Univerzitet u Beogradu
Fizički fakultet

Tijana Radenković

Više gradijentne teorije i kvantna gravitacija

doktorska disertacija

Beograd, 2022

University of Belgrade
Faculty of Physics

Tijana Radenković

Higher gauge theories and quantum gravity

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022

Mentor:

- dr Marko Vojinović, viši naučni saradnik, Institut za fiziku Beograd

Članovi komisije:

- prof. dr Voja Radovanović, redovni profesor, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu
- prof. dr Maja Burić, redovni profesor, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu
- dr Branislav Cvetković, naučni savetnik, Institut za fiziku Beograd
-

Datum odbrane:

Posvećeno Angelosu i Irini.

Zahvalnica

Zahvalnost za uspešan završetak ove disertacije, pre svih, dugujem mentoru dr Marku Vojinoviću. Zahvalna sam na njegovom inicijalnom interesovanju za mene, kao i na izdvojenom vremenu i podršci tokom svih godina postdiplomskih studija. Osim što me je uveo u svet nauke i upoznao sa vodećim stručnjacima iz oblasti kvantne gravitacije na petljama i teorije kategorija na velikom broju međunarodnih konferencija, dr Vojinović je sa njegovim jedinstvenim pristupom nauci, radnom etikom, entuzijazmom i profesionalnošću uticao da pronađem i oformim svoj sopstveni pristup nauci i naučnom radu.

Želela bih da iskoristim ovu priliku da se zahvalim svim članovima nastavnog tela teorijskog smera Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na njihovoj posvećenosti studentima, njihovoj korektnosti i pristupačnosti, a pre svega nezamenjivom uticaju na moje profesionalno sazrevanje. Svi profesori i asistenti uključeni u moju akademsku karijeru odigrali su vitalnu ulogu u mom uspešnom završetku studija.

Takođe, najiskreniju zahvalnost uputila bih svim članovima grupe za Gravitaciju, čestice i polja Instituta za fiziku u Beogradu, ali i drugim istraživačima instituta, neistraživačkom osoblju i menadžmentu, na istinski idealnoj, profesionalno podsticajnoj radnoj sredini koju zajedno formiraju, a kojoj sam imala sreće da se priključim.

Veliku zahvalnost uputila bih i uvaženim članovima Komisije na izdvojenom vremenu i posvećenosti prilikom čitanja ove doktorske disertacije.

Neizmernu zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci Gabrieli i ocu Saši, kao i starijoj sestri Dajani, na njihovoj neprocenjivoj neprestanoj podršci tokom studiranja i neumornom bodrenju. Hvala vam što nikad niste prestali da verujete u mene, u nekim trenucima čak više nego ja u sebe. Posebnu zahvalnost želim da izrazim i baki Jeleni i deki Milijanku, koji je bio uz mene na svakom koraku ovog puta, osim ovog poslednjeg koji nažalost nije uspeo da dočeka, a kom bi se nesumnjivo silno obradovao.

Na kraju, ali nikako po važnosti, želim da se zahvalim svom partneru Angelosu na njegovoj podršci, njegovoj ljubavi i svim malim i velikim stvarima koje je učinio za mene, a koje su nezanemarljivo doprinele uspešnom završetku pisanja ove doktorske disertacije.

Istraživanje sprovedeno uz podršku Fonda za nauku Republike Srbije, broj 7745968, „Kvantna gravitacija preko viših gejdž teorija 2021” — QGHG-2021. Sadržaj ove publikacije je isključiva odgovornost autora i ni na koji način se ne može smatrati da odražava stavove Fonda za nauku Republike Srbije.

This research was supported by the Science Fund of the Republic of Serbia, grant 7745968, ”Quantum Gravity from Higher Gauge Theory 2021” — QGHG-2021. The contents of this publication are the sole responsibility of the authors and can in no way be taken to reflect the views of the Science Fund of the Republic of Serbia.

Rezime

U ovoj tezi je predstavljena kategorijska generalizacija BF teorije na $2BF$ i $3BF$ teorije, prelaskom sa pojma gejdž grupe simetrija na pojmove gejdž 2-grupe i gejdž 3-grupe, u okviru formalizma više gejdž teorije. Razmatrana su $2BF$ dejstva sa vezama koja opisuju teoriju gravitacije i Jang-Milsovog polja i $3BF$ dejstva sa vezama koja opisuju teoriju Klajn-Gordonovog, Dirakovog, Vajlovog i Majorana polja kuplovanog sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom. Ova klasična dejstva napisana su u obliku koji je prilagođen kvantizacionoj proceduri spinske pene, tj. prirodno su podeljena na dva sektora: topološki sektor i sektor sa vezama. U okviru ovih $3BF$ teorija, struktura 3-grupe dovodi do pojave nove gejdž grupe koja određuje spektar polja materije prisutne u teoriji, na sličan način kao što obična gejdž grupa određuje spektar gejdž bozona u Jang-Milsovoj teoriji. Ovakva formulacija polja materije i gravitacije nam omogućava da prepišemo ceo Standardni Model kuplovan sa gravitacijom kao $3BF$ dejstvo sa vezama i dovodi nas korak bliže konstruisanju unifikovanog opisa i neperturbativne kvantizacije polja gravitacije i materije. U nastavku je određena kompletna gejdž grupa simetrije topološkog $3BF$ dejstva sprovođenjem kompletne Hamiltonove analize $3BF$ dejstva za proizvoljnu semistriktnu Lijevu 3-grupu, koristeći Dirakovu proceduru. Određivanje ukupne grupe simetrija je važan korak u kanonskoj kvantizaciji teorije kompletnog Standardnog Modela elementarnih čestica kuplovanog sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom, formulisanog kao $3BF$ dejstvo sa vezama. Rezultujuća gejdž grupa simetrije se sastoji od pet vrsta transformacija: G-, H-, L-, M- i N-gejdž transformacija. Pokazuje se da je razmatrana teorija invarijantna na difeomorfizme, jer je $3BF$ dejstvo sa vezama manifestno kovarijantno, a grupa lokalnih translacija dobijena je kao podgrupa direktnog proizvoda ukupne gejdž simetrije i Eno-Tajtelboim transformacija. Kao važan korak u kovarijantnoj kvantizacionoj proceduri spinske pene, razmatrana je topološka suma po stanjima Z, konstruisana za klasično $3BF$ dejstvo za generalnu 3-grupu i 4-dimenzionalnu prostorvremensku mnogostrukost $\mathcal{M}_4$. Konstruisana suma po stanjima specijalan je slučaj Porterove topološke kvantne teorije polja za $d = 4$ i $n = 3$ i topološka je invarijanta 4-dimenzionalne mnogostrukosti, što je utvrđeno ispitivanjem njene invarijantnosti pri Pahnerovim potezima. Ova suma po stanjima je generalizacija sume po stanjima koju su formulisali Žireli, Pfajfer i Popesku za slučaj $2BF$ dejstva sa odgovarajućom strukturom 2-grupe.

Ključne reči: BF teorija, teorija kategorija, više gradijentne teorije, $3BF$ teorija.
Naučna oblast: Fizika
Uža naučna oblast: Teorijska fizika visokih energija
UDK broj:

Abstract

In this thesis we study the categorical generalizations of a BF theory to $2BF$ and $3BF$ theories, by passing from the notion of a gauge group to the notions of a gauge 2-group and a gauge 3-group in the framework of higher gauge theory. In particular, we construct the constrained $2BF$ actions describing the dynamics of the gravitational and the Yang-Mills fields, and the the constrained $3BF$ actions describing the dynamics of Klein-Gordon, Dirac, Weyl and Majorana fields coupled to Einstein-Cartan gravity. The action is naturally split into a topological sector and a sector with simplicity constraints, adapted to the spinfoam quantization program. In addition, the structure of the 3-group gives rise to a novel gauge group which specifies the spectrum of matter fields present in the theory, just like the ordinary gauge group specifies the spectrum of gauge bosons in Yang-Mills theory. This allows us to rewrite the whole Standard Model coupled to gravity as a constrained $3BF$ action, facilitating the nonperturbative quantization of both gravity and matter fields. We determine the full gauge symmetry of the $3BF$ action by carrying out the complete Hamiltonian analysis of the $3BF$ action for an arbitrary semistrict Lie 3-group, using the Dirac procedure. This analysis is an important step in the canonical quantization of the complete Standard Model of elementary particles coupled to Einstein-Cartan gravity, formulated as a $3BF$ action with suitable simplicity constraints. We show that the resulting gauge symmetry group consists of the already familiar G-, H-, and L-gauge transformations, as well as additional M- and N-gauge transformations, which have not been discussed in the existing literature. As expected, since the $3BF$ action is formulated in a manifestly covariant way, we establish that diffeomorphisms are a symmetry of the theory, and are obtained as a subgroup of the direct product of the full gauge symmetry group and the Henneaux-Teitelboim transformations. As an important step in the covariant spinfoam quantization of the theory, we construct a triangulation independent topological state sum Z, based on the classical $3BF$ action for a general 3-group and a 4-dimensional spacetime manifold $\mathcal{M}_4$. The obtained state sum coincides with Porter's TQFT for $d = 4$ and $n = 3$. In order to verify that the constructed state sum is a topological invariant of the underlying 4-dimensional manifold, we analyze its behavior under Pachner moves, and we obtain that the state sum Z remains the same. The constructed state sum is a generalization of the work done by Girelli, Pfeiffer, and Popescu for the case of state sum based on the topological $2BF$ action with the underlying 2-group structure.

Key words: BF theory, category theory, higher gauge theory, $3BF$ theory.
Scientific field: Physics
Research area: Theoretical high energy physics
UDC number:

Sadržaj

Slike

Tabele

Deo I

Klasična teorija

Glava 1

Uvod

U okviru teorije *Kvantne Gravitacije na Petljama*, moguće je proučavati neperturbativnu kvantizaciju gravitacije, kovarijantnim ili kanonskim pristupom (za detaljan uvod u pristupe kvantovanja gravitacije u okviru ove teorije pogledati [1]–[4]). *Kovarijantni pristup* ima za primarni cilj definisanje konfiguracionog integrala gravitacionog polja,

$$Z = \int \mathcal{D}g \; e^{iS[g]} \,, \tag{1.1}$$

razmatranjem triangulacije $\mathcal{T}(\mathcal{M}_D)$ prostorvremenske mnogostrukosti $\mathcal{M}_D$ i definisanjem integrala kao diskretizovane *sume po stanjima* konfiguracija gravitacionog polja na simpleksima koji čine triangulaciju. Suma po stanjima triangulacije $\mathcal{T}(\mathcal{M}_D)$ mnogostrukosti $\mathcal{M}_D$ u D dimenzija je definisana kao

$$Z = \sum_{\{\phi\}} \prod_{v\in\mathcal{T}} \mathcal{A}_v(\phi) \prod_{\epsilon\in\mathcal{T}} \mathcal{A}_\epsilon(\phi) \cdots \prod_{\sigma_D\in\mathcal{T}} \mathcal{A}_{\sigma_D}(\phi), \tag{1.2}$$

gde su proizvodi po svim verteksima v, ivicama ϵ, trouglovima Δ, tetraedrima τ, sve do D-simpleksa σ_D koje triangulacija sadrži. Svaka ova ćelija obojena je bojama ϕ koje opisuju fundamentalne varijable modela, a svakoj ćeliji dodeljena je amplituda $\mathcal{A}$ koja opisuje dinamiku varijabli ϕ. Na ovaj način možemo definisati *konfiguracioni integral* (1.1). Primetimo da amplitude $\mathcal{A}_v(\phi)$, $\mathcal{A}_\epsilon(\phi)\,, \ldots\,, \mathcal{A}_{\sigma_D}(\phi)$ delom ulaze u definiciju mere konfiguracionog integrala, delom u definiciju dejstva $S[\phi]$.

Ova tehnika kvantizacije je poznata kao *kvantizacioni metod spinske pene.* U okviru formalizma *spinskih pena*[1], a zatim i njegove generalizacije u formalizmu teorije kategorija – *spin-kub modela*[2], podrazumeva se *kovarijantni pristup* kvantovanju gravitacije u kom se konfiguracioni integral definiše na isti način na koji je to urađeno u *Fajnmanovoj definiciji integrala po putanjama*, a motivisan je *kanonskom kvantizacijom na petljama.* Ovaj pristup se može podeliti na tri glavna koraka.

1. Prvo, definiše se klasično dejstvo $S[g]$ koje čine dva sektora: sektor topološke BF teorije i sektor koji sadrži veze.

2. Zatim, koristeći algebarsku strukturu, tj. Lijevu grupu G koja odgovara topološkom sektoru teorije, definiše se suma po stanjima Z_{BF} nezavisna od triangulacije $\mathcal{T}(\mathcal{M}_4)$.

3. Najzad, nametanjem veza na topološku sumu po stanjima Z_{BF} dobija se suma po stanjima koja odgovara pravoj fizičkoj teoriji.

[1]eng. *spin foam model.*
[2]eng. *spin cube model.*

Ovaj metod kvantovanja gravitacije uspešno je primenjen za različite izbore dejstva $S[g]$, Lijeve grupe G, kao i dimenzije prostorvremenske mnogostrukosti D.

Topološka BF teorija definiše se zadavanjem gejdž invarijantnog BF dejstva koje je definisano za Lijevu grupu G, odnosno njenu odgovarajuću Lijevu algebru $\mathfrak{g}$:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} \,. \tag{1.3}$$

Ovde je $\mathcal{F} \equiv \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha$ 2-forma element algebre $\mathfrak{g}$, krivina za 1-formu koneksiju $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$, definisanu na glavnom G-raslojenju neke 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti $\mathcal{M}_4$. Lagranžev množitelj $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$ je 2-forma, dok $\langle \_\,,\,\_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ označava G-invarijantnu bilinearnu simetričnu nedegenerisanu formu.

