УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена Вицановић

УСЛОВИ ОПТИМАЛНОСТИ ЗА ИЗОПЕРИМЕТРИЈСКЕ ПРОБЛЕМЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ СА НЕПРЕКИДНИМ ВРЕМЕНОМ

докторска дисертација

Београд, 2024.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Jelena Vicanović

OPTIMALITY CONDITIONS FOR CONTINUOUS-TIME ISOPERIMETRIC OPTIMIZATION PROBLEMS

Doctoral Dissertation

Belgrade , 2024.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Бобан Маринковић,

редовни професор,

Универзитет у Београду, Технолошко-металуршки факултет

Чланови комисије:

др Александар Савић,

ванредни професор,

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александар Јовић,

доцент,

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Борислав Гајић,

научни саветник,

Математички институт САНУ

Датум одбране:

Ћеркама Викторији и Софији

Захвалница

Ова докторска дисертација представља плод вишегодишњег истраживања у области екстремалних проблема. Најпре желим да захвалим свом ментору, проф. др Бобану Маринковићу на свим саветима, идејама и смерницама које су стизале у правом тренутку. Хвала на времену, знању и стрпљењу које је са мном несебично поделио, а било је од непроцењивог значаја. Захваљујем се и члановима комисије, професорима др Александру Савићу, др Александру Јовићу и др Бориславу Гајићу. Њихове конструктивне примедбе и посвећеност дали су овој дисертацији велики допринос. Такође захваљујем проф. др Владимиру Јанковићу који ме је упознао са екстремалним проблемима и инспирисао да кренем овим путем. Хвала и мојим наставницима математике из основне и средње школе, Наталији Јекић и Горану Урошевићу, који су ми били велики узори.

Посебну захвалност дугујем својој породици за сву љубав, подршку, разумевање и позитивну енергију којом су ме мотивисали.

Хвала свим пријатељима и колегама који су ме бодрили, веровали у мене и увек налазили начина да помогну.

Јелена Вицановић

Наслов дисертације: Услови оптималности за изопериметријске проблеме оптимизације са непрекидним временом

Резиме: Формулисан је конвексан проблем максимизације са непрекидним временом и дати су неопходни услови оптималности у бесконачно димензионом случају. Основни алат за добијање оптималних услова у овој дисертацији је нова теорема алтернативе.

Како главни проблем који се разматра није гладак, урађена је линеаризација помоћу субдиференцијала. Уз добијене неопходне услове екстремума доказано је да ће множилац уз функцију циља бити различит од нуле. Такође је показано да ако се раздвоје линеарна и нелинеарна ограничења уз додатне претпоставке може се гарантовати да ће и множилац уз нелинеарна ограничења бити различит од нуле. У наставку је првобитном конвексном проблему додато интегрално ограничење па се разматра проблем Љапуновљевог типа, односно изопериметријски проблем. Линеаризација проблема помоћу субдиференцијала се и у овом случају показала као практичан начин да се пренебрегне недостатак диференцијабилности па су на сличан начин изведени услови оптималности. Показано је да ће добијени резултати важити и за векторски случај изопериметријског проблема.

Осим поменутог, разматрани су и оптимални услови екстремума за гладак проблем. На проблему минимизације је показано да ће важити услови Каруш-Кун-Такер-овог типа уз додатну претпоставку регуларности ограничења. Такође, свака тачка која задовољава поменуте услове биће и глобални минимум.

Кључне речи: Проблеми оптимизације са непрекидним временом, Конвексно програмирање, Услови оптималности, Теореме алтернативе, Изопериметријски проблеми, Вишекритеријумски проблеми оптимизације са непрекидним временом

Научна област: Математика

Ужа научна област: Оптимизација

УДК број:

АМС 2010 класификација: 90C25, 90C29, 90C30 , 90C46, 47N10

Dissertation title: Optimality conditions for continuous-time isoperimetric optimization problems

Abstract: A convex continuous-time maximization problem is formulated and the necessary optimality conditions in the infinite-dimensional case are obtained. As a main tool for obtaining optimal conditions in this dissertation we use the new theorem of the alternative.

Since there's no a differentiability assumption, we perform a linearization of the problem using subdifferentials. It is proved that the multiplier with the objective function won't be equal to zero. It was also shown that if the linear and non-linear constraints are separated, with additional assumptions it can be guaranteed that the multiplier with non-linear constraints will also be non-zero. In the following, an integral constraint is added to the original convex problem, so that a Lyapunov-type problem, i.e. an isoperimetric problem, is considered. Linearization of the problem using subdifferentials proved to be a practical way to ignore the lack of differentiability, so the optimality conditions were derived in a similar way. It is shown that the obtained results will also be valid for the vector case of the isoperimetric problem.

Additionally, the optimality conditions for the smooth problem were considered. On the minimization problem, it was shown that the necessary conditions of Karush-Kuhn-Tucker type will be valid with the additional regularity constraint condition. Also, any point that satisfies the mentioned optimality conditions will be a global minimum.

Keywords: Continuous-time programming, Convex programming, Optimality conditions, Theorems of the alternative, Isoperimetric problems, Multiobjective continuous-time programming problems

Research area: Mathematics

Research sub-area: Optimization

UDC number:

AMS 2010 Classification: 90C25, 90C29, 90C30 , 90C46, 47N10

Садржај

1 **Увод** **1**

2 **Екстремални проблеми** **6**

2.1 Неопходни услови оптималности за проблем конвексног програмирања 7

2.2 Теореме алтернативе и решивост система конвексних неједначина 9

2.3 Теорема Каруш-Кун-Такер за гладак проблем 12

2.4 Нова теорема алтернативе у бесконачно димензионим просторима 15

2.5 Субдиференцијали 19

3 **Услови оптималности за једну класу проблема конвексног програмирања са непрекидним временом** **23**

3.1 Услови оптималности уз додатне претпоставке регуларности ограничења 29

4 **Изопериметријски проблем конвексног програмирања са непрекидним временом** **34**

4.1 Формулација проблема 34

4.2 Неопходни услови оптималности 35

4.3 Проблем Љапунова 40

5 **Услови оптималности у изопериметријским проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом** **42**

5.1 Неопходни услови екстремума 43

6 **Услови оптималности Каруш-Кун-Такеровог типа за гладак проблем** **48**

7 Закључак 55

Литература 57

Биографија аутора 62

1 Увод

Кад год би се нашао пред неким избором или проблемом, човек је настојао да изабере најбоље (оптимално) решење. То нам говори да су проблеми тражења неке највеће или најмање вредности (једном речју, екстремума) присутни од раних времена. Данас они носе назив екстремални проблеми. Један од првих нама познатих екстремалних проблема био је да се међу свим затвореним кривама исте дужине пронађе она која обухвата највећу површину. На основу записа једног ученика закључујемо да су Грци још пре Аристотела знали да је то круг. Аналогно томе, знали су и да је сфера тело са највећом запремином од свих тела са истом површином. Слични проблеми се могу пронаћи и у радовима Еуклида, Архимеда и Аполонија, о чему се може прочитати у [46, 65, 63].

Како раздобље средњег века није било плодоносно за науку, тако се ни теорија екстремалних проблема није развијала у овом периоду. Наредни помак се десио тек у XV веку када је немачки математичар и астроном Јохан Милер[1], познатији као Региомонтан, поставио проблем: на којој удаљености треба да стоји посматрач у односу на слику како би угао гледања био највећи [42]. Касније је овај проблем нашао своју примену и у спорту: које је оптимално место са ког играч у рагбију треба да шутне лопту ка голу [34].

Потреба да се реше екстремални проблеми довела је до развоја математичке анализе и варијационог рачуна, који је у XVII и XVIII веку постао „језик" природних наука са широком применом у физици и механици. Након што је Јохан Бернули понудио решење тзв. брахистохроног проблема 1697.године, њиме су се бавили и Њутн, Лајбниц, Чирнхаус и Јаков Бернули. Проблем се састојао у томе да се пронађе крива по којој ће материјална тачка на коју делује сила гравитације стићи из почетне у крајњу тачку за најкраће време. Због захтева технологије и економије екстремални проблеми су доживели свој процват у XX веку. Један од првих најзначајнијих био је транспортни проблем који је почео да се проучава током 20-их и 30-их година. Формулација транспортног проблема гласи: на који начин превести робу са M локација на N дестинација, тако да трошкови транспорта буду најмањи могући. Велики допринос његовом решавању дао је руски математичар и економиста Л. В. Канторович током Другог светског рата [38]. Тако су се током 40-их година у оквиру математичке анализе развиле две нове гране: линеарно и конвексно програмирање.

Време хладног рата донело је нове задатке. Један од њих био је којом оптималном путањом авион треба да се помери са свог почетног положаја у повољни положај у односу на непријатељску летелицу [52]. Велики допринос решавању оваквих проблема дао је руски математичар Понтрјагин који је са својим студентима Болтјанским, Гамкрелидзеом и Мишченком развио принцип максимума и објавио га у монографији 1961. године [10]. То је означило настанак новог поља у примењеној математици, оптималног управљања. Примарни задатак ове нове теорије био је управљање динамичким системом на оптималан начин, односно тако да жељени критеријум оптималности буде испуњен. Основни параметри динамичког система су: време, променљиве стања, променљиве управљања и случајни параметри. Разликују се проблеми са непрекидним и дискретним временом. Динамичко понашање непрекидних система описује се системом диференцијалних једначина првог реда (видети нпр. [64]), а дискретних система векторском диференцном једначином првог реда ([11, 14]). Резултати оптималног управљања нашли су своју улогу и у решавању проблема из области биологије, екологије, медицине, фармакологије, демографије итд.

Ричард Белман, познат као творац динамичког програмирања, је још један значајан

[1]Johann Müller (1436-1476)

математичар чији су радови утабали пут за развој екстремалних проблема. У његовом раду [8] 1953. године по први пут је представљен проблем који данас називамо проблемом линеарног програмирања са непрекидним временом. Од тог тренутка многи математичари су радили на развоју ове теорије и проширили је на више класа проблема чију примену проналазимо у разним областима људске делатности. Нема сумње да ће њена улога у будућности бити још значајнија.

Хансон и Монд су 1968. године у свом раду [30] извели Каруш-Кун-Такерове неопходне и довољне услове оптималности за нелинеаран проблем оптимизације са непрекидним временом, при чему су ограничења линеарна, а функција циља конкавна:

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^T f(x(t))dt \\ \text{при ограничењима} \quad & B(t)x(t) \leq c(t) + \int_0^T K(t,s)x(s)ds, \;\; t \in [0,T], \\ & x(t) \geq 0, \;\; t \in [0,T], \end{aligned}$$

где је $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ограничена и мерљива функција на $[0,T]$, $B(t)$ је матрица димензије $m \times n$ која је део-по-део непрекидна на $[0,T]$, $c(t) \in \mathbb{R}^n$ је део-по-део непрекидна на $[0,T]$ и $K(t,s)$ је матрица димензије $m \times n$ која је део-по-део непрекидна на $[0,T] \times [0,T]$. За конкавну функцију f се још претпоставља да је два пута непрекидно диференцијабилна. Уз одређени услов позитивности за $B(t), c(t)$ и $K(t,s)$ доказали су да је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење постављеног проблема ако и само ако постоји $\hat{u}(\cdot) \geq 0$ тако да за с.с. $t \in [0,T]$ важи

$$B'(t)\hat{u}(t) - \bigtriangledown f(\hat{x}(t)) - \int_t^T K'(s,t)\hat{u}(s)ds \geq 0,$$

$$\hat{x}'(t)\left[B'(t)\hat{u}(t) - \bigtriangledown f(\hat{x}(t)) - \int_t^T K'(s,t)\hat{u}(s)ds\right]dt = 0,$$

$$\hat{u}'(t)\left[B'(t)\hat{x}(t) - c(t) - \int_0^t K(t,s)\hat{x}(s)ds\right]dt = 0,$$

где апостроф означава транспоновање. Тиндал је две године касније исправио неке њихове доказе [67]. У раду [27] Хансон и Фар су добили услове оптималности за општији проблем код кога су и функција циља и ограничења нелинеарне функције. Многи аутори су се касније бавили нелинеарним проблемом са непрекидним временом. У радовима [2, 54, 59, 75, 77, 78, 79] разматрао се гладак случај, док су у [57] и [13] добијени редом довољни и неопходни услови за негладак проблем. У својим радовима из 1985. [77, 78, 79] Залмаи је користио директан приступ проблему који је предмет ове дисертације, а поставио га је на следећи начин:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(x) = \int_0^T f(t,x(t))dt \\ \text{при ограничењима} \quad & g(t,x(t)) \leq 0 \;\; \text{с.с. на } [0,T],\; x \in X, \end{aligned}$$

где је X непразан отворен конвексан подскуп Банаховог простора $L_\infty^n[0,T]$ свих Лебег-мерљивих, есенцијално ограничених n-димензионалних векторских функција дефинисаних на сегменту $[0,T] \subset \mathbb{R}$, при чему је норма $\|\cdot\|_\infty$ дефинисана са

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} |x_j(t)|,$$

где је $x_j(t)$ j-та компонента $x(t) \in \mathbb{R}^n$ за свако $t \in [0,T]$. Функција ϕ је реална функција дефинисана на X, а $g(t,x(t)) = \gamma(x)(t)$, где је γ пресликавање скупа X на нормирани простор $\Lambda_1^m[0,T]$ свих Лебег-мерљивих, есенцијално ограничених m-димензионалних векторских функција дефинисаних на $[0,T]$, са нормом $\|\cdot\|_1$ која је дефинисана са

$$\|y\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \int_0^T |y_j(t)|dt.$$

Ипак, главни резултати горе поменутих радова, како за гладак, тако и за негладак случај, добијени су помоћу уопштене Гордановe теореме алтернативе формулисане у [75], али је њихова валидност 2019. године доведена у питање јер су Арјутунов, Жуковски и Маринковић доказали нетачност поменуте теореме у свом раду [6] и доказали нову теорему алтернативе. Можемо рећи да резултати из овог рада представљају прекретницу у теорији конвексног програмирања са непрекидним временом, будући да су омогућили да се претходна сазнања ревидирају и прошире. Ослањајући се на тај нови апарат Монте и Оливеира су у радовима [23, 24] обрадили гладак проблем оптимизације са непрекидним временом и за њега добили нове неопходне Каруш-Кун-Такерове услове. Размотрили су најпре проблем са ограничењима типа неједнакости, а затим и проблем са ограничењима типа неједнакости и једнакости:

$$\begin{aligned} \max \quad & P(z(\cdot)) = \int_0^T \phi(t,z(t))dt \\ \text{при ограничењима} \quad & h(t,z(t)) = 0 \ \text{ с.с. на } [0,T], \\ & g(t,z(t)) \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0,T], \\ & z(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

где је $\phi : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$. Користећи једну варијанту теореме о имплицитној функцији, формулисану и доказану у [22] , извели су неопходне оптималне услове за наведени проблем (у L_∞) , који до тада није разматран у литератури. Недавно су Јовић и Маринковић обрадили конвексан проблем вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом без претпоставке диференцијабилности [37].

У оквиру економије, операционих истраживања, теорије игара, као и многих других области често се наилази на проблеме код којих је функција циља количник две реалне функције. Зато је последњих деценија дошло до развоја тзв. рационалног проблема са непрекидним временом ([31, 41, 49, 62, 60, 80, 81]). У неким радовима, као на пример [49, 81], аутори су користили поменуту нетачну Горданову теорему, али су недавно у раду [36], помоћу нове теореме алтернативе, добијени неопходни и довољни услови оптималности за рационални проблем

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\int_0^T f(t,x(t))dt}{\int_0^T g(t,x(t))dt} \\ \text{при ограничењима} \quad & h(t,x(t)) \geq 0 \ \text{ с.с. на } [0,T], \\ & x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

где су $f : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$ глатке функције. За алгоритме за решавање линеарног рационалног проблема оптимизације са непрекидним временом помоћу нумеричких метода, читалац се упућује на [71, 72].

Значајно је поменути да велики допринос овој области представљају и радови који су последњих година све популарнији, а баве се проблемима у којима фигуришу функције са интервалним вредностима. Интервална оптимизација је привукла велики број аутора због примене у решавању реалних проблема код којих се често не знају сви параметри функције циља. Разлог могу бити грешке приликом мерења или нека непредвиђена дешавања. Најважнији резултати објављени су у радовима [73, 74, 61, 15, 4, 51, 58]. Скоро су вијетнамски математичари Тунг и Там публиковали услове оптималности за гладак проблем

$$
\begin{aligned}
&\min \mathcal{J}(x) = (J_1(x), ..., J_m(x)) = ([J_1^L(x), J_1^R(x)], ..., [J_m^L(x), J_m^R(x)]) = \\
&= \left(\left[\int_0^T f_1^L(t, x(t))dt, \int_0^T f_1^R(t, x(t))dt \right], ..., \left[\int_0^T f_m^L(t, x(t))dt, \int_0^T f_m^R(t, x(t))dt \right] \right) \\
&\text{п.о.} \quad g(t, x(t)) \leq 0 \ \text{с.с. на } [0, T], \\
&\qquad\quad x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n),
\end{aligned}
$$

за дате функције $J_i^L, J_i^R : L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $f_i^L, f_i^R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$ и $g : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^p$. До својих резултата [66] су дошли користећи нову теорему алтернативе из [6] и приступ из [23].

Ова дисертација има седам глава. У уводу смо резимирали досадашња достигнућа и дали мотивацију.

Друга глава има за циљ да читаоцу приближи задатке којима се екстремални проблеми баве и да га упозна са приступом и апаратом који ћемо користити у доказима главних теорема. Формулисан је конвексан проблем са непрекидним временом и дати су неопходни услови оптималности у коначно димензионом случају. Наведене су теореме алтернативе у коначно димензионим просторима које ће нам бити од значаја, али и нека уопштења ових тврђења у функционалним просторима. Основни алат за добијање услова оптималности у овој дисертацији биће нова теорема алтернативе, дата у овој глави.

У трећој глави биће изнети резултати који представљају проширење теорије везане за скаларни случај конвексног проблема оптимизације са непрекидним временом без претпоставке диференцијабилности. Проблем је линеаризован помоћу субдиференцијала. Уз добијене неопходне услове екстремума доказано је да ће множилац уз функцију циља бити једнак јединици. Такође смо показали да ако раздвојимо линеарна и нелинеарна ограничења уз додатне претпоставке можемо гарантовати да ће и множилац уз нелинеарна ограничења бити различит од нуле. Већи део резултата из ове главе је представљен у раду [70] .

У оквиру четврте главе размотрићемо изопериметријски проблем који има интегрална и фазна ограничења, тзв. проблем Љапуновљевог типа. Изведени неопходни услови су публиковани у [68]. У наставку ће постављени проблем бити упоређен са проблемом Љапунова. То је интересантно поље за даља истраживања.

Пета глава решава конвексан вишекритеријумски проблем са фазним и интегралним ограничењем типа неједнакости, односно још један тип изопериметријских проблема. Показаћемо да ће множилац уз функцију циља бити вектор са ненегативним координатама међу којима је најмање једна различита од нуле. Резултати из ове главе су у процесу рецензије [69].

Услови оптималности екстремума за гладак проблем разматрани су у претпоследњој, шестој, глави. На проблему минимизације је показано да ће важити услови Каруш-Кун-Такер-овог типа уз додатну претпоставку регуларности ограничења. Такође ћемо закључити да је свака тачка која задовољава поменуте услове глобални минимум, што је илустровано примером.

У закључку (глава седам) резимирамо добијене резултате и разматрамо правце и могућности за будући рад.

2 Екстремални проблеми

Екстремалним проблемом у општем смислу називамо проблем минимизације (или максимизације) функције под условом да су задовољена ограничења типа једнакости и неједнакости. Можемо га записати у облику:

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x) & \\ \text{п.о.} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, ..., k, \\ & f_i(x) = 0, & i = k+1, ..., m. \end{array} \tag{П}$$

Скуп D је домен проблема ако су све функције $f_i, i = 1, ..., m$ дефинисане на њему. Кодомен им је скуп реалних бројева. Кажемо да је екстремални проблем гладак ако је D отворен подскуп нормираног простора X и све функције $f_i, i = 0, ..., m$ су глатке. Ако је D конвексан подскуп линеарног простора X, функције f_i конвексне за $i = 0, ..., k$ и афине за $i = k+1, ..., m$, проблем (П) је конвексан, а ако су све функције $f_i, i = 0, ..., m$ афине, а D афин подпростор линеарног простора X, (П) је линеаран проблем. Очигледно је сваки линеаран проблем подскуп конвексних проблема, а уз претпоставку о непрекидности функција којим је дефинисан уједно ће бити и гладак. Проблеме који нису линеарни једним именом можемо звати нелинеарним. У литератури ће се често називати и проблемима нелинеарног програмирања или нелинеарне оптимизације.

