
rr(26) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x < 0 && y > 0

```

```

[r in] = min(rr);
result = find(rr==r);

```

```

if length(result) ~= 1
    pr = zeros(1,length(result));
    pp = [sin(theta)*cos(psi);sin(theta)*sin(psi);cos(theta)]; %
vektor pravca kretanja fotona
    for j = 1:length(result)
        if result(j) == 1 % Slučaj z > 0

```

```

        n = [0;0;1]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 2 % Slucaj z < 0
    n = [0;0;-1]/sqrt(1);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 3 % Slucaj x > 0
    n = [1;0;0]/sqrt(1);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 4 % Slucaj x < 0
    n = [-1;0;0]/sqrt(1);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 5 % Slucaj y > 0
    n = [0;1;0]/sqrt(1);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 6 % Slucaj y < 0
    n = [0;-1;0]/sqrt(1);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 7 % Slucaj z > 0 && x < 0
    n = [-1;0;1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 8 % Slucaj z > 0 && x > 0
    n = [1;0;1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 9 % Slucaj z > 0 && y > 0
    n = [0;1;1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 10 % Slucaj z > 0 && y < 0
    n = [0;-1;1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 11 % Slucaj z < 0 && x < 0
    n = [-1;0;-1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 12 % Slucaj z < 0 && x > 0
    n = [1;0;-1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 13 % Slucaj z < 0 && y > 0
    n = [0;1;-1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 14 % Slucaj z < 0 && y < 0
    n = [0;-1;-1]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
end

```

```

if result(j) == 15 % Slucaj z < 0 && x < 0 && y < 0
    n = [-1;-1;-1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 16 % Slucaj z < 0 && x > 0 && y < 0
    n = [1;-1;-1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 17 % Slucaj z < 0 && x > 0 && y > 0
    n = [1;1;-1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 18 % Slucaj z < 0 && x < 0 && y > 0
    n = [-1;1;-1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 19 % Slucaj z > 0 && x < 0 && y < 0
    n = [-1;-1;1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 20 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y < 0
    n = [1;-1;1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 21 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y > 0
    n = [1;1;1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 22 % Slucaj z > 0 && x < 0 && y > 0
    n = [-1;1;1]/sqrt(3);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 23 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y < 0
    n = [-1;-1;0]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 24 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y < 0
    n = [1;-1;0]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 25 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y > 0
    n = [1;1;0]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end
if result(j) == 26 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y > 0
    n = [-1;1;0]/sqrt(2);
    pr(j) = pp'*n;
end

end
[r2 in2] = max(pr);
in = result(in2);
end
if in == 1 % Slucaj z > 0
    Pz = Pz + 1;

```

```

        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 2 % Slučaj z < 0
        Pz = Pz - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 3 % Slučaj x > 0
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 4 % Slučaj x < 0
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 5 % Slučaj y > 0
        Py = Py + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 6 % Slučaj y < 0
        Py = Py - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 7 % Slučaj z > 0 && x < 0
        Pz = Pz + 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 8 % Slučaj z > 0 && x > 0
        Pz = Pz + 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 9 % Slučaj z > 0 && y > 0
        Pz = Pz + 1;
        Py = Py + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 10 % Slučaj z > 0 && y < 0
        Pz = Pz + 1;
        Py = Py - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 11 % Slučaj z < 0 && x < 0
        Pz = Pz - 1;
        Px = Px - 1;

```

```

        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 12 % Slučaj z < 0 && x > 0
        Pz = Pz - 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 13 % Slučaj z < 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 14 % Slučaj z < 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 15 % Slučaj z < 0 && x < 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 16 % Slučaj z < 0 && x > 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 17 % Slučaj z < 0 && x > 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 18 % Slučaj z < 0 && x < 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 19 % Slučaj z > 0 && x < 0 && y < 0
        Pz = Pz + 1;
        Py = Py - 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end

```

```

end
if in == 20 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y < 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py - 1;
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 21 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y > 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py + 1;
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 22 % Slucaj z > 0 && x < 0 && y > 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py + 1;
    Px = Px - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 23 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y < 0

    Py = Py - 1;
    Px = Px - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 24 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y < 0

    Py = Py - 1;
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 25 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y > 0

    Py = Py + 1;
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 26 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y > 0

    Py = Py + 1;
    Px = Px - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end

end
end

```



```

        end
    end

end
toc
%%
figure(1);
%scatter3(xs,ys,zs,'yellow','+');
%hold on;
scatter3(xpp,ypp,zpp,'filled')
hold on;
sdata = scatter3(x,y,z,'ro');
sdata.SizeData = 2;

axis([-0.1*L 10*L+0.1*L -0.1*L 10*L+0.1*L -0.1*L 10*L+0.1*L])
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
%axis square;
%%
figure(2)

plot3(xc(1:ks),yc(1:ks),zc(1:ks),'-ro');

grid on;
axis([-0.1*L 10*L+0.1*L -0.1*L 10*L+0.1*L -0.1*L 10*L+0.1*L])
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
view(0,90) % XY
%pause
%view(0,0) % XZ
%pause
%view(90,0) % YZ

%%
SS = 0;
for i = 1:ks-1
    SS = SS+sqrt((xc(i+1)-xc(i))^2+(yc(i+1)-yc(i))^2+(zc(i+1)-zc(i))^2);
end
SS

%%
Rc = zeros(N,3);
Rc(:,1) = x';
Rc(:,2) = y';
Rc(:,3) = z';
%%
Count = 0;
Position = [4 5 4 5 4 5];
for i = 1:N

```