Kratak pregled klasične BF teorije biće prikazan u poglavlju 4. Sprovešćemo kompletnu Hamiltonovu analizu topološkog BF dejstva, a zatim ćemo prebrojati stepene slobode u teoriji. Kao što i očekujemo, dobićemo da BF dejstvo opisuje teoriju bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Kastelanijevom procedurom biće izračunat generator gejdž simetrije u BF teoriji, a zatim ćemo izračunati varijacije formi za sve varijable u teoriji i njihove konjugovane impulse. Na osnovu ovih rezultata, dobićemo dva tipa gejdž transformacija simetrije u BF teoriji — G-gejdž i M-gejdž transformacije, koje su već poznate u literaturi, kao i komutacione relacije ukupne grupe gejdž simetrije BF dejstva, grupe $\mathcal{G}_{BF}$. Demonstriraćemo da je BF teorija invarijantna na difeomorfizme. Zatim, razmatraćemo dva za fiziku relevantna BF modela, dobijena dodavanjem odgovarajućih članova, *veza*, u BF dejstvo — *Jang-Milsovu teoriju* za $SU(N)$ grupu u prostoru Minkovskog i *Plebanski model* za Opštu relativnost.

U okviru formalizma BF teorije, trodimenzionalna kvantna gravitacija prvi put je definisana u *Ponzano-Redže modelu* za triangulaciju trodimenzionalne mnogostrukosti za grupu $SU(2)$ [5]. Svakoj ivici triangulacije dodeljena je jedna ireducibilna reprezentacija grupe $SU(2)$, pa su amplitude sumirane po svim mogućim konfiguracijama ovih spinova. U 4-dimenzionalnom slučaju definisani su raznovrsni modeli, od kojih su jedni od najpoznatijih *Baret-Krejn model* [6], [7] i *Oguri model* [8]. Najzad, najsofisticiraniji - tzv. *EPRL/FK model* je model $4D$ kvantne gravitacije koji su nezavisno razvili Dž. Engl, R. Pereira, E. Livajn i K. Roveli [9] i L. Fridel i K. Krasnov [10], u okviru formalizma *spinskih pena*. Konkretan izbor polja u $EPRL/FK$ modelu motivisan je rezultatom iz kanonske kvantizacije na petljama [1], gde je stanje gravitacionog polja opisano tzv. *spinskim mrežama*, koje su obojene polucelim brojevima $i, j \in \mathbb{N}/2$. Ovi modeli predstavljaju nezavisne pokušaje da se definiše kvantna teorija gravitacije sa različitim stepenima uspeha, pri čemu su svi fokusirani na definisanje teorije čiste gravitacije bez materije. Pokušaji da se u teoriju uključi materija imali su ograničenog uspeha [11], uglavnom zbog činjenice da maseni članovi ne mogu biti izraženi u okviru ove teorije. Razlog leži u tome što polja tetrada nisu prisutna u topološkom sektoru BF teorije.

Kovarijantno kvantovanje gravitacije u okviru BF teorija, odnosno konstrukcija topološke BF sume po stanjima u slučajevima trodimenzionalne i četvorodimenzionalne mnogostrukosti uobičajenom kvantizacionom procedurom spinske pene, biće razmatrani u poglavlju 7. U trodimenzionalnom slučaju, polazeći od topološke BF teorije konstruisaćemo sumu po stanjima koja opisuje *Ponzano-Redže model*, što je posledica činjenice da na klasičnom nivou teorija trodimenzionalne gravitacije nema lokalne propagirajuće stepene slobode. Zatim, u četvorodimenzionalnom slučaju konstruisaćemo BF topološku sumu po stanjima koja odgovara *Ouguri modelu*. Međutim, u realnom slučaju četvorodimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, situacija je komplikovanija. Naime, u $4D$ teorija gravitacije nije topološka teorija, pa dobijena suma po stanjima ne odgovara fizičkoj teoriji, a kvantna teorija gravitacije može se dobiti tek modifikacijom amplituda topološke sume po stanjima. Ipak, poslednjim, trećim korakom kvantizacione procedure spinske pene se nećemo baviti u okviru ove disertacije.

U cilju prevazilaženja problema sa kuplovanjem materije u BF modelima kvantne gravitacije, u okviru formalizma *teorije kategorija* razvija se nov pristup koji koristi kategorijsku generalizaciju BF dejstva, u kontekstu *viših gejdž teorija* [12]. Kratak uvod u formalizam teorije viših kategorija dat je u poglavlju 2. U teoriji kategorija, grupa se definiše kao kategorija sa samo jednim objektom gde su svi morfizmi invertibilni. Pojam kategorije može se generalizovati na takozvane *više kategorije*, koje osim objekata i morfizama, kao elemente imaju i 2-morfizme (morfizme između morfizama) itd. Tada je moguće definisati tzv. 2-*grupu* kao 2-kategoriju sa samo jednim objektom gde su svi morfizmi i 2-morfizmi invertibilni. Konkretno, koristi se ideja *kategorijskih lestvica*, videti Tabelu 1.1. Kategorijskom generalizacijom BF dejstva, koje je definisano za neku Lijevu grupu, dolazimo do $2BF$ dejstva, koje je definisano za određenu 2-grupu. Pokazano je da je svaka striktna 2-grupa ekvivalentna nekom *ukrštenom modulu* $(H \xrightarrow{\partial} G\,,\triangleright)$, gde su G i H Lijeve grupe, $\partial : H \to G$ homomorfizam iz H u G, dok je $\triangleright : G \times H \to H$ dejstvo grupe G na grupu H.

kategorijska struktura	algebarska struktura	linearna struktura	topološko dejstvo	stepeni slobode
Lijeva grupa	Lijeva grupa	Lijeva algebra	BF teorija	gejdž polja
Lijeva 2-grupa	Lijev ukršteni modul	diferencijalni Lijev ukršteni modul	$2BF$ teorija	tetrade
Lijeva 3-grupa	Lijev 2-ukršteni modul	diferencijalni Lijev 2-ukršteni modul	$3BF$ teorija	skalarna i fermionska polja

Tabela 1.1: Kategorijske lestvice.

Kao što je to slučaj kod Lijeve grupe G za koju se prirodno definiše koneksija α na glavnom G-raslojenju neke 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti $\mathcal{M}_4$, a zatim i BF dejstvo, struktura 2-grupe prirodno daje uređeni par 2-*koneksiju* $(\alpha\,,\beta)$. Ovde je $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$ uobičajna 1-forma element algebre $\mathfrak{g}$, $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{h})$ nova koneksija 2-forma element algebre $\mathfrak{h}$, gde je $\mathfrak{h}$ je Lijeva algebra za Lijevu grupu H. Za 2-koneksiju definiše se tzv. *lažna* 2-*krivina*, urđeni par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, na sledeći način [12]:

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta\,, \qquad \mathcal{G} = d\beta + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta\,. \tag{1.4}$$

Ovde $\alpha \wedge^{\triangleright} \beta$ označava da su varijable α i β pomnožene kao forme $\wedge$-proizvodom i istovremeno kao elementi algebre dejstvom $\triangleright$ algebre $\mathfrak{g}$ na algebru $\mathfrak{h}$. Uređeni par krivina $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ se naziva lažnom zbog prisustva člana $\partial\beta$ u definiciji $\mathcal{F}$, videti poglavlje 5 za detalje.

Koristeći ove varijable, može se definisati $2BF$ dejstvo, koje je gejdž invarijantno pri 2-gejdž transformacijama [13], [14],

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}}\,, \tag{1.5}$$

gde su 2-forma $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$ i 1-forma $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{h})$ Lagranževi množitelji. Takođe, $\langle \_\,,\_\rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle \_\,,\_\rangle_{\mathfrak{h}}$ redom označavaju G-invarijantnu bilinearnu simetičnu nedegenerisanu formu za algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$.

Kada se izabere na pogodan način, struktura 2-grupe uvodi tetradna polja u topološko $2BF$ dejstvo, kao što je to uspešno urađeno u [15]. U ovom radu, dejstvo za Opštu relativnost napisano je kao $2BF$ dejstvo za vezama za određeni izbor 2-grupe, tako da su polja tetrade prisutna u topološkom sektoru teorije. Ovaj rezultat otvorio je mogućnost kuplovanja materije sa gravitacijom na pravolinijski način.

U poglavlju 5 ćemo analizirati klasičnu $2BF$ teoriju. Slično kao i za BF dejstvo, Hamiltonovom analizom i prebrojavanjem stepeni slobode ćemo pokazati da je $2BF$ dejstvo takođe topološko, tj. da opisuje teoriju bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Dobićemo kako glase konačne transformacije simetrije za $2BF$ dejstvo: G-gejdž, H-gejdž, M-gejdž i N-gejdž transformacija i komutacione relacije ukupne gejdž grupe simetrija $\mathcal{G}_{2BF}$. Pokazaćemo difeomorfizam invarijantnost $2BF$ teorije. Zatim, pogodnim izborom 2-grupe prikazaćemo *Opštu relativnost* kao $2BF$ teoriju sa vezama kao što je to učinjeno u [15]. Na kraju, poslednji odeljak poglavlja 5 biće posvećen diskusiji *Ajnštajn-Jang-Milsove teorije*, odnosno teoriji gravitacije i gejdž polja formulisanoj kao $2BF$ teorija sa vezama [16].

U poglavlju 8 ćemo sprovesti drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene za $2BF$ teoriju [13]. Demonstriraćemo kako se konstruiše suma po stanjima Z koja je nezavisna od triangulacije, na osnovu klasičnog $2BF$ dejstva za opštu striktnu 2-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje glatke d-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, za slučaje $d \in \{3, 4\}$. Za $d = 3$, kontruisana suma po stanjima je upravo Jeterov model, dok se za $d = 4$ poklapa sa Porterovom TKTP za $d = 4$ i $n = 2$. Analiziraćemo ponašanje konstruisane sume po stanjima pri Pahnerovim potezima, lokalnim promenama triangulacije koje čuvaju topologiju, tako da su bilo koje dve triangulacije iste mnogostrukosti povezane konačnim brojem Pahnerovih poteza. U trodimenzionalnom slučaju postoje četiri Pahnerova poteza — potezi $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i njihovi inverzi, dok u 4 dimenzije postoji pet različitih Pahnerovih poteza — potezi $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i $5 \leftrightarrow 1$ i njihovi inverzi. Postavku analize ponašanja konstruisane sume po stanjima pri ovim Pahnerovim potezima predstavićemo u odeljku 8.3, dok su detalji računa dati u Dodatku E.1. Dobićemo da $2BF$ suma po stanjima ostaje nepromenjena pri ovim transformacijama triangulacije, što dokazuje da je to jedna *topološka invarijanta* mnogostrukosti.

Ipak, dok struktura 2-grupe može prirodno da opiše gravitaciono i vektorsko polje, polja materije ne mogu biti prirodno izražena u okviru algebarske strukture 2-grupe, tj. sektor materije u dejstvu ne može biti napisan kao topološki član plus veza. To čini ovako napisano dejstvo tek polovično pripremljenim za kvantizacionu proceduru spinske pene, pa drugi i treći korak kvantizacione procedure ne mogu biti sprovedeni za celokupnu teoriju gravitacije i materije. Upravo to je problem na koji ćemo se fokusirati u okviru ove doktorske disertacije.

U cilju konstruisanja unifikovanog opisa gravitacije i materije, predložen je još jedan korak generalizacije primenom kategorijskih lestvica, tj. generalizacija algebarske strukture sa 2-grupe na 3-grupu [16]. Nivoi kategorijskih lestvica su prikazani u Tabeli 1.1. Kako se ispostavlja, struktura 3-grupe uspešno daje opis svih polja prisutnih u Standardnom Modelu, u interakciji sa gravitacijom. Pored toga, ova struktura uvodi novu gejdž grupu, koja odgovara skalarnim i fermionskim poljima prisutnim u teoriji [16]. Ovo je nov i neočekivan rezultat, koji ima potencijal da otvori novi pravac istraživanja i ponudi objašnjenje za strukturu sektora materije prisutne u Standardnom Modelu, kao i izvan.

Struktura 3-grupe definiše se u okviru teorije kategorija kao 3-kategorija sa samo jednim objektom gde su svi morfizmi, 2-morfizmi i 3-morfizmi invertibilni. Slično kao što je striktna 2-grupa ekvivalentna ukrštenom modulu, pokazano je da je svaka semistriktna 3-grupa ekvivalentna nekom 2-*ukrštenom modulu* [17]. Lijev 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ je algebarska struktura zadata trima Lijevim grupama G, H i L, zajedno sa homomorfizmima $\delta : L \to H$ i $\partial : H \to G$, dejstvom $\triangleright$ grupe G na sve tri grupe, kao i G-ekvivarijantnim preslikavanjem

$$\{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}} : H \times H \to L\,,$$

koje se naziva Pajferovo podizanje.

Analogno konstrukciji BF i $2BF$ topološkog dejstva, može se definisati topološko $3BF$ dejstvo za mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ i 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$. Za Lijeve algebre $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$ asocirane sa Lijevim grupama G, H i L, prirodno se uvodi uređena trojka 3-*koneksija* (α, β, γ), gde su diferencijalne forme elementi algebri $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$, $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$

i $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{l})$. Odgovarajuća *lažna* 3-*krivina* $(\mathcal{F}\,,\mathcal{G}\,,\mathcal{H})$ je:

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta\,, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{d}\beta + \alpha \wedge^{\rhd} \beta - \delta\gamma\,, \qquad \mathcal{H} = \mathrm{d}\gamma + \alpha \wedge^{\rhd} \gamma + \{\beta \wedge \beta\}\,. \tag{1.6}$$

Videti [17], [18] za detalje. Sada, moguće je definisati $3BF$ dejstvo:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H}\rangle_{\mathfrak{l}}\,, \tag{1.7}$$

gde su $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$, $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $D \in \mathcal{A}^0(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ Lagranževi množitelji. Forme $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{h}}$ i $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{l}}$ su G-invarijantne bilinearne simetrične nedegenerisane forme na $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$, redom.

Za teoriju gravitacije i materije formulisanu kao $3BF$ dejstvo sa vezama za određenu 3-grupu potrebno je sprovesti kovarijantnu kvantizacionu proceduru i kanonsku kvantizacionu proceduru, pri čemu ćemo se mi za sada fokusirati na prve korake.