Кажемо да је тачка из домена проблема допустива за проблем (П) ако задовољава сва ограничења. Обележићемо са D_0 скуп свих допустивих тачака за (П):

$$D_0 = \{x \in D : f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., k,\ f_i(x) = 0, i = k+1, ..., m\}.$$

Проблем (П) сада можемо записати:

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ & x \in D_0. \end{array} \tag{П}$$

Дефиниција 1. Тачку $\hat{x} \in D_0$ зовемо глобално решење проблема (П), ако важи неједнакост

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}), \quad \forall x \in D_0.$$

Дефиниција 2. Тачку $\hat{x} \in D_0$ зовемо локално решење проблема (П), ако постоји околина U тачке $\hat{x}$ таква да важи

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}), \quad \forall x \in D_0 \cap U.$$

Проблем минимизације се увек може свести на проблем максимизације и обрнуто, односно важи

$$\max_{x \in D_0} f(x) = \min_{x \in D_0} (-f(x)).$$

Код нелинеарних екстремалних проблема локално решење не мора бити и апсолутно решење па су ови проблеми тежи за решавање од линеарних. Оснивачима нелинеарног програмирања сматрамо Куна и Такера[2] који су својим радом [40] 1951. године поставили основе ове теорије. Приликом решавања екстремалних проблема, намеће нам се задатак да

[2] Harold William Kuhn (1925-2014), Albert William Tucker (1905-1995)

одредимо неопходне услове екстремума. У уводу је поменуто да постоји обимна литература која обрађује глатке екстремалне проблеме, а велики допринос тој области су недавно дали Монте и Оливеира [23, 24]. Они су добили нове неопходне услове за гладак проблем оптимизације са непрекидним временом. У овом раду разматраћемо конвексне проблеме оптимизације са непрекидним временом. С тим у вези у наредном пододељку најпре дајемо преглед основних појмова и дефиниција које се односе на конвексност скупова и функција.

Напоменимо да ће сви вектори у тексту бити колоне, док ће апостроф (’) означавати транспоновање. За вектор $w \in \mathbb{R}^p$ пишемо $w \leq 0$ ако је $w_i \leq 0$ за свако $i = 1, ..., p$ и $w < 0$ ако је $w_i < 0, i = 1, ..., p$. Домен произвољне функције $f : L \to \overline{\mathbb{R}}$, где је L линеарни простор означаваћемо $dom(f)$, тј. $dom(f) = \{x \in L : f(x) < \infty\}$. Скуп тачака из $L \times \mathbb{R}$ које се налазе изнад графика функције f зовемо епиграф функције f, односно $epi(f) = \{(x, r) \in L \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$. Са $B(x, r)$ ћемо означавати отворену куглу са центром у x, полупречника r.

2.1 Неопходни услови оптималности за проблем конвексног програмирања

Често се цитира изјава америчког математичара Р.Т. Рокафелара да највећи заокрет у оптимизацији није био између линеарности и нелинеарности већ између конвексности и неконвексности.[3] Због својих својстава, конвексне функције су једноставне за рад па су самим тим пронашле своје место у разним областима. Подсетићемо се дефиниција и особина које ће нам бити од значаја.

За подскуп C линеарног простора X кажемо да је конвексан ако са сваке две своје тачке x и y садржи и њима одређену дуж, односно све тачке сегмента

$$[x, y] = \{z \,|\, z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}.$$

Дефиниција 3. Нека је X конвексан скуп. Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је конвексна ако за свако $x, y \in X$ задовољава Јенсенову неједнакост:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Ако у претходној формули важи строга неједнакост, кажемо да је функција f строго конвексна.

Дефиниција 4. Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је конвексна на скупу X ако је њен епиграф конвексан скуп.

Дефиниција 5. За функцију $f : X \to \mathbb{R}$ кажемо да је конкавна уколико је функција $-f$ конвексна.

Проблеми конвексног програмирања су значајни због своје широке примене. Са основама линеарног програмирања, које је специјалан случај конвексног програмирања, први пут се сусрећемо 1939. године у раду Канторовича [38] . Основни став ове теорије у ком су добијени неопходни услови екстремума, Кун-Такерова теорема, доказана је 1951.

[3] "...in fact, the great watershed in optimization isn’t between linearity and nonlinearity, but convexity and nonconvexity”, R. Tyrrell Rockafellar, SIAM Review, 1993.

године [40]. Касније је установљено да је Каруш[4] дошао до истог резултата у свом мастер раду [39] 1939. Зато данас неопходне услове из поменуте теореме зовемо Каруш-Кун-Такерови услови оптималности.

Посматрајмо екстремални проблем конвексног програмирања:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{п.о.} \quad & f_i(x) \le 0, \ \ i \in \{1, ..., m\}, \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{КП}$$

где је X конвексан подскуп од $\mathbb{R}^n$ и $f_i, i \in \{1, ..., m\}$ конвексне функције дефинисане на X. Скуп свих допустивих решења проблема (КП) означићемо са Ω, односно

$$\Omega = \{x \in X \mid f_i(x) \le 0\}.$$

За постављени проблем дефинисаћемо тзв. Лагранжову функцију:

$$L = L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x),$$

где је $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, а бројеве $\lambda_0, ..., \lambda_m$ зовемо Лагранжовим множиоцима.

Дефиниција 6. Кажемо да је услов $f_i(x) \le 0$ активан у тачки x^*, уколико је $f_i(x^*) = 0$, а неактиван у тачки x^* уколико је $f_i(x^*) < 0$.

Дефиниција 7. Скуп индекса свих услова типа неједнакости који су активни у тачки x^* означавамо $\mathcal{I}(x^*)$, односно

$$\mathcal{I}(x^*) = \{i \mid f_i(x^*) = 0\}.$$

Теорема 1. Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $X \subset \mathbb{R}^n$. Тада је тачка $x_0 \in X$ глобални минимум функције f на скупу X ако и само ако је $x_0 \in X$ локални минимум функције f.

Доказ. $\Rightarrow$: Овај смер следи директно из дефиниције локалног и глобалног минимума функције на задатом скупу.

$\Leftarrow$: Нека је x_0 тачка локалног минимума функције f. Тада постоји $\delta > 0$ тако да је $f(u) \ge f(x_0)$, $\forall u \in B(x_0, \delta)$.

Фиксирајмо $x \in X$ и конструишимо низ $x_k := (1 - \frac{1}{k})x_0 + \frac{1}{k}x$, $k \in \mathbb{N}$. Очигледно ће за довољно велико k бити $x_k \in B(x_0, \delta)$. Из конвексности функције f добијамо

$$f(x_0) \le f(x_k) \le (1 - \frac{1}{k})f(x_0) + \frac{1}{k}f(x).$$

Одатле следи $\frac{1}{k}f(x_0) \le \frac{1}{k}f(x)$, односно $f(x_0) \le f(x)$ за свако $x \in X$.

□

Теорема 2. [43](Кун-Такер) Претпоставимо да је $\hat{x}$ глобално решење проблема (КП) и да постоји тачка $\overline{x} \in X$ која задовољава Слејтеров услов: $f_i(\overline{x}) < 0$, $i = 1, ..., m$. Тада постоје Лагранжови множиоци $\hat{\lambda}_i, i \in \{1, ..., m\}$ такви да важи:

[4] William Karush (1917-1997)

1. $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
2. $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
3. $f_0(x) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i f_i(x) \geq f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}), \ \forall x \in X$.

Дакле, теорема Кун-Такер констатује да ће глобално решење проблема (КП) са ограничењима типа неједнакости уједно бити тачка минимума Лагранжове функције. Нешто општију формулацију, без претпоставке да је Слејтеров услов задовољен, имамо у теореми која је названа по Фриц Џону[5].

Теорема 3. [43](Фриц Џон) Ако је $\hat{x}$ глобално решење проблема (КП), постоје Лагранжови множиоци $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_i, i \in \{1, ..., m\}$ међу којима је бар један различит од нуле, такви да важи:

1. $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i \in \{0, 1, ..., m\}$,
2. $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
3. $\sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i f_i(x) \geq \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}), \ \forall x \in X$.

На основу обе теореме можемо закључити да Слејтеров услов гарантује да ће множилац уз функцију циља бити различит од нуле па можемо претпоставити $\hat{\lambda}_0 = 1$. Како бисмо доказали наведена тврђења, у следећем пододељку уводимо теореме алтернативе.

2.2 Теореме алтернативе и решивост система конвексних неједначина

Важан апарат у доказима претходне две теореме представљају теореме алтернативе. Оне играју велику улогу како у линеарном, тако и у нелинеарном програмирању па ће бити незаменљиве и у нашим доказима услова оптималности. Нека су I и II два алтернативна система једначина и/или неједначина. Теореме алтернативе су тврђења која у општем смислу можемо формулисати на следећи начин:

Или систем I има решење, или систем II има решење, али никад оба.

За детаљан преглед теорема алтернативе читалац се упућује на [43]. Наша полазна тачка ће бити Горданова теорема, први пут представљена 1873. године у раду [29]. Најпре ћемо је формулисати у коначно димензионом простору, а затим видети њену примену у доказу теореме Кун-Такер.

Теорема 4. [29, 43](Горданова теорема) За дату матрицу A димензија $m \times n$, или

$$I \quad Ax < 0 \quad \text{има решење} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{или} \quad II \quad A'y = 0, \ y \geq 0, \quad \text{има решење} \quad y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

али никад оба.

Познато уопштење овог тврђења представља Моцкинова теорема [43]:

[5] Fritz John (1910-1994)

Теорема 5. Нека су A, B и C реалне матрице димензија $k \times n, m \times n$ и $l \times n$ редом. Тада

$$\text{или} \quad I \quad \text{систем} \quad Ax < 0, \quad Bx \leq 0, \quad Cx = 0 \quad \text{има решење} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{или} \quad II \quad \text{постоје вектори} \quad \varphi \in \mathbb{R}^k, \psi \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^l \quad \text{такви да је}$$

$$\varphi \geq 0, \varphi \neq 0, \psi \geq 0 \quad \text{и} \quad A'\varphi + B'\psi + C'\eta = 0,$$

али никад оба.

Нека је X подскуп линеарног простора L и нека су дати линеарни оператор $A : L \to \mathbb{R}^m$, вектор $b \in \mathbb{R}^m$, конвексне функције $f_i : L \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, ..., k$ и два коначна скупа индекса I_1 и I_2 тако да важи $I_1 \sqcup I_2 = \{1, ..., k\}$. Претпостављаћемо $X \subset dom(f_i)$, $i = 1, ..., k$.

Дефиниција 8. [6] Кажемо да је систем

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, \ i \in I_1, \\ Ax = b, \\ x \in X, \end{cases} \tag{1}$$

строго решив ако постоји $\overline{x} \in X$ тако да је $A\overline{x} = b$ и $f_i(\overline{x}) < 0$ за свако $i \in I_1$.

Лема 6. [6], [55] Нека је систем (1) строго решив и b припада релативној унутрашњости скупа AX. Тада важи тачно једно од следећих тврђења:

(i) Постоји решење система

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, \ i \in I_1, \\ f_i(x) < 0, \ i \in I_2, \\ Ax = b, \\ x \in X, \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Постоји ненула вектор $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k, \tilde{\mu}) \in \mathbb{R}^{k+m}$, такав да важи

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\mu_i + \langle Ax - b, \tilde{\mu} \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in X,$$

$\mu_i \geq 0$ за свако $i \in \{1, ..., k\}$, при чему је $\mu_i > 0$ за неко $i \in I_2$, а $\tilde{\mu}$ припада линеарном омотачу $Ax - b$.

Ако би систем (2) био записан без једначине $Ax = b$, претходно тврђење би имало следећу формулацију:

Последица 1. [6] Претпоставимо да постоји $\overline{x} \in X$ за које важи $f_i(\overline{x}) < 0, \forall i \in I_1$. Тада важи тачно једно од следећих тврђења:

(i) Постоји решење система

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, \ i \in I_1, \\ f_i(x) < 0, \ i \in I_2, \\ x \in X, \end{cases} \tag{3}$$

(ii) Постоји ненула вектор $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k) \in \mathbb{R}^k$, такав да важи

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\mu_i \geq 0 \qquad \forall x \in X,$$

при чему је $\mu_i \geq 0$ за свако $i \in \{1, ..., k\}$ и $\mu_i > 0$ за неко $i \in I_2$.

Наредни пример илуструје да Лема 6 неће важити без претпоставке строге решивости система (1).

Пример 2.1. Нека је $L = X = \mathbb{R}$ и нека су функције $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисане са:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, \ x \geq 0 \\ -x^3, \ x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Дакле, $k = 2, I_1 = \{1\}, I_2 = \{2\}$ па посматрамо систем:

$$\begin{cases} f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тачка $x = 0$ је решење неједнакости $f_1(x) \leq 0$, док неједнакост $f_1(x) < 0$ нема решења па не важи тврђење (i) Леме 6. Нека су $\varphi_1 \geq 0, \varphi_2 > 0$ произвољни бројеви. Тада постоји $x < 0$ за које је

$$f_1(x)\varphi_1 + f_2(x)\varphi_2 = -x^3\varphi_1 + x\varphi_2 < 0$$

па у овом случају не важи ни тврђење (ii) Леме 6.

Напоменимо још да у случају када систем (2) садржи само строге неједнакости, Лема 6 се своди на следећу теорему алтернативе, фундаменталну за конвексне функције.

Теорема 7 (Ки Фан[6] [26]). Нека су функције $f_i : L \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, ..., k$ конвексне и $X \subset dom(f_i)$, $i = 1, ..., k$ је непразан, конвексан подскуп од L. Тада важи тачно једно од следећа два тврђења

I систем $f_1(x) < 0, ..., f_k(x) < 0, \quad x \in X$ има решење $x \in L$,

или II постоји ненула вектор $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k) \geq 0$ такав да је

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\varphi_i \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Сада имамо апарат потребан за извођење доказа Кун-Такер теореме формулисане у претходном пододељку. На сличан начин може се доказати и теорема Фриц-Џон, а исти принцип ћемо користити и у доказима нових неопходних услова оптималности.

Доказ (Кун-Такер). Нека је $\hat{x}$ глобално решење проблема (КП). Тада систем

$$\begin{cases} f_0(x) - f_0(\hat{x}) < 0, \\ f_i(x) \leq 0, \ i \in \{1, ..., m\} \\ x \in X \end{cases} \tag{5}$$

[6] Ky Fan (1914 - 2010) - кинески математичар

нема решење. На основу Последице 1, постоји ненула вектор $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_0, ..., \hat{\mu}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\hat{\mu} \geq 0, \hat{\mu}_0 > 0$ за који важи

$$\hat{\mu}_0(f_0(x) - f_0(\hat{x})) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i f_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \tag{6}$$

односно

$$\hat{\mu}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\mu}_i f_i(x) \geq \hat{\mu}_0 f_0(\hat{x}) \quad \forall x \in X. \tag{7}$$

Можемо поделити претходну неједнакост са $\hat{\mu}_0 > 0$ и ставићемо

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_0}, \quad i \in \{1, ..., m\}.$$

Сада је испуњено

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(x) \geq f_0(\hat{x}) \quad \forall x \in X. \tag{8}$$

За $x = \hat{x}$ из неједнакости (6) закључујемо да је

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) \geq 0. \tag{9}$$

Како је $\hat{x}$ допустива, мора бити $f_i(\hat{x}) \leq 0, i \in \{1, ..., m\}$, па због $\hat{\lambda}_i \geq 0$ важи и

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) \leq 0, \quad \text{односно} \quad \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0.$$

Тиме је доказан услов 2, а на основу њега и неједнакости (8) закључујемо да важи

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(x) \geq f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) \quad \forall x \in X,$$

чиме је доказан и услов 3.

□

Теореме Фриц-Џон и Кун-Такер могу се доказати и геометријским приступом, помоћу конуса и дуалних конуса у теорији екстремалних проблема, о чему је писано у [28].

2.3 Теорема Каруш-Кун-Такер за гладак проблем

Размотрићемо проблем (КП) под претпоставком да је скуп $X \neq \emptyset$ отворен у $\mathbb{R}^n$, а функције f_i, $i = 0, 1, ..., m$ диференцијабилне.

Означимо са H скуп свих вектора допустивог правца скупа Ω у тачки $\hat{x}$:

$$H = \{h \neq 0 \mid \hat{x} + \lambda h \in \Omega, \forall \lambda \in (0, \delta), \delta > 0\}.$$

Лема 8. [7] Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $\hat{x}$. Ако постоји вектор h такав да је $\nabla f(\hat{x})' h < 0$, тада постоји $\delta > 0$ тако да је $f(\hat{x} + \lambda h) < f(\hat{x})$, за свако $\lambda \in (0, \delta)$.

Лема 9. [7] Ако је $\hat{x}$ решење проблема (КП), тада је $H \cap F = \emptyset$, где је

$$F = \{h \in \mathbb{R}^n \mid f(\hat{x} + \lambda h) < f(\hat{x}), \forall \lambda \in (0, \delta), \delta > 0\}.$$

Лако се види да скупови H и F представљају конусе.

Лема 10. [7] Сваки вектор $h \in \mathbb{R}^n$ за који је $\nabla f_i(\hat{x})'h < 0, i \in \mathcal{I}(\hat{x})$, припада скупу допустивих праваца H.

Теорема 11. Нека је $\hat{x} \in \Omega$ решење проблема (КП), где је X отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, а функције $f_0, f_i, i \in \mathcal{I}(\hat{x})$ диференцијабилне у $\hat{x}$. Тада систем

$$\nabla f_0(\hat{x})'h < 0, \qquad \nabla f_i(\hat{x})'h < 0, i \in \mathcal{I}(\hat{x}), \tag{10}$$

нема решења.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $h \in \mathbb{R}^n$ решење система (10). Тада због Леме 8 важи $f(\hat{x} + \lambda h) < f(\hat{x})$, па h припада скупу F. Са друге стране, због Леме 10 , $h \in H$, а то је у контрадикцији са Лемом 9 .

□

Сада можемо да докажемо неопходне услове оптималности Фриц Џон.

Теорема 12. [7](Фриц Џон) Ако је допустива тачка $\hat{x}$ локално решење проблема (КП), тада постоје множиоци $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_i, i \in \{1, ..., m\}$ међу којима је бар један различит од нуле, такви да важи:

1. $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i \in \{0, 1, ..., m\}$,
2. $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
3. $\hat{\lambda}_0 \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \nabla f_i(\hat{x}) = 0$.

Доказ. Како је $\hat{x}$ локално (а тиме и глобално) решење за (КП), на основу Теореме 11, не постоји $h \in \mathbb{R}^n$ које задовољава систем

$$\begin{aligned} &\nabla f_0(\hat{x})'h < 0, \\ &\nabla f_i(\hat{x})'h < 0, i \in \mathcal{I}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Тада на основу Гордановe теореме, постоје реални множиоци $\overline{\lambda_0}, \overline{\lambda_i}, i \in \mathcal{I}(\hat{x})$ међу којима је бар један различит од нуле такви да важи

$$\overline{\lambda_0} \nabla f_0(\hat{x})'h + \sum_{i \in \mathcal{I}(\hat{x})} \overline{\lambda_i} \nabla f_i(\hat{x})'h = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

односно

$$\left(\overline{\lambda_0} \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}(\hat{x})} \overline{\lambda_i} \nabla f_i(\hat{x}) \right)' h = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Ова једнакост важи за свако $h \in \mathbb{R}^n$ па следи да је

$$\overline{\lambda_0} \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}(\hat{x})} \overline{\lambda_i} \nabla f_i(\hat{x}) = 0.$$

Ставимо $\hat{\lambda}_i = \overline{\lambda}_i$ за $i \in \{0\} \cup \mathcal{I}(\hat{x})$ и $\hat{\lambda}_i = 0$ за $i \notin \mathcal{I}(\hat{x})$. Тада су задовољени услови 1 и 3 из теореме, али важи и услов 2 јер ако су ограничења активна биће $f_i(\hat{x}) = 0$, а ако нису активна, множилац уз њих је 0.