```

    if Rc(i,1) >= Position(1) && Rc(i,1) <= Position(2) && Rc(i,2) >= Position(3) &&
Rc(i,2) <= Position(4) && Rc(i,3) >= Position(5) && Rc(i,3) <= Position(6)
        Count = Count +1;
    end
end
READ454545 = Count/N
%%
% Calculating READ values for voxels
ReadV = zeros(10,10,10);
% Calculating READ values for wall segments
ReadX0 = zeros(10,10);
ReadX10 = zeros(10,10);
ReadY0 = zeros(10,10);
ReadY10 = zeros(10,10);
ReadZ0 = zeros(10,10);
ReadZ10 = zeros(10,10);
for k = 0:9
    for j = 0:9
        for i = 0:9
            Count = 0;
            Position = [i i+1 j j+1 k k+1];
            for ii = 1:N
                if Position(1) == 0 && Rc(ii,1) < epsilon && Rc(ii,2) >= Position(3)
&& Rc(ii,2) <= Position(4) && Rc(ii,3) >= Position(5) && Rc(ii,3) <= Position(6)
                    ReadX0(j+1,k+1) = ReadX0(j+1,k+1)+1;
                elseif Rc(ii,1) >= Position(1) && Rc(ii,1) <= Position(2) &&
Position(3) == 0 && Rc(ii,2) < epsilon && Rc(ii,3) >= Position(5) && Rc(ii,3) <=
Position(6)
                    ReadY0(i+1,k+1) = ReadY0(i+1,k+1) + 1;
                elseif Rc(ii,1) >= Position(1) && Rc(ii,1) <= Position(2) &&
Position(4) == 10 && Rc(ii,2) > 10- epsilon && Rc(ii,3) >= Position(5) && Rc(ii,3) <=
Position(6)
                    ReadY10(i+1,k+1) = ReadY10(i+1,k+1) + 1;
                elseif Position(2) == 10 && Rc(ii,1) > 10-epsilon && Rc(ii,2) >=
Position(3) && Rc(ii,2) <= Position(4) && Rc(ii,3) >= Position(5) && Rc(ii,3) <=
Position(6)
                    ReadX10(j+1,k+1) = ReadX10(j+1,k+1)+1;
                elseif Rc(ii,1) >= Position(1) && Rc(ii,1) <= Position(2) && Rc(ii,2)
>= Position(3) && Rc(ii,2) <= Position(4) && Position(5) == 0 && Rc(ii,3) < epsilon
                    ReadZ0(i+1,j+1) = ReadZ0(i+1,j+1)+1;
                elseif Rc(ii,1) >= Position(1) && Rc(ii,1) <= Position(2) && Rc(ii,2)
>= Position(3) && Rc(ii,2) <= Position(4) && Position(6) == 10 && Rc(ii,3) > 10 -
epsilon
                    ReadZ10(i+1,j+1) = ReadZ10(i+1,j+1)+1;
                elseif Rc(ii,1) >= Position(1) && Rc(ii,1) <= Position(2) && Rc(ii,2)
>= Position(3) && Rc(ii,2) <= Position(4) && Rc(ii,3) >= Position(5) && Rc(ii,3) <=
Position(6)
                    Count = Count +1;
            end
        end
    end
    ReadV(i+1,j+1,k+1) = Count;
end
end

```

```

end
% Test
TotalPercentage =
sum(ReadX0, 'all')/N*100+sum(ReadX10, 'all')/N*100+sum(ReadY0, 'all')*100/N+sum(ReadV, 'a
ll')*100/N+sum(ReadY10, 'all')*100/N+sum(ReadZ0, 'all')/N*100+sum(ReadZ10, 'all')/N*100
%%
clc
Read = zeros(12,12,12);
Read(2:11,2:11,2:11) = ReadV(:,:,:);
Read(2:11,2:11,1) = ReadZ0(:,:,:);
Read(2:11,2:11,12) = ReadZ10(:,:,:);
Read(1,2:11,2:11) = ReadX0(:,:,:);
Read(12,2:11,2:11) = ReadX10(:,:,:);
Read(2:11,1,2:11) = ReadY0(:,:,:);
Read(2:11,12,2:11) = ReadY10(:,:,:);

ReadValue = zeros(12,12,12);

ReadValue = Read/(N-Read(5,5,5));
ReadValue(5,5,5) = Read(5,5,5)/N;

% Test
TotalCountOfPhotons=sum(Read, 'all')
%%

Read1level =Read(:,:,1);
writematrix(Read1level, 'Read1level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue1level =ReadValue(:,:,1);
writematrix(ReadValue1level, 'ReadValue1level.xlsx', 'Sheet',1);

Read2level =Read(:,:,2);
writematrix(Read2level, 'Read2level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue2level =ReadValue(:,:,2);
writematrix(ReadValue2level, 'ReadValue2level.xlsx', 'Sheet',1);

Read3level =Read(:,:,3);
writematrix(Read3level, 'Read3level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue3level =ReadValue(:,:,3);
writematrix(ReadValue3level, 'ReadValue3level.xlsx', 'Sheet',1);

Read4level =Read(:,:,4);
writematrix(Read4level, 'Read4level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue4level =ReadValue(:,:,4);
writematrix(ReadValue4level, 'ReadValue4level.xlsx', 'Sheet',1);

Read5level =Read(:,:,5);
writematrix(Read5level, 'Read5level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue5level =ReadValue(:,:,5);
writematrix(ReadValue5level, 'ReadValue5level.xlsx', 'Sheet',1);

Read6level =Read(:,:,6);
writematrix(Read6level, 'Read6level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue6level =ReadValue(:,:,6);
writematrix(ReadValue6level, 'ReadValue6level.xlsx', 'Sheet',1);

```

```

Read7level =Read(:, :,7);
writematrix(Read7level, 'Read7level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue7level =ReadValue(:, :,7);
writematrix(ReadValue7level, 'ReadValue7level.xlsx', 'Sheet',1);

Read8level =Read(:, :,8);
writematrix(Read8level, 'Read8level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue8level =ReadValue(:, :,8);
writematrix(ReadValue8level, 'ReadValue8level.xlsx', 'Sheet',1);

Read9level =Read(:, :,9);
writematrix(Read9level, 'Read9level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue9level =ReadValue(:, :,9);
writematrix(ReadValue9level, 'ReadValue9level.xlsx', 'Sheet',1);

Read10level =Read(:, :,10);
writematrix(Read10level, 'Read10level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue10level =ReadValue(:, :,10);
writematrix(ReadValue10level, 'ReadValue10level.xlsx', 'Sheet',1);

Read11level =Read(:, :,11);
writematrix(Read11level, 'Read11level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue11level =ReadValue(:, :,11);
writematrix(ReadValue11level, 'ReadValue11level.xlsx', 'Sheet',1);