Kanonska kvantizaciona procedura. Prvi korak ka kanonskoj kvatizaciji teorije je Hamiltonova analiza, koja rezultira algebrom veza prve klase i veza druge klase prisutnih u teoriji. Veze prve klase postaju uslovi na fizička stanja koja određuju Hilbertov prostor, dok Hamiltonova veza određuje dinamiku. Sa tim ciljem, u prvom koraku kanonske kvantizacije $3BF$ teorije, fokusirali smo se na pronalaženje kompletne gejdž grupe simetrije topološkog $3BF$ dejstva [19]. Kompletna Hamiltonova analiza $3BF$ dejstva za opštu semistriktnu Lijevu 3-grupu korišćenjem Dirakove procedure biće prikazana u poglavlju 6. Ovaj postupak je generalizacija Hamiltonove analize $2BF$ dejstva izvedene u [20]–[23] i Hamiltonove analize za poseban slučaj 2-ukrštenog modula koja odgovara teoriji skalarne elektrodinamike, sprovedene u [24]. Analiza Hamiltonove strukture teorije daje nam algebru veza prve klase i veza druge klase prisutnih u teoriji. Kao i obično, veze prve klase generišu gejdž transformacije, koje ne menjaju fizičko stanje sistema. Nakon izračunavanja veza prve klase, korišćenjem Kastelanijeve procedure izračunaćemo generator gejdž transformacija na prostornoj hiperpovrši, a zatim će rezultati dobijeni ovom metodom biti generalizovani na čitavo prostorvreme. Dobićemo kompletnu gejdž simetriju topološke $3BF$ teorije, koja se sastoji od pet vrsta konačnih gejdž transformacija — G-gejdž, H-gejdž i L-gejdž transformacije koje su već poznate iz prethodne literature, kao i dodatne M-gejdž i N-gejdž transformacije koje su jedan od naših glavnih rezultata. Uzimajući u obzir ovaj rezultat, analiziraćemo strukturu kompletne gejdž grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$. Dobijeni rezultati dovode do veze između grupe gejdž simetrije $3BF$ dejstva i strukture 3-grupe na kojoj je zasnovano $3BF$ dejstvo. Pokazaćemo da difeomorfizam invarijantnost $3BF$ teorije. Ova analiza je važan korak ka proučavanju gejdž grupe simetrije teorije gravitacije sa materijom, formulisane kao $3BF$ dejstvo sa vezama [16], kao i njene kanonske kvantizacije.

Prvi korak kvantizacione procedure spinske pene. Nakon što odredimo odgovarajuće 3-grupe i konstruišemo odgovarajuća $3BF$ dejstva, potrebno je nametnuti odgovarajuće veze na stepene slobode prisutne u topološkom sektoru $3BF$ dejstva, tako da dobijemo željenu klasičnu dinamiku polja materije i gravitacije. Nametanjem odgovarajućih veza na dejstvo (1.7) moguće je dobiti dejstva za polja materije u interakciji sa gravitacijom. Pored prethodno definisanih $2BF$ dejstva sa vezama za *Jang-Milsovo* i *Proka vektorsko polje*, u poglavlju 6 ćemo konstruisati odgovarajuća $3BF$ dejstva sa vezama za slučajeve *Klajn-Gordonovog*, *Dirakovog*, *Vejlovog* i *Majorana polja* u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom. Ova konstrukcija će nas dovesti do neočekivanog novog rezultata. Kao što ćemo videti, skalarno i fermionsko polje će biti *prirodno pridruženo novoj gejdž grupi*, na taj način generalizujući pojam gejdž grupe Jang Milsove teorije. Nova gejdž grupa otvara mogućnost klasifikacije polja materije i opisa struktura poput familije kvarkova i leptona itd. No, s obzirom na složenost algebarskih svojstava 3-grupa u okviru novog formalizma teorije kategorija, u ovom koraku našeg istraživanja fokusirali smo se samo na rekonstrukciju već poznatih teorija, poput Standardnog Modela. U tom smislu, svako potencijalno objašnjenje spektra polja materije u SM ostavljeno je za budući rad.

Drugi korak kvantizacione procedure spinske pene. Sproveden prvi korak kvantizacione procedure spinske pene, nagoveštaj je mogućnosti realizovanja drugog i trećeg koraka takođe, imajući u vidu da je dejstvo napisano preko diferencijalnih formi, što nam dozvoljava da ga prilagodimo na prostorvremensku deo-po-deo ravnu mnogostrukost korišćenjem Redže računa [25]. Konkretno, sva polja i jačine polja prisutna u $3BF$ dejstvu mogu se prirodno dodeliti nekom d-dimenzionalnom simpleksu 4-dimenzionalne triangulacije, dodeljivanjem 0-forme verteksu, odnosno 0-dimenzionalnom objektu, 1-forme ivicama, itd. Ovo nas dovodi do Tabele 1.2.

d	triangulacija	dualna triangulacija	forma	polja	jačine polja
0	verteks •	4-kompleks	0-forma	ϕ, $\psi_{\tilde{\alpha}}$, $\bar{\psi}^{\tilde{\alpha}}$	
1	ivica	3-poliedar	1-forma	ω^{ab}, A^I, e^a	
2	trogao △	poligon	2-forma	β^a, B^{ab}	R^{ab}, F^I, T^a
3	tetraedar	ivica	3-forma	γ, $\gamma_{\tilde{\alpha}}$, $\bar{\gamma}^{\tilde{\alpha}}$	$\mathcal{G}^a$
4	4-simpleks	verteks •	4-forma		$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\tilde{\alpha}}$, $\bar{\mathcal{H}}^{\tilde{\alpha}}$

Tabela 1.2: Korespodencija između polja i jačina polja i elemenata triangulacije $\mathcal{T}(\mathcal{M}_4)$.

Jednom kada je klasično Redže-diskretizovano $3BF$ dejstvo konstruisano, sledeći korak kvantizacione procedure je definisanje sume po stanjima Z koja definiše konfiguracioni integral teorije. Topološka priroda $3BF$ dejstva, zajedno sa strukturom gejdž 3-grupe, obezbeđuje da takva suma bude topološka invarijanta, odnosno da je nezavisna od triangulacije. Za klasično $3BF$ dejstvo u slučaju generalne semistriktne 3-grupe i 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti $\mathcal{M}_4$, u poglavlju 9 ćemo formulisati topološku sumu po stanjima Z nezavisnu od trijagulacije. Ova suma po stanjima podudara se sa Porterovom apstraktnom definicijom topološke kvantne teorije polja (TKTP) [26] za slučaj $d = 4$ i $n = 3$, gde je d predstavlja dimenziju mnogostrukosti $\mathcal{M}$, a n nivo kategorijskih lestvica. Ova definicija je generalizacija Jeterove definicije sume po stanjima. Kako bismo proverili da li je konstruisana suma po stanjima zaista topološke prirode, analiziraćemo njeno ponašanje pri Pahnerovim potezima [27]. Analizom Pahnerovih poteza dobijeno je da suma po stanjima Z ostaje ista, tj. da je zaista topološka invarijanta 4-dimenzionalne mnogostrukosti. Postavka dokaza invarijantnosti biće predstavljena u poglavlju 9, dok je detaljna analiza Pahnerovih poteza prikazana u Dodatku E.

Nažalost, da bismo ovaj korak procedure precizno sproveli do kraja, neophodna je generalizacija Piter-Vejlove i Planšarelove teoreme za slučajeve 2-grupa i 3-grupa. Cilj Piter-Vejlove teoreme je da obezbedi dekompoziciju funkcija na grupi na sumu po odgovarajućim ireducibilnim reprezentacijama, što nam omogućava preciziranje spektra oznaka d-simpleksa u triangulaciji, utvrđujući domen vrednosti polja koja žive na tom d-simpleksu. U slučaju 2-grupa i 3-grupa, teorija reprezentacija nije dovoljno razvijena da bi mogla da obezbedi takvu konstrukciju, pa su teoreme analogne Piter-Vajlovoj, odnosno Planšarelovoj, matematički rezultati koji i dalje nedostaju. Sa druge strane, dok se ove formulacije čekaju, moguće je pokušati *pogoditi* odgovarajuću strukturu ireducibilnih reprezentacija 2-grupa, odnosno 3 grupa, kao što je to urađeno u [15] gde je konstruisan *spin-kub model* kvantne gravitacije.

Treći korak kvantizacione procedure spinske pene. Najzad, kako za potrebe fizičke teorije nismo zainteresovani za topološku teoriju, već za teoriju sa lokalnim propagirajućim stepenima slobode, naš cilj nije konstruisanje topološke invarijante – sume po stanjima Z, već sume po stanjima koja daje netrivijalnu dinamiku. Da bismo to dobili, neophodno je da nametnemo veze na topološku sumu po stanjima Z, odnosno sprovedemo treći korak kvantizacione procedure spinske pene. Imajući to u vidu, glavna motivacija prvog dela našeg istraživanja u radu [16], bio je da prepišemo dejstvo za gravitaciju i materiju na način koji eksplicitno odvaja topološki deo od veza, što čini nametanje veza pravolinijskim postupkom. Rezultat ovog poslednjeg trećeg koraka kvantizacione procedure bio bi suma po stanjima koja opisuje teoriju kvantne gravitacije sa materijom.

Oznake i konvencije

Lokalni Lorencovi indeksi su označeni latiničnim slovima $a, b, c, \dots$, koji uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3$, a njihovo podizanje i spuštanje vrši se metrikom Minkovskog η_{ab} sa signaturom $(-,+,+,+)$. Prostorvremenski indeksi su označeni grčkim slovima $\mu, \nu, \dots$, a za njihovo podizanje i spuštanje koristi se metrika prostorvremena $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$, gde $e^a{}_\mu$ označava tetradna polja. Njihov prostorni deo je označen malim latiničnim indeksima polovine alfabeta $i, j, \dots$, a vremenska komponenta je označena sa 0. Indeksi koji prebrojavaju generatore grupa G, H i L su redom označeni početnim slovima grčkog alfabeta $\alpha, \beta, \dots$, malim početnim latiničnim slovima $a, b, c, \dots$ i velikim latiničnim slovima $A, B, C, \dots$. Antisimetrizacija tenzora po dva indeksa je označena kao

$$A_{[a_1|a_2\dots a_{n-1}|a_n]} = \frac{1}{2}\left(A_{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n} - A_{a_na_2\dots a_{n-1}a_1}\right) ,$$

dok je ukupna antisimetrizacija po svim indeksima označena kao

$$A_{[a_1\dots a_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}A_{a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(n)}} .$$

Slično, simetrizacija tenzora po dva indeksa se označava kao

$$A_{(a_1|a_2\dots a_{n-1}|a_n)} = \frac{1}{2}\left(A_{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n} + A_{a_na_2\dots a_{n-1}a_1}\right) ,$$

dok je ukupna simetrizacija po svim indeksima označena kao

$$A_{(a_1\dots a_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}A_{a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(n)}} .$$

Radimo u prirodnom sistemu jedinica, gde je $c = \hbar = 1$ i $G = l_p^2$, a l_p je Plankova dužina.

Ako je G konačna grupa, $\int_G dg = 1/|G|\sum_{g\in G}$ označava normalizovanu sumu po svim elementima grupe, dok δ_G označava odgovarajuću δ-distribuciju na G. Ova distribucija definisana je za svaki element $g \in G$ tako da $\delta_G(g) = |G|$ ako je g jedinični element grupe $g = e$, a ako nije tj. ako $g \neq e$ onda je definisana kao $\delta_G(g) = 0$. Ako je G Lijeva grupa, $\int_G dg$ i δ_G označavaju redom Harovu meru i δ-distribuciju na G. Set svih k-simpleksa, pri čemu je indeks k takav da $0 < k < d$, označen je sa Λ_k. Skup svih verteksa Λ_0 je konačan i uređen, a svaki k-simpleks je označen sa $(k+1)$-torkama verteksa $(i_0 \dots i_k)$, gde je $i_0, \dots, i_k \in \Lambda_0$ tako da $i_0 < \dots < i_k$. Broj k-simpleksa je označen sa $|\Lambda_k|$.

Za svaku triangulaciju $\mathcal{T}(\mathcal{M}_d)$ d-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}_d$ možemo definisati dualnu triangulaciju $\mathcal{T}(\mathcal{M}_d)^*$. *Dualna triangulacija*, ili *dualna rešetka* je definisana na sledeći način [1]. Postavljamo verteks dualne rešetke u centar svakog d-simpleksa triangulacije. Povezivanjem verteksa koji odgovaraju susednim d-simpleksima dobijamo ivice dualne triangulacije.

Svaka ova ivica dualne triangulacije odgovara jednom $d-1$-simpleksu triangulacije koji je zajednički za dva susedna d-simpleksa. Mnogougao, 2-kompleks koji dobijamo povezivanjem odgovarajućih ivica $\epsilon \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_d)^*$ odgovara $d-2$-simpleksu iz $\mathcal{T}(\mathcal{M}_d)$. Na ovaj način dodeljujemo i ostale elemente dualne triangulacije koji su dualni odgovarajućim elementima triangulacije, sve do d-kompleksa koji je dualan verteksu $v \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_d)$. Set svih k-kompleksa dualne triangulacije, pri čemu je indeks k takav da $0 < k < d$, označen je sa Λ_k^*. Ukupan broj k-kompleksa u dualnoj rešetki je označen sa $|\Lambda_k^*|$.

Sve dodatne oznake i konvencije koje se koriste su eksplicitno definisane u tekstu gde se pojavljuju.

ADM	*Arnovit-Deser-Misner*	**ADM**	*Arnowitt-Deser-Misner*
KGP	*Kvantna gravitacija na petljama*	**LQG**	*Loop quantum gravity*
PZ	*Poasonova zagrada*	**PB**	*Poisson bracket*
SM	*Standardni Model*	**SM**	*Standard Model*
TKTP	*Topološka kvantna teorija polja*	**TQFT**	*Topological quantum field theory*

Glava 2

Više gejdž teorije

Obična gejdž teorija opisuje kako se 0-dimenzionalne čestice transformišu pri paralelnom prenosu duž 1-dimenzionalne putanje koja pripada bazi raslojenog prostora[1], pri čemu svakoj putanji mnogostrukosti prirodno odgovara neki element grupe. Na sličan način, u okviru 2-gejdž teorije definiše se paralelni transport 1-dimenzionalnih objekata definisanjem 2-koneksije na 2-raslojenom prostoru[2]. 2-Raslojeni prostor je generalizacija raslojenog prostora u 2-gejdž teoriji – vlakna nisu mnogostrukost već kategorija sa odgovarajućom glatkom strukturom.