□

Приликом разматрања оптималних услова за проблеме нелинеарног програмирања често се претпостављају различити услови регуларности ограничења како би се добили бољи резултати са широком применом. Видели смо, на пример, да нам Теорема 3 (Фриц Џон) не гарантује да ће множилац уз функцију циља бити различит од нуле, али ако ограничења проблема (КП) задовољавају Слејтеров услов онда то можемо да тврдимо. Један од услова регуларности ограничења који се показао ефикасним познат је под именом Мангасаријан-Фромовиц.

Дефиниција 9. Кажемо да је у проблему (КП) задовољен услов регуларности ограничења Мангасаријан-Фромовиц типа у тачки $\hat{x} \in \Omega$ ако постоји $h \in \mathbb{R}^n$ такво да је

$$\nabla f_i(\hat{x})'h < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}(\hat{x}).$$

Доказаћемо да ће уз овај услов регуларности за коначно димензиони проблем (КП) важити неопходни услови Каруш-Кун-Такер.

Теорема 13. [7] Претпоставимо да је допустива тачка $\hat{x}$ локално решење проблема (КП) и да је задовољен услов регуларности Мангасаријан-Фромовиц типа. Тада постоје множиоци $\hat{u}_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., m\}$ такви да важи:

1. $\hat{u}_i \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
2. $\hat{u}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}$,
3. $\nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{x}) = 0$.

Доказ. Из претходне теореме знамо да ако је $\hat{x}$ решење проблема (КП), постоје множиоци $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m+1}$, где је бар један различит од нуле такви да важи

$$\left(\hat{\lambda}_0 \nabla f_0(\hat{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}(\hat{x})} \hat{\lambda}_i \nabla f_i(\hat{x})\right)' h = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Да бисмо доказали да $\hat{\lambda}_0$ мора бити различит од нуле, претпоставићемо супротно. Нека је $\hat{\lambda}_0 = 0$. Из (11) ће бити

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}(\hat{x})} \hat{\lambda}_i \nabla f_i(\hat{x})\right)' h = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

На основу Горданове теореме, како важи ова једнакост, систем

$$\nabla f_i(\hat{x})'h < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}(\hat{x})$$

нема решење ни за једно $h \in \mathbb{R}^n$, а то је у контрадикцији са условом Мангасаријан-Фромовиц. Закључујемо да мора бити $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Ако поделимо једнакост (11) са $\hat{\lambda}_0$ и ставимо

$$\hat{u}_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\lambda}_0},\ i \in \{1, ..., m\},$$

очигледно важе услови 1-3.

$\square$

Овај доказ је пример примене теорема алтернативе и услова регуларности у извођењу неопходних услова оптималности у коначно димензионим просторима. Више о условима регуларности може се наћи у [43, 7, 5, 44, 82, 1].

2.4 Нова теорема алтернативе у бесконачно димензионим просторима

Године 1977. Крејвен и Колиха формулисали су уопштење Фаркашеве леме у бесконачно димензионим просторима [18, 17] коју је користио Рејиланд за извођење неопходних услова оптимизације са непрекидним временом у [53]. У пракси се уопштена Фаркашева лема показала као тешка за примену јер су њене претпоставке биле тешко проверљиве. У свом раду [75], Залмаи је 1985. године покушао да уопшти Горданову теорему, наведену у претходном пододељку, како би могла да се примењује на проблеме оптимизације са непрекидним временом у бесконачно димензионим просторима, без додатних претпоставки регуларности. Користећи поменуто тврђење исте године је у својим радовима [76, 77, 78, 79, 81] обрадио гладак, конвексан, рационалан и тзв. хомогени проблем, као специјалан случај глатког проблема уз додатне претпоставке.

Теорема 14. [75](Уопштена Горданова теорема) Нека је U непразан конвексан подскуп од $L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ и нека је пресликавање $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дефинисано са $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$, где γ пресликава U у $L_\infty([0,T], \mathbb{R}^k)$, конвексно по свом другом аргументу на $[0,T]$. Тада,

или $\quad I \quad$ Постоји $x(\cdot) \in U$ тако да је $g(t, x(t)) < 0$ с.с. на $[0,T]$,

или $\quad II \quad \displaystyle\int_0^T \langle \varphi(t), g(t, x(t)) \rangle dt \geq 0,$ за свако $x(\cdot) \in U$ и за неко $\varphi(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^k)$, $\varphi(t) \geq 0, \varphi(t) \neq 0$ с.с. на $[0,T]$.

Запис $\langle a, b \rangle$ овде означава скаларни производ вектора $a, b \in \mathbb{R}^k$.

Наведено тврђење је, осим у горе поменутим радовима Залмаија, служило и за извођење многих важних резултата у радовима других аутора [13, 19, 20, 21, 33] који разматрају услове оптималности у нелинеарном програмирању. Можемо рећи да је уопштење Горданове теореме било значајно и због тога што су резултати до којих је довело многим математичарима послужили као инспирација за разматрање услова оптималности проблема са непрекидним временом. Ипак, године 2019. Арјутунов, Жуковски и Маринковић су у свом раду [6] помоћу контрапримера, који у наставку наводимо, показали да је та теорема нетачна, због чега је било неопходно ревидирати резултате добијене помоћу ње.

Пример 2.2. [6] Посматрајмо систем

$$1 - tx < 0.$$

Овде је $U = L_\infty([0,1], \mathbb{R})$. На $L_\infty([0,1], \mathbb{R})$ овај систем нема решења јер свака функција

$x(\cdot)$ која задовољава неједнакост $1 - tx(t) < 0$ за с.с. t није есенцијално ограничена. Нека је $\varphi(\cdot) \in L_\infty([0,1], \mathbb{R}_+)$ произвољна ненула функција. Ставимо за свако $\varepsilon \in (0,1)$

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \varepsilon], \\ \dfrac{1+\varphi(t)}{t}, & t \in (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Тада ће за довољно мало $\varepsilon > 0$ бити

$$\int\limits_0^1 g(t, x_\varepsilon(t))\varphi(t)dt = \int\limits_0^\varepsilon \varphi(t)dt - \int\limits_\varepsilon^1 \varphi^2(t)dt < 0,$$

па закључујемо да не важи ни тврђење *II* Теореме 14, односно та теорема није тачна.

У горе поменутом раду [6] аутори су формулисали нову теорему алтернативе, која ће и у овој дисертацији послужити као основни апарат у доказима главних тврђења. Како би та нова теорема могла да се примени, мора важити додатна претпоставка регуларности.

Нека је $(E, \|\cdot\|)$ Банахов простор и нека су дате функције $f_i : [0,1] \times E \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, ..., k$. Претпоставимо да је $X \subset E$ затворен и конвексан и нека су I_1 и I_2 скупови индекса тако да важи $I_1 \sqcup I_2 = \{1, ..., k\}$ ($\sqcup$ је ознака за дисјунктну унију). Са $L_\infty([0,1], X)$ означаваћемо простор n-димензионих Лебег-мерљивих, есенцијално ограничених функција $x : [0,1] \to X$ на сегменту $[0,1]$. Погледајмо систем

$$\begin{cases} f_i(t,x) \leq 0, & i \in I_1 \\ f_i(t,x) < 0, & i \in I_2 \\ x \in X. \end{cases} \tag{12}$$

Решење система (12) је функција $x(\cdot) \in L_\infty([0,1], X)$ таква да за с.с. $t \in [0,1]$ важи следеће:

$$f_i(t, x(t)) \leq 0,\, i \in I_1, \;\; f_i(t, x(t)) < 0,\, i \in I_2, \;\; x(t) \in X.$$

Претпоставићемо да су задовољени и следећи услови:

(A1) Функције $f_i(t, \cdot)$ су конвексне и непрекидне на X, и $X \subset int(dom(f_i(t, \cdot)))$ за с.с. $t \in [0,1], i = 1, ..., k$;

(A2) Функције $f_i(\cdot, x)$ су Лебег-мерљиве за све $x \in X, i = 1, ..., k$;

(A3) За свако $K \geq 0$ постоји $M = M(K) \geq 0$ тако да

$$|x| \leq K \Rightarrow |f_i(t,x)| \leq M \;\text{ за с.с. }\; t \in [0,1],\, \forall x \in X,\, i = 1, ..., k.$$

Нека је $\mathcal{I}(t,x)$ скуп активних индекса за систем (12), тј.

$$\mathcal{I}(t,x) := \left\{ i : f_i(t,x) = \max_{j=1,\dots,k} f_j(t,x) \right\}, \;\; t \in [0,1],\, x \in X.$$

Треба имати у виду да $\max\limits_{j=1,\dots,k} f_j(t,x)$ означава максимум функција тачка по тачка који се дефинише на следећи начин.

Дефиниција 10. За дате функције $f_1, f_2, ..., f_k : [0,1] \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је $f_i(t,x)$

максимум функција тачка по тачка скоро свуда на $[0,1]$ ако важи

$$f_i(t,x) \geq f_j(t,x) \quad \text{за с.с. } t \in [0,1],\, x \in X,\, j \in \{1,...,k\}$$

и пишемо $f_i(t,x) = \max\limits_{j=1,\dots,k} f_j(t,x)$.

У Банаховом простору $(E, \|\cdot\|)$ означаваћемо са $\langle \varphi, x\rangle$ вредност функционала $\varphi \in E^*$ у тачки $x \in E$, али и скаларни производ $\varphi, x \in \mathbb{R}^n$.

Дефиниција 11. За затворен и конвексан $X \subset E$, тангентни конус скупа X у његовој тачки x, у ознаци $T_X(x)$, садржи све тачке $\gamma \in E$ које се могу представити са

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x}{\alpha_k},$$

где је $\{x_k\}$ низ тачака из X који конвергира ка x, а $\{\alpha_k\}$ низ позитивних бројева који конвергира ка нули.

Дефиниција 12. За конвексну функцију $f : E \to \mathbb{R}$ означаваћемо субдиференцијал функције f у тачки x са

$$\partial f(x) = \{x^* \in E : f(x+h) \geq \langle x^*, h\rangle + f(x), \forall h \in E\}.$$

За $f : [0,T] \times E \to \overline{\mathbb{R}}$ и тачку $t \in [0,T]$ такву да је функција $f(t,\cdot)$ конвексна, означаваћемо са $\partial_x f(t,x)$ субдиференцијал $f(t,\cdot)$ у тачки $x \in E$.

Дефиниција 13. [6] Кажемо да је систем (12) регуларан, ако постоји функција $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,1], X)$ и реални бројеви $R \geq 0$ и $\alpha > 0$ тако да за с.с. $t \in [0,1]$ и за све $x \in X$ такве да је $\|x - \bar{x}(t)\| \geq R$, постоји вектор $e = e(t,x) \in -T_X(x)$, $\|e\| = 1$, који задовољава

$$\langle x^*, e\rangle \geq \alpha \quad \forall x^* \in \partial_x f_i(t,x),\, i \in \mathcal{I}(t,x),$$

при чему је $T_X(x)$ тангентни конус скупа X у тачки x тог скупа.

Пример 2.3. Нека су за $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $t \in [0,1]$ дате функције

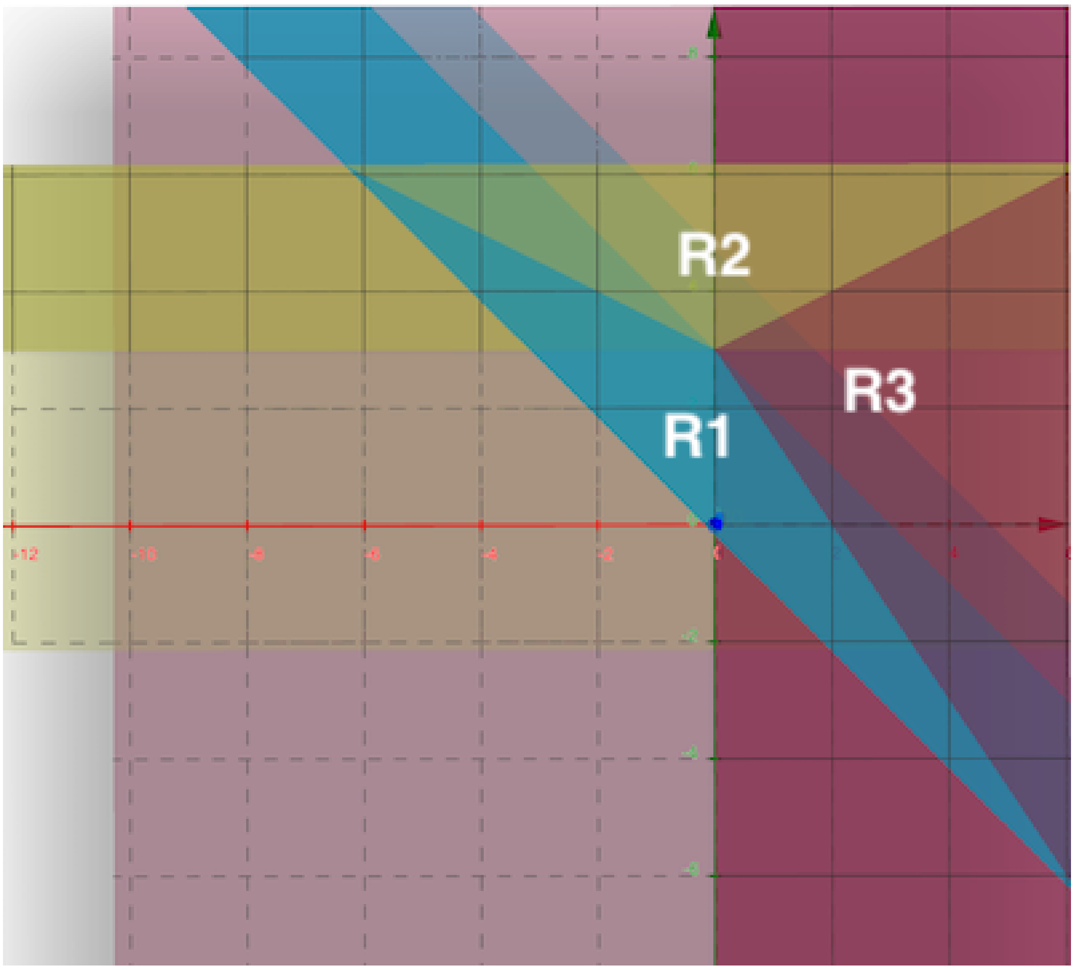
$$\begin{aligned} f_1(t,x) &= 9 - 3x_1 - 3x_2, \\ f_2(t,x) &= |x_2 - 3| + 2x_2 - 6, \\ f_3(t,x) &= \frac{|x_1|}{2} + x_1. \end{aligned}$$

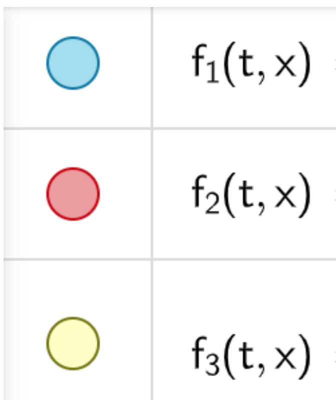
Размотримо систем

$$\begin{cases} f_1(t,x) < 0, \\ f_2(t,x) \leq 0, \\ f_3(t,x) \leq 0, \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{13}$$

Дефинишимо скупове

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + 2x_2 \leq 6\},$$
$$R_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \geq 6,\ x_2 - \frac{1}{2}x_1 \geq 3\},$$
$$R_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - \frac{1}{2}x_1 \leq 3,\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3\}.$$





Очигледно важи

$$\bigcup_{i=1}^{3} R_i = \mathbb{R}^2.$$

На слици можемо уочити да ће за $x \in intR_1$ с.с. на [0,1] бити $\mathcal{I}(t,x) = \{1\}$.

За $x \in intR_2$ биће $\mathcal{I}(t,x) = \{2\}$ с.с. на [0,1].

За $x \in intR_3$, $\mathcal{I}(t,x) = \{3\}$ и $\{1,2\} \notin \mathcal{I}(t,x)$ за $x \in R_3$.

За $x \in int(R_1 \cup R_3), \mathcal{I}(t,x) = \{1,3\}$ с.с. на [0,1].

За $x \in int(R_2 \cup R_3), \mathcal{I}(t,x) = \{2,3\}$ и коначно за $x \in int(R_1 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{1,2\}$ с.с. на [0,1].

Систем (13) је регуларан за $\hat{x}(t) = (0,3)$, $\quad R = \frac{1}{10}$, $\quad \alpha = \frac{1}{13}$ и скоро свуда на [0,1], $e(t,x) = (-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$, за $x \in R_1$ и $e(t,x) = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$, за $x \in int(R_2 \cup R_3)$.

Теорема 15. (Теорема алтернативе [6]) Нека је Банахов простор E сепарабилан, систем (12) регуларан и за скоро свако $t \in [0,1]$ постоји вектор $x = x(t) \in X$ тако да је $f_i(t, x(t)) < 0$ за свако $i \in I_1$. Тада је тачно само једно од следећа два тврђења.

(i) Постоји решење $\chi(\cdot)$ система (12);

(ii) Постоји ненула функција $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), ..., \varphi_k(\cdot)) \in L_\infty([0,1], \mathbb{R}^k_+)$ таква да је $\varphi_i(t) \not\equiv 0$ за неко $i \in I_2$ и
$$\sum_{i=1}^{k} f_i(t,x)\varphi_i(t) \geq 0 \quad \text{с.с. на } [0,1], \quad \forall x \in X.$$

Ова теорема ће важити и ако сегмент $[0,1]$ заменимо сегментом $[0,T]$.

Готово свака теорема алтернативе у бесконачно димензионим просторима захтева неки услов регуларности. Показали смо кроз претходни пример да овај услов регуларности неопходан за примену теореме коју су формулисали Арјутунов, Жуковски и Маринковић неће бити компликован за проверу.

2.5 Субдиференцијали

При разматрању проблема са неглатким функцијама, користан алат ће нам бити субдиференцијали, чију смо дефиницију навели у претходном тексту. Субдиференцијал представља скуп правих које се налазе испод графика конвексне функције па га можемо дефинисати и преко субградијената. Увек ће бити затворен и конвексан скуп. Овде ћемо навести особине и тврђења који ће нам бити од значаја.

Дефиниција 14. Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ конвексна функција. Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ је субградијент функције f у тачки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ако важи
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle y, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Дефиниција 15. Скуп свих субградијената конвексне функције f у тачки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, назива се субдиференцијал функције f у тачки x_0 и означава се са $\partial f(x_0)$. Ако је функција f непрекидно диференцијабилна у тачки x_0, пишемо $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$.

Лема 16. Нека је C конвексан скуп. Ако је субдиференцијал функције f на скупу C, $\partial_C f(x)$, непразан скуп за свако $x \in C$, тада је f затворена и конвексна функција на скупу C.

Наредна тврђења се односе на рачунске операције са субдиференцијалима.

Лема 17. Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in dom(f)$. Тада важи

$$\partial(kf)(x_0) = k\partial f(x_0), \quad \forall k > 0.$$

Доказ. Према дефиницији субдиференцијала

$$\partial f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x_0) + \langle v, y - x_0 \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Тада за свако $k > 0$ и произвољно $v \in \partial f(x_0)$ важи

$$kf(y) \geq kf(x_0) + \langle kv, y - x_0 \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

односно $kv \in \partial(kf)(x_0)$. С друге стране, за произвољно $v \in \partial(kf)(x_0)$ је испуњено

$$kf(y) \geq kf(x_0) + \langle v, y - x_0 \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Кад поделимо последњу неједнакост са $k > 0$ добијамо

$$f(y) \geq f(x_0) + \langle \frac{v}{k}, y - x_0 \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

па следи да је $\frac{v}{k} \in \partial f(x_0)$.