Read12level =Read(:, :,12);
writematrix(Read12level, 'Read12level.xlsx', 'Sheet',1);
ReadValue12level =ReadValue(:, :,12);
writematrix(ReadValue12level, 'ReadValue12level.xlsx', 'Sheet',1);

figure(3)
bar3(Read11level)
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
saveas(gcf, 'Read11level.png')

figure(4)
bar3(Read2level)
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
saveas(gcf, 'Read2level.png')

figure(5)
bar3(Read3level)
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
saveas(gcf, 'Read3level.png')

figure(6)
bar3(Read4level)
xlabel('x');

```

```
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read4level.png')
```

```
figure(7)  
bar3(Read5level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read5level.png')
```

```
figure(8)  
bar3(Read6level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read6level.png')
```

```
figure(9)  
bar3(Read7level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read7level.png')
```

```
figure(10)  
bar3(Read8level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read8level.png')
```

```
figure(11)  
bar3(Read9level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read9level.png')
```

```
figure(12)  
bar3(Read10level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read10level.png')
```

```
figure(13)  
bar3(Read11level)  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');  
saveas(gcf, 'Read11level.png')
```

```
figure(14)  
bar3(Read12level)
```

```

xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
saveas(gcf, 'Read12level.png')

```

## 14.5 Програм за ВМС симулацију

```

clear all;
close all;
clc;
%%
    L = 0.4; % duzina segmenta

    N = 1200; % broj emitovanih fotona u pravcu;

    Na = 12;
    Nb = 12;
    M = Na*Nb; % broj pravaca u prostoru

    Ns = 10; % broj segmenata

    ks = 0;
    kp = 0;
    kss = 0;
    kpp = 0;

    epsilon = 1e-12;
    flag_paralelno = 0;

    kapa = 0.1; % koeficijent apsorpcije
    sigma = 0.02; % koeficijent rasejanja

    Px = 10;
    Py = 10;
    Pz = 2;

    X = L;
    Y = L;
    Z = L;

    % Raspodela koeficijenta apsorpcije
    for i = 1:10
        K(:, :, i) = kapa*ones(10,10);
    end
    % Raspodela koeficijenta rasejanja
    for i = 1:10
        Kr(:, :, i) = sigma*ones(10,10);
    end
    %%
    % Raspodela temperatura po segmentima #####
    R = 3;

```

```

Z = 3;
f = @(x,y,z) 900*exp(-
(3*((x.^2+y.^2+z.^2).^0.5))./R.^2+(z.^2)./(Z.^2))).^2)+1500;
xxx = L:L:10*L;
yyy = L:L:10*L;
[Xx,Yy] = meshgrid(xxx,yyy);
XX = Xx-7.5*L;
YY = (Yy-3.5*L);

for i = 1:10
    T(:, :, i) = flip(rot90(f(XX,YY,i*L*ones(10,10)),-1),2);
end
xxx = 1:1:10;
yyy = 1:1:10;
[Xx,Yy] = meshgrid(xxx,yyy);
figure(3);
%surf(Xx,Yy,T(:, :, 1))
contourf(Xx, (Yy), flip(rot90(T(:, :, 2))), 10, 'ShowText', 'off')
colorbar
colormap(jet(100))
%clim([1500 2000])
%{
for i = 1:10
    T(:, :, i) = 1600*ones(10,10);
end
%}
%%
eepsilon = 0.8; % Emisivnost zidova
omega = sigma/(sigma+eepsilon); % Scattering albedo for furnace walls.

S = 0; % Suma svih predjenih puteva
Tau = 0; % Suma predjenih optickih puteva
Taur = 0; % Suma predjenih optickih puteva za rasejanje

k21 = 0;
k23 = 0;
k24 = 0;
k25 = 0;
k26 = 0;
k27 = 0;
k28 = 0;

%%
lambda = 800*10^(-9);
Ilam = zeros(M,N);
% Konstante, promenljive i Planck-ove konstante
C1 = 1.19191 * 10^(-16); % [W*m2*sr-1]
C2 = 0.014388; % [K*m]
Thetavec = zeros(M,1);
r2vec = zeros(M,1);
Xii = zeros(N,1);
Yii = zeros(N,1);
Zii = zeros(N,1);
k = 1;
a = 0.04;

```

```

b = 0.04;
c = 0.03;
for j = 1:Nb
    for i = 1:Na
        Xii(k) = -a/2+a/(2*Na)+(i-1)*a/Na;
        Yii(k) = b/2-b/(2*Nb)-(j-1)*b/Nb;
        Zii(k) = c;
        k = k+1;
    end
end

% Srednje vrednosti predjenih puteva po vokselima
for i = 1:10
    lsr(:, :, i) = zeros(10,10);
end

tic;
for jj = 1:M

    Xi = Xii(jj);
    Yi = Yii(jj);
    Zi = Zii(jj);

    %psi = 2*pi/2;
    %theta = pi/2%;
    for i = 1:N
        %
        #####

        thetarr = -pi/2;
        Ry = [cos(thetarr) 0 sin(thetarr);0 1 0;-sin(thetarr) 0
cos(thetarr)];
        thetarr = -1*pi/4;
        Rz = [cos(thetarr) -sin(thetarr) 0;sin(thetarr) cos(thetarr) 0;0
0 1];

        Xinn = Ry(1, :)*[Xi Yi Zi]';
        Yinn = Ry(2, :)*[Xi Yi Zi]';
        Zinn = Ry(3, :)*[Xi Yi Zi]';

        Xin = Rz(1, :)*[Xinn Yinn Zinn]';
        Yin = Rz(2, :)*[Xinn Yinn Zinn]';
        Zin = Rz(3, :)*[Xinn Yinn Zinn]';

        psi = pi+atan((Yin/Xin));
        theta = pi/2-atan(Zin/sqrt(Xin^2+Yin^2));

        Thetavec(jj) = pi/2-theta;
        r2vec(jj) = Xin^2+Yin^2+Zin^2;
    end
end

```



```

%fprintf("%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%\n");
xc = zeros(100,1);
yc = zeros(100,1);
zc = zeros(100,1);
% Slucajni broj za predjeni put foftona
Rk = rand(1,1);
Rkr = rand(1,1);

flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
flag_kraj_kotla = 0;
flag_racun_pogresan = 0;
S = 0;
% Generisanje pocetnog polozaia emisije fotona
Tau = 0; % Suma predjenih optickih puteva
Taur = 0; % Suma predjenih optickih puteva za rasejanje