Kategorija se sastoji od elemenata koje nazivamo *objekti* i *morfizama* - preslikavanja između tih objekata. Grupu onda možemo posmatrati kao kategoriju sa samo jednim objektom gde su svi morfizmi invertibilni. Više gejdž teorije umesto grupe simetrije koja određuje gejdž teoriju, oređene su višom kategorijskom generalizacijom pojma grupe – 2-grupom.

2.1 Gejdž teorija

Gejdž teorija je teorija polja u kojoj Lagranžijan teorije koji određuje dinamiku sistema ostaje invarijantan pri *lokalnim transformacijama*[3], koje nazivamo *gejdž transformacijama*. Gejdž teorije se odlikuju prisustvom redundantnih stepeni slobode u fizičkom sistemu, tj. postojanjem nefizičkih varijabli u dejstvu, pored varijabli koje opisuju fiziku sistema. Gejdž teorije poseduju *gejdž simetriju*[4] koja predstavlja nefizičke transformacije dinamičkih promenljivih. Dinamički sistemi ovog tipa se nazivaju i singularnim, a njihova analiza zahteva primenu *Hamiltonove analize* sistema sa vezama o kojoj ćemo više govoriti u narednom poglavlju. U Hamiltonovom formalizmu ove teorije karakteriše prisustvo veza u dejstvu.

Gejdž transformacije formiraju Lijevu grupu koja se naziva *grupa simetrije* ili *gejdž grupa* teorije. Svakom generatoru ove grupe odgovara polje koje se naziva kalibraciono polje, tj. *gejdž polje*.

Matematički gledano, gejdž teorije su opisane jezikom diferencijalne geometrije, tj. definisane su na raslojenom prostoru. Opšta teorija relativnosti takođe je definisana na raslojenom

[1] *Raslojeni prostor* (eng. *fibre bundle*) $E(B,F,\pi)$ je mnogostrukost E, na kojoj je definisano glatko preslikavanje π (*projekcija*) na mnogostrukost B (*baza*), takvo da je za svaku tačku baze b, *sloj nad njom* $\pi^{-1}(b) \equiv \{e \in E \,|\, \pi(e) = b\}$ difeomorfan sa mnogostrukošću F (*tipični sloj*) i postoji okolina U_b za koju je $\pi^{-1}(U_b)$ difeomorfan sa direktnim proizvodom $U_b \times F$.

[2] 2-*Raslojeni prostor* (eng. *fibre* 2-*bundle*)

[3] Razlikujemo *globalnu* i *lokalnu* simetriju fizičkog sistema. Kada je Lagranžijan invarijantan pri transformacijama koje izgledaju identično u svakoj tački prostorvremena u kojoj se dešavaju fizički procesi, tj. kada parametar transformacije ne zavisi od tačke prostorvremena, kažemo da ima *globalnu simetriju*. *Lokalna simetrija* je simetrija teorije kod koje Lagranžijan ostaje invarijantan pri transformacijama čiji parametar zavisi od prostorvremenske koordinate.

[4] *Gejdž simetrija* (eng. *gauge symmetry*) se naziva još i baždarna, kalibraciona ili gradijentna simetrija.

prostoru, konkretno *tangetnom raslojenju*[5], dok je u slučaju gejdž teorija reč o *glavnom raslojenju*[6].

U gejdž teoriji definišemo 1-formu *koneksije*[7] $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$, element algebre $\mathfrak{g}$, koju u fizici nazivamo i *gejdž potencijal*. Koneksija se zadaje definisanjem diferencijalnog operatora odstupanja tenzorskih polja u nekoj tački mnogostrukosti od tenzorskih polja dobijenih *paralelnim prenosom*[8] u susedne tačke, tj. *kovarijantnim izvodom*[9] ∇. Koneksija daje 2-formu *krivine* definisanu izrazom:

$$F = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha\,. \tag{2.1}$$

2.2 2-Gejdž teorija

Uopštenje kategorije – 2-kategorija sastoji se od objekata, morfizama i morfizama između morfizama – 2-morfizama [12].

Viša kategorijska generalizacija gejdž teorije – 2-gejdž teorija je teorija u kojoj su fundamentalne simetrije teorije date 2-gejdž grupom. U okviru 2-gejdž teorije osim što su putanjama dodeljeni elementi grupe $g \in G$ kao u običnoj gejdž teoriji, površinama su dodeljeni elementi $h \in H$. Pritom, oznake ovih elementarnih elemenata mnogostrukosti ne mogu biti proizvoljne, tj. moraju biti zadovoljeni sledeći uslovi.

1. Za svaku površinu označenu sa $h \in H$, oznake izvorne krive g_1 i ciljne krive g_2 zadovoljavaju relaciju $\partial(h) = g_2 g_1^{-1}$.

2. Za svaku zapreminu, površinska holonomija oko nje je trivijalna.

U ovom odeljku razmatraćemo načine na koje možemo vršiti kompoziciju označenih putanja i površina, kako bismo izračunali kompoziciju elementarnih do proizvoljno velikih elemenata mnogostrukosti.

2.2.1 2-Grupa

U okviru teorije kategorija, 2-grupa se definiše kao 2-kategorija sa samo jednim objektom kod koje su svi morfizmi i 2-morfizmi invertibilni. Pokazano je da je svaka striktna 2-grupa ekvivalentna ukrštenom modulu $(H \stackrel{\partial}{\to} G\,, \triangleright)$.

Definicija 2.2.1 (Pre-ukršteni modul i ukršteni modul) *Pre-ukršteni modul* $(H \stackrel{\partial}{\to} G\,, \triangleright)$ *čine:*

- *grupa G koju čine morfizmi sa kompozicijom kao grupnom operacijom*

$$\bullet \xleftarrow{g_1} \bullet \xleftarrow{g_2} \bullet \;=\; \bullet \xleftarrow{g_1 g_2} \bullet\;;$$

[5]Svakoj tački m mnogostrukosti $\mathcal{M}$ dimenzije D možemo pridružiti po jedan D-dimenzionalni tangentni prostor $T_m(\mathcal{M})$ koji čine tangentni vektori dobijeni za različite krive kroz tačku m. Pridruživanjem svakoj tački m mnogostrukosti $\mathcal{M}$ vektorskog prostora $T_m(\mathcal{M})$ dobijeno je *tangentno raslojenje* $T(M)$, tj. vektorsko raslojenje sa bazom $\mathcal{M}$, slojem $\mathbb{R}^D$ i projekcijom $\pi : T_m(\mathcal{M}) \to m$. Svi tangentni prostori su medusobno izomorfni, ali da bismo uspostavili korespodenciju između vektora tangentnih prostora koji odgovaraju različitim tačkama neophodno je uvesti pojam *koneksije*.

[6]Kada je tipični sloj $F = G$ neka Lijeva grupa raslojenje se naziva *glavno raslojenje* (eng. *principal bundle*) P grupe G.

[7]*Koneksija* (eng. *connection*) svakoj putanji γ koja povezuje tačke x i y mnogostrukosti $\mathcal{M}$ dodeljuje preslikavanje $\rho(\gamma) : T_x(\mathcal{M}) \to T_y(\mathcal{M})$.

[8]*Paralelni prenos* (eng. *parallel transport*).

[9]*Kovarijantni izvod* (eng. *covariant derivative*).

- *grupa H koju čine svi 2-morfizmi čiji je izvor identitet*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd},$$

gde je horizontalna kompozicija grupna operacija

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h'"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(hh')"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow hh'"] \end{tikzcd};$$

- *grupni homomorfizam $\partial : H \to G$ koji preslikava svaki 2-morfizam iz $h \in H$ u metu $\partial h \in G$*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd},$$

pri čemu imamo grupni homomorfizam

$$\partial(hh') = \partial(h)\partial(h')\,; \tag{2.2}$$

- *dejstvo $\triangleright$ grupe G na obe grupe, pri čemu*
  - *grupa G deluje na samu sebe horizontalnom konjugacijom:*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0^{-1}"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0 g g_0^{-1}"'] \end{tikzcd},$$

  odnosno formalno zapisano za sve $g_0, g \in G$:

$$g_0 \triangleright g = g_0 g g_0^{-1}\,, \tag{2.3}$$

  - *element grupe $g \in G$ na element grupe $h \in H$ deluje horizontalnom konjugacijom njegovim jediničnim 2-morfizmom 1_g, što rezultuje 2-morfizmom $g \triangleright h \in H$,*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g^{-1}"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, bend left, "\partial(g\triangleright h)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g\triangleright h"] \end{tikzcd},$$

  tj. formalno zapisano za sve $g \in G$ i $h \in H$ imamo

$$g\partial h g^{-1} = \partial(g \triangleright h)\,, \tag{2.4}$$

  - *dejstvo $\triangleright$ je G-ekvivarijantno, tj. za svako $h, h' \in H$ i $g, g' \in G$ važi*

$$(gg') \triangleright h = g \triangleright (g' \triangleright h)\,, \qquad g \triangleright (hh') = (g \triangleright h)(g \triangleright h')\,. \tag{2.5}$$

U pre-ukrštenom modulu definišemo ***Pajferov komutator*** *$\langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}$, za sve $h_1\,, h_2 \in H$ i $g \in G$, kao:*

$$\langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{pf}} = h_1 h_2 h_1^{-1} \partial(h_1) \triangleright h_2^{-1}\,. \tag{2.6}$$

Pre-ukršteni modul kod kojeg su svi Pajferovi komutatori trivijalni naziva se ***ukršten modul****. Formalno, to znači da važi* ***Pajferov identitet****, tj. za sve $h, h' \in H$:*

$$(\partial h) \triangleright h' = hh'h^{-1}\,. \tag{2.7}$$

Za svaki element $g \in G$ operacija $\triangleright$ daje jedan automorfizam H. Kompozicija dva automorfizma daje jedan automorfizam, pa automorfizmi grupe H formiraju grupu $\mathrm{Aut}(H)$, a $\triangleright$ nam preslikava svaki element $g \in G$ u jedan element ove grupe tj. $\triangleright : G \to \mathrm{Aut}(H)$.

Između pojma 2-grupe i pojma ukrštenog modula postoji ekvivalencija, pa je svakom 2-morfizmu $\alpha \in \mathcal{G}$ koji je element 2-grupe $\mathcal{G}$, definisan parom (h, g),

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g"]
\end{tikzcd}
$$

pridružen jedan element 2-grupe, 2-morfizam:

$$g \to (\partial h)\, g\,. \tag{2.8}$$

2.2.2 Lijeva 2-algebra

Slično definicijama pre-ukrštenog modula i ukrštenog modula, na jeziku Lijevih 2-algebri analogno se definiše *diferencijalni pre-ukršten modul* i *diferencijalni ukršten modul.*

Definicija 2.2.2 (Diferencijalni pre-ukršteni modul i diferencijalni ukršteni modul) *Diferencijalni pre-ukršten modul* $(\mathfrak{h} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{g}\,, \triangleright)$, *zadat je algebrama* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{h}$, *preslikavanjem* $\partial : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ *i dejstvom* $\triangleright$ *algebre* $\mathfrak{g}$ *na algebre* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{h}$.

Kod diferencijalog pre-ukrštenog modula definišemo ***Pajferov komutator*** *dva elementa* $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ *algebre* $\mathfrak{h}$ *kao:*

$$\langle \underline{h}_1,\, \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}} = [\underline{h}_1, \underline{h}_2] - \partial(\underline{h}_1) \triangleright \underline{h}_2\,. \tag{2.9}$$

Diferencijalni pre-ukršten modul je ***diferencijalni ukršten modul*** *kada su svi njegovi Pajferovi komutatori jednaki nuli, odnosno kada za sve* $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ *važi* ***Pajferov identitet****:*

$$\partial(\underline{h}_1) \triangleright \underline{h}_2 = [\underline{h}_1,\, \underline{h}_2]\,. \tag{2.10}$$

Dejstvo $\triangleright$ elemenata algebre $\mathfrak{g}$ na elemente algebri $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}$ definisano je delovanjem generatora algebre $\mathfrak{g}$ na generatore odgovarajućih algebri, kao:

$$\tau_\alpha \triangleright \tau_\beta = \triangleright_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \tau_\gamma\,, \qquad \tau_\alpha \triangleright t_a = \triangleright_{\alpha a}{}^{b}\, t_b\,, \tag{2.11}$$

Komponente diferencijalnog ukrštenog modula poseduju sledeće osobine.

1. Dejstvo $\triangleright$ elemenata algebre $\mathfrak{g}$ na elemente iste algebre je po definiciji u svojstvenoj reprezentaciji, tj. formalno zapisano, za svako $\underline{g}_0, \underline{g} \in \mathfrak{g}$:

$$\underline{g}_0 \triangleright \underline{g} = \left[\underline{g}_0, \underline{g}\right]\,. \tag{2.12}$$

   odnosno u bazisu:

$$\triangleright_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\,. \tag{2.13}$$

2. Preslikavanje $\partial : H \to G$ je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, odnosno za sve $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ i $\underline{g} \in \mathfrak{g}$ važi:

$$\partial(\underline{g} \triangleright \underline{h}) = [\underline{g}, \partial(\underline{h})]\,, \tag{2.14}$$

   odnosno izraženo u bazisu:

$$\partial_a{}^{\beta} f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \triangleright_{\alpha a}{}^{b} \partial_b{}^{\gamma}\,. \tag{2.15}$$

3. Dejstvo $\triangleright$ algebre $\mathfrak{g}$ na algebru $\mathfrak{h}$ je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, tako da, za svako $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ važi sledeće pravilo

$$\underline{g} \triangleright [\underline{h}_1,\, \underline{h}_2] = [\underline{g} \triangleright \underline{h}_1,\, \underline{h}_2] + [\underline{h}_1,\, \underline{g} \triangleright \underline{h}_2]\,, \tag{2.16}$$

odnosno izraženo u bazisu:

$$f_{ab}{}^{c} \triangleright_{\alpha c}{}^{d} = 2 \triangleright_{\alpha [a|}{}^{c} f_{c|b]}{}^{d}\,. \tag{2.17}$$

4. Pajferov komutator $(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \langle \underline{h}_1,\, \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}} \in \mathfrak{h}$ je bilinearno $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, tj. svi $\underline{h}_1\,, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ i $\underline{g} \in \mathfrak{g}$ zadovoljavaju sledeći identitet,

$$\underline{g} \triangleright \langle \underline{h}_1\,, \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}} = \langle \underline{g} \triangleright \underline{h}_1\,, \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}} + \langle \underline{h}_1\,, \underline{g} \triangleright \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.18}$$

odnosno u bazisu:

$$\triangleright_{\alpha c}{}^{d} (f_{ab}{}^{c} - \partial_{a}{}^{\beta} \triangleright_{\beta b}{}^{c}) = \triangleright_{\alpha a}{}^{c} (f_{cb}{}^{d} - \partial_{c}{}^{\beta} \triangleright_{\beta b}{}^{d}) + \triangleright_{\alpha b}{}^{c} (f_{ac}{}^{d} - \partial_{a}{}^{\beta} \triangleright_{\beta c}{}^{d})\,. \tag{2.19}$$

5. *Pajferov identitet* definisan u (2.10) na jeziku algebri postaje:

$$f_{ab}{}^{c} = \partial_{a}{}^{\alpha} \triangleright_{\alpha b}{}^{c}\,. \tag{2.20}$$

2.2.3 Kompozicija morfizama

U 2-gejdž teoriji geometrijski objekti su obojeni na dva nivoa, krive su označene elementima $g \in G$, a površine elementima grupe $h \in H$. Na jeziku 2-gejdž teorije kompozicija i promena orijentacije krivih definisana je kao u standardnoj gejdž teoriji.