□

Како је збир затворених и конвексних функција затворена и конвексна функција, може се доказати и наредно тврђење које говори о сабирању субдиференцијала [16].

Лема 18. Нека су функције f_1 и f_2 затворене и конвексне и $k_1, k_2 \geq 0$. Тада је и функција $f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ затворена и конвексна, а њен субдиференцијал је

$$\partial f(x) = k_1 \partial f_1(x) + k_2 \partial f_2(x), \quad \forall x \in dom(f) = dom(f_1) \cap dom(f_2). \tag{14}$$

Теорема 19 (Moro-Rokafelar)**.** Нека за дате функције $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ постоји $x_0 \in \cap_{i=1}^m dom(f_i)$ тако да су све f_i, осим евентуално једне, непрекидне у x_0. Тада је испуњено

$$\partial \left(\sum_{i=1}^m f_i \right)(x) = \sum_{i=1}^m \partial f_i(x), \ \forall x \in \cap_{i=1}^m dom(f_i).$$

Теорема 20. Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ конвексна функција. f достиже локални, односно, глобални минимум у тачки $x_0 \in dom(f)$ ако и само ако $0 \in \partial f(x_0)$.

За доказе наведених тврђења и више о теорији субдиференцијала читалац се упућује на [3, 9, 12, 45].

Пример 2.4. Нађимо субдиференцијал функције $f(x) = 2|x - 1| + |x|$.

Домен ове функције је цео скуп реалних бројева, а диференцијабилна је на $\mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Конвексна је као збир конвексних функција.

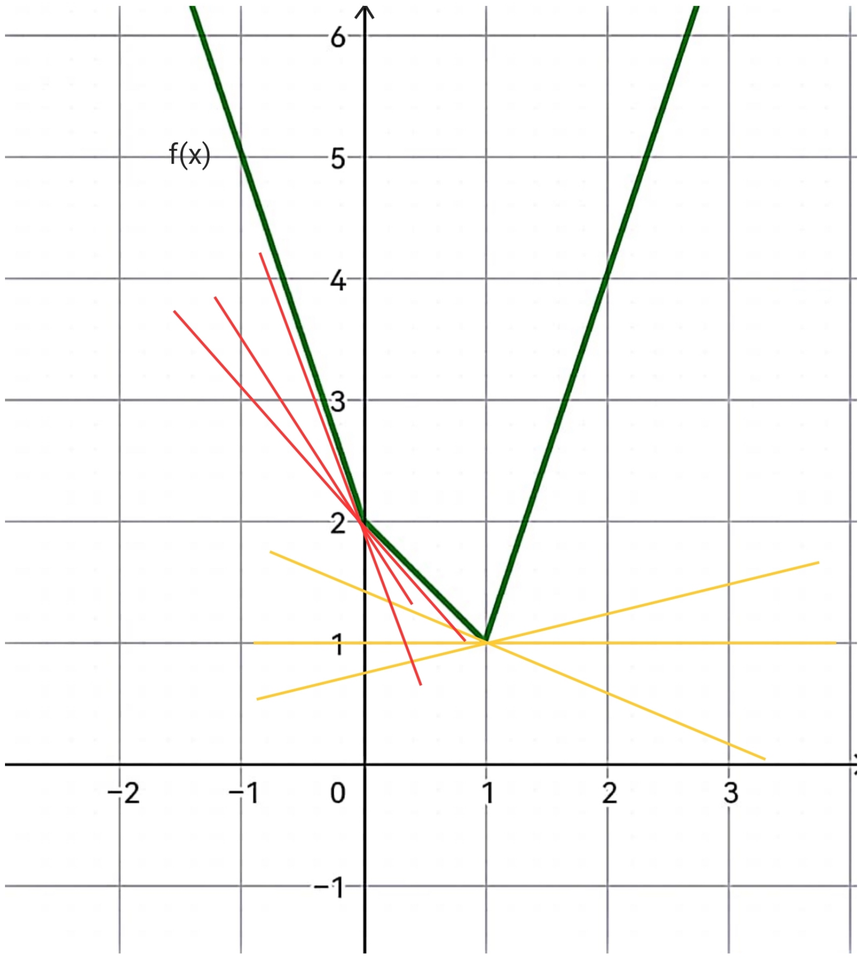
Ако означимо $f_1(x) = 2|x - 1|$ и $f_2(x) = |x|$, биће

$$\partial f(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \text{ за } x \neq 0 \text{ и } x \neq 1,$$

односно

$$\partial f(x) = \begin{cases} (2-3x)' = -3, & x < 0, \\ (2-x)' = -1, & 0 < x < 1, \\ (3x-2)' = 3, & x > 1. \end{cases}$$

Размотримо случајеве када је $x = 0$ и $x = 1$. На следећој слици можемо видети графички приказ субградијената у овим тачкама.



Функција $f_1(x)$ је диференцијабилна за $x = 0$, али $f_2(x)$ није. Стога важи да је $\partial f_1(0) = -2$, док ће субдиференцијал функције $f_2(0)$ бити скуп свих $v \in \mathbb{R}$ таквих да је за свако $y \in \mathbb{R}$ испуњено

$$f_2(y) - f_2(0) \geq \langle v, y - 0 \rangle,$$

тј.

$$f_2(y) \geq vy.$$

Закључујемо да је $\partial f_2(x) = [-1, 1]$, па следи

$$\partial f(0) = [-3, -1].$$

Слично за $x = 1$ је $\partial f_1(x) = [-2, 2]$ и $\partial f_2(x) = 1$, односно

$$\partial f(1) = [-1, 3].$$

Због претходног разматрања важи да је субдиференцијал функције $f(x) = 2|x-1| + |x|$

$$\partial f(x) = \begin{cases} -3, \quad x < 0, \\ [-3,-1], \quad x = 0, \\ -1, \quad 0 < x < 1, \\ [-1,3], \quad x = 1, \\ 3, \quad x > 1. \end{cases}$$

3 Услови оптималности за једну класу проблема конвексног програмирања са непрекидним временом

Размотримо следећи проблем максимизације

$$
\begin{aligned}
\max \quad & J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T f(t, x(t))dt \\
\text{п.о.} \quad & g(t, x(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \qquad\qquad (\Pi) \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n),
\end{aligned}
$$

где су $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дате функције. Претпоставићемо да су функције $t \mapsto f(t, x(t))$ и $t \mapsto g(t, x(t))$ Лебег-мерљиве, интеграбилне за свако $x \in \mathbb{R}^n$, конвексне за скоро свако $t \in [0, T]$ и за свако $M \geq 0$, $N \geq 0$ постоје, редом, $L = L(M) \geq 0$, $K = K(N) \geq 0$ тако да

$$\|x\| \leq M \Rightarrow |f(t, x)| \leq L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{с.с. на } [0, T],$$

$$\|x\| \leq N \Rightarrow |g_i(t, x)| \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i \in I = \{1, ..., m\}, \quad \text{с.с. на } [0, T].$$

Означимо са $\mathbb{F}$ скуп свих допустивих решења проблема (П) (претпостављамо да је непразан), тј.,

$$\mathbb{F} = \{x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n) : g(t, x(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на} \ [0, T]\}.$$

Дефиниција 16. Кажемо да је функција $\hat{x}(\cdot) \in \mathbb{F}$ апсолутно решење проблема (П) ако

$$J(x(\cdot)) \leqslant J(\hat{x}(\cdot)), \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}.$$

Како бисмо постављени проблем линеаризовали помоћу субдиференцијала, од кључног значаја ће нам бити следећа лема.

Лема 21. Ако постоји апсолутно решење $\hat{x}(\cdot)$ проблема (П), систем

$$
\begin{aligned}
& \phi_0(t, x) := -\int\limits_0^T \langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)), x - \hat{x}(t) \rangle \, dt < 0, \\
& \phi_i(t, x) := -g_i(t, \hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x - \hat{x}(t) \rangle \leq 0, \ \ i \in I, \qquad\qquad (\mathrm{C}) \\
& x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

нема решења за с.с. $t \in [0, T]$.

Доказ. Нека је $\overline{x}(\cdot)$ решење система (С). Тада важи

$$\int_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \, dt > 0, \tag{15}$$

$$g_i(t,\hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \geq 0, \;\; i \in I, \;\; \text{с.с. на} \;\; [0,T]. \tag{16}$$

Из (16) закључујемо $g_i(t,\overline{x}(t)) \geq 0$, јер је

$$g_i(t,\overline{x}(t)) - g_i(t,\hat{x}(t)) \geq \langle \partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle\,, \;\; i \in I, \;\; \text{с.с. на} \;\; [0,T],$$

што значи да $\overline{x}(\cdot) \in \mathbb{F}$. Када интегралимо неједнакост

$$f(t,\overline{x}(t)) - f(t,\hat{x}(t)) \geq \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle$$

на $[0,T]$, добијамо

$$\int_0^T (f(t,\overline{x}(t)) - f(t,\hat{x}(t)))dt \geq \int_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \, dt > 0.$$

Закључујемо

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^T f(t,\overline{x}(t))dt > \int_0^T f(t,\hat{x}(t))dt = J(\hat{x}(\cdot)),$$

што је супротно претпоставци да је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење за (П).

$\square$

Означимо са

$$\mathcal{I}(t,x) := \left\{ l : \phi_l(t,x) = \max_{p \in \{0\} \cup I} \phi_p(t,x) \right\}, \;\; t \in [0,T], \, x \in \mathbb{R}^n$$

скуп активних индекса за систем (С).

Дефиниција 17. Кажемо да је систем (С) регуларан, ако постоји функција $\overline{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, реални бројеви $R \geq 0$ и $\alpha > 0$ такви да за с.с. $t \in [0,T]$ и за свако $x \in \mathbb{R}^n$ за које је $\|x - \overline{x}(t)\| \geq R$, постоји вектор $e = e(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, тако да важи

$$\langle \partial_x \phi_l(t,x), e\rangle \geq \alpha, \quad \forall l \in \mathcal{I}(t,x).$$

Приметимо да за скоро свако $t \in [0,T]$ важи

$$\langle \partial_x \phi_0(t,x), e\rangle \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \langle -\partial_x f(t,\hat{x}(t)), e\rangle \geq \alpha$$

и

$$\langle \partial_x \phi_i(t,x), e\rangle \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \langle -\partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), e\rangle \geq \alpha, \quad i \in I,$$

где је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење проблема (П).

Наредна теорема нам даје неопходне услове Каруш-Кун-Такеровог типа за постављени проблем (П).

Теорема 22. Нека је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење проблема (П). Претпоставимо да је систем (С) регуларан и постоји $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ тако да је $g(t, x(t)) > 0$ за скоро свако $t \in [0, T]$. Тада, постоји функција $\hat{u}(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ која задовољава следеће услове:

1. $\hat{u}(t) \geq 0 \quad$ с.с. на $[0, T]$,
2. $\hat{u}'(t)g(t, \hat{x}(t)) = 0 \quad$ с.с. на $[0, T]$,
3. $f(t, x(t)) + \hat{u}'(t)g(t, x(t)) \geq f(t, \hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t, \hat{x}(t))$,

   $\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$.

Доказ. Како је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење за (П), на основу Леме 21 систем

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)), x - \hat{x}(t) \rangle \, dt < 0, \\
&- g_i(t, \hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x - \hat{x}(t) \rangle \leq 0, \quad i \in I \\
&x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

нема решење. Претпоставићемо да постоји $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ тако да $g(t, x(t)) > 0$ за скоро свако $t \in [0, T]$. Имајући у виду да је

$$g(t, \hat{x}(t)) \geq g(t, x(t)) + \langle \partial_x g(t, \hat{x}(t)), \hat{x}(t) - x(t) \rangle,$$

закључујемо

$$g(t, \hat{x}(t)) + \langle \partial_x g(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \geq g(t, x(t)) > 0, \quad \text{с.с. на } [0, T].$$

Из Теореме 15 следи да постоји ненула функција $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\varphi}_1(\cdot), ..., \hat{\varphi}_m(\cdot)) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}_+^{m+1})$ таква да је $\hat{\lambda}(t) \not\equiv 0$ и

$$\begin{aligned}
&\hat{\lambda}(t) \int_0^T \langle \partial_x f(s, \hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s) \rangle \, ds + \\
&\sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t)(g_i(t, \hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle) \leq 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0, T]$. Ако ставимо $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$, добијамо

$$\sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) \leq 0,$$

односно

$$\sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t) g_i(t, \hat{x}(t)) = 0, \tag{18}$$

јер је $\hat{\varphi}_i(t) \geq 0$ и $g_i(t, \hat{x}(t)) \geq 0$ с.с. на $[0, T], i \in I$.

Из неједнакости (17) следи

$$\hat{\lambda}(t) \int_0^T \langle \partial_x f(s, \hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s) \rangle \, ds + \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t) \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Након што интегралимо ову неједнакост на сегменту $[0,T]$, добијамо

$$\int_0^T \left(\hat{\eta} \langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle + \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t) \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \right) dt \leq 0,$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$, при чему је

$$\hat{\eta} = \int_0^T \hat{\lambda}(t) dt > 0. \tag{19}$$

Ако ставимо

$$\hat{u}_i(t) = \frac{\hat{\varphi}_i(t)}{\hat{\eta}} \quad \text{с.с. на } [0,T], \quad i \in I,$$

биће

$$\int_0^T \left\langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \right\rangle dt \leq 0, \quad \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Покажимо да неједнакост (20) имплицира

$$\left\langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \right\rangle = 0, \quad \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n), \text{с.с. на } [0,T]. \tag{21}$$

Ако би постојала нека функција $\overline{x}(\cdot) \in L_\infty(V, \mathbb{R}^n)$ тако да је

$$\left\langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } V,$$

где $V \subset [0,T]$ није скуп мере нула, могли бисмо да дефинишемо функцију

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & t \in V, \\ 0, & t \notin V. \end{cases}$$

Тада би било

$$\left\langle \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), y(t) - \hat{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } [0,T]$$

и последично

$$\int_0^T \left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t)\partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), y(t)-\hat{x}(t) \right\rangle dt > 0,$$

што је у контрадикцији са (20).

Са друге стране, претпоставимо да постоји $\overline{x}(\cdot) \in L_\infty(V,\mathbb{R}^n)$ тако да је

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t)\partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t) \right\rangle < 0 \quad \text{с.с. на } V, \tag{22}$$

где $V \subset [0,T]$ није скуп мере нула.
Дефинишимо функцију

$$y(t) = \begin{cases} 2\hat{x}(t) - \overline{x}(t), & t \in V, \\ 0, \quad t \notin V. \end{cases}$$

Тада је

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t)\partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), y(t)-\hat{x}(t) \right\rangle =$$

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t)\partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), \hat{x}(t)-\overline{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

Ова неједнакост нас опет доводи до контрадикције са (20), па (21) сигурно важи.

Из претходног следи

$$0 = \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t) \rangle + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \langle \partial_x g_i(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t) \rangle \leq$$

$$f(t,x(t)) - f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t)(g_i(t,x(t)) - g_i(t,\hat{x}(t))) =$$

$$f(t,x(t)) - f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) - \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)),$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$, што доказује услов 3. Услов 1 је задовољен по конструкцији, а услов 2 очигледно важи због (18) и (19).

$\square$

Пример 3.1. Размотримо следећи проблем

$$\begin{aligned}
&\max \qquad J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 x_1(t)dt \\
&\text{п.о.} \qquad |x_2(t)-3| + 2x_2(t) - 6 \geq 0 \qquad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,1], \\
&\qquad\qquad 9 - 3x_1(t) - 3x_2(t) \geq 0 \qquad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,1], \\
&\qquad\qquad x(\cdot) \in L_\infty([0,1],\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Апсолутно решење овог проблема је тачка $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (0,3)$ с.с. на $[0,1]$. Услов $g(t,x(t)) > 0$ с.с. на $[0,1]$ је задовољен за $x(t) = (-2,4)$.

Скоро свуда на $[0,1]$ за дато $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, биће

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = -x_1, \\
&\phi_1(t,x) = -\begin{cases} \langle (0,1),(x_1,x_2-3)\rangle, & x_2 < 3, \\ \langle (0\times[1,3]),(x_1,x_2-3)\rangle, & x_2 = 3, \\ \langle (0,3),(x_1,x_2-3)\rangle, & x_2 > 3, \end{cases} \\
&\phi_2(t,x) = 3x_1 + 3x_2 - 9, \\
&x \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Дефинишимо скупове

$$\begin{aligned}
R_0 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - \frac{x_1}{\theta} \geq 3,\ 4x_1 + 3x_2 \leq 9,\ \theta \in [1,3]\}, \\
R_1 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + (3+\theta)x_2 \leq 9 + 3\theta,\ x_2 - \frac{x_1}{\theta} \leq 3,\ \theta \in [1,3]\}, \\
R_2 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 + 3x_2 \geq 9,\ 3x_1 + (3+\theta)x_2 \geq 9 + 3\theta,\ \theta \in [1,3]\}.
\end{aligned}$$

Очигледно је

$$\bigcup_{i=0}^{2} R_i = \mathbb{R}^2.$$

За $x \in intR_0$ важи $\mathcal{I}(t,x) = \{0\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in intR_1$ је $\mathcal{I}(t,x) = \{1\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in intR_2$, $\mathcal{I}(t,x) = \{2\}$ и $\{0,1\} \notin \mathcal{I}(t,x)$ за $x \in R_2$. За $x \in int(R_0 \cup R_1), \mathcal{I}(t,x) = \{0,1\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in int(R_1 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{1,2\}$ и коначно за $x \in int(R_0 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{0,2\}$ с.с. на [0,1]. Јасно је да је систем

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = -x_1 < 0, \\
&\phi_1(t,x) = \theta(3 - x_2) \leq 0, \\
&\phi_2(t,x) = 3x_1 + 3x_2 - 9 \leq 0, \\
&x \in \mathbb{R}^2, \theta \in [1,3],
\end{aligned}$$

регуларан за $\hat{x}(t) = (0,3)$, $R = \frac{1}{10}$, $\alpha = \frac{1}{13}$ и скоро свуда на [0,1], $e(t,x) = (-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ за $x \in int(R_0 \cup R_1)$ и $e(t,x) = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ за $x \in R_2$. Услови 1-3 из Теореме 22 су задовољени за $\hat{u}_1(t) = 1$ и $\hat{u}_2(t) = \frac{1}{3}$ када је $x_2 < 3$ и за $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) = \frac{1}{3}$ када је $x_2 \geq 3$.

3.1 Услови оптималности уз додатне претпоставке регуларности ограничења

У наставку ћемо разматрати сличан проблем максимизације (П'), који је специјалан случај проблема (П). Раздвојићемо афина и неафина ограничења, а затим увести субдиференцијалну апроксимацију проблема (П').

$$\begin{aligned}
\max \quad & J(x(\cdot)) = \int_0^T (a(t)x(t) + b_0(t))dt \\
\text{п.о.} \quad & g(t, x(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \qquad\qquad (\Pi') \\
& A(t)x(t) + b_1(t) \geq 0 \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

где је $a(t)$ матрица формата $1 \times n$, $A(t)$ матрица формата $l \times n$, $b_0(t) \in \mathbb{R}$ и вектор $b_1(t) \in \mathbb{R}^l$. Функције $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ су дате неафине функције. Уз дата афина ограничења, можемо добити нове услове оптималности, где је бар један множилац који одговара неафином ограничењу различит од нуле. Уз све претходне претпоставке за функцију $g(t, x)$, мора важити и следеће:

(i) $a(t) \neq 0$ с.с. на $[0, T]$;

(ii) Систем (С'):

$$\begin{aligned}
& \phi_0(t, x) := -\int_0^T a(t)(x - \hat{x}(t)) < 0, \\
& \phi_i(t, x) := -g_i(t, \hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_i(t, \hat{x}(t)), x - \hat{x}(t) \rangle \leq 0 \ \text{с.с. на} \ [0, T], \\
& i \in I_1 = \{1, ..., m\}, \\
& \phi_j(t, x) := -A_j(t)x(t) - b_{1j}(t) \leq 0 \ \text{с.с. на} \ [0, T], \ \ j \in I_2 = \{1, ..., l\}, \\
& x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

је регуларан, при чему је $I = I_1 \sqcup I_2$ и $\hat{x}(\cdot)$ је апсолутно решење за (П') ;

(iii) Постоји бар једно решење $\tilde{x}(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$ једначине

$$A(t)x(t) + b_1(t) = 0, \ \text{с.с. на} \ [0, T],$$

које није допустиво решење проблема (П').