Px = 10;
Py = 1;
Pz = 2;

%xp = L*(Px-1+rand(1,1));
%yp = L*(Py-1+rand(1,1));
%zp = L*(Pz-1+rand(1,1));

xp = L*(Px-1+0.999);
yp = L*(Py-1+0.001);
zp = L*(Pz-1+0.999);

kpp = 0;

xpp = xp;
ypp = yp;
zpp = zp;

ks = 1;
xc(ks) = xpp;
yc(ks) = ypp;
zc(ks) = zpp;
% Generisanje ugla emisije

%psi = 2*pi*(rand(1,1)/3+1/3);
%theta = acos(1-2*(rand(1,1)*0.50+0.25)); % od pi/3 do 2*pi/3
%theta = acos(1-2*(rand(1,1)*(0.5*(1-cos(pi-pi/6))-(1-
cos(pi/6)))+(0.5*(1-cos(pi/6)))));
%psi = 3*pi/2;
%theta = pi/2%;

%psi = 2*pi*rand(1,1);
%theta = acos(1-2*rand(1,1));

% Kreiranje vidnog polja sa kruznim po. presekom

```

```

% #####
%{
fi = pi/3;

Rr = 1;
rr = Rr*sin(fi);
Zi = 0;
Zi = Zi + Rr*cos(fi);
rhor = rr*rand(1,1)^(0.5);
psir = 2*pi*rand(1,1);
Xi = rhor*cos(psir);
Yi = rhor*sin(psir);
%
#####
%}

flag_paralelno = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 0;
flag_vec_je_na_granici = 0;
%disp(0)
fprintf("i = %d. Novi pocetak\n",i);
while flag_zavrшена_apsorpcija ~= 1 || flag_kraj_kotla ~= 1
    %disp(1);
    if flag_paralelno == 0
        %disp(180*psi/pi)
        flag_vec_je_na_granici = 0;
        % Unutar voksela rastojanje od tacke emisije do kraja
vokselo

        sk(1) = (Px*L-xp)/(1*sin(theta)*cos(psi));
        sk(2) = (Py*L-yp)/(1*sin(theta)*sin(psi));
        sk(3) = (Pz*L-zp)/(1*cos(theta));
        sk(4) = ((Px-1)*L-xp)/(1*sin(theta)*cos(psi));
        sk(5) = ((Py-1)*L-yp)/(1*sin(theta)*sin(psi));
        sk(6) = ((Pz-1)*L-zp)/(1*cos(theta));

        sk(abs(sk)<epsilon) = 0;
        if flag_preslo_u_drugi_voksel == 0
            svec = sk(sk > 0 | sk == 0);
        else
            svec = sk(sk > 0);
        end

        sp = min(svec);
        kpp = kpp+1;
        Spp(kpp) = sp;
        %fprintf("Px = %d, Py = %d, Pz = %d, psi = %f, sp =
%f\n",Px,Py,Pz,psi*180/pi,sp);
        S = S + sp;
        %Si(ks) = S;
        lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz) + sp;
        Tau = Tau + sp*K(Px,Py,Pz);
        Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) + sp*K(Px,Py,Pz)*C1*exp(-
C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5;
        Taur = Taur + sp*Kr(Px,Py,Pz);

```

```

% 1. Ima absorpcije i ima rasejanja
% 2. Nema absorpcije i ima rasejanja
if (Tau) >= log(1/Rk) && Taur >= log(1/Rkr) || (Tau) <
log(1/Rk) && Taur >= log(1/Rkr) % Završava se absorpcija i ima rasejanja u
kocki

    %flag_vec_je_na_granici = 0;

    % Može da izleti iz vokselu
    % Putanja u vokselu do novog rasejanja
    t = (1/(sp*Kr(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rkr)-Taur)+1;
    %fprintf("2. sp = %f, t = %f, psi = %f, Taur = %f, Rkr
= %f\n", sp, t, psi*180/pi, Taur, Rkr);
    %Taur = 0;
    %spr = sp;
    %Taur = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp;
    %S = S-sp+t*spr;
    %Si(ks) = S;
    % Cestica se absorbovala pre rasejanja
    if (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) > log(1/Rk)
        %disp(21)
        k21 = k21+1;
        kp = kp + 1;
        t = (1/(K(Px,Py,Pz)*sp))*(log(1/Rk)-
Tau+sp*K(Px,Py,Pz));
        x(kp) = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
        y(kp) = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
        z(kp) = zp+t*sp*cos(theta);
        if (y(kp) -10*L) > 0
            %fprintf("Van granica!");
            return;
        end
        S = S -sp + t*sp; % Ukupan predjeni put do kraja
apsorbicije

        lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz) - sp + t*sp;
        Tau = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz);
        Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) +(-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz))*C1*exp(-C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5;
        flag_završena_apsorbicija = 1;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        Si(ks) = S;
        break;

    else
        %disp(22)
        while (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) <
log(1/Rk) % Cestica se rasejala pre absorpcije
            %disp(23)
            k23 = k23+1;
            % Trenutni položaj cestice u trenutku
rasejanja

```

```

xx = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
yy = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
zz = zp+t*sp*cos(theta);

ks = ks+1;
xc(ks) = xx;
yc(ks) = yy;
zc(ks) = zz;
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod izotropnog rasejanja
Psir = 2*pi*Rpsi;
Thetar = acos(1-2*Rtheta);
%psi = Psir; %%%%%%%%%%%
%theta = Thetar; %%%%%%%%%%%
% Racunam rastojanje od mesta rasejanja do

kraja

% vokselu u pravcu rasejanja
sr(1) = (Px*L-xx)/(1*sin(Thetar)*cos(Psir));
sr(2) = (Py*L-yy)/(1*sin(Thetar)*sin(Psir));
sr(3) = (Pz*L-zz)/(1*cos(Thetar));
sr(4) = ((Px-1)*L-
xx)/(1*sin(Thetar)*cos(Psir));
sr(5) = ((Py-1)*L-
yy)/(1*sin(Thetar)*sin(Psir));
sr(6) = ((Pz-1)*L-zz)/(1*cos(Thetar));
sr(abs(sr)<epsilon) = 0;
%svect = s(s > 0 | s == 0);

if flag_preslo_u_drugi_voksel == 0
    svec = sr(sr > 0 | sr == 0);
else
    svec = sr(sr > 0);

end
%
spr = min(svec);