Da bismo diskutovali kompoziciju morfizama, pogodno je da uvedemo sledeću notaciju. Označimo izvor i metu morfizma g kao $\partial_1^-(g)$ i $\partial_1^+(g)$, respektivno.

- Horizontalna kompozicija morfizama g_1 i g_2, kada su oni kompozibilni, odnosno kada je $\partial_1^-(g_1) = \partial_1^+(g_2)$, je morfizam $g_1 \#_1 g_2$:

$$z\bullet \xleftarrow{\;g_1\;} \bullet y \xleftarrow{\;g_2\;} \bullet x \quad = \quad z\bullet \xleftarrow{\;g_1 g_2\;} \bullet x\,,$$

  odnosno formalno zapisano

$$g_1 \#_1 g_2 = g_1 g_2\,. \tag{2.21}$$

- Kompozicija morfizama je asocijativna operacija, odnosno za morfizme g_1, g_2 i g_3, kada je $\partial_1^-(g_1) = \partial_1^+(g_2)$ i $\partial_1^-(g_2) = \partial_1^+(g_3)$, važi:

$$z\bullet \xleftarrow{\;g_1 g_2\;} \bullet y \xleftarrow{\;g_3\;} \bullet x \quad = \quad z\bullet \xleftarrow{\;g_1\;} \bullet y' \xleftarrow{\;g_2 g_3\;} \bullet x\,.$$

2.2.4 Kompozicija 2-morfizama

U ovom odeljku ćemo opisati kako se na jeziku 2-gejdž teorije definiše kompozicija elementarnih površina. Površine su označene elementima grupe $h \in H$, a možemo definisati njihovu *vertikalnu i horizontalnu kompoziciju.* U okviru 2-gejdž teorije definišemo i *nadovezivanje* 2-morfizma sa 1-morfizmom *sa leve* i nadovezivanje 2-morfizma sa 1-morfizmom sa desne strane.

Za svaku površinu možemo izabrati dve referentne tačke na granici i podeliti granicu na dve krive, na izvornu krivu označenu sa $g_1 \in G$ i ciljnu krivu označenu sa $g_2 \in G$, kao što je prikazano na dijagramu:

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} .$$

Pri tome 2-morfizam $h \in H$ preslikava krivu $g_1 \in G$ u krivu $\partial(h)g_1 \in G$,

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h)g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} ,$$

tako da $h \in H$ je zadovoljena relacija:

$$\partial(h) = g_2 g_1^{-1} . \tag{2.22}$$

Orijentacija površine može biti obrnuta, pri čemu površinu označavamo inverznim elementom,

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Uparrow h^{-1}"] \end{tikzcd} ,$$

dok promena orijentacije krivih vodi do površinskog elementa označenog sa $\tilde{h} = g_1^{-1} \triangleright h^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "g_1^{-1}"] \arrow[r, bend right, "g_2^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{h}"] & \bullet \end{tikzcd} .$$

Kako bi diskutovali kompozibilnost dva 2-morfizma uvedimo sledeću notaciju. Označimo izvor i metu k-strelice ($k = 1, 2$) 2-morfizma h kao $\partial_k^-(h)$ i $\partial_k^+(h)$, respektivno. Sada možemo definisati načine na koje se mogu vršiti kompozicije elementarnih površina i koji su uslovi koji moraju biti zadovoljeni da bi određene kompozicije bile definisane.

Vertikalna kompozicija 2-morfizama

- Vertikalna kompozicija 2-morfizma (g_1, h_1) i 2-morfizma (g_2, h_2), kada su oni kompozibilni, odnosno kada je $\partial_2^+(h_1) = \partial_2^-(h_2)$, daje 2-morfizam (g_1, h_2h_1),

$$\begin{tikzcd} y \bullet & \bullet x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\Downarrow h_1"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y \bullet & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2h_1"] \end{tikzcd} ,$$

  odnosno za par (g_1, h_1) i (g_2, h_2) važi jednakost:

$$(g_2, h_2) \#_2 (g_1, h_1) = (g_1, h_2h_1) . \tag{2.23}$$

- Vertikalna kompozicija je asocijativna, tj. za 2-morfizme (g_1, h_1), (g_2, h_2) i (g_3, h_3), kada je $\partial_1^+(h_1) = \partial_1^-(h_2)$ i $\partial_1^+(h_2) = \partial_1^-(h_3)$,

$$\begin{tikzcd} y \bullet & \bullet x \arrow[l, "g_3"'] \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, bend left=60, "g_4"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\Downarrow h_2h_1"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y \bullet & \bullet x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, bend left=60, "g_4"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\Downarrow h_1"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\Downarrow h_3h_2"] \end{tikzcd} ,$$

važi:

$$(g_3, h_3)\#_2(g_1, h_2h_1) = (g_2, h_3h_2)\#_2(g_1, h_1)\,. \tag{2.24}$$

- Za svaki morfizam g postoji 2-morfizam $(g, 1_g)$ koji je identitet za vertikalnu kompoziciju 2-morfizama:

$$\begin{tikzcd} y \bullet & \bullet x \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g"] \end{tikzcd} .$$

Horizontalna kompozicija 2-morfizama

- Horizontalna kompozicija 2-morfizama (g_1, h_1) i (g_2, h_2), kada su oni kompozibilni, odnosno kada je $\partial_1^-(h_1) = \partial_1^+(h_2)$, daje 2-morfizam $(g_1g_2, h_1g_1 \triangleright h_2)$:

$$\begin{tikzcd} z\bullet & y\bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} z\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1'g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1g_1\triangleright h_2"] \end{tikzcd} .$$

Horizontalna kompozicija 2-morfizama je grupna operacija u $G \times H$ grupi:

$$(g_1, h_1)\#_1(g_2, h_2) =$$

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_1)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_2)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_2}"] \end{tikzcd} =$$

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_1)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_2)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "{g_1}^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "{g_1}^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1^{-1}}"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_2}"] \end{tikzcd} =$$

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_1)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(g_1\triangleright h_2)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g_1\triangleright h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1g_2}"] \end{tikzcd} =$$

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_1g_1\triangleright h_2)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1g_1\triangleright h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1g_2}"] \end{tikzcd} = (g_1g_2, h_1g_1 \triangleright h_2)\,.$$

- Horizontalna kompozicija 2-morfizama je asocijativna, odnosno za 2-morfizme (g_1, h_1), (g_2, h_2) i (g_3, h_3) za koje je $\partial_1^-(h_1) = \partial_1^+(h_2)$ i $\partial_1^-(h_2) = \partial_1^+(h_3)$, važi

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1'g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1g_1\triangleright h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_3"'] \arrow[l, bend left, "g_3'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2g_3"'] \arrow[l, bend left, "g_2'g_3'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2g_2\triangleright h_3"] \end{tikzcd} ,$$

odnosno formalno zapisano

$$(g_1g_2, h_1g_1 \triangleright h_2)\#_1(g_3, h_3) = (g_1, h_1)\#_1(g_2g_3, h_2g_2 \triangleright h_3)\,. \tag{2.25}$$

Dokaz. Proverimo ovu jednakost. Leva strana jednačine daje:

$$(g_1g_2, h_1g_1 \rhd h_2)\#_1(g_3, h_3) = (g_1g_2g_3, h_1\, g_1 \rhd h_2\, (g_1g_2) \rhd h_3)\,. \tag{2.26}$$

Desna strana jednačine daje takođe

$$\begin{aligned}(g_1, h_1)\#_1(g_2g_3, h_2g_2 \rhd h_3) &= (g_1g_2g_3, h_1g_1 \rhd (h_2g_2 \rhd h_3)) \\ &= (g_1g_2g_3, h_1\, g_1 \rhd h_2\, g_1 \rhd (g_2 \rhd h_3) \\ &= (g_1g_2g_3, h_1\, g_1 \rhd h_2\, (g_1g_2) \rhd h_3)\,,\end{aligned} \tag{2.27}$$

primenom identiteta (2.5) . ■

- Postoji 2-morfizam koji služi kao identitet za horizontalnu kompoziciju 2-morfizama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x & x \arrow[l, bend right=40, "1_x"'] \arrow[l, bend left=40, "1_x"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{1_x}"] \end{tikzcd}\ .$$

- Kompozicija morfizama je invarijantna na redosled vršenja horizontalnih i vertikalnih kompozicija, tj. važi relacija

$$\Big((g_1',h_1')\#_2(g_1,h_1)\Big)\#_1\Big((g_2',h_2')\#_2(g_2,h_2)\Big)=\Big((g_1',h_1')\#_1(g_2',h_2')\Big)\#_2\Big((g_1,h_1)\#_1(g_2,h_2)\Big), \tag{2.28}$$

što je lepo ilustrovano u dijagramskoj notaciji, gde dijagram oblika

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] x & y \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, "g_1'" near end] \arrow[l, bend left=50, "g_1''"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1", yshift=2.5ex] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1'", yshift=-2.5ex] & z \arrow[l, bend right=50, "g_2"'] \arrow[l, "g_2'" near end] \arrow[l, bend left=50, "g_2''"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2", yshift=2.5ex] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2'", yshift=-2.5ex] \end{tikzcd}$$

jednoznačno određuje 2-morfizam. Pravilo (2.28) se zove "izmenski zakon"[10].

Dokaz. Dokažimo jednakost (2.28). Leva strana jednačine jednaka je:

$$\begin{aligned}\big((g_1', h_1')\#_2(g_1, h_1)\big)\#_1\big((g_2', h_2')\#_2(g_2, h_2)\big) &= \big(g_1, h_1'h_1\big)\#_1\big(g_2, h_2'h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'h_1\, g_1 \rhd (h_2'h_2)\big)\,.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Desna strana jednačine (2.28) postaje:

$$\begin{aligned}\big((g_1', h_1')\#_1(g_2', h_2')\big)\#_2\big((g_1, h_1)\#_1(g_2, h_2)\big) &= \big(g_1'g_2', h_1'g_1' \rhd h_2'\big)\#_2\big(g_1g_2, h_1g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'g_1' \rhd h_2'\, h_1\, g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'(\partial(h_1)g_1) \rhd h_2'\, h_1\, g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'\, \partial(h_1) \rhd (g_1 \rhd h_2')\, h_1\, g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'\, h_1(g_1 \rhd h_2')h_1^{-1}\, h_1\, g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'\, h_1\, g_1 \rhd h_2'\, g_1 \rhd h_2\big) \\ &= \big(g_1g_2, h_1'\, h_1\, g_1 \rhd (h_2'h_2)\big)\,.\end{aligned} \tag{2.30}$$

U prethodnom postupku primenili smo identitete (2.5) i (2.7). Dokazali smo identitet (2.28). ■

[10] *izmenski zakon* (eng. *interchange law*).

Kompozicija 2-morfizma i 1-morfizma

Izračunajmo holonomiju koja odgovara nekoj površini ako imamo 1-formu $\alpha \in \mathfrak{g}$ i 2-formu $\beta \in \mathfrak{h}$. Površinu

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, "f"'] \\ \bullet \arrow[u, "h"] & \bullet \arrow[l, "k"] \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow h"] \end{tikzcd}$$

interpretiramo kao 2-morfizam $h : fg \to hk$. Veću površinu možemo dobiti nadovezivanjem[11]:

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \\ \bullet \arrow[u] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] \\ \bullet \arrow[u] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\Swarrow"] \end{tikzcd} .$$

Koristeći *nadovezivanje* možemo da nađemo holonomiju $\mathrm{hol}(\Sigma)$ koja odgovara nekoj površini Σ, svodeći problem na traženje holonomije malih kvadrata na koje je ta površina izdeljena, formiranjem njihove kompozicije na prethodno definisan način, a zatim uzimanjem limesa kada ti kvadrati postaju infinitezimalno mali.