Теорема 23. Нека је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење проблема (П'). Претпоставимо да важе хипотезе (i), (ii) и (iii) и да постоји $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$такво да за с.с. $t \in [0, T]$

$$g(t, x(t)) > 0 \quad \text{и} \quad A(t)x(t) + b_1(t) > 0.$$

Тада постоје функције $\hat{u}(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ и $\hat{v}(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^l)$ које задовољавају следеће:

1. $\hat{u}(t) \geq 0, \hat{v}(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$ и $\hat{u}(t) \not\equiv 0$ на $[0,T]$,
2. $\hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) = 0$ и $\hat{v}'(t)(A(t)\hat{x}(t) + b_1(t)) = 0$ с.с. на $[0,T]$,
3. $a(t)x(t) + \hat{u}'(t)g(t,x(t)) + \hat{v}'(t)A(t)x(t) \geq$

   $a(t)\hat{x}(t) + \hat{u}'(t)g(t,\hat{x}(t)) + \hat{v}'(t)A(t)\hat{x}(t), \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Доказ. Како је (П') специјалан случај проблема (П), услови доказани у Теореми 22 важе, тако да једино треба показати још $\hat{u}(t) \not\equiv 0$. Претпоставимо супротно, $\hat{u}(t) = 0$ с.с. на $[0,T]$. На основу услова 3 биће

$$a(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \hat{v}'(t)A(t)(x(t) - \hat{x}(t)) \geq 0,\ \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \text{с.с. на } [0,T].$$

Означимо ово пресликавање са

$$\mathcal{A}(x(\cdot)) = (a(t) + \hat{v}'(t)A(t))(x(\cdot) - \hat{x}(t)).$$

Ако ставимо $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$, тада је $\mathcal{A}(\hat{x}(\cdot))$ очигледно једнако нули с.с. на $[0,T]$. Докажимо да ће $\mathcal{A}(x(\cdot))$ да се анулира на целом простору $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$. Претпоставимо супротно, нека је $\overline{x}(\cdot)$ допустива функција таква да је

$$\mathcal{A}(\overline{x}(t)) = (a(t) + \hat{v}'(t)A(t))(\overline{x}(t) - \hat{x}(t)) > 0 \quad \text{с.с. на } V \subset [0,T], \tag{23}$$

где V није скуп мере нула.
Дефинишимо функцију

$$y(t) = \begin{cases} 2\hat{x}(t) - \overline{x}(t), & t \in V, \\ 0, & t \notin V. \end{cases}$$

Сада важи

$$\mathcal{A}(y(t)) = (a(t) + \hat{v}'(t)A(t))(\hat{x}(t) - \overline{x}(t)) \geq 0 \quad \text{с.с. на } V,$$

одакле следи да је

$$(a(t) + \hat{v}'(t)A(t))(\overline{x}(t) - \hat{x}(t)) \leq 0 \quad \text{с.с. на } V.$$

Ово је у контрадикцији са (23), па закључујемо да $\mathcal{A}(x(\cdot))$ мора бити једнако нули на целом простору $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Из (iii) следи да постоји $\tilde{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ таква да за с.с. $t \in [0,T]$

$$A(t)\tilde{x}(t) + b_1(t) = 0,$$

па добијамо

$$\hat{v}'(t)(A(t)\tilde{x}(t) + b_1(t)) - \hat{v}'(t)(A(t)\hat{x}(t) + b_1(t)) = \hat{v}'(t)A(t)(\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)) = 0$$

односно $\mathcal{A}(\tilde{x}(t)) = a(t)(\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)) = 0$ с.с. на $[0,T]$. Како је $a(t) \neq 0$ с.с. на $[0,T]$, добили смо контрадикцију са условом (iii), па $\hat{u}(t)$ не може бити једнако нули.

□

Пример 3.2.

$$
\begin{aligned}
\max \qquad & J(x(\cdot)) = \int_0^1 (-x_1(t))dt \\
\text{п.о.} \quad & -x_1^2(t) + 2x_1(t) - x_2(t) \geq 0 \qquad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,1], \\
& x_1^2(t) - x_1(t) + x_2(t) \geq 0 \qquad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,1], \\
& 2x_1(t) + x_2(t) \geq 0 \qquad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,1], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0,1], \mathbb{R}^2).
\end{aligned}
$$

Апсолутно решење овог проблема биће $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (0,0)$ с.с. на $[0,1]$. Слејтеров услов је испуњен за $x(t) = (1, \frac{1}{2})$ с.с. на $[0,1]$.

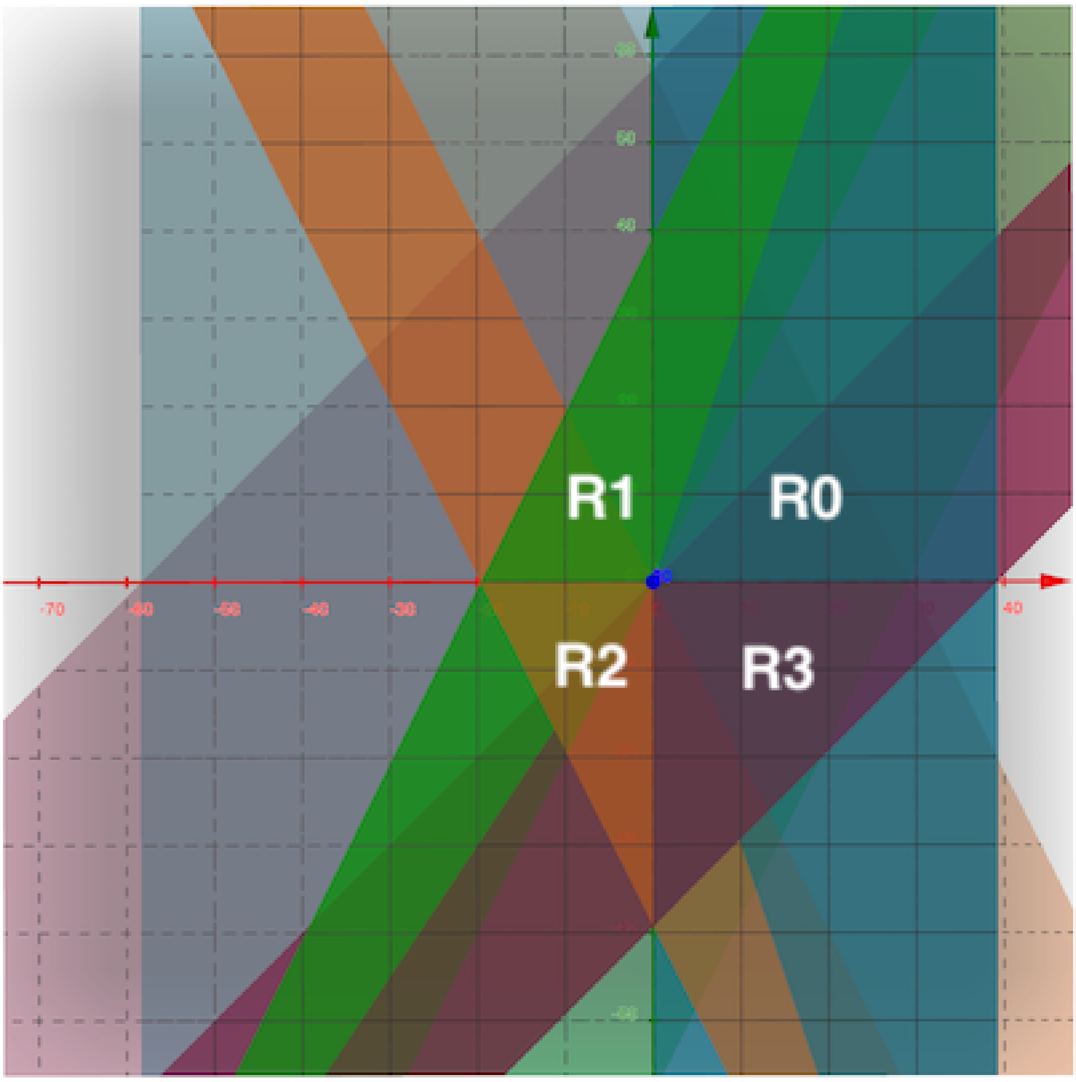
За $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и с.с. $t \in [0,1]$ биће

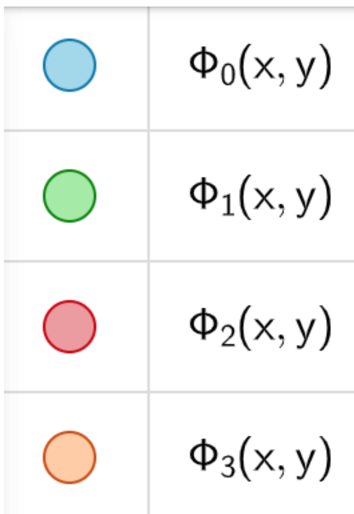
$$
\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = x_1, \\
&\phi_1(t,x) = -2x_1 + x_2, \\
&\phi_2(t,x) = x_1 - x_2, \\
&\phi_3(t,x) = -2x_1 - x_2, \\
&x \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Нека су скупови R_0, R_1, R_2 и R_3 дефинисани на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 3x_1,\ x_2 \geq 0\}, \\
R_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0,\ x_2 \geq 3x_1\}, \\
R_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0\}, \\
R_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0\}.
\end{aligned}
$$

На графичком приказу можемо јасно уочити њихове пресеке.





Лако се може проверити да је

$$R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \mathbb{R}^2.$$

Закључујемо да ће за $(x_1, x_2) \in intR_0$ бити $\mathcal{I}(t,x) = \{0\}$ с.с. на [0,1].

За $(x_1, x_2) \in intR_1$ с.с. на [0,1] је $\mathcal{I}(t,x) = \{1\}$.

За $(x_1, x_2) \in intR_2, \quad \mathcal{I}(t,x) = \{3\}$ и $\{0,1,2\} \notin \mathcal{I}(t,x)$ за $(x_1, x_2) \in R_2$, а за $(x_1, x_2) \in intR_3, \quad \mathcal{I}(t,x) = \{2\}$.

За $(x_1, x_2) \in int(R_0 \cup R_1)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{0,1\}$ с.с. на [0,1].

За $(x_1, x_2) \in int(R_1 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{1,3\}$.

За $(x_1, x_2) \in int(R_2 \cup R_3), \mathcal{I}(t,x) = \{2,3\}$,
а за $(x_1, x_2) \in int(R_0 \cup R_3), \mathcal{I}(t,x) = \{0,2\}$ с.с. на [0,1].

Услов регуларности за систем

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = x_1 < 0,\\
&\phi_1(t,x) = -2x_1 + x_2 \leq 0,\\
&\phi_2(t,x) = x_1 - x_2 \leq 0,\\
&\phi_3(t,x) = -2x_1 - x_2 \leq 0,\\
&x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

је испуњен за $\hat{x}(t) = (0,0), \quad R = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}$ и скоро свуда на [0,1], $e(t,x) = (1,0)$ за $x \in int(R_0 \cup R_3)$ и $e(t,x) = (-1,0)$ за $x \in R_1 \cup R_2$. Услови 1-3 из Теореме 23 су задовољени за $\hat{u}_1(t) = 1, \quad \hat{u}_2(t) = 1$ и $\hat{v}(t) = 0$.

У наредној глави проблему (П) додаћемо интегрално ограничење.

4 Изопериметријски проблем конвексног програмирања са непрекидним временом

Екстремални проблеми који садрже интегрално ограничење типа неједнакости, али не и фазно ограничење, у литератури су познати као проблеми Љапуновљевог типа и разматрани су у [3] . Аутори су дошли до услова оптималности без претпоставке о конвексности. Ова теорија је допринела проучавању конвексног функционала у радовима [32, 25, 56]. Наш циљ у овом поглављу биће да добијемо неопходне услове оптималности за конвексан проблем са непрекидним временом укључујући и интегрално и фазно ограничење типа неједнакости. Као и у претходном поглављу, проблем ће бити негладак, а као основни алат користимо нову теорему алтернативе у бесконачно димензионим просторима.

4.1 Формулација проблема

Посматраћемо изопериметријски проблем

$$\begin{aligned}
\max \quad & J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T f(t, x(t))dt \\
\text{п.о.} \quad & \int\limits_0^T h_i(t, x(t))dt \geq 0, \quad i \in I = \{1, ..., m\}, \qquad \qquad \text{(ИП)} \\
& g_j(t, x(t)) \geq 0, \quad j \in J = \{1, ..., k\} \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

где су $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I$, $g_j : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in J$ дате функције. Сви интеграли су дати у Лебеговом смислу. Користићемо претходно уведене ознаке и сви вектори су колоне.

За постављени проблем (ИП) увешћемо скуп допустивих решења:

$$\mathbb{F} = \{x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n) : \int\limits_0^T h_i(t, x(t))dt \geq 0, \, i \in I, \; g_j(t, x(t)) \geq 0, \, j \in J \; \text{ с.с. на } [0, T]\}.$$

Дефиниција 18. Кажемо да је допустиво решење $\hat{x}(\cdot)$ проблема (ИП) уједно и апсолутно решење тог проблема ако је

$$J(\hat{x}(\cdot)) \geqslant J(x(\cdot)), \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}.$$

Претпостављамо да су функције $f(\cdot, x)$, $h_i(\cdot, x)$ и $g_j(\cdot, x)$ Лебег мерљиве и интеграбилне за све $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in I, j \in J$. Функције $f(t, \cdot)$, $h_i(t, \cdot), i \in I$ и $g_j(t, \cdot), j \in J$ су такође конвексне за с.с. $t \in [0, T]$ и за свако $M \geq 0$, $N \geq 0$, $P \geq 0$ постоје редом $L = L(M) \geq 0$, $K = K(N) \geq 0$ и $Q = Q(P) \geq 0$ тако да је

$$\|x\| \leq M \Rightarrow |f(t,x)| \leq L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq N \Rightarrow |h_i(t,x)| \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i \in I \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq P \Rightarrow |g_j(t,x)| \leq Q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in J \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

4.2 Неопходни услови оптималности

Нека је

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) := -\int_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \, dt < 0,\\
&\phi_i(t,x) := -\int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \, dt \leq 0, \;\; i \in I, \qquad \text{(C1)}\\
&\phi_j(t,x) := -g_j(t,\hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \leq 0, \;\; j \in J, \; \text{с.с. на } \; [0,T],\\
&x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

систем који одговара проблему (ИП).

Лема 24. Ако постоји апсолутно решење $\hat{x}(\cdot)$ проблема (ИП), тада систем (C1) нема решења.

Доказ. Претпоставимо да је $\overline{x}(\cdot)$ решење система (C1). Тада следи

$$\int_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \, dt > 0, \tag{24}$$

$$\int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \, dt \geq 0, \;\; i \in I, \tag{25}$$

$$g_j(t,\hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \geq 0, \;\; j \in J, \;\; \text{с.с. на } [0,T]. \tag{26}$$

Закључујемо да је $\overline{x}(\cdot)$ допустиво решење проблема (ИП), јер је

$$\int_0^T (h_i(t,\overline{x}(t)) - h_i(t,\hat{x}(t)))dt \geq \int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t)\rangle \, dt, \;\; i \in I,$$

па је $\int_0^T h_i(t,\overline{x}(t))dt \geq 0, \;\; i \in I$. Аналогно добијамо $g_j(t,\overline{x}(t)) \geq 0$, $j \in J$ с.с. на $[0,T]$.

По дефиницији субдиференцијала важи

$$f(t,\overline{x}(t)) - f(t,\hat{x}(t)) \geq \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle \text{, с.с. на } [0,T],$$

па интеграцијом на сегменту $[0,T]$ имамо да је

$$\int_0^T (f(t,\overline{x}(t)) - f(t,\hat{x}(t)))dt \geq \int_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle \, dt > 0.$$

Стога

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^T f(t,\overline{x}(t))dt > \int_0^T f(t,\hat{x}(t))dt = J(\hat{x}(\cdot)),$$

што значи да $\hat{x}(\cdot)$ није апсолутно решење проблема (ИП), како смо претпоставили. $\square$

Дефиниција 19. Кажемо да је услов регуларности за систем (С1) задовољен ако постоје функција $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ и реални бројеви $R \geq 0$ и $\alpha > 0$ такви да за с.с. $t \in [0,T]$ и свако $x \in \mathbb{R}^n$ за које је $\|x - \bar{x}(t)\| \geq R$, постоји вектор $e = e(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, који задовољава

$$\langle \partial_x \phi_l(t,x), e \rangle \geq \alpha, \quad \forall l \in \mathcal{I}(t,x),$$

где

$$\mathcal{I}(t,x) := \left\{ l : \phi_l(t,x) = \max_{p \in \{0\} \cup I \cup J} \phi_p(t,x) \right\}, \; t \in [0,T], \, x \in \mathbb{R}^n$$

означава скуп активних индекса система (С1).

Кажемо да је Слејтеров услов регуларности ограничења задовољен ако постоји $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ такав да је $h_i(t,x(t)) > 0, \; i \in I$ и $g_j(t,x(t)) > 0, \; j \in J$ с.с. на $[0,T]$.

Теорема 25. Нека је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење проблема (ИП). Претпоставимо да је (С1) регуларан и да је Слејтеров услов испуњен. Тада постоје $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ и $\hat{v}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^k)$ који задовољавају следеће услове:

1. $\hat{u} \geq 0, \quad \hat{v}(t) \geq 0 \quad$ с.с. на $[0,T]$,

2. $\hat{v}_j(t) g_j(t,\hat{x}(t)) = 0, \; j \in J \quad$ с.с. на $[0,T]$,

3. $f(t,x(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i h_i(t,x(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) g_j(t,x(t)) \geq$
   $f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) g_j(t,\hat{x}(t)), \quad \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n),$ с.с. на $[0,T]$.

Доказ. Нека је $\hat{x}(\cdot)$ апсолутно решење проблема (ИП). Тада на основу Леме 24 закључујемо да систем

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_0^T \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle\, dt < 0,\\
&-\int\limits_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle\, dt \le 0, \quad i\in I\\
&-g_j(t,\hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle \le 0, \quad j\in J
\end{aligned}
$$

није сагласан с.с. на $[0,T]$. На основу Теореме 15 постоји ненула функција $(\hat{\lambda}(\cdot),\hat{\varphi}_1(\cdot),...,\hat{\varphi}_m(\cdot),\hat{\psi}_1(\cdot),...,\hat{\psi}_k(\cdot)) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}_+^{m+k+1})$ при чему је $\hat{\lambda}(t)\not\equiv 0$ с.с. на $[0,T]$, таква да је

$$
\hat{\lambda}(t)\int\limits_0^T \langle \partial_x f(s,\hat{x}(s)), x(s)-\hat{x}(s)\rangle\, ds + \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t)\int\limits_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(s)), x(s)-\hat{x}(s)\rangle\, ds +
$$

$$
\sum_{j=1}^k \hat{\psi}_j(t)(g_j(t,\hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t)\rangle) \le 0, \tag{27}
$$

$\forall x(\cdot)\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$. За $x(\cdot)=\hat{x}(\cdot)$ добијамо да је

$$
\sum_{j=1}^k \hat{\psi}_j(t) g_j(t,\hat{x}(t)) \le 0.
$$

Како важи да је $\hat{\psi}_j(t)\ge 0$ и $g_j(t,\hat{x}(t))\ge 0$ с.с. на $[0,T]$, $j\in J$, закључујемо да ће бити

$$
\sum_{j=1}^k \hat{\psi}_j(t) g_j(t,\hat{x}(t)) = 0. \tag{28}
$$

Из неједнакости (27) следи да је

$$
\hat{\lambda}(t)\int\limits_0^T \langle \partial_x f(s,\hat{x}(s)), x(s)-\hat{x}(s)\rangle\, ds + \sum_{i=1}^m \hat{\varphi}_i(t)\int\limits_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(s)), x(s)-\hat{x}(s)\rangle\, ds +
$$

$$
\sum_{j=1}^k \hat{\psi}_j(t)\, \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t)\rangle \le 0, \quad \forall x(\cdot)\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \text{ с.с. на } [0,T].
$$

Интеграцијом ове неједнакости на сегменту $[0,T]$, добићемо

$$
\int\limits_0^T \hat{\mu}\, \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t)\rangle\, dt +
$$

$$
\int\limits_0^T \left(\sum_{i=1}^m \hat{\eta}_i\, \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t)\rangle + \sum_{j=1}^k \hat{\psi}_j(t)\, \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t)-\hat{x}(t)\rangle \right) dt \le 0,
$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, где је

$$\hat{\mu} = \int_0^T \hat{\lambda}(t)dt > 0 \quad \text{и} \quad \hat{\eta}_i = \int_0^T \hat{\varphi}_i(t)dt \geq 0, \quad i \in I. \tag{29}$$

Последња неједнакост постаје

$$\int_0^T \left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \right\rangle dt \leq 0, \tag{30}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, где смо ставили да је

$$\hat{u}_i = \frac{\hat{\eta}_i}{\hat{\mu}} \quad i \in I \quad \text{и} \quad \hat{v}_j(t) = \frac{\hat{\psi}_i(t)}{\hat{\mu}} \quad j \in J.$$

Докажимо да ће из (30) следити

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \right\rangle = 0, \tag{31}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Претпоставимо да постоји $\overline{x}(\cdot) \in L_\infty(A,\mathbb{R}^n)$ таква да је

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } A,$$

где $A \subset [0,T]$ није скуп мере нула. Ако дефинишемо функцију

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A, \end{cases}$$

биће

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), y(t) - \hat{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

па интеграљењем претходне неједнакости на $[0,T]$ добијамо да је

$$\int_0^T \left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), y(t) - \hat{x}(t) \right\rangle dt > 0,$$

што је у контрадикцији са (30).