Taur =spr*Kr(Px,Py,Pz);

%Cestica se nece rasejati pre kraja puta i

zavrsice se

%apsorpcija
if Taur < log(1/Rkr) && (Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) + spr*K(Px,Py,Pz) > log(1/Rk)
    %disp(24)
    k24 = k24+1;
    tp = t;
    flag_zavrsena_apsorpcija = 1;
    kp = kp + 1;
    t = (1/(spr*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-
(Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp));

```

```

x(kp) = xx+t*spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
y(kp) = yy+t*spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
z(kp) = zz+t*spr*cos(Thetar);
if (y(kp) -10*L) > 0
    %fprintf("Van granica!");
    return;
end
S = S -sp+tp*sp + t*spr; % Ukupan

predjeni put do kraja apsorbicije
+ t*spr;
lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz) - sp + t*spr
Tau = Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*spr*K(Px,Py,Pz);
sp*K(Px,Py,Pz)+t*spr*K(Px,Py,Pz) *C1*exp(-C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5;
Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) +(-
ks = ks+1;
xc(ks) = x(kp);
yc(ks) = y(kp);
zc(ks) = z(kp);
Si(ks) = S;
break;
%Cestica se nece rasejati pre kraja puta i

izlece van
%voksela
elseif Taur < log(1/Rkr) && (Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) + spr*K(Px,Py,Pz) < log(1/Rk)
    %disp(25)
    k25 = k25+1;
    xp = xx+spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
    yp = yy+spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
    zp = zz+spr*cos(Thetar);
    theta = Thetar;
    psi = Psir;
    flag_vec_je_na_granici = 1;
    %Tau = Taua + spr*K(Px,Py,Pz);
    S = S-sp+t*sp+spr;
    lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz) - sp + t*sp
+ spr;
    Tau = Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz)+spr*K(Px,Py,Pz);
    Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) +(-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz)+spr*K(Px,Py,Pz) *C1*exp(-
C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5 ;
    ks = ks+1;
    Si(ks) = S;
    xc(ks) = xp;
    yc(ks) = yp;
    zc(ks) = zp;
    %disp(180*psi/pi)
    break;
% Cestica se opet rasejava pre apsorbicije
elseif Taur > log(1/Rkr) && (Tau-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp) + spr*K(Px,Py,Pz) < log(1/Rk)
    %disp(26)
    k26 = k26+1;
    tpp = log(1/Rkr) / (spr*Kr(Px,Py,Pz));
    xp = xx;

```

```

                                yp = yy;
                                zp = zz;
                                %tt = tpp;
                                S = S+(t-1)*sp+spr;
                                lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz) +(t-
1)*sp+spr;
                                Tau=Tau+sp*K(Px,Py,Pz)*(t-
1)+spr*K(Px,Py,Pz);
                                Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i)
+ (sp*K(Px,Py,Pz)*(t-1)+spr*K(Px,Py,Pz))*C1*exp(-
C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5 ;
                                t = tpp;
                                theta = Thetar;
                                psi = Psir;
                                sp = spr;
                                %disp(180*psi/pi)
                                else % Taur > log(1/Rkr) && Taua +
spr*K(Px,Py,Pz) > log(1/Rk) % Imamo rasejanje i absorpciju
                                %disp(27)
                                tp = log(1/Rkr)/(spr*Kr(Px,Py,Pz));
                                if (Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp)
+ tp*spr*K(Px,Py,Pz) > log(1/Rk) % Imamo absorpciju pre rasejanja
                                %disp(27)
                                k27 = k27+1;
                                kp = kp + 1;
                                tpp = t;
                                flag_završena_apsorpcija = 1;
                                t = (1/(spr*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-
(Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*K(Px,Py,Pz)*sp));
                                x(kp) =
xx+t*spr*sin(Thetar)*cos(Psir);
                                y(kp) =
yy+t*spr*sin(Thetar)*sin(Psir);
                                z(kp) = zz+t*spr*cos(Thetar);
                                if (y(kp) -10*L) > 0
                                    %fprintf("Van granica!");
                                    return;
                                end
                                S = S-sp+tpp*sp+t*spr;
                                lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz)-
sp+tpp*sp+t*spr;
                                Tau = Tau - sp*K(Px,Py,Pz)*(tpp-
1)+t*spr*K(Px,Py,Pz);
                                Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) +(-
sp*K(Px,Py,Pz)*(tpp-1)+t*spr*K(Px,Py,Pz))*C1*exp(-
C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5 ;
                                ks = ks+1;
                                xc(ks) = x(kp);
                                yc(ks) = y(kp);
                                zc(ks) = z(kp);
                                break;
                                else
                                    %disp(28);
                                    k28 = k28+1;
                                    %tpp =
log(1/Rkr)/(tp*spr*Kr(Px,Py,Pz));
                                    xp = xx;

```

```

                                yp = yy;
                                zp = zz;
                                %t = tp;
                                S = S+(t-1)*sp+1*spr;
                                lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz)+(t-
1)*sp+1*spr;
                                Tau=Tau+sp*K(Px,Py,Pz)*(t-
1)+spr*1*K(Px,Py,Pz);
                                Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i)
+ (sp*K(Px,Py,Pz)*(t-1)+spr*1*K(Px,Py,Pz))*C1*exp(-
C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5 ;
                                t = tp;
                                theta = Thetar;
                                psi = Psir;
                                sp = spr;
                                %f = msgbox("Scattering before
absorption!");
                                %fprintf("28. Scattering before
absorption!!!\n")
                                end
                                end
                                end
                                % Zavrshi spoljnu while petlju i program
                                if flag_zavrshena_apsorpcija == 1;
                                    break;
                                end
                                end
                                % Ako je u kocki, zavrshilo u kocki.
                                if (Tau) >= log(1/Rk) && Taur <= log(1/Rkr) % Ako nema
rasejanja u kocki i ima absorpcije
                                    %disp(40);
                                    kp = kp + 1;
                                    t = (1/(sp*K(Px,Py,Pz)))*(log(1/Rk)-Tau)+1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                                    x(kp) = xp+t*sp*sin(theta)*cos(psi);
                                    y(kp) = yp+t*sp*sin(theta)*sin(psi);
                                    z(kp) = zp+t*sp*cos(theta);