- *Nadovezivanje* je način na koji se vrši kompozicija jednog 2-morfizma h i jednog 1-morfizma g_1 koji se nalazi *sa leve strane*, odnosno kada je $\partial_1^-(g_1) = \partial_1^+(h)$:

  $$\begin{tikzcd} z\bullet & y\bullet \arrow[l, "g_1"'] & & \bullet x \arrow[ll, bend right, "g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_2'"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} .$$

  Ovako formiran 2-morfizam naziva se *nadovezivanje* 2-morfizma h i 1-morfizma g_1 sa leve strane[12] $g_1 \#_1 (g_2, h)$, osnosno 2-morfizam h *proširen sa leve strane* sa 1-morfizmom g_1. Ova kompozicija formirana je kao horizontalna kompozicija dva 2-morfizma $(g_1, 1_{g_1}) \#_1 (g_2, h)$,

  $$\begin{tikzcd} z\bullet & & y\bullet \arrow[ll, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_1"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & & \bullet x \arrow[ll, bend right, "g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_2'"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} z\bullet & & & \bullet x \arrow[lll, bend right, "g_1 g_2"'] \arrow[lll, bend left, "g_1 g_2'"] \arrow[lll, phantom, "\Downarrow g_1 \rhd h"] \end{tikzcd} ,$$

  odnosno formalno zapisano:

  $$g_1 \#_1 (g_2, h) = (g_1, 1_{g_1}) \#_1 (g_2, h) = (g_1 g_2, g_1 \rhd h) . \tag{2.31}$$

- Na sličan način možemo formirati i *nadovezivanje* 2-morfizma h i 1-morfizma g_2 *sa desne strane*, kada je $\partial_1^-(h) = \partial_1^+(g_2)$, čiju kompoziciju obeležavamo sa $(g_1, h) \#_1 g_2$:

  $$\begin{tikzcd} z\bullet & & \bullet y \arrow[ll, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_1'"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h"] & x\bullet \arrow[l, "g_2"'] \end{tikzcd} .$$

[11] eng. *whiskering*.
[12] eng. *left-whiskered*.

Ovako formiran 2-morfizam naziva se *nadovezivanje* 2-morfizma h i 1-morfizma g_2 sa desne strane[13], odnosno 2-morfizam *h proširen sa desne strane* sa 1-morfizmom g_2. Ova kompozicija formirana je kao horizontalna kompozicija dva 2-morfizma $(g_1, h)\#_1(g_2, 1_{g_2})$,

$$\begin{tikzcd}
z\bullet & y\bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_2}"] & = & z\bullet & & \bullet x \arrow[ll, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_1'g_2"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h"]
\end{tikzcd} ,$$

odnosno formalno zapisano:

$$(g_1, h)\#_1 g_2 = (g_1, h)\#_1(g_2, 1_{g_2}) = (g_1g_2, hg_1 \triangleright 1_{g_2}) = (g_1g_2, h)\,. \tag{2.32}$$

Uz pomoć ovog trika, možemo da kombinujemo dva 2-morfizma na način demonstriran u narednom primeru.

Primer 2.2.1 *Nađimo holonomiju koja odgovara površini dva kvadrata:*

$$\begin{tikzcd}
n\bullet & m\bullet \arrow[l, "g_{mn}"'] & l\bullet \arrow[l, "g_{lm}"'] \\
k\bullet \arrow[u, "g_{kn}"] & j\bullet \arrow[u, "g_{jm}"'] \arrow[l, "g_{jk}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{jmn}"] & i\bullet \arrow[u, "g_{il}"'] \arrow[l, "g_{ij}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{ilm}"]
\end{tikzcd} .$$

Ovo se radi iz dva koraka. Prvo se formira kompozicija 2-morfizma h_{ilm} sa 1-morfizmom g_{mn} koji deluje sa leve strane, pri čemu se dobija 2-morfizam:

$$g_{mn}\#_1(g_{lm}g_{il}, h_{ilm}) :\; g_{mn}g_{lm}g_{il} \;\to\; g_{mn}g_{jm}g_{ij}\,, \tag{2.33}$$

$$\begin{tikzcd}
n\bullet & m\bullet \arrow[l, "g_{mn}"'] & l\bullet \arrow[l, "g_{lm}"'] \\
 & j\bullet \arrow[u, "g_{jm}"] & i\bullet \arrow[u, "g_{il}"'] \arrow[l, "g_{ij}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{ilm}"]
\end{tikzcd} .$$

Zatim se formira $(g_{mn}g_{jm}, h_{jmn})\#_1 g_{ij}$ kompozicija 2-morfizma h_{jmn} i 1-morfizma g_{ij} koji deluje sa desne strane:

$$(g_{mn}g_{jm}, h_{jmn})\#_1 g_{ij} :\; g_{mn}g_{jm}g_{ij} \;\to\; g_{kn}g_{jk}g_{ij}\,, \tag{2.34}$$

$$\begin{tikzcd}
n\bullet & m\bullet \arrow[l, "g_{mn}"'] & \\
k\bullet \arrow[u, "g_{kn}"] & j\bullet \arrow[u, "g_{jm}"'] \arrow[l, "g_{jk}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{jmn}"] & i\bullet \arrow[l, "g_{ij}"]
\end{tikzcd} .$$

Najzad vertikalnom kompozicijom ova dva 2-morfizma dobijamo 2-morfizam:

$$\big((g_{mn}g_{jm}, h_{jmn})\#_1 g_{ij}\big)\#_2\big(g_{mn}\#_1(g_{lm}g_{il}, h_{ilm})\big) :\; g_{mn}g_{lm}g_{il} \;\to\; g_{kn}g_{jk}g_{ij}\,, \tag{2.35}$$

$$\begin{tikzcd}
n\bullet & m\bullet \arrow[l, "g_{mn}"'] & l\bullet \arrow[l, "g_{lm}"'] \\
k\bullet \arrow[u, "g_{kn}"] & j\bullet \arrow[u, "g_{jm}"'] \arrow[l, "g_{jk}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{jmn}"] & i\bullet \arrow[u, "g_{il}"'] \arrow[l, "g_{ij}"] \arrow[ul, phantom, "\swarrow h_{ilm}"]
\end{tikzcd} .$$

Na sličan način kao u prethodnom primeru formiraćemo površinsku holonomiju koja odgovara tetraedru – relevantan rezultat u slučaju *triangulacije prostorvremena.*

[13] eng. *right-whiskered.*

2.2.5 2-koneksija i 2-krivina

Kao što Lijeva grupa G generiše koneksiju α, koju koristimo da formulišemo BF teoriju, 2-grupa generiše 2-koneksiju, uređeni par $(\alpha\,,\beta)$, zadat 1-formom elementom algebre $\mathfrak{g}$, $\alpha\in\mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$, i 2-formom elementom algebre $\mathfrak{h}$, $\beta\in\mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{h})$, gde je $\mathfrak{h}$ Lijeva algebra koja odgovara Ljevoj grupi H. Za 2-koneksiju se definiše tzv. *lažna 2-krivina*, uređeni par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, na sledeći način

$$\mathcal{F}=\mathrm{d}\alpha+\alpha\wedge\alpha-\partial\beta\,,\qquad \mathcal{G}=d\beta+\alpha\wedge^{\triangleright}\beta\,. \tag{2.36}$$

Ovde $\alpha\wedge^{\triangleright}\beta$ predstavlja istovremeno ukršteni proizvod diferencijalnih formi α i β i njihov proizvod kao elemenata algebri dejstvom $\triangleright$, videti [16]. Uređeni par 2-krivine $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ima epitet *"lažni"* zbog prisustva dodatnog člana $\partial\beta$ u definiciji $\mathcal{F}$ [12].

Krivine možemo raspisati u bazisima odgovarajućih algebri i diferencijalnih formi:

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\mu\nu}\tau_\alpha\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\,,\quad \mathcal{G}=\frac{1}{3!}\mathcal{G}^{a}{}_{\mu\nu\rho}t_a\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\,,$$

gde su koeficijenti:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\mu\nu}&=\partial_\mu\alpha^\alpha{}_\nu-\partial_\nu\alpha^\alpha{}_\mu+f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\alpha^\beta{}_\mu\alpha^\gamma{}_\nu-\beta^a{}_{\mu\nu}\partial_a{}^\alpha\,,\\ \mathcal{G}^{a}{}_{\mu\nu\rho}&=\partial_\mu\beta^a{}_{\nu\rho}+\partial_\nu\beta^a{}_{\rho\mu}+\partial_\rho\beta^a{}_{\mu\nu}+\alpha^\alpha{}_\mu\beta^b{}_{\nu\rho}\rhd_{\alpha b}{}^a+\alpha^\alpha{}_\nu\beta^b{}_{\rho\mu}\rhd_{\alpha b}{}^a+\alpha^\alpha{}_\rho\beta^b{}_{\mu\nu}\rhd_{\alpha b}{}^a\,.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Lažna krivina

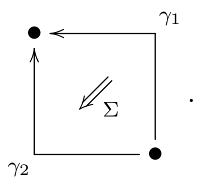
Prema Baezu [28], pridev *"lažna"* potiče iz rada Brina i Mesinga i koristi se za razlikovanje dve vrste krivine, *2-krivine* i *lažne 2-krivine*. Obična 2-krivina, uređen par (F,G) za 2-koneksiju (α,β), $\alpha\in\mathcal{A}^1(\mathfrak{g},\mathcal{M}_4)$ i $\beta\in\mathcal{A}^2(\mathfrak{h},\mathcal{M}_4)$, definiše se na standardan način:

$$\begin{aligned}F&=\mathrm{d}\alpha+\alpha\wedge\alpha,\\ G&=\mathrm{d}\beta+\alpha\wedge^{\triangleright}\beta\,.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Lažna 3-krivina, uređen par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ima dodatni član:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&=F-\partial\beta,\\ \mathcal{G}&=G\,.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Pojam lažne 2-krivine se uvodi iz sledećeg razloga. Posmatrajmo površinu Σ:



Ovaj kvadrat predstavlja 2-morfizam $\Sigma:\gamma_1\to\gamma_2$, gde su γ_1 i γ_2 1-morfizmi prikazani na slici. Želimo da izračunamo:

$$\mathrm{hol}(\Sigma):\mathrm{hol}(\gamma_1)\to\mathrm{hol}(\gamma_2)\,. \tag{2.40}$$

Holonomija $\mathrm{hol}(\Sigma)$ zavisi od 2-forme koneksije β. Njen izvor i meta zavise samo od 1-forme α. Zahtev da ovaj 2-morfizam ima dobro definisan izvor i metu dovodi do relacije koja povezuje koneksije α i β. Ovde ćemo demonstrirati kako se ona izvodi.

Izraženo preko 1-koneksije α, važi:

$$\mathrm{hol}(\gamma_1)=\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\gamma_1}\alpha\right),\qquad \mathrm{hol}(\gamma_2)=\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\gamma_2}\alpha\right). \tag{2.41}$$

Takođe, 2-morfizam $h : g_1 \to g_2$ je određen elementom $h \in H$, pri čemu je $g_2 = \partial(h)g_1$. To znači da je 2-morfizam $\mathrm{hol}(\Sigma) : \mathrm{hol}(\gamma_1) \to \mathrm{hol}(\gamma_2)$ određen elementom $h \in H$, pri čemu

$$\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\gamma_2} \alpha\right) = \partial(h)\, \mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\gamma_1} \alpha\right) , \tag{2.42}$$

odnosno $\partial(h) = \mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\partial\Sigma} \alpha\right)$. U prethodnom izrazu integracija se vrši po granici površine $\partial\Sigma = \gamma_2\gamma_1^{-1}$. Imajući u vidu da je kvadrat mali, a koristeći Stoksovu teoremu dobijamo:

$$\partial(h) = \mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\partial\Sigma} \alpha\right) \approx \mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma} F\right) . \tag{2.43}$$

Sa druge strane 2-morfizam h izražen preko 2-forme β je:

$$h \approx \mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma} \beta\right) . \tag{2.44}$$

Zamenjujući prethodni izraz za h u jednačini (2.43) dobijamo vezu između 1-koneksije α i 2-koneksije β

$$\partial(\mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma} \beta\right)) \approx \mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma} F\right) , \tag{2.45}$$

odnosno identitet:

$$\partial(\beta) = F = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha\,. \tag{2.46}$$

Sada, možemo uvesti pojam lažne krivine $\mathcal{F} = F - \partial(h)$.

Transformacije 2-koneksije i 2-krivine

U teoriji kategorija, 2-gejdž transformacije generisane su elementima grupa G i H. Pri G-gejdž transformacijama, 2-koneksija se transformiše po zakonu transformacije

$$\alpha' = g\alpha g^{-1} + g\mathrm{d}g^{-1}\,, \qquad \beta' = g \rhd \beta\,, \tag{2.47}$$

gde je parametar transformacija $g : \mathcal{M}_4 \to G$ element G-glavnog raslojenja $\mathcal{M}_4$. Zatim, pri H-gejdž transformacijama, generisanim parametrom $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$, 2-koneksija se transformiše:

$$\alpha' = \alpha + \partial\eta\,, \qquad \beta' = \beta + \mathrm{d}\eta + \alpha' \wedge^{\rhd} \eta - \eta \wedge \eta\,. \tag{2.48}$$

Teorema 1 *Kompozicija G-gejdž i H-gejdž transformacija dovodi do transformacije 2-koneksije*

$$\begin{aligned} \alpha'' &= g\alpha g^{-1} + g\mathrm{d}g^{-1} + \partial(\eta)\,, \\ \beta'' &= g \rhd \beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\rhd} \eta - \eta \wedge \eta\,, \end{aligned} \tag{2.49}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$ i $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ redom parametri G- i H-gejdž transformacija.

Na osnovu definicije 2-krivine (1.4), a primenom gore navedenih transformacionih pravila, dobijamo zakon transformacije 2-krivine.

Teorema 2 *Pri G-gejdž transformacijama 2-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F} \to g\mathcal{F}g^{-1}\,, \qquad \mathcal{G} \to g \rhd \mathcal{G}\,, \tag{2.50}$$

dok se pri H-gejdž transformacijama transformiše po zakonu transformacije:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G} \to \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \eta\,, \tag{2.51}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$ i $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ redom parametri G- i H-gejdž transformacija.

Za više detalja o transformaciji 2-krivine pri 2-gejdž transformacijama pogledati [29] i Dodatak A.

2.3 3-gejdž teorija

U okviru teorije kategorija definiše se viša kategorijska generalizacija pojma 2-kateogije, 3-kategorija, koja se sastoji od objekata, morfizama, zatim morfizama između morfizama koje nazivamo 2-morfizmima, i morfizama između 2-morfizama – 3-morfizama. Pogledati [16] za više detelja.

U okviru 3-gejdž teorije elementarne strukture mnogostrukosti su označene na tri nivoa – krive su obojene elementima grupe $g \in G$, površine elementima $h \in H$, a zapremine elementima $l \in L$. Pritom, da bi konfiguracija 3-gejdž teorije bila dobro definisana, oznake ovih elementarnih struktura mnogostrukosti ne mogu biti proizvoljne, tj. moraju biti zadovoljeni sledeći uslovi.