Са друге стране претпоставимо да постоји $\overline{x}(\cdot) \in L_\infty(A,\mathbb{R}^n)$ таква да је

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t) - \hat{x}(t) \right\rangle < 0 \quad \text{с.с. на } A, \tag{32}$$

при чему скуп $A \subset [0,T]$ није скуп мере нула. Дефинишимо функцију

$$y(t) = \begin{cases} 2\hat{x}(t) - \overline{x}(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Тада је

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), y(t) - \hat{x}(t) \right\rangle =$$

$$\left\langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), \hat{x}(t) - \overline{x}(t) \right\rangle > 0 \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

што нас такође доводи до контрадикције у односу на (30), па (31) мора да важи.

Из претходног закључујемо да је

$$0 = \langle \partial_x f(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle + \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq$$

$$f(t,x(t)) - f(t,\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i (h_i(t,x(t)) - h_i(t,\hat{x}(t))) + \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t)(g_j(t,x(t)) - g_j(t,\hat{x}(t))),$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$, па је услов 3 задовољен. Услов 2 следи из (28) , док услов 1 важи на основу конструкције.

$\square$

Пример 4.1. Размотримо следећи проблем

$$\max \quad J(x(\cdot)) = \int_0^1 (1 - 2x_1(t) + x_2(t))dt$$

$$\text{п.о.} \quad \int_0^1 (|x_1(t) - 1| + 3x_1(t) - 3)dt \geq 0,$$

$$x_1(t) - 2x_2(t) + 1 \geq 0 \qquad \text{с.с. на } [0,1],$$

$$x(\cdot) \in L_\infty([0,1],\mathbb{R}^2).$$

Апсолутно решење је $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = (1,1)$, а Слејтеров услов $|x_1(t)-1|+3x_1(t)-3 > 0$, $x_1(t) - 2x_2(t) + 1 > 0$ је задовољен за $x(t) = (2,0)$. За дато $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, скоро свуда на $[0,1]$ биће

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = 2x_1 - x_2 - 1,\\
&\phi_1(t,x) = -\begin{cases} \langle (2,0),(x_1-1,x_2-1)\rangle\,, & x_1 < 1,\\ \langle ([2,4]\times 0),(x_1-1,x_2-1)\rangle\,, & x_1 = 1,\\ \langle (4,0),(x_1-1,x_2-1)\rangle\,, & x_1 > 1,\end{cases}\\
&\phi_2(t,x) = -x_1 + 2x_2 - 1,\\
&x \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Дефинишимо

$$\begin{aligned}
R_0 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\theta+2)x_1 - x_2 \geq \theta + 1,\, 3x_1 - 3x_2 \geq 0,\, \theta \in [2,4]\},\\
R_1 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\theta+2)x_1 - x_2 \leq \theta + 1,\, (\theta-1)x_1 + 2x_2 \leq \theta + 1,\, \theta \in [2,4]\},\\
R_2 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 3x_2 \leq 0,\, (\theta-1)x_1 + 2x_2 \geq \theta + 1,\, \theta \in [2,4]\}.
\end{aligned}$$

Лако се проверава да је

$$\bigcup_{i=0}^{2} R_i = \mathbb{R}^2.$$

За $x \in intR_0$, $\mathcal{I}(t,x) = \{0\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in intR_1$ важи $\mathcal{I}(t,x) = \{1\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in intR_2$, $\quad \mathcal{I}(t,x) = \{2\}$ и $\{0,1\} \notin \mathcal{I}(t,x)$ за $x \in R_2$. За $x \in int(R_0 \cup R_1)$, $\mathcal{I}(t,x) = \{0,1\}$ с.с. на [0,1]. За $x \in int(R_1 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{1,2\}$ и коначно за $x \in int(R_0 \cup R_2), \mathcal{I}(t,x) = \{0,2\}$ с.с. на [0,1].

Можемо закључити да је систем

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t,x) = 2x_1 - x_2 - 1 < 0,\\
&\phi_1(t,x) = \theta(1 - x_1) \leq 0,\\
&\phi_2(t,x) = -x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0,\\
&x \in \mathbb{R}^2, \theta \in [2,4],
\end{aligned}$$

регуларан са $\hat{x}(t) = (1,1)$, $\quad R = \frac{1}{100}$, $\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и скоро свуда на [0,1], $e(t,x) = (\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}})$, за $x \in R_0$ и $e(t,x) = (-\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})$, за $x \in int(R_1 \cup R_2)$. Услови 1-3 из Теореме 25 су задовољени за $\hat{u}(t) = \frac{3}{8}, \hat{v}(t) = \frac{1}{2}$ када је $x_1 \geq 1$ и за $\hat{u}(t) = \frac{3}{4}, \hat{v}(t) = \frac{1}{2}$ када је $x_1 < 1$.

4.3 Проблем Љапунова

Ради поређења са нашим изопериметријским проблемом наводимо проблем Љапунова из [3]. Нека су функције $f_i : D \to \mathbb{R}$ конвексне за $i = 0,1,...,k$ и афине за $i = k+1,...,m$, где је D конвексан подскуп векторског простора X и нека су дате функције $L_i : T \times U \to \mathbb{R}$ које су непрекидне за $i = 0,1,...,m$, где је T интервал, а U тополошки простор који ћемо звати област управљања. Функција $u(\cdot)$ је управљање ако јој је домен подскуп интервала T, а кодомен област управљања U. За допустив скуп управљања може се узети скуп свих мерљивих управљања $u(\cdot)$ за које су функције $L_i(t,u(t)), i = 0,1,...,m$ интеграбилне и означимо са $\mathcal{U}$ скуп допустивих управљања на целом интевалу T .

Дефинишимо функционале $F_i : D \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ са

$$F_i(x, u(\cdot)) = f_i(x) + \int_T L_i(t, u(t))dt.$$

Екстремални проблем

$$\begin{array}{lll} \max & F_0(x, u(\cdot)) & \\ \text{п.о.} & F_i(x, u(\cdot)) \leq 0, \quad i = 1, ..., k, & \\ & F_i(x, u(\cdot)) = 0, \quad i = k+1, ..., m, & \end{array} \tag{Љ}$$

зове се проблем Љапунова[7]. Овај проблем је од изузетне важности у областима контроле и стабилности нелинеарних система. Међу конкретнијим примерима можемо навести контролу кретања робота или оптимизацију употребе енергије у системима са обновљивим изворима енергије.

Теорема 26. [3] Нека је $(\hat{x}, \hat{u}(\cdot))$ апсолутно решење проблема (Љ). Тада постоје Лангранжови множиоци $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ такви да је бар један од њих различит од нуле и да важе услови:

1. $\hat{\lambda}_i \geq 0$, $i = 0, 1, ..., k$,
2. $\hat{\lambda}_i F_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, ..., k$,
3. $\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(x) \geq \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x})$, $x \in D$,
4. $\sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i L_i(t, u(t)) \geq \sum_{i=0}^{m} \hat{\lambda}_i L_i(t, \hat{u}(t))$, за с.с. $t \in T$.

Имајући у виду проблем Љапунова и његов значај, интересантно би било у неком будућем истраживању размотрити оптималне услове за следећи изопериметријски проблем:

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\int_0^T f(t, x(t))dt \\ \text{п.о.} & \displaystyle\int_0^T h_i(t, x(t))dt \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\}, \\ & g_j(t, x(t)) \geq 0, \quad j \in \{1, ..., k\} \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \\ & \\ & x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n), \end{array}$$

где су $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $h_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., m\}$ непрекидне, а $g_j : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in \{1, ..., k\}$ конвексне функције, при чему су сви интеграли дати у Лебеговом смислу. Како нису све функције конвексне, не може се применити теорема алтернативе коју смо користили у претходним проблемима. Резултати из ове главе ће нам бити од значаја и за развој теорије дуалности за изопериметријске проблеме са непрекидним временом, која до сада у литератури није разматрана.

[7] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918)

5 Услови оптималности у изопериметријским проблемима вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом

Решавање проблема вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом (у литератури познатих и као векторски проблеми оптимизације са непрекидним временом) пружа велики допринос инжењерству, економији и финансијама више од три деценије, док се у последње време списак тих области шири. У пракси су чести комплексни проблеми код којих је неопходно истовремено наћи минимум (или максимум) више различитих функција. То значи да се уместо једног оптималног решења тражи скуп решења који представља компромис између функција циља, тзв. Парето[8] скуп (или Парето фронт). У уводу је поменут рад [37] у коме су изведени услови оптималности за конвексне проблеме вишекритеријумске оптимизације са непрекидним временом помоћу нове теореме алтернативе. Овим резултатима претходили су резултати из [21, 47, 48, 50] у којима је коришћена нетачна Горданова теорема и њене директне последице. За гладак векторски проблем са непрекидним временом читалац се упућује на [35].

Циљ овог поглавља биће да размотримо следећи изопериметријски проблем вишекритеријумске оптимизације:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \int_0^T f(t,x(t))dt = \left(\int_0^T f_1(t,x(t))dt, ..., \int_0^T f_l(t,x(t))dt \right) \\
\text{п.о.} \quad & \int_0^T h_i(t,x(t))dt \geq 0, \quad i \in I = \{1,...,m\}, \qquad \qquad \text{(ВИП)} \\
& g_j(t,x(t)) \geq 0, \quad j \in J = \{1,...,k\} \quad \text{с.с. на} \quad [0,T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n),
\end{aligned}
$$

где су $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l,\ h_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I,\ g_j : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in J$ дате функције. Нека је

$$
F_r(x(\cdot)) = \int_0^T f_r(t,x(t))dt, \quad x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \quad r \in \{1,...,l\},
$$

где је $f_r(t,x(t))$ r-та компонента $f(t,x(t)) \in \mathbb{R}^l$ и сви интеграли су дати у Лебеговом смислу. Означимо са

$$
\Omega = \{x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n) : \int_0^T h_i(t,x(t))dt \geq 0,\ i \in I,\ g_j(t,x(t)) \geq 0,\ j \in J \ \text{с.с. на}\ [0,T]\}
$$

допустив скуп за проблем (ВИП).

[8] Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923), италијански инжењер и економиста

5.1 Неопходни услови екстремума

Претпоставимо да су функције $f_r(t,\cdot), r \in \{1,...,l\}$, $h_i(t,\cdot), i \in I$ и $g_j(t,\cdot), j \in J$ конвексне у $\mathbb{R}^n$ за с.с. $t \in [0,T]$, а функције $f_r(\cdot,x), r \in \{1,...,l\}$, $h_i(\cdot,x), i \in I$ и $g_j(\cdot,x), j \in J$ Лебег-мерљиве за свако $x \in \mathbb{R}^n$. За све $M \geq 0$, $N \geq 0$, $P \geq 0$ постоје редом $L = L(M) \geq 0$, $K = K(N) \geq 0$ и $Q = Q(P) \geq 0$ тако да

$$\|x\| \leq M \Rightarrow |f_r(t,x)| \leq L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \{1,...,l\} \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq N \Rightarrow |h_i(t,x)| \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i \in I \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq P \Rightarrow |g_j(t,x)| \leq Q, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in J \quad \text{с.с. на } [0,T].$$

За свако $s \in \{1,...,l\}$ дефинисаћемо помоћне проблеме

$$\begin{aligned} \max \quad & F_s(x(\cdot)) \\ \text{п.о.} \quad & \int\limits_0^T h_i(t,x(t))dt \geq 0, \quad i \in I, \\ & g_j(t,x(t)) \geq 0, \quad j \in J \quad \text{с.с. на} \quad [0,T], \\ & F_r(x(\cdot)) \geq F_r(\hat{x}(\cdot)), \quad r \neq s. \end{aligned} \qquad (\Pi_s(\hat{x}(\cdot)))$$

Дефиниција 20. За функцију $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ кажемо да је Парето оптимално решење проблема (ВИП) ако не постоји друго допустиво решење $x(\cdot)$ тог проблема такво да важи

$$F_r(x(\cdot)) \geqslant F_r(\hat{x}(\cdot)), \quad \forall r \in \{1,...,l\},$$

при чему је барем једна неједнакост строга.

Наредна лема ће нам бити од великог значаја приликом извођења неопходних услова екстремума за постављени проблем (ВИП), с обзиром на то да представља везу између њега и одговарајућег скаларног проблема.

Лема 27. Функција $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ је Парето оптимално решење проблема (ВИП) ако и само ако је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема $(\Pi_s(\hat{x}(\cdot)))$ за свако $s \in \{1,...,l\}$.

Доказ. *(Неопходност.)* Претпоставимо да је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење проблема (ВИП), али да није оптимално решење проблема $(\Pi_s(\hat{x}(\cdot)))$ за неко s . Тада постоји функција $x(\cdot) \in \Omega$ за коју важи $F_s(x(\cdot)) > F_s(\hat{x}(\cdot))$ и $F_r(x(\cdot)) \geq F_r(\hat{x}(\cdot))$ за $r \neq s$, односно добијамо контрадикцију са претпоставком да је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење.

(Довољност.) Нека је $\hat{x}(\cdot)$ оптимално решење проблема $(\Pi_s(\hat{x}(\cdot)))$ за свако $s \in \{1,...,l\}$. Тада не постоји $x(\cdot) \in \Omega$ за коју је $F_r(x(\cdot)) \geq F_r(\hat{x}(\cdot))$, $\quad r \in \{1,...,l\}$, при чему за најмање једно r важи строга неједнакост. По дефиницији закључујемо да је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење проблема (ВИП).

$\square$

Нека је $\hat{x}(\cdot) \in \Omega$ Парето оптимално решење проблема (ВИП). У наредном тексту ћемо посматрати систем

$$\begin{aligned}
&\phi_r(t,x) := -\int_0^T \langle \partial_x f_r(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle\, dt < 0, \quad r \in \{1,...,l\},\\
&\phi_i(t,x) := -\int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle\, dt \leq 0, \;\; i \in I,\\
&\phi_j(t,x) := -g_j(t,\hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x-\hat{x}(t)\rangle \leq 0, \;\; j \in J, \text{ с.с. на } [0,T],\\
&x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{C2}$$

Лема 28. Ако постоји Парето оптимално решење $\hat{x}(\cdot)$ проблема (ВИП), тада систем (C2) нема решења.

Доказ. Нека је $\overline{x}(\cdot)$ решење система (C2). Тада је испуњено

$$\int_0^T \langle \partial_x f_r(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle\, dt > 0, \quad r \in \{1,...,l\}, \tag{34}$$

$$\int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle\, dt \geq 0, \;\; i \in I, \tag{35}$$

$$g_j(t,\hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle \geq 0, \;\; j \in J, \text{ с.с. на } [0,T]. \tag{36}$$

Слично као у доказу Леме 24 следи да је $\overline{x}(\cdot)$ допустиво решење проблема (ВИП).

Интеграцијом неједнакости

$$f_r(t,\overline{x}(t)) - f_r(t,\hat{x}(t)) \geq \langle \partial_x f_r(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle, \forall r \in \{1,...,l\} \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

на сегменту $[0,T]$ добијамо да је

$$\int_0^T (f_r(t,\overline{x}(t)) - f_r(t,\hat{x}(t)))dt \geq \int_0^T \langle \partial_x f_r(t,\hat{x}(t)), \overline{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle\, dt > 0, \forall r \in \{1,...,l\}.$$

Одавде се закључује да је

$$F_r(\overline{x}(\cdot)) = \int_0^T f_r(t,\overline{x}(t))dt > \int_0^T f_r(t,\hat{x}(t))dt = F_r(\hat{x}(\cdot)), \forall r \in \{1,...,l\},$$

па смо добили контрадикцију са претпоставком да је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВИП). □

Као и у претходним главама, да бисмо извели неопходне услове оптималности помоћу Теореме 15, неопходно је да уведемо услов регуларности.

Дефиниција 21. Услов регуларности за систем (С2) је задовољен ако постоје функција $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ и реални бројеви $R \geq 0$ и $\alpha > 0$ такви да за с.с. $t \in [0,T]$ и свако $x \in \mathbb{R}^n$ за које је $\|x - \bar{x}(t)\| \geq R$, постоји јединични вектор $e = e(t,x) \in \mathbb{R}^n$, тако да важи

$$\langle \partial_x \phi_q(t,x), e\rangle \geq \alpha, \quad \forall q \in \mathcal{I}(t,x),$$

где је

$$\mathcal{I}(t,x) := \left\{ q : \phi_q(t,x) = \max_{p \in \{1,...,l\} \cup I \cup J} \phi_p(t,x) \right\}, \; t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^n$$

скуп активних индекса система (С2).

Дефиниција 22. Слејтеров услов регуларности ограничења је задовољен ако постоји $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ тако да је испуњено $h_i(t,x(t)) > 0,\; i \in I$ и $g_j(t,x(t)) > 0,\; j \in J$ с.с. на $[0,T]$.