                                    if (y(kp) -10*L) > 0
                                        %fprintf("Van granica!");
                                        return;
                                    end

                                S = S +(t-1)*sp; % Ukupan predjeni put do kraja
apsorbicije
                                lsr(Px,Py,Pz) = lsr(Px,Py,Pz)+(t-1)*sp;
                                Tau = Tau-sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz);
                                Ilam(jj,i) = Ilam(jj,i) +(-
sp*K(Px,Py,Pz)+t*sp*K(Px,Py,Pz))*C1*exp(-C2/(lambda*T(Px,Py,Pz)))/lambda^5;
                                flag_zavrshena_apsorpcija = 1;
                                ks = ks+1;
                                xc(ks) = x(kp);
                                yc(ks) = y(kp);
                                zc(ks) = z(kp);

```

```

Si(ks) = S;
break;
else
% Ako nije u kocki t < 1
%
% Nova pocetna pozicija
%disp(29)
if flag_vec_je_na_granici == 0;
%disp(41)
xp = xp+sp*sin(theta)*cos(psi);
yp = yp+sp*sin(theta)*sin(psi);
zp = zp+sp*cos(theta);
end

% Da li foton pada na zid kotla
if abs(zp - 10*L) < epsilon
%disp(31)
Romega = rand(1,1);
if Romega > eepsilon
%disp(36)
%kp = kp + 1;
%x(kp) = xp;
%y(kp) = yp;
%z(kp) = zp;
ks = ks+1;
xc(ks) = xp;
yc(ks) = yp;
zc(ks) = zp;

%disp(180*psi/pi)
% Generisem novi slucajni broj za rasejanje
Rkr = rand(1,1);
% Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

Rpsi = rand(1,1);
Rtheta = rand(1,1);
% Uglovi kod difuznog rasejanja

psi_var = pi*Rpsi*2;
theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = pi;

xy_var = [cos(thetay) 0
sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [-sin(thetay) 0
cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

```



```

        if xy_var > 0
            psi = atan(yy_var/xy_var);
        else
            psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
        end

        theta =
acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));

        Taur = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

    else
        kp = kp + 1;
        x(kp) = xp;
        y(kp) = yp;
        z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        flag_završena_apsorpcija = 1;
        flag_kraj_kotla = 1;
        flag_završena_apsorpcija = 1;
        flag_kraj_kotla = 1;
        break;
    end
elseif abs(zp - 0) < epsilon
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod difuznog rasejanja
        psi = 2*pi*Rpsi;
        %theta = acos(1-2*Rtheta)/2;
        theta = acos(sqrt(1-Rtheta));

        %disp(180*psi/pi)
        %fprintf("Py = %d, ks = %d\n",Py,ks)
        Taur = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

```

```

else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(xp - 10*L) < epsilon
    %disp(33)
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod difuznog rasejanja

        psi_var = pi*Rpsi*2;
        theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

        x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
        y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
        z_var = cos(theta_var);
        thetay = -pi/2;
        xy_var = [cos(thetay) 0
sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
        yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
        zy_var = [-sin(thetay) 0
cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

        psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
        theta =
acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));

```

```

Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(xp - 0) < epsilon
    %disp(34)
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod difuznog rasejanja
        psi_var = pi*Rpsi*2;
        theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

        x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
        y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
        z_var = cos(theta_var);

        thetay = pi/2;

        xy_var = [cos(thetay) 0
sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
        yy_var = [0 1 0]*[x_var;y_var;z_var];
        zy_var = [-sin(thetay) 0
cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

        if xy_var > 0

```

```

        psi = atan(yy_var/xy_var);
    else
        psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
    end

    theta =
acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
    Taur = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

    else
        kp = kp + 1;
        x(kp) = xp;
        y(kp) = yp;
        z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = x(kp);
        yc(ks) = y(kp);
        zc(ks) = z(kp);
        flag_završena_apsorpcija = 1;
        flag_kraj_kotla = 1;
        flag_završena_apsorpcija = 1;
        flag_kraj_kotla = 1;
        break;
    end
elseif abs(yp - 10*L) < epsilon
    %disp(35)
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slucajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod difuznog rasejanja
        psi_var = pi*Rpsi*2;
        theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

        x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
        y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
        z_var = cos(theta_var);

        thetay = pi/2;

```

```

xy_var = [1 0 0]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 cos(thetay) -
sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [0 sin(thetay)
cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta =
acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_završena_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
elseif abs(yp - 0) < epsilon
    Romega = rand(1,1);
    if Romega > eepsilon
        %disp(36)
        %kp = kp + 1;
        %x(kp) = xp;
        %y(kp) = yp;
        %z(kp) = zp;
        ks = ks+1;
        xc(ks) = xp;
        yc(ks) = yp;
        zc(ks) = zp;

        %disp(180*psi/pi)
        % Generisem novi slučajni broj za rasejanje
        Rkr = rand(1,1);
        % Odredjujem novi pravac i smer kretanja

cestice

        Rpsi = rand(1,1);
        Rtheta = rand(1,1);
        % Uglovi kod difuznog rasejanja
        psi_var = pi*Rpsi*2;
        theta_var = acos(sqrt(1-Rtheta));

```

```

x_var = 1*sin(theta_var)*cos(psi_var);
y_var = 1*sin(theta_var)*sin(psi_var);
z_var = cos(theta_var);

thetay = -pi/2;

xy_var = [1 0 0]*[x_var;y_var;z_var];
yy_var = [0 cos(thetay) -
sin(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];
zy_var = [0 sin(thetay)
cos(thetay)]*[x_var;y_var;z_var];

if xy_var > 0
    psi = atan(yy_var/xy_var);
else
    psi = atan(yy_var/xy_var)+pi;
end

theta =
acos(zy_var/sqrt(xy_var^2+yy_var^2+zy_var^2));
Taur = 0;
flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;

else
    kp = kp + 1;
    x(kp) = xp;
    y(kp) = yp;
    z(kp) = zp;
    ks = ks+1;
    xc(ks) = x(kp);
    yc(ks) = y(kp);
    zc(ks) = z(kp);
    flag_zavrseana_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    flag_zavrseana_apsorpcija = 1;
    flag_kraj_kotla = 1;
    break;
end
else
    %disp(37);
    %disp(180*psi/pi)
    % Ako ne pada naci naredni voksel u koji foton
    prelazi
    rr(1) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 x = 0 y = 0
    rr(2) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z < 0 x = 0 y = 0
    rr(3) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % x > 0 z = 0 y = 0
    rr(4) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % x < 0 z = 0 y = 0
    rr(5) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % y > 0 x = 0 z = 0
    rr(6) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % y < 0 x = 0 z = 0

```