1. Za svaku površinu označenu sa $h \in H$, oznake izvorne krive g_1 i ciljne krive g_2 zadovoljavaju relaciju $\partial(h) = g_2 g_1^{-1}$.
2. Za svaku zapreminu, oznaka $l \in L$ zadovoljava identitet $\delta(l) = h_2 h_1^{-1}$, gde su h_1 i h_2 izvorna i ciljna površina, respektivno.
3. Za svaku 4-dimenzionalnu hiperpovršinu mnogostrukosti zapreminska holonomija oko nje je trivijalna.

U ovom odeljku razmatraćemo brojne operacije pomoću kojih možemo kombinovati označene putanje, površine i zapremine, kako bismo izračunali kompoziciju elementarnih do proizvoljno velikih struktura mnogostrukosti. Definisane konfiguracije se mogu posmatrati kao klasične konfiguracije 3-gejdž teorije, dok će kasnije u kvantnoj teoriji ovo predstavljati konfiguracije po kojima sabiramo u sumi po stanjima.

2.3.1 3-Grupa

Analogno definiciji grupe i 2-grupe u formalizmu teorije kategorija, može se definisati pojam 3-grupe kao 3-kategorije sa samo jednim objektom, gde su svi morfizmi, 2-morfizmi i 3-morfizmi invertibilni. Takođe, slično kao što je striktna 2-grupa ekvivalentna ukrštenom modulu, može se pokazati da je semistriktna 3-grupa – Grejeva grupa, ekvivalentna strukturi 2-ukrštenog modula [17], [30].

Definicija 2.3.1 (2-ukršten modul) *2-ukršten modul* $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{-,-\})$ *čine:*

- *grupa G koju čine morfizmi sa kompozicijom kao grupnom operacijom*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1 g_2"'] \end{tikzcd} ;$$

- *grupa H koju čine svi 2-morfizmi čiji je izvor identitet*

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "1_\bullet"', ""{name=U, below}] \arrow[l, bend left=50, "\partial h", ""{name=D, above}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "h"] \end{tikzcd} ,$$

gde je horizontalna kompozicija grupna operacija

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "1_\bullet"', ""{name=U1, below}] \arrow[l, bend left=50, "\partial h_1", ""{name=D1, above}] \arrow[from=U1, to=D1, Rightarrow, "h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right=50, "1_\bullet"', ""{name=U2, below}] \arrow[l, bend left=50, "\partial h_2", ""{name=D2, above}] \arrow[from=U2, to=D2, Rightarrow, "h_2"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "1_\bullet"', ""{name=U, below}] \arrow[l, bend left=50, "\partial(h_1 h_2)", ""{name=D, above}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "h_1 h_2"] \end{tikzcd} ;$$

- *grupa L koju čine 3-morfizmi čiji je izvor identitet*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "1_\bullet"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{1_\bullet}"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial\delta l = 1_\bullet"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \delta l"]
\end{tikzcd}\ ;
$$

- *grupni homomorfizam $\partial : H \to G$ koji preslikava svaki 2-morfizam $h \in H$ u metu $\partial h \in G$*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"]
\end{tikzcd}\ ,
$$

pri čemu imamo grupni homomorfizam, odnosno za svaki $h_1, h_2 \in H$ važi

$$\partial(h_1 h_2) = \partial(h_1)\partial(h_2)\,;$$

- *grupni homomorfizam $\delta : L \to H$ koji mapira svaki 3-morfizam $l \in L$ u metu $\delta l \in H$:*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "1_\bullet"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{1_\bullet}"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial\delta l = 1_\bullet"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \delta l"]
\end{tikzcd}\ ,
$$

pri čemu je za $\forall l \in L$ element $\partial(\delta l) = e$ neutralni element grupe G;

- *dejstvo $\triangleright$ grupe G na sve tri grupe, pri čemu je*
  - *dejstvo grupe G na samu sebe zadato horizontalnom konjugacijom*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_0 g g_0^{-1}"']
\end{tikzcd}\ ,
$$

  odnosno formalno zapisano za sve $g_0, g \in G$

$$g_0 \triangleright g = g_0 g g_0^{-1}\,,$$

  - *element grupe G deluje na element grupe H dejstvom $\triangleright$ kao horizontalnom konjugacijom, tačnije njegovim jediničnim 2-morfizmom 1_g, što rezultuje 2-morfizmom $g \triangleright h \in H$,*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g"] & \bullet \arrow[l, bend right, "1_\bullet"'] \arrow[l, bend left, "\partial h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_g^{-1}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, bend left, "\partial(g \triangleright h)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g \triangleright h"]
\end{tikzcd}\ ,
$$

  tj. formalno zapisano za sve $g \in G$ i $h \in H$ imamo

$$g \partial h g^{-1} = \partial(g \triangleright h),$$

  - *element grupe G deluje na element grupu L dejstvom $\triangleright$, što rezultuje 3-morfizmom $g \triangleright l \in L$,*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "g_1"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "g_1"'] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1 g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1 g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g_1 \triangleright h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{g_1 \triangleright l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1 g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1 g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g_1 \triangleright h_2"]
\end{tikzcd}\ ;
$$

- *G-ekvivarijantno preslikavanje koje se naziva* ***Pajferovo podizanje***

$$\{-\,,-\}_{\mathrm{pf}} : H \times H \to L\,.$$

Komponente 2-ukrštenog modula poseduju sledeće osobine.

1. *Homomorfizmi ∂ i δ su G-ekvivarijantni, tj. za svako $g \in G$ i $h \in H$:*

$$g \rhd \partial(h) = \partial(g \rhd h)\,, \qquad g \rhd \delta(l) = \delta(g \rhd l)\,, \tag{2.52}$$

dejstvo grupe G na grupe H, odnosno L, je glatko dejstvo sa leva, i daje jedan automorfizam grupe H, odnosno automorfizam grupe L, tj. $\rhd : G \to \mathrm{Aut}(H)$, odnosno $\rhd : G \to \mathrm{Aut}(L)$. Za svako $g, g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$, $l_1, l_2 \in L$ i $e \in H, L$ važi:

$$g_1 \rhd (g_2 \rhd e) = (g_1 g_2) \rhd e\,, \qquad g \rhd (h_1 h_2) = (g \rhd h_1)(g \rhd h_2)\,, \qquad g \rhd (l_1 l_2) = (g \rhd l_1)(g \rhd l_2)\,. \tag{2.53}$$

Pajferovo podizanje je G-ekvivarijantno bilinearno preslikavanje, odnosno za sve h_1, $h_2 \in H$ i $g \in G$:

$$g \rhd \{h_1\,, h_2\}_{\mathrm{pf}} = \{g \rhd h_1,\, g \rhd h_2\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.54}$$

2. *Za sve $h_1, h_2 \in H$ Pajferov komutator $\langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}$ definisan u (2.6) je identički jednak:*

$$\delta(\{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}) = \langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.55}$$

3. *Za sve $l_1\,, l_2 \in L$ zadovoljen je identitet:*

$$[l_1, l_2] = \{\delta(l_1)\,, \delta(l_2)\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.56}$$

gde je korišćena notacija $[l, k] = lkl^{-1}k^{-1}$.

4. *Pajferovo podizanje zadovoljava sledeće identitete, za sve $h_1, h_2, h_3 \in H$:*

$$\{h_1 h_2, h_3\}_{\mathrm{pf}} = \{h_1, h_2 h_3 h_2^{-1}\}_{\mathrm{pf}} \partial(h_1) \rhd \{h_2, h_3\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.57}$$

odnosno

$$\{h_1, h_2 h_3\}_{\mathrm{pf}} = \{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}} \{h_1, h_3\}_{\mathrm{pf}} \{\langle h_1, h_3\rangle_{\mathrm{pf}}^{-1}, \partial(h_1) \rhd h_2\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.58}$$

5. *Za sve $h \in H$ i $l \in L$ važi identitet:*

$$\{\delta(l), h\}_{\mathrm{pf}} \{h, \delta(l)\}_{\mathrm{pf}} = l(\partial(h) \rhd l^{-1})\,. \tag{2.59}$$

Podstruktura ukršteni modul

Teorema 3 *Podstruktura 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H, \rhd')$ formira ukršteni modul, gde je $\rhd'$ dejstvo grupe H na grupu L, takvo da za svako $h \in H$ i $l \in L$:*

$$h \rhd' l = l\, \{\delta(l)^{-1},\, h\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.60}$$

Dokaz ove teoreme izdelićemo na četiri dela. Pogledati [30] za više detalja.

Lema 1 *Za svako $h_1, h_2 \in H$ i $l \in L$ važi:*

$$(h_1 h_2) \rhd' l = h_1 \rhd' (h_2 \rhd l)\,.$$

Dokaz. Za svako $h_1, h_2 \in H$ i $l \in L$ važi:

$$\begin{aligned}(h_1 h_2) \triangleright' l &= l\{\delta(l)^{-1}, h_1 h_2\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l\{\delta(l)^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}\{\langle\delta(l)^{-1}, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}^{-1}, \partial(\delta(l))^{-1} \triangleright h_1\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l\{\delta(l)^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}\{\langle\delta(l)^{-1}, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\,,\end{aligned}$$

gde smo u prvom redu koristili definiciju dejstva $\triangleright'$ datu teoremom (3), u drugom redu identitet (2.58) i u trećem redu identitet $\partial(\delta) = 1$. Sa druge strane,

$$\begin{aligned}h_1 \triangleright' (h_2 \triangleright' l) &= h_1 \triangleright' (l\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}) \\ &= (h_1 \triangleright' l)(h_1 \triangleright' \{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}) \\ &= l\{\delta(l)^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}})^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l\{\delta(l)^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}\{\langle\delta(l)^{-1}, h_2\}_{\mathrm{pf}}\rangle_{\mathrm{pf}}^{-1}, h_1\}_{\mathrm{pf}}\,,\end{aligned}$$

gde smo u poslednjem koraku iskoristili identitet (2.56). ∎

Lema 2 *Za svako $h \in \mathfrak{h}$ i $l_1, l_2 \in \mathfrak{l}$ važi:*

$$h \triangleright' (l_1 l_2) = (h \triangleright' l_1)(h \triangleright' l_2)\,.$$

Dokaz. Za svako $h \in \mathfrak{h}$ i $l_1, l_2 \in \mathfrak{l}$ važi:

$$\begin{aligned}h{\triangleright'}(l_1l_2) &= (l_1l_2)\{\delta(l_1l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= (l_1l_2)\{\delta(l_2)^{-1}\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2\{\delta(l_2)^{-1},\delta(l_1)^{-1}h\delta(l_1)\}_{\mathrm{pf}}\partial(\delta(l_2)^{-1}){\triangleright}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2\{\delta(l_2)^{-1},\delta(l_1)^{-1}h\delta(l_1)\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2\{\delta(l_2)^{-1},[\delta(l_1)^{-1},h]h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2\{\delta(l_2)^{-1},\delta(\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}})h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2\{\delta(l_2)^{-1},\delta(\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}})\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}\{\langle\delta(l_2)^{-1},h\rangle_{\mathrm{pf}}^{-1},\partial(\delta(l_2)^{-1}){\triangleright}\delta(\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}})\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2[l_2^{-1},\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}]\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}})^{-1},\delta(\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}})\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1l_2l_2^{-1}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}l_2\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}{}^{-1}\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}[\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}^{-1},\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}]\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}l_2\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}{}^{-1}\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}^{-1}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}{}^{-1}\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= l_1\{\delta(l_1)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}}l_2\{\delta(l_2)^{-1},h\}_{\mathrm{pf}} \\ &= (h{\triangleright'}l_1)(h{\triangleright'}l_2),\end{aligned}$$

gde smo u trećem redu iskoristili identitet (2.57), u četvrtom i osmom redu identitet $\partial(\delta) = 1$, u šestom i devetom redu jednačinu (2.56) i u sedmom redu identitet (2.58). ∎

Lema 3 *Zadovoljen je* ***Pajferov identitet*** *za sve l_1, $l_2 \in L$:*

$$\delta(l_1) \triangleright' l_2 = l_1\, l_2\, l_1^{-1}\,.$$

Dokaz. Za sve l_1, $l_2 \in L$:

$$\delta(l_1) \triangleright' l_2 = l_2\{\delta(l_2)^{-1}, \delta(l_1)\}_{\mathrm{pf}} = l_2 l_2^{-1} l_1 l_2 l_1^{-1} = l_1\, l_2\, l_1^{-1}\,,$$

ovde smo kod prve jednakosti koristili definiciju dejstva $\triangleright'$ datu teoremom (3), kod druge identitet (2.56). ∎

Lema 4 *Za sve $h \in H$ i $l \in L$ važi:*

$$\delta(h \triangleright' l) = h \triangleright' \delta(l)\,.$$

Dokaz. Za sve $h \in H$ i $l \in L$ važi:

$$\begin{aligned}\delta(h \rhd' l) &= \delta\left(l\{\delta(l)^{-1}, h\}_{\mathrm{pf}}\right)\\ &= \delta(l)\delta(\{\delta(l)^{-1}, h\}_{\mathrm{pf}})\\ &= \delta(l)\langle\delta(l)^{-1}, h\rangle_{\mathrm{pf}}\\ &= \delta(l)\delta(l)^{-1}h\delta(l)\,\partial(\delta(l))^{-1} \rhd' h^{-1}\\ &= h\delta(l)h^{-1}\\ &= h \rhd' \delta(l)\,,\end{aligned}$$

gde smo u prvom redu koristili definiciju (3) dejstva $\rhd'$, u trećem redu identitet (2.55), u četvrtom redu definiciju Pajferovog komutatora (2.6), u petom identitet $\partial(\delta) = 1$ i u poslednjem činjenicu da grupa H deluje na samu sebe konjugacijom. ■