Теорема 29. Претпоставимо да је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВИП). Нека су за систем (С2) задовољени услов регуларности и Слејтеров услов. Тада постоје $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^l$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ и функција $\hat{v}(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^k)$ за које важи:

1. $\hat{\mu} > 0$,
2. $\hat{u} \geq 0, \quad \hat{v}(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$,
3. $\hat{v}'(t) g(t,\hat{x}(t)) = 0$ с.с. на $[0,T]$,
4. $\hat{\mu}' f(t,x(t)) + \hat{u}' h(t,x(t)) + \hat{v}'(t) g(t,x(t)) \geq \hat{\mu}' f(t,\hat{x}(t)) + \hat{u}' h(t,\hat{x}(t)) + \hat{v}'(t) g(t,\hat{x}(t))$,

   $\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Доказ. Како је $\hat{x}(\cdot)$ Парето оптимално решење проблема (ВИП), из Леме 28 следи да систем

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \langle \partial_x f_r(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \, dt < 0, \quad r \in \{1,...,l\}, \\
&-\int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \, dt \leq 0, \quad i \in I \\
&- g_j(t,\hat{x}(t)) - \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x - \hat{x}(t)\rangle \leq 0, \quad j \in J
\end{aligned}$$

нема решења с.с. на $[0,T]$. На основу Теореме 15 постоји ненула функција $(\hat{\lambda}_1(\cdot),...,\hat{\lambda}_l(\cdot),\hat{\varphi}_1(\cdot),...,\hat{\varphi}_m(\cdot),\hat{v}_1(\cdot),...,\hat{v}_k(\cdot)) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}_+^{l+m+k})$ где је $\hat{\lambda}_r(t) \not\equiv 0$ за неко $r \in \{1,...,l\}$ и важи

$$\sum_{r=1}^{l} \hat{\lambda}_r(t) \int_0^T \langle \partial_x f_r(s,\hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s)\rangle \, ds + \sum_{i=1}^{m} \hat{\varphi}_i(t) \int_0^T \langle \partial_x h_i(t,\hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s)\rangle \, ds +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) (g_j(t,\hat{x}(t)) + \langle \partial_x g_j(t,\hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t)\rangle) \leq 0, \tag{37}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$. Аналогно доказу Теореме 25, за $x(\cdot) = \hat{x}(\cdot)$ добијамо да важи услов 3, али и то да ће из неједнакости (37) следити

$$\sum_{r=1}^{l} \hat{\lambda}_r(t) \int_0^T \langle \partial_x f_r(s, \hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s) \rangle \, ds + \sum_{i=1}^{m} \hat{\varphi}_i(t) \int_0^T \langle \partial_x h_i(t, \hat{x}(s)), x(s) - \hat{x}(s) \rangle \, ds +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) \langle \partial_x g_j(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq 0, \quad \forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n), \text{ с.с. на } [0,T].$$

Након интеграције последње неједнакости на сегменту $[0,T]$, добијамо

$$\int_0^T \sum_{r=1}^{l} \hat{\mu}_r \langle \partial_x f_r(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \, dt +$$

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \langle \partial_x h_i(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle + \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(t) \langle \partial_x g_j(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \right) dt \leq 0, \tag{38}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$, где је

$$\hat{\mu}_r = \int_0^T \hat{\lambda}_r(t) dt \geq 0, \quad r \in \{1, ..., l\}, \tag{39}$$

при чему за бар један индекс r важи строга неједнакост и

$$\hat{u}_i = \int_0^T \hat{\varphi}_i(t) dt \geq 0, \quad i \in I. \tag{40}$$

Неједнакост (38) можемо записати

$$\int_0^T \langle \hat{\mu}' \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \hat{u}' \partial_x h(t, \hat{x}(t)) + \hat{v}'(t) \partial_x g(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \, dt \leq 0, \tag{41}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$. Као у доказу Теореме 25 може се показати да из (41) следи

$$\langle \hat{\mu}' \partial_x f(t, \hat{x}(t)) + \hat{u}' \partial_x h(t, \hat{x}(t)) + \hat{v}'(t) \partial_x g(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle = 0, \tag{42}$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$.

Одатле закључујемо да је испуњено

$$0 = \langle \hat{\mu}' \partial_x f(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle + \hat{u}' \langle \partial_x h(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle + \hat{v}'(t) \langle \partial_x g(t, \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq$$

$$\hat{\mu}'(f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))) + \hat{u}'(h(t, x(t)) - h(t, \hat{x}(t))) + \hat{v}'(t)(g(t, x(t)) - g(t, \hat{x}(t))),$$

$\forall x(\cdot) \in L_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$, с.с. на $[0,T]$, односно важи услов 4. Услов 1 је задовољен по конструкцији, а услов 2 следи из (40).

□

Пример 5.1. Илустроваћемо добијене резултате на проблему

$$\max \quad \left(\int_0^1 (x(t) + 2t)\, dt, \;\; \int_0^1 \left(x^2(t) - x(t) + 3\right)\, dt \right)$$

$$\begin{aligned} \text{п.о.} \qquad & \int_0^1 x^2(t)dt \geq 0, \\ & -x(t) \geq 0 \qquad \text{с.с. на } [0,1], \\ & x(\cdot) \in L_\infty([0,1], \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Очигледно је $\hat{x}(t) = 0$ Парето оптимално решење овог проблема и претпоставке из Теореме 29 су задовољене. Лако се проверава да су услови оптималности испуњени за $\hat{\mu}_1(t) = 4$, $\hat{\mu}_2(t) = \frac{1}{2}$, $\hat{u}_1(t) = 1$ и $\hat{v}_1(t) = 2$.

Извели смо неопходне услове оптималности за проблем (ВИП) и показали да ће множиоци уз функцију циља бити ненегативни бројеви међу којима је барем један различит од нуле. Један од праваца будућих истраживања биће да испитамо како би изгледали услови оптималности проблема (ВИП) ако раздвојимо фазна ограничења која су линеарна по x од оних која су нелинеарна по x.

6 Услови оптималности Каруш-Кун-Такеровог типа за гладак проблем

Поменули смо претходно да су велики допринос у области глатких проблема дали Монте и Оливеира. Од нарочитог су значаја резултати добијени у раду [23], где су уз Теорему 15 претпоставили регуларност ограничења типа Мангасаријан-Фромовиц како би добили неопходне услове за гладак проблем најпре са ограничењима типа неједнакости, али затим и за проблем са ограничењима типа неједнакости и једнакости, што раније није обрађено у литератури. Користећи сличан приступ, Јовић је у свом раду [35] извео услове оптималности за гладак проблем вишекритеријумске оптимизације. Циљ у овом поглављу биће да размотримо услове оптималности за гладак проблем са непрекидним временом, уз другачију претпоставку регуларности ограничења. Видећемо да је могуће успоставити Каруш-Кун-Такер-ове услове који су истовремено неопходни и довољни услови за оптимално решење. Сличан приступ коришћен је у [19] за проблем са инвексним функцијама, али су резултати у поменутом раду добијени помоћу нетачне уопштене Гордановe теореме.

Размотримо проблем нелинеарног програмирања са непрекидним временом:

$$\begin{aligned} \min\ \ & \Phi(x(\cdot)) = \int_0^T f(t,x(t))dt \\ \text{п.о.}\ \ & g(t,x(t)) \leq 0 \text{ с.с. на } [0,T], \qquad\qquad (\text{ГП}) \\ & x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

где су $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дате функције. Нека је $\mathbb{F}$ скуп свих допустивих решења за (ГП) , односно

$$\mathbb{F} = \{x(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n) : g(t,x(t)) \leq 0 \ \text{ с.с. на } [0,T]\}.$$

Претпостављамо да су функције $t \mapsto f(t,x(t))$ и $t \mapsto g(t,x(t))$ Лебег-мерљиве, интеграбилне и непрекидно диференцијабилне за свако $x \in \mathbb{R}^n$, а конвексне по свом првом аргументу на $[0,T]$. Додатно, нека за свако $M \geq 0$, $N \geq 0$ постоје редом $L = L(M) \geq 0$, $K = K(N) \geq 0$ тако да

$$\|x\| \leq M \Rightarrow |f(t,x)| \leq L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

$$\|x\| \leq N \Rightarrow |g_i(t,x)| \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \{1,...,m\}, \quad \text{с.с. на } [0,T],$$

при чему $g_i(t,x)$ означава i-ту компоненту од $g(t,x) \in \mathbb{R}^m$.

За свако $x \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1,2,...,m\}$ означићемо са $A_i(x)$ скуп $\{t \in [0,T] : g_i(t,x(t)) = 0\}$, а

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \{i \in \{1,2,...,m\} : g_i(t,x(t)) = 0 \quad \text{с.с. на } [0,T]\}$$

је скуп активних индекса.

Дефинишимо конусе

$$\mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot)) = \{h(\cdot) \neq 0 \mid y(\cdot) + \lambda h(\cdot) \in \mathbb{F}, \forall \lambda \in (0, \delta), \delta > 0\};$$

$$\mathcal{F}(\phi, y(\cdot)) = \{h(\cdot) \in L^n_\infty[0,T] \mid \phi(y(\cdot) + \lambda h(\cdot)) < \phi(y(\cdot)),\ \forall \lambda \in (0,\delta),\ \delta > 0\},$$

где је $\phi : L^n_\infty[0,T] \to \mathbb{R}$. Ако је функција ϕ диференцијабилна у смислу Фрешеа, конус $\mathcal{F}(\phi, y(\cdot))$ можемо да запишемо у облику

$$\{h(\cdot) \in L^n_\infty[0,T] \mid D\phi(y(\cdot))h(\cdot) < 0\},$$

где $D\phi(y(\cdot))$ означава Фрешеов извод функције ϕ у $y(\cdot)$. Ако $h(\cdot)$ из конуса допустивих праваца скупа $\mathbb{F}$ који је допустив за (ГП) задовољава неједнакост

$$D\phi(y(\cdot))h(\cdot) = \int_0^T \nabla f'(t, x(t))h(t)dt < 0,$$

тада ако кренемо од допустиве функције $y(\cdot)$, мало померање дуж допустивог правца ће смањити вредност функције циља. Закључујемо да ако је $y(\cdot)$ локални минимум проблема (ГП), а $h(\cdot)$ задовољава горњу неједнакост, $h(\cdot)$ не може бити допустив правац. Можемо формулисати следеће тврђење.

Теорема 30. [79] Нека је функција ϕ диференцијабилна у смислу Фрешеа у $y(\cdot) \in \mathbb{F}$. Ако је $y(\cdot)$ локално решење проблема (ГП), тада је

$$\mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot)) \cap \mathcal{F}(\phi, y(\cdot)) = \emptyset. \tag{43}$$

Доказ. [79] Претпоставићемо да $z(\cdot) \in \mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot)) \cap \mathcal{F}(\phi, y(\cdot))$. Тада постоје $\delta_1, \delta_2 > 0$ тако да важи

$$\phi(y(\cdot) + \lambda z(\cdot)) < \phi(y(\cdot)) \quad \text{за свако } 0 < \lambda < \delta_1,$$

и

$$y(\cdot) + \lambda z(\cdot) \in \mathbb{F} \quad \text{за свако } 0 < \lambda < \delta_2.$$

Стога ће за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ постојати допустиво решење $y(\cdot) + \lambda z(\cdot),\ 0 < \lambda < \delta$ за које је функција циља мања него за $y(\cdot)$, а то је супротно претпоставци да је $y(\cdot)$ локално решење, па закључујемо да (43) важи.

□

Теорема 31. [79] Нека је $y(\cdot) \in \mathbb{F}$ и претпоставимо да су функције ϕ и γ_i за свако $i \in \mathcal{I}(y(\cdot))$ диференцијабилне у смислу Фрешеа у $y(\cdot)$, а за $i \in \{1, 2, ..., m\} \diagdown \mathcal{I}(y(\cdot))$, γ_i су непрекидне у $y(\cdot)$. Ако је $y(\cdot)$ локално решење проблема (ГП), тада је

$$\mathcal{F}(\phi, y(\cdot)) \cap \left[\bigcap_{i \in \mathcal{I}(y(\cdot))} \mathcal{F}(\gamma_i, y(\cdot)) \right] = \emptyset. \tag{44}$$

Доказ. [79] Покажимо најпре да је пресек конуса $\mathcal{F}(\gamma_i, y(\cdot)), i \in \mathcal{I}(y(\cdot))$ подскуп $\mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot))$. Претпоставимо $z(\cdot) \in \cap_{i \in \mathcal{I}(y(\cdot))} \mathcal{F}(\gamma_i, y(\cdot))$. За $y(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ постоји $\delta_0 > 0$ тако да $y(\cdot) + \lambda z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ за свако $0 < \lambda < \delta_0$. Како $z(\cdot) \in \mathcal{F}(\gamma_i, y(\cdot))$ за свако $i \in \mathcal{I}(y(\cdot))$, постоји

$\delta_i > 0$ тако да важи

$$\gamma_i(y+\lambda z)(t) < \gamma_i(y)(t) = 0 \qquad \text{с.с. на } [0,T], \quad \text{за свако } 0<\lambda<\delta_i.$$

Како су по претпоставци γ_i непрекидне у $y(\cdot)$ за свако $i \in \{1,2,...,m\} \diagdown \mathcal{I}(y(\cdot))$, постојаће $\delta_i > 0$ за које важи

$$\gamma_i(y+\lambda z)(t) \leq 0 \qquad \text{с.с. на } [0,T], \quad \text{за свако } 0<\lambda<\delta_i.$$

Нека је $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_m\}$. Следи да ће функције $y(\cdot)+\lambda z(\cdot)$, $0<\lambda<\delta$ бити допустиве за проблем (ГП), па можемо закључити $z(\cdot) \in \mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot))$, односно $\cap_{i\in\mathcal{I}(y(\cdot))}\mathcal{F}(\gamma_i, y(\cdot)) \subset \mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot))$. Функција $y(\cdot)$ је локално решење проблема (ГП) па по претходној теореми $\mathcal{H}(\mathbb{F}, y(\cdot)) \cap \mathcal{F}(\phi, y(\cdot)) = \emptyset$, а стога важи и (44) .

□

Доказана теорема ће нам бити неопходна за добијање оптималних услова за постављени гладак проблем.

Дефиниција 23. За допустиво решење $y(\cdot)$ проблема (ГП) кажемо да задовољава Каруш-Кун-Такерове услове (скраћено ККТ-услове) ако постоји $\lambda(\cdot) \in L^m_\infty[0,T]$ такво да важи

$$\int_0^T \left(\nabla f'(t,y(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)\nabla g_i(t,y(t)) \right) z(t)dt = 0 \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T],$$

$$\lambda_i(t) g_i(t,y(t)) = 0 \quad \text{с.с.} \quad \text{на } [0,T], \quad i \in \{1,2,...,m\},$$

$$\lambda_i(t) \geqslant 0 \quad \text{с.с.} \quad \text{на } [0,T], \quad i \in \{1,2,...,m\}.$$

У том случају сматрамо да је $y(\cdot)$ Каруш-Кун-Такер-ова тачка (пишемо ККТ-тачка) проблема (ГП).

Дефиниција 24. Допустива тачка $y(\cdot)$ је глобални минимум за (ГП) ако је

$$\Phi(x(\cdot)) \geqslant \Phi(y(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}.$$

Дефиниција 25. Кажемо да g задовољава услов регуларности ограничења (УРО) у тачки $y(\cdot) \in \mathbb{F}$ ако не постоје $v_i(\cdot) \in L_\infty[0,T]$, $v_i(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$, $i \in \{1,2,...,m\}$, који нису сви једнаки нули, такви да је

$$\sum_{i=1}^m \int_{A_i(y)} v_i(t) \nabla g'_i(t,y(t)) z(t)dt \geqslant 0 \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T].$$

Наредна лема нас упућује на систем

$$\int_0^T \nabla f'(t,y(t))z(t)dt < 0, \tag{45}$$

$$\nabla g'_i(t,y(t))z(t) \leqslant 0 \quad i \in \{1,2,...,m\}. \tag{46}$$

Лема 32. Нека је $y(\cdot) \in \mathbb{F}$, систем (45), (46) регуларан и претпоставимо да g задовољава (УРО) у $y(\cdot)$. Ако $y(\cdot)$ не задовољава ККТ-услове, тада постоји $z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ за коју је систем (45),(46) сагласан с.с. на $A_i(y)$, $i \in \{1,2,...,m\}$.

Доказ. Претпоставићемо да систем (45), (46) нема решења. Да бисмо могли да применимо Теорему 15 морамо проверити да ли важи услов да постоји вектор $u(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ такав да је $\nabla g'_i(t, y(t))u(t) < 0, i \in \{1, 2, ..., m\}$. Ако не би постојао, за сваки $u(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ важило би да је $\nabla g'_i(t, y(t))u(t) \geq 0$. Дефинишимо вектор $v(\cdot) \in L^m_\infty[0,T]$ са

$$v_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_i(y), \\ 0, & t \notin A_i(y). \end{cases}$$

Добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{A_i(y)} v_i(t) \nabla g'_i(t, y(t))u(t)dt \geqslant 0 \quad \forall u(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$$

за $v_i(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$, који нису сви једнаки нули, што је супротно (УРО). Зато можемо да применимо Теорему 15 па постоје $w_0 \in \mathbb{R}$ и $w_i(\cdot) \in L_\infty[0,T], i \in \{1, 2, ..., m\}$, где је $w_0 > 0$ и $w_i(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$, такви да је

$$\left(w_0 \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{m} w_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right) z(t) \geq 0 \quad \text{с.с.} \quad \text{на} \;\; [0,T], \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T].$$

Одавде важи и

$$\int_0^T \left(w_0 \nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{m} w_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right) z(t)dt \geq 0, \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T].$$

Ако поделимо претходни израз са w_0 и ставимо $\lambda_i(t) = w_i(t)/w_0, i = 1, 2, ..., m$, добијамо

$$\int_0^T \left(\nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right) z(t)dt \geq 0, \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T].$$

Можемо закључити да важи

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\nabla f'(t, y(t)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \nabla g'_i(t, y(t)) \right) z(t)dt = 0, \quad \forall z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T], \\ &\lambda_i(t) g_i(t, y(t)) = 0 \quad \text{с.с. на} \;\; [0,T], \;\; i \in \{1, 2, ..., m\}, \\ &\lambda_i(t) \geqslant 0 \quad \text{с.с. на} \;\; [0,T], \;\; i \in \{1, 2, ..., m\}. \end{aligned}$$

Следи да $y(\cdot)$ задовољава ККТ-услове, што је супротно претпоставци. Зато постоји $z(\cdot) \in L^n_\infty[0,T]$ које задовољава (45) и (46) .

□

Теорема 33. Претпоставимо да је систем (45), (46) регуларан и g испуњава (УРО) у свакој тачки $y(\cdot) \in \mathbb{F}$. Тада је $y(\cdot)$ глобални минимум за (ГП) ако и само ако је $y(\cdot)$ ККТ-тачка.

Доказ. (Довољност.) Нека допустиво решење $y(\cdot)$ проблема (ГП) задовољава ККТ-услове.

Из конвексности функција f и g следи

$$\int_0^T (f(t,x(t)) - f(t,y(t)))\,dt - \int_0^T \nabla f'(t,y(t))(x(t)-y(t))dt$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)\left[g_i(t,x(t)) - g_i(t,y(t)) - \nabla g_i'(t,y(t))(x(t)-y(t))\right]dt \geq 0,$$

тј.,

$$\int_0^T (f(t,x(t)) - f(t,y(t)))\,dt \geq$$

$$\int_0^T \left(\nabla f'(t,x(t)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)\nabla g_i'(t,y(t))\right)(x(t)-y(t))dt - \int_0^T \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t)[g_i(t,x(t)) - g_i(t,y(t))]\right)dt.$$

Како важе ККТ-услови, добијамо

$$\int_0^T (f(t,x(t)) - f(t,y(t)))\,dt \geq -\int_0^T \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t) g_i(t,x(t))\right)dt \geq 0, \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}.$$

Закључујемо да је $\Phi(x(\cdot)) \geqslant \Phi(y(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}$, односно $y(\cdot)$ је глобални минимум (ГП).

(Неопходност.) Нека је $y(\cdot)$ глобални минимум за (ГП). На основу Теореме 31, систем линеарних неједнакости

$$\int_0^T \nabla f'(t,y(t))z(t)dt < 0,$$
$$\nabla g_i'(t,y(t))z(t) < 0 \quad \text{с.с. на } A_i(y),\ i \in \{1,2,...,m\}$$

нема решења. Претпоставимо да $y(\cdot)$ није ККТ-тачка. Према Леми 32 постоји $z(\cdot) \in L_\infty^n[0,T]$ које задовољава (45),(46), па израз (46) мора бити

$$\nabla g_i'(t,y(t))z(t) = 0 \quad \text{с.с. на } A_i(y),\ i \in \{1,2,...,m\}.$$

Тада постоје $v_i(\cdot) \in L_\infty[0,T]$, $v_i(t) \geq 0$ с.с. на $[0,T]$, $i \in \{1,2,...,m\}$, међу којима је бар један различит од нуле, такви да је

$$\sum_{i=1}^m \int_{A_i(y)} v_i(t)\nabla g_i'(t,y(t))z(t)dt = 0,$$

што је у контрадикцији са (УРО). Закључујемо да $y(\cdot)$ мора бити ККТ-тачка.

□

Приметимо на основу доказа теореме да ће довољност важити независно од услова регуларности и услова (УРО), односно свака ККТ-тачка проблема (ГП) ће бити глобални минимум.