```

xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); rr(7) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 y = 0
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); rr(8) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 y = 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(9) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z > 0 && y > 0 x = 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(10) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && y < 0 x = 0
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); rr(11) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 y = 0
xp).^2+((Py-0.5)*L-yp).^2); rr(12) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 y = 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(13) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && y > 0 x = 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(14) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && y < 0 x = 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(15) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 && y < 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(16) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 && y < 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(17) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x > 0 && y > 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(18) = sqrt(((Pz-1.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z < 0 && x < 0 && y > 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(19) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 && y < 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(20) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 && y < 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(21) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x > 0 && y > 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(22) = sqrt(((Pz+0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z > 0 && x < 0 && y > 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(23) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x < 0 && y < 0
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); rr(24) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py-1.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x > 0 && y < 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(25) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px+0.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x > 0 && y > 0
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); rr(26) = sqrt(((Pz-0.5)*L-zp).^2+((Px-1.5)*L-
xp).^2+((Py+0.5)*L-yp).^2); % z = 0 && x < 0 && y > 0

```

```

[r in] = min(rr);
result = find(rr==r);

```

```

if length(result) ~= 1
    pr = zeros(1,length(result));
    pp =

```

```

[sin(theta)*cos(psi);sin(theta)*sin(psi);cos(theta)]; % vektor pravca
kretanja fotona

```

```

for j = 1:length(result)
    if result(j) == 1 % Slucaj z > 0
        n = [0;0;1]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 2 % Slucaj z < 0

```

```

        n = [0;0;-1]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 3 % Slucaj x > 0
        n = [1;0;0]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 4 % Slucaj x < 0
        n = [-1;0;0]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 5 % Slucaj y > 0
        n = [0;1;0]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 6 % Slucaj y < 0
        n = [0;-1;0]/sqrt(1);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 7 % Slucaj z > 0 && x < 0
        n = [-1;0;1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 8 % Slucaj z > 0 && x > 0
        n = [1;0;1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 9 % Slucaj z > 0 && y > 0
        n = [0;1;1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 10 % Slucaj z > 0 && y <
0
        n = [0;-1;1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 11 % Slucaj z < 0 && x <
0
        n = [-1;0;-1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 12 % Slucaj z < 0 && x >
0
        n = [1;0;-1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 13 % Slucaj z < 0 && y >
0
        n = [0;1;-1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
    if result(j) == 14 % Slucaj z < 0 && y <
0
        n = [0;-1;-1]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
end

```



```

0 && y < 0
    if result(j) == 15 % Slucaj z < 0 && x <
        n = [-1;-1;-1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y < 0
    if result(j) == 16 % Slucaj z < 0 && x >
        n = [1;-1;-1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 17 % Slucaj z < 0 && x >
        n = [1;1;-1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 18 % Slucaj z < 0 && x <
        n = [-1;1;-1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y < 0
    if result(j) == 19 % Slucaj z > 0 && x <
        n = [-1;-1;1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y < 0
    if result(j) == 20 % Slucaj z > 0 && x >
        n = [1;-1;1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 21 % Slucaj z > 0 && x >
        n = [1;1;1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 22 % Slucaj z > 0 && x <
        n = [-1;1;1]/sqrt(3);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y < 0
    if result(j) == 23 % Slucaj z = 0 && x <
        n = [-1;-1;0]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y < 0
    if result(j) == 24 % Slucaj z = 0 && x >
        n = [1;-1;0]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 25 % Slucaj z = 0 && x >
        n = [1;1;0]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end
0 && y > 0
    if result(j) == 26 % Slucaj z = 0 && x <

```

```

        n = [-1;1;0]/sqrt(2);
        pr(j) = pp'*n;
    end

    end

    [r2 in2] = max(pr);
    in = result(in2);
end
if in == 1 % Slucaj z > 0
    Pz = Pz + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 2 % Slucaj z < 0
    Pz = Pz - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 3 % Slucaj x > 0
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 4 % Slucaj x < 0
    Px = Px - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 5 % Slucaj y > 0
    Py = Py + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 6 % Slucaj y < 0
    Py = Py - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 7 % Slucaj z > 0 && x < 0
    Pz = Pz + 1;
    Px = Px - 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 8 % Slucaj z > 0 && x > 0
    Pz = Pz + 1;
    Px = Px + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 9 % Slucaj z > 0 && y > 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py + 1;
    flag_završena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 10 % Slucaj z > 0 && y < 0

```

```

        Pz = Pz + 1;
        Py = Py - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 11 % Slučaj z < 0 && x < 0
        Pz = Pz - 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 12 % Slučaj z < 0 && x > 0
        Pz = Pz - 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 13 % Slučaj z < 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 14 % Slučaj z < 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 15 % Slučaj z < 0 && x < 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 16 % Slučaj z < 0 && x > 0 && y < 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py - 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 17 % Slučaj z < 0 && x > 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        Px = Px + 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
    if in == 18 % Slučaj z < 0 && x < 0 && y > 0
        Pz = Pz - 1;
        Py = Py + 1;
        Px = Px - 1;
        flag_završena_apsorpcija = 0;
        flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
    end
end

```

```

if in == 19 % Slucaj z > 0 && x < 0 && y < 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py - 1;
    Px = Px - 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 20 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y < 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py - 1;
    Px = Px + 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 21 % Slucaj z > 0 && x > 0 && y > 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py + 1;
    Px = Px + 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 22 % Slucaj z > 0 && x < 0 && y > 0
    Pz = Pz + 1;
    Py = Py + 1;
    Px = Px - 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 23 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y < 0

    Py = Py - 1;
    Px = Px - 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 24 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y < 0

    Py = Py - 1;
    Px = Px + 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 25 % Slucaj z = 0 && x > 0 && y > 0

    Py = Py + 1;
    Px = Px + 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end
if in == 26 % Slucaj z = 0 && x < 0 && y > 0

    Py = Py + 1;
    Px = Px - 1;
    flag_zavrshena_apsorpcija = 0;
    flag_preslo_u_drugi_voksel = 1;
end

```



```

%
% axis([-0.2 10*L+0.2 -0.2 10*L+0.2 -0.2 10*L+0.2])
% hold on;
% num = length(xpt);
% for i = 1:num
%     text(xpt(i),ypt(i),zpt(i),num2str(i))
% end
% hold off;
% xlabel('x');
% ylabel('y');
% zlabel('z');
% end
%%
SS = 0;
for i = 1:ks-1
    SS = SS+sqrt((xc(i+1)-xc(i))^2+(yc(i+1)-yc(i))^2+(zc(i+1)-zc(i))^2);
end
SS
%%
s11 = "k21 = ";
s22 = num2str(k21);
s1 = strcat(s11,s22);

s11 = "k23 = ";
s22 = num2str(k23);
s3 = strcat(s11,s22);

s11 = "k24 = ";
s22 = num2str(k24);
s4 = strcat(s11,s22);

s11 = "k25 = ";
s22 = num2str(k25);
s5 = strcat(s11,s22);

s11 = "k26 = ";
s22 = num2str(k26);
s6 = strcat(s11,s22);

s11 = "k27 = ";
s22 = num2str(k27);
s7 = strcat(s11,s22);

s11 = "k28 = ";
s22 = num2str(k28);
s8 = strcat(s11,s22);

%f = msgbox([s1;s3;s4;s5;s6;s7;s8]);
%%
Rc = zeros(N*M,3);
Rc(:,1) = x';
Rc(:,2) = y';
Rc(:,3) = z';
%%

```

```

Count = 0;
Position = [4 5 4 5 4 5]*L;
for i = 1:N*M
    if Rc(i,1) >= Position(1) && Rc(i,1) <= Position(2) && Rc(i,2) >=
Position(3) && Rc(i,2) <= Position(4) && Rc(i,3) >= Position(5) && Rc(i,3) <=
Position(6)
        Count = Count +1;
    end
end
Count
%%
I = mean(Ilam,2);
%%
qlam = a*b*sum((I.*cos(Thetavec).^2)./r2vec)/M
%%
Omegas1 = a*b*sum(cos(Thetavec)./r2vec)/M
Omegas2 = pi*(a^2+(sqrt(c^2+a^2)-c)^2)/(c^2+a^2)
%% Provera tacnosti izracunavanja
Ipoz1 = sum(I)/M;
lsr = lsr/M;
Ipr = 0;
for i = 1:10
    for j = 1:10
        for k = 1:10
            Ipr = Ipr + kapa*lsr(i,j,k)*C1*exp(-
C2/(lambda*T(i,j,k)))/lambda^5;
        end
    end
end
end
greska = abs(Ipoz1-Ipr)/Ipoz1*100
%%
save lsrpoz1 lsr;

```

## Биографија

Милош (Славољуб) Мошић је рођен 9. јула 1987. године у Београду. Завршио је средњу школу (Политехничку академију на Новом Београду 2006. године). Основне студије физике, смер Примењена и компјутерска физика, завршио је 2015. године на Физичком факултету Универзитета у Београду са просечном оценом 9.50. На Физичком факултету Универзитета у Београду похађао је и мастер студије на смеру Примењена и компјутерска физика и завршио је 2017. године са просечном оценом 10.00 и оценом 10.00 на мастер раду под називом “Пројектовање микроконтролерског инфрацрвеног пирометра” рађеног под менторством проф. др Ивана Белче. Докторске студије уписује 2017. године из уже научне области „Примењена физика”, на Физичком факултету Универзитета у Београду. Просечна оцена на докторским студијама, без одбране докторске дисертације, је 10.00. Од 23. октобра 2019. године у звању је истраживач-приправник на Физичком факултету Универзитета у Београду на пројекту Графитне и неорганске наноструктуре ниске димензионалности (ев. бр. 1701035) Министарства просвете, науке и технолошког развоја. Од 26. октобра 2022. године је у звању истраживач-сарадник на Физичком факултету Универзитета у Београду. Милош Мошић је од 2017. године до данас анагажован на извођењу наставе за студенте Физичког факултета Универзитета у Београду и то: Стандардни лабораторијски софтвер (рачунске вежбе), за студенте треће године Физичког факултета (од 2017. године до данас); Физичка електроника (рачунске вежбе), за студенте треће године Физичког факултета (од 2018. године до данас); Програмирање микроконтролера (лабораторијске вежбе), за студенте мастер студија Физичког факултета (од 2019. године до данас); Аутоматско управљање (рачунске вежбе), за студенте треће године студија Физичког факултета (од 2020. године до 2023. године).

Списак публикација коришћених за израду докторске дисертације:

1. **Milos Masic**, Ivan Belca, Milos Vicic, Becko Kasalica, 1D TEMPERATURE TOMOGRAPHY OF A FLAME, BASED ON VIS-NIR SPECTROMETRY, Combustion Science and Technology, (2022), DOI: 10.1080/00102202.2022.2093608.
2. **Milos Masic**, Edib Dobardzic, Milos Vicic, Becko Kasalica, Mirjana Sarvan, Ivan Belca, 2D temperature tomography of a flame, based on VIS-NIR spectrometry, International Journal of Thermal Sciences 201 (2024) 108991, <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2024.108991>.



## Прилог 1.

### Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Милош Мошић

Број индекса: 8003/2017

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Спектрометријска метода за одређивање температурне расподеле пламена у блиско инфрацрвеној области таласних дужина

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијском програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Прилог 2.

### Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Милош Мошић

Број индекса: 8003/2017

Студијски програм: Примењена физика

Наслов рада: Спектрометријска метода за одређивање температурне расподеле пламена у блиско инфрацрвеној области таласних дужина

Ментор: др Иван Белча

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму** Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### Прилог 3.

#### Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Спектрометријска метода за одређивање температурне расподеле пламена у блиско инфрацрвеној области таласних дужина

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- ③ Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.