Пример 6.1. Размотрићемо задати проблем

$$
\begin{aligned}
&\varPhi(x) = \int\limits_0^T e^{x(t)} dt \to \inf; \\
\text{п.о.} \quad & x^2(t) \leq 1 \quad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,T], \\
& -x(t) \leq 0 \quad \text{с.с.} \quad \text{на} \quad [0,T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty[0,T].
\end{aligned}
$$

Видимо да је $f(t,x(t)) = e^{x(t)}$, $g_1(t,x(t)) = x^2(t)$ and $g_2(t,x(t)) = -x(t)$. Скуп допустивих решења је очигледно $[0,1]$. Тачка $y \equiv 0$ задовољава ККТ-услове, јер за $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \nabla f(t,y(t)) = 1$, добијамо

$$
\int\limits_0^T \left[\nabla f(t,y(t)) + \lambda_1(t)\nabla g_1(t,y(t)) + \lambda_2(t)\nabla g_2(t,y(t))\right] z(t)dt = 0
$$

за све $z(\cdot) \in L_\infty[0,T]$. Покажимо да је $y \equiv 0$ једино допустиво решење које задовољава ККТ-услове. Нека је $x(\cdot)$ такво да је $x(t) > 0$ с.с. на $[0,T]$ и претпоставимо да задовољава ККТ-услове. Тада постоје $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \in L_\infty[0,T]$ за које важи

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^T [\nabla f(t,x(t)) + \lambda_1(t)\nabla g_1(t,x(t)) + \lambda_2(t)\nabla g_2(t,x(t))] z(t)dt = 0 \qquad \forall z(\cdot) \in L_\infty[0,T], \\
&\lambda_1(t)g_1(t,x(t)) = 0, \lambda_2(t)g_2(t,x(t)) = 0 \qquad \text{с.с. на } [0,T], \\
&\lambda_1(t), \lambda_2(t) \geq 0 \qquad \text{с.с. на } [0,T].
\end{aligned}
$$

Из тога следи

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^T [\nabla f(t,x(t)) + \lambda_1(t) \cdot 2x(t) - \lambda_2(t)] z(t)dt = 0 \qquad \forall z(\cdot) \in L_\infty[0,T], \\
&\lambda_1(t) = 0, \lambda_2(t) = 0 \qquad \text{с.с. на } [0,T],
\end{aligned}
$$

односно

$$
\int\limits_0^T \nabla f(t,x(t)) z(t)dt = 0 \qquad \forall z(\cdot) \in L_\infty[0,T].
$$

Стога је $\nabla f(t,x(t)) = e^{x(t)} = 0$ с.с. на $[0,T]$, па смо добили контрадикцију.

Како је 0 глобални минимум проблема (јер је $\Phi(x(\cdot)) \geq \Phi(0), \forall x(\cdot) \in \mathbb{F}$), закључујемо да ће свака тачка која задовољава ККТ-услове бити глобални минимум.

Овај одељак представља мотивацију да у наредном раду размотримо гладак изопериметријски проблем

$$
\begin{aligned}
\max \quad & J(x(\cdot)) = \int\limits_0^T f(t, x(t))dt \\
\text{п.о.} \quad & \int\limits_0^T h_i(t, x(t))dt \geq 0, \quad i \in I = \{1, ..., m\}, \\
& g_j(t, x(t)) \geq 0, \quad j \in J = \{1, ..., k\} \quad \text{с.с. на} \quad [0, T], \\
& x(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^n),
\end{aligned} \tag{ГИП}
$$

при чему претпоставкама из четвртог одељка додајемо претпоставку да су дате функције $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I,\ g_j : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in J$ непрекидно диференцијабилне по свом другом аргументу.

7 Закључак

У овој дисертацији разматрани су услови оптималности проблема конвексног програмирања са непрекидним временом. За гладак проблем је показано да ће ККТ-услови уз додатни услов регуларности ограничења истовремено бити и неопходни и довољни услови оптималности. Ипак, главни резултати добијени су без претпоставке диференцијабилности. Велики допринос представља субдиференцијална апроксимација проблема. Помоћу ње вешто пренебрегнемо недостатак глаткости, а притом добијамо линеарне функције на које може да се примени нова теорема алтернативе (Теорема 15 [6]) у бесконачно димензионим просторима, а која нам је послужила као основни алат у доказима главних тврђења. Изведени су неопходни услови оптималности за проблем максимизације, при чему је показано да ће множилац уз функцију циља бити јединица. Осим тога, ако је функција циља афина, а раздвојимо афина и конвексна ограничења, видели смо да ће и множилац уз конвексна ограничења бити различит од нуле.

Следећи исти принцип, извели смо неопходне услове за тзв. изопериметријски проблем Љапуновљевог типа са непрекидним временом који садржи интегрално и фазно ограничење типа неједнакости. Све функције су конвексне, док се диференцијабилност не претпоставља. Код проблема Љапунова, који је познат из литературе (и наведен у четвртом поглављу), подинтегралне функције не морају бити конвексне, али у формулацији нема фазног ограничења. Као интересантна тема будућег истраживања се намеће проблем са интегралним и фазним ограничењем, где би подинтегрална функција била непрекидна, а код фазног ограничења конвексна.

Још један изопериметријски проблем, који до сада није разматран у литератури, обрађен је у глави 5 ове тезе. Ради се о вишекритеријумском конвексном проблему оптимизације са интегралним и фазним ограничењем за који смо извели неопходне услове екстремума нултог реда. У даљем раду ћемо испитати шта би се добило уз додатне претпоставке регуларности, као и ако би се ограничења раздвојила на афина и конвексна.

Један од праваца будућих истраживања биће и разматрање довољних услова за проблеме максимизације из глава 3,4 и 5. Чини се да то питање неће бити тривијално, с обзиром на конвексност функција. За све наведене проблеме биће интересантно и значајно развити теорију дуалности, а тврђења доказана у овој тези нам могу послужити као полазна тачка и мотивација.

Када говоримо о интервалном програмирању, у уводу смо поменули рад [66] у којем су аутори помоћу Теореме 15 и следећи приступ из [23] извели услове оптималности за гладак проблем са непрекидним временом при чему је функција циља задата преко интервалних вредности. Било би занимљиво размотрити тај проблем у случају када функције нису глатке већ само конвексне. Исто питање се намеће и за рационални проблем. Са друге стране, за изопериметријски проблем који је обрађен у четвртој глави би требало испитати неопходне и довољне услове оптималности уз претпоставку глаткости.

Наслов ове дисертације указује на везу између најстаријих и савремених екстремалних проблема. Актуелни су и прате човека од његовог постанка па можемо рећи да су ванвременски. Сваки одговор до ког теорија екстремалних проблема дође представља велики допринос напретку цивилизације и квалитета људског живота. Сведоци смо неких позитивних промена у свакодневном животу захваљујући машинском учењу и вештачкој интелигенцији, а треба имати у виду да је циљ ових области да се научи модел који минимизује грешку. Посебно, конвексна оптимизација представља основни инструмент у анализи, развоју и примени многих алгоритама, као што су линеарна регресија, логистичка регресија, оптимизација потпорних вектора, итд. Како би се развој ове теорије додатно убрзао, неопходно је да се истраживачи из различитих сфера науке информишу о њеним могућностима. За решавање сложених проблема данашњице неопходан је интердисциплинарни приступ, односно комбиновање знања из више дисциплина, као и сагледавање проблема из различитих углова. Један од циљева ове дисертације је буђење интересовања и мотивације код садашњих и будућих колега да истраже на које начине им теорија екстремалних проблема (са акцентом на изопериметријске проблеме са непрекидним временом) може помоћи да своје идеје реализују и направе свет бољим.

Литература

[1] J. Abadie. "On the Kuhn-Tucker theorem. J. Abadie, ed. Nonlinear programming", 1967.

[2] J. Abrham and R. Buie. "Kuhn-Tucker conditions and duality in continuous programming". *Utilitas Math*, 16(1):15–37, 1979.

[3] V. Alekseev, V. Tikhomirov, and S. Fomin. "Optimal control". *Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York*, 1987.

[4] T. Antczak. "Optimality conditions and duality results for nonsmooth vector optimization problems with the multiple interval-valued objective function". *Acta Mathematica Scientia*, 37(4):1133–1150, 2017.

[5] K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa. "Constraint qualifications in maximization problems". *Naval Research Logistics Quarterly*, 8(2):175–191, 1961.

[6] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, and B. Marinkovic. "Theorems of the alternative for systems of convex inequalities". *Set-Valued and Variational Analysis*, 27(1):51–70, 2019.

[7] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *"Nonlinear programming: theory and algorithms"*. John Wiley & Sons, 2013.

[8] R. Bellman. "Bottleneck problems and dynamic programming". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39(9):947, 1953.

[9] D. Bertsekas, A. Nedic, and A. Ozdaglar. *"Convex analysis and optimization"*, volume 1. Athena Scientific, 2003.

[10] V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Mishchenko, and L. Pontryagin. "The maximum principle in the theory of optimal processes of control". *IFAC Proceedings Volumes*, 1(1):464–469, 1960.

[11] V. Boltyanskii. "Optimal control of discrete systems New York NY: John Wiley & sons 1978". *This book is a translation from Russian of Optimal'noe Upravlenie Diskretnymi Sistemami*, 1973.

[12] J. Borwein and A. Lewis. *"Convex Analysis"*. Springer, 2006.

[13] A. Brandao, M. Rojas-Medar, and G. N. Silva. "Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions". *Computers & Mathematics with Applications*, pages 1477–1486, 2001.

[14] M. D. Canon, C. D. Cullum Jr, and E. Polak. "Theory of optimal control and mathematical programming". 1970.

[15] Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, and A. Rufián-Lizana. "Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative". *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 12(3):305–322, 2013.

[16] K. Čović. "Subdiferencijal u konveksnom programiranju i primene", Master rad. 2022.

[17] B. D. Craven. *"Control and optimization"*, volume 16. CRC Press, 1998.

[18] B. D. Craven and J. J. Koliha. "Generalizations of Farkas' theorem". *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 8(6):983–997, 1977.

[19] V. De Oliveira and M. Rojas-Medar. "Continuous-time optimization problems involving invex functions". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 327(2):1320–1334, 2007.

[20] V. A. de Oliveira. "Vector continuous-time programming without differentiability". *Journal of computational and applied mathematics*, 234(3):924–933, 2010.

[21] V. A. De Oliveira and M. A. Rojas-Medar. "Continuous-time multiobjective optimization problems via invexity". In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2007. Hindawi, 2007.

[22] M. d. R. de Pinho and R. Vinter. "Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 212(2):493–516, 1997.

[23] M. R. C. do Monte and V. A. de Oliveira. "Necessary conditions for continuous-time optimization under the Mangasarian–Fromovitz constraint qualification". *Optimization*, 69(4):777–798, 2020.

[24] M. R. C. do Monte and V. A. de Oliveira. "A constant rank constraint qualification in continuous-time nonlinear programming". *Set-Valued and Variational Analysis*, 29(1):61–81, 2021.

[25] I. Ekeland. C. castaing and m. valadier, "Convex analysis and measurable multifunctions". 1978.

[26] K. Fan, I. Glicksberg, and A. Hoffman. "Systems of inequalities involving convex functions". *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8(3):617–622, 1957.

[27] W. H. Farr and M. A. Hanson. "Continuous time programming with nonlinear constraints". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45:96–115, 1974.

[28] I. V. Girsanov. *"Lectures on mathematical theory of extremum problems"*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2012.

[29] P. Gordan. "über die auflösung linearer gleichungen mit reellen coefficienten". *Mathematische Annalen*, 6(1):23–28, 1873.

[30] M. A. Hanson and B. Mond. "A class of continuous convex programming problems". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(2):427–437, 1968.

[31] I. Husain and Z. Jabeen. "Continuous-time fractional minmax programming". *Mathematical and computer modelling*, 42(5-6):701–710, 2005.

[32] A. Ioffe and V. Tikhomirov. "Theory of extremal problems"(russian book). *Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1974. 480*, 1974.

[33] V. Janković, B. Marinković, and S. V. Raković. "Motzkin's theorem of the alternative: a continuous-time generalization". *Optimization letters*, 7(8):1659–1668, 2013.

[34] T. Jones and S. Jackson. "Rugby and mathematics: a surprising link among geometry, the conics, and calculus". *The Mathematics Teacher*, 94(8):649–654, 2001.

[35] A. Jovic. "New optimality conditions in vector continuous-time programming". *Yugoslav Journal of Operations Research*, 31(3):329–338, 2020.

[36] A. Jovic. "Optimality criteria and duality for nonlinear fractional continuous-time programming". *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 18(6):865–880, 2021.

[37] A. Jović and B. Marinković. "New optimality criteria for convex continuous-time problems of vector optimization". *Optimization*, pages 1–16, 2021.

[38] L. V. Kantorovich. "Mathematical methods of organizing and planning production". *Management science*, 6(4):366–422, 1960.

[39] W. Karush. "Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints". *M. Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago*, 1939.

[40] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. "Nonlinear programming proceedings of the Second Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability". *Neyman*, pages 481–492, 1951.

[41] J.-C. Lee and H.-C. Lai. "Parameter-free dual models for fractional programming with generalized invexity". *Annals of Operations Research*, 133:47–61, 2005.

[42] B. Letson and M. Schwartz. "The Regiomontanus problem". *Mathematics Magazine*, 90(4):259–266, 2017.

[43] O. L. Mangasarian. *"Nonlinear programming"*. SIAM, 1994.

[44] M. R. C. d. Monte. "Qualificações de restrições em otimização não linear com tempo contínuo". 2018.

[45] B. S. Mordukhovich and N. M. Nam. "An easy path to convex analysis and applications". *Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics*, 6(2):1–218, 2013.

[46] R. Netz et al. *"The Works of Archimedes: Volume 1, the Two Books on the Sphere and the Cylinder: Translation and Commentary"*, volume 1. Cambridge University Press, 2004.

[47] S. Nobakhtian and M. Pouryayevali. "Duality for nonsmooth continuous-time problems of vector optimization". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 136(1):77, 2008.

[48] S. Nobakhtian and M. Pouryayevali. "Optimality criteria for nonsmooth continuous-time problems of multiobjective optimization". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 136(1):69, 2008.

[49] S. Nobakhtian and M. Pouryayevali. "Optimality conditions and duality for nonsmooth fractional continuous-time problems". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 152:245–255, 2012.

[50] V. d. Oliveira. "Vector continouous-time programming without differentiabillity". *Computers and Mathematics with Applications*, 234:924–933, 2010.

[51] R. Osuna-Gómez, B. Hernández-Jiménez, Y. Chalco-Cano, and G. Ruiz-Garzón. "New efficiency conditions for multiobjective interval-valued programming problems". *Information Sciences*, 420:235–248, 2017.

[52] H. J. Pesch and M. Plail. "The cold war and the maximum principle of optimal control". *Optimization Stories. Documenta Mathematica*, 2012.

[53] T. W. Reiland. "Optimality conditions and duality in continuous programming i. Convex programs and a theorem of the alternative". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 77(1):297–325, 1980.

[54] T. W. Reiland and M. A. Hanson. "Generalized Kuhn-Tucker conditions and duality for continuous nonlinear programming problems". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 74(2):578–598, 1980.

[55] R. T. Rockafellar. *"Convex analysis"*, volume 18. Princeton university press, 1970.

[56] R. T. Rockafellar. "Convex integral functionals and duality". In *Contributions to nonlinear functional analysis*, pages 215–236. Elsevier, 1971.

[57] M. A. Rojas-Medar, A. J. Brandao, and G. N. Silva. "Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 305–318, 1998.

[58] G. Ruiz-Garzón, R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, and Y. Chalco-Cano. "The continuous-time problem with interval-valued functions: applications to economic equilibrium". *Optimization Methods and Software*, 34(6):1123–1144, 2019.

[59] C. Scott and T. Jefferson. "Duality in infinite-dimensional mathematical programming: convex integral functionals". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 61(1):251–261, 1977.

[60] I. M. Stancu-Minasian and S. Tigan. "Continuous time linear-fractional programming. the minimum-risk approach". *RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle*, 34(4):397–409, 2000.

[61] Y. Sun and L. Wang. "Optimality conditions and duality in nondifferentiable interval-valued programming". *Journal of Industrial & Management Optimization*, 9(1):131, 2013.

[62] S. Suneja, C. Singh, and R. Kaul. "Optimality and duality in continuous-time nonlinear fractional programming". *The ANZIAM Journal*, 34(2):229–244, 1992.

[63] D. W. Thompson. "A history of Greek mathematics". *Nature*, 109(2733):330–334, 1922.

[64] A. Tikhonov. *"Solutions of Ill-posed Problems: Andrey N. Tikhonov and Vasiliy Y. Arsenin. Translation Editor Fritz John"*.

[65] G. J. Toomer. *"Apollonius: Conics Books V to VII: The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banū Mūsā"*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[66] L. T. Tung and D. H. Tam. "Optimality conditions and duality for continuous-time programming with multiple interval-valued objective functions". *Computational and Applied Mathematics*, 41(8):1–28, 2022.

[67] W. F. Tyndall. "On two duality theorems for continuous programming problems". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 31(1):6–14, 1970.

[68] J. Vicanović. "Optimality conditions for isoperimetric continuous-time optimization problems". *Yugoslav Journal of Operations Research*, 33(2):249–258, 2023.

[69] J. Vicanović and A. Jović. "Optimality criteria for vector isoperimetric continuous-time optimization problems" (na recenziji).

[70] J. Vicanović and B. Marinković. "Necessary optimality conditions for convex continuous-time optimization problems". *Journal of Convex Analysis*, 30(1):5–16.

[71] C.-F. Wen and H.-C. Wu. "Using the Dinkelbach-type algorithm to solve the continuous-time linear fractional programming problems". *Journal of Global Optimization*, 49(2):237–263, 2011.

[72] C.-F. Wen and H.-C. Wu. "Approximate solutions and duality theorems for continuous-time linear fractional programming problems". *Numerical functional analysis and optimization*, 33(1):80–129, 2012.

[73] H.-C. Wu. "The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function". *European Journal of operational research*, 176(1):46–59, 2007.

[74] H.-C. Wu. "The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. *European Journal of Operational Research*, 196(1):49–60, 2009.

[75] G. Zalmai. "A continuous-time generalization of Gordan's transposition theorem". *Journal of mathematical analysis and applications*, 110(1):130–140, 1985.

[76] G. Zalmai. "Duality in continuous-time homogeneous programming". *Journal of mathematical analysis and applications*, 111(2):433–448, 1985.

[77] G. Zalmai. "Optimality conditions and Lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming". *Journal of mathematical analysis and applications*, 109(2):426–452, 1985.

[78] G. Zalmai. "Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming". *Journal of mathematical analysis and applications*, 111(1):130–147, 1985.

[79] G. Zalmai. "The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 110(2):503–518, 1985.

[80] G. Zalmai. "Optimality conditions and duality models for a class of nonsmooth continuous-time generalized fractional programming problems". *Optimization*, 51(2):353–399, 2002.

[81] G. J. Zalmai. "Duality for a class of continuous-time homogeneous fractional programming problems". *Zeitschrift für Operations Research*, 30(1):A43–A48, 1986.

[82] W. I. Zangwill. *"Nonlinear programming: a unified approach"*, volume 52. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1969.

Биографија аутора

Јелена Вицановић рођена је 29.03.1987. у Београду. Дипломирала је на Математичком факултету у Београду 2011. године, на смеру Нумеричка математика и оптимизација. На истом факултету је 2012. године одбранила мастер рад на тему „Преговори у теорији игара" са оценом 10. Докторске студије је уписала 2013. године на Катедри за нумеричку математику и оптимизацију.

Од 2011. до 2015. године радила је као наставник математике прво у Деветој, а затим у Тринаестој београдској гимназији. Од 2015. запослена је на Технолошко-металуршком факултету у Београду као асистент на Катедри за математичке науке, где последњих годину дана ради као стручни сарадник.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Јелена Вицановић

број уписа 2021/2022

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Услови оптималности за изопериметријске проблеме оптимизације са непрекидним временом"

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 22.04.2024.

Јелена Вицановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Јелена Вицановић

Број уписа 2021/2022

Студијски програм Математика

Наслов рада Услови оптималности за изопериметријске проблеме оптимизације са непрекидним временом

Ментор др Бобан Маринковић

Потписани Јелена Вицановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 22.04.2024.

Јелена Вицановић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Услови оптималности за изопериметријске проблеме оптимизације са непрекидним временом“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 22.04.2024.

Јелена Вицановић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.