Sa druge strane, podstruktura $(H \xrightarrow{\partial} G\,, \rhd)$ je u opštem slučaju pre-ukršteni modul, tj. nije zadovoljen Pajferov identitet. Međutim, u slučaju kada je preslikavanje ∂ trivijalno, a grupa H Abelova, svi Pajferovi komutatori su trivijalni i Pajferov identitet je zadovoljen, tj. za sve h_1, $h_2 \in H$:

$$\partial(h_1) \rhd h_2 = h_1\, h_2\, h_1^{-1}\,. \tag{2.61}$$

Važni identiteti

Elementi grupe H zadovoljavaju sledeće identitete $h_1, h_2, h_3 \in H$ [17]:

$$\{h_1h_2, h_3\}_{\mathrm{pf}} = (h_1 \rhd' \{h_2, h_3\}_{\mathrm{pf}})\{h_1, \partial(h_2) \rhd h_3\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.62}$$

$$\{h_1, h_2h_3\}_{\mathrm{pf}} = \{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}(\partial(h_1) \rhd h_2) \rhd' \{h_1, h_3\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.63}$$

Koristeći peti uslov 2-ukrštenog modula dobijamo da za svako $h \in H$ i $l \in L$ važi

$$\{h, \delta(l)^{-1}\}_{\mathrm{pf}} = (h \rhd' l^{-1})(\partial(h) \rhd l)\,, \tag{2.64}$$

tj. za sve elemente $h_1, h_2 \in H$ važe sledeći identiteti:

$$\{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}^{-1} = e \rhd' \{h_1^{-1}, \partial(h_1) \rhd h_2\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.65}$$

$$\{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}^{-1} = \partial(h_1) \rhd \{h_1^{-1}, h_1h_2h_1^{-1}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.66}$$

$$\{h_1, h_2\}^{-1}{}_{\mathrm{pf}} = (h_1h_2h_1^{-1}) \rhd' \{h_1, h_2^{-1}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.67}$$

$$\{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}^{-1} = (\partial(h_1) \rhd h_2) \rhd' \{h_1, h_2^{-1}\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{2.68}$$

2.3.2 Lijeva 3-algebra

Slično definiciji 2-ukrštenog modula, na jeziku Lijevih 3-algebri analogno se definiše *diferencijalni 2-ukršten modul.*

Definicija 2.3.2 (Diferencijalni 2-ukršten modul) *Diferencijalni 2-ukršten modul zadat je Lijevim algebrama $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$, kao i preslikavanjima $\partial : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ i $\delta : \mathfrak{l} \to \mathfrak{h}$*

$$\mathfrak{l} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{h} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{g}\,, \tag{2.69}$$

zajedno sa dejstvom $\triangleright$ algebre $\mathfrak{g}$ na sve tri algebre i $\mathfrak{g}$-ekvivarijantnim bilinearnim preslikavanjem, koje se naziva **Pajferovo podizanje***:*

$$\{-\,,\,-\}_{\rm pf} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{l}\,. \tag{2.70}$$

Izborom bazisa $T_A \in \mathfrak{l}$, $t_a \in \mathfrak{h}$ i $\tau_\alpha \in \mathfrak{g}$,

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C\, T_C\,, \qquad [t_a, t_b] = f_{ab}{}^c\, t_c\,, \qquad [\tau_\alpha, \tau_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \tau_\gamma\,, \tag{2.71}$$

preslikavanja ∂ i δ možemo da definišemo u bazisima algebri:

$$\partial(t_a) = \partial_a{}^\alpha\, \tau_\alpha\,, \qquad \delta(T_A) = \delta_A{}^a\, t_a\,. \tag{2.72}$$

Pritom, važi identitet:

$$\delta_A{}^a \partial_a{}^\alpha = 0\,. \tag{2.73}$$

Dejstvo $\triangleright$ elemenata algebre $\mathfrak{g}$ na elemente algebri $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}$ definisano je delovanjem generatora algebre $\mathfrak{g}$ na generatore odgovarajućih algebri, kao:

$$\tau_\alpha \triangleright T_A = \triangleright_{\alpha A}{}^B\, T_B\,, \qquad \tau_\alpha \triangleright t_a = \triangleright_{\alpha a}{}^b\, t_b\,, \qquad \tau_\alpha \triangleright \tau_\beta = \triangleright_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \tau_\gamma\,. \tag{2.74}$$

Koeficijenti $X_{ab}{}^A$ koji određuju ***Pajferovo podizanje*** *definisani su relacijom:*

$$\{t_a,\, t_b\}_{\rm pf} = X_{ab}{}^A T_A\,. \tag{2.75}$$

Komponente diferencijalnog 2-ukrštenog modula poseduju sledeće osobine.

1. *Dejstvo algebre $\mathfrak{g}$ na samu sebe je preko pridružene reprezentacije, tj. formalno zapisano, za svako $\underline{g}_0, \underline{g} \in \mathfrak{g}$*

$$\underline{g}_0 \triangleright \underline{g} = \left[\underline{g}_0, \underline{g}\right]\,, \tag{2.76}$$

odnosno u bazisu:

$$\triangleright_{\alpha\beta}{}^\gamma = f_{\alpha\beta}{}^\gamma\,. \tag{2.77}$$

2. *Preslikavanja $\partial : H \to G$ i $\delta : L \to H$ su $\mathfrak{g}$-ekvivarijantna preslikavanja, odnosno za sve $\underline{l} \in \mathfrak{l}$, $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ i $\underline{g} \in \mathfrak{g}$ važi:*

$$\partial(\underline{g} \triangleright \underline{h}) = [\underline{g}, \partial(\underline{h})]\,, \qquad \delta(\underline{g} \triangleright \underline{l}) = \underline{g} \triangleright \delta(\underline{l})\,, \tag{2.78}$$

odnosno izraženo u bazisu:

$$\partial_a{}^\beta f_{\alpha\beta}{}^\gamma = \triangleright_{\alpha a}{}^b \partial_b{}^\gamma\,, \qquad \partial_B{}^a \triangleright_{\alpha A}{}^B = \triangleright_{\alpha b}{}^a \delta_A{}^b\,. \tag{2.79}$$

3. *Dejstvo $\triangleright$ algebre $\mathfrak{g}$ na algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$ je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, tako da, za svako $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$, $\underline{l}_1, \underline{l}_2$ i svako $\underline{g} \in \mathfrak{g}$, važe sledeća pravila*

$$\underline{g} \triangleright [\underline{h}_1,\, \underline{h}_2] = [\underline{g} \triangleright \underline{h}_1,\, \underline{h}_2] + [\underline{h}_1,\, \underline{g} \triangleright \underline{h}_2]\,, \tag{2.80}$$

$$\underline{g} \triangleright [\underline{l}_1,\, \underline{l}_2] = [\underline{g} \triangleright \underline{l}_1,\, \underline{l}_2] + [\underline{l}_1,\, \underline{g} \triangleright \underline{l}_2]\,, \tag{2.81}$$

odnosno izraženo u bazisu:

$$f_{ab}{}^c \triangleright_{\alpha c}{}^d = 2 \triangleright_{\alpha [a|}{}^c f_{c|b]}{}^d\,, \tag{2.82}$$

$$f_{AB}{}^C \triangleright_{\alpha C}{}^D = 2 \triangleright_{\alpha [A|}{}^C f_{C|B]}{}^D\,. \tag{2.83}$$

4. *Pajferovo podizanje je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, tj. za sve $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ i $\underline{g} \in \mathfrak{g}$*

$$\underline{g} \rhd \{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}} = \{\underline{g} \rhd \underline{h}_1, \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}} + \{\underline{h}_1, \underline{g} \rhd \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}} \,, \tag{2.84}$$

tj. izraženo preko odgovarajućih koeficijenata definisanih u bazisu:

$$X_{ab}{}^{B} \rhd_{\alpha B}{}^{A} = \rhd_{\alpha a}{}^{c} X_{cb}{}^{A} + \rhd_{\alpha b}{}^{c} X_{ac}{}^{A} \,. \tag{2.85}$$

5. *Za sve $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ Pajferov komutator definisan u (2.9) na jeziku algebri postaje*

$$\delta(\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}}) = -\langle \underline{h}_1, \underline{h}_2 \rangle_{\mathrm{pf}} \,, \tag{2.86}$$

tj. izraženo u bazisu:

$$X_{ab}{}^{A} \delta_{A}{}^{c} = f_{ab}{}^{c} - \partial_{a}{}^{\alpha} \rhd_{\alpha b}{}^{c} \,. \tag{2.87}$$

6. *Za sve $\underline{l}_1$, $\underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$ zadovoljen je identitet*

$$[\underline{l}_1, \underline{l}_2] = \{\delta(\underline{l}_1), \delta(\underline{l}_2)\}_{\mathrm{pf}} \,, \tag{2.88}$$

tj. važi relacija:

$$f_{AB}{}^{C} = \delta_{A}{}^{a} \delta_{B}{}^{b} X_{ab}{}^{C} \,. \tag{2.89}$$

7. *Pajferovo podizanje za sve $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2$, $\underline{h}_3 \in \mathfrak{h}$ zadovoljava sledeće identitete:*

$$\{[\underline{h}_1,\underline{h}_2],\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}=\partial(\underline{h}_1)\rhd\{\underline{h}_2,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}+\{\underline{h}_1,[\underline{h}_2,\underline{h}_3]\}_{\mathrm{pf}}-\partial(\underline{h}_2)\rhd\{\underline{h}_1,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}-\{\underline{h}_2,[\underline{h}_1,\underline{h}_3]\}_{\mathrm{pf}}, \tag{2.90}$$

$$\{[\underline{h}_1,\underline{h}_2],\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}=\{\partial(\underline{h}_1)\rhd\underline{h}_2,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}-\{\partial(\underline{h}_2)\rhd\underline{h}_1,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}-\{\underline{h}_1,\delta\{\underline{h}_2,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}\}_{\mathrm{pf}}+\{\underline{h}_2,\delta\{\underline{h}_1,q,\underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}\}_{\mathrm{pf}}. \tag{2.91}$$

Izražen u bazisu ovaj identitet postaje:

$$f_{ab}{}^{d} X_{dc}{}^{B} = \partial_{a}{}^{\alpha} X_{bc}{}^{A} \rhd_{\alpha A}{}^{B} + X_{ad}{}^{B} f_{bc}{}^{d} - \partial_{b}{}^{\alpha} \rhd_{\alpha A}{}^{B} X_{ac}{}^{A} - X_{bd}{}^{B} f_{ac}{}^{d} \,. \tag{2.92}$$

Pored toga, za sve $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2$, $\underline{h}_3 \in \mathfrak{h}$ važi identitet

$$\{\underline{h}_1, [\underline{h}_2, \underline{h}_3]\}_{\mathrm{pf}} = \{\delta\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}}, \underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}} - \{\delta\{\underline{h}_1, \underline{h}_3\}_{\mathrm{pf}}, \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}} \,, \tag{2.93}$$

tj. u bazisu:

$$X_{ad}{}^{A} f_{bc}{}^{d} = X_{ab}{}^{B} \delta_{B}{}^{d} X_{dc}{}^{A} - X_{ac}{}^{B} \delta_{B}{}^{d} X_{db}{}^{A} \,. \tag{2.94}$$

8. *Svako $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ i $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ zadovoljavaju identitet*

$$\{\delta(\underline{l}), \underline{h}\} + \{\underline{h}, \delta(\underline{l})\} = -\partial(\underline{h}) \rhd \underline{l} \,, \tag{2.95}$$

tj. relacija:

$$\delta_{A}{}^{a} X_{ab}{}^{B} + \delta_{A}{}^{a} X_{ba}{}^{B} = -\partial_{b}{}^{\alpha} \rhd_{\alpha A}{}^{B} \,. \tag{2.96}$$

Podstruktura diferencijalni ukršteni modul

Teorema 4 *Podstruktura diferencijalnog 2-ukrštenog modula, formira diferencijalni modul* $(L \xrightarrow{\delta} H\,, \rhd')$, *gde je dejstvo* $\rhd'$ *algebre* $\mathfrak{h}$ *na algebru* $\mathfrak{l}$ *takvo da za sve* $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ *i* $\underline{l} \in \mathfrak{l}$

$$\underline{h} \rhd' \underline{l} = -\{\delta(\underline{l}),\, \underline{h}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{2.97}$$

tj. u bazisu:

$$t_a \rhd' T_A = {\rhd'}_{aA}{}^{B} T_B\,, \qquad {\rhd'}_{aA}{}^{B} = -\delta_A{}^{b} X_{ba}{}^{B}\,. \tag{2.98}$$

Dokaz ove teoreme podelićemo na četiri dela.

Lema 5 *Za svako* $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ *i* $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ *važi:*

$$[\underline{h}_1, \underline{h}_2] \rhd' \underline{l} = \underline{h}_1 \rhd' (\underline{h}_2 \rhd' l) - \underline{h}_2 \rhd' (\underline{h}_1 \rhd' l)\,.$$

Dokaz. Za svako $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ i $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ važi:

$$\begin{aligned}
[\underline{h}_1, \underline{h}_2] \rhd' \underline{l} &= -\{\delta(l), [\underline{h}_1, \underline{h}_2]\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\{\delta(\{\delta(l), \underline{h}_1\}_{\mathrm{pf}}), \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}} + \{\delta(\{\delta(l), \underline{h}_2\}_{\mathrm{pf}}), \underline{h}_1\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\underline{h}_2 \rhd' (\underline{h}_1 \rhd' \underline{l}) + \underline{h}_1 \rhd' (\underline{h}_2 \rhd' \underline{l})\,,
\end{aligned}$$

gde smo koristili definiciju (2.97) u prvom i trećem redu i identitet (2.93) u drugom redu. ∎

Lema 6 *Za svako* $\underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$ *i* $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ *važi:*

$$\underline{h} \rhd' [\underline{l}_1, \underline{l}_2] = [\underline{h} \rhd' \underline{l}_1, \underline{l}_2] + [\underline{l}_1, \underline{h} \rhd' \underline{l}_2]\,.$$

Dokaz. Za svako $\underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$ i $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ važi:

$$\begin{aligned}
\underline{h} \rhd' [\underline{l}_1, \underline{l}_2] &= -\{\delta([\underline{l}_1, \underline{l}_2]), \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\{[\delta(\underline{l}_1), \delta(\underline{l}_2)], \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\partial(\delta(\underline{l}_1)) \rhd \{\delta(\underline{l}_2),\, \underline{h}\}_{\,\mathrm{pf}} - \{\delta(\underline{l}_1),\, [\delta(\underline{l}_2),\, \underline{h}]\}_{\,\mathrm{pf}} \\
&\quad + \partial(\delta(\underline{l}_2)) \rhd \{\delta(\underline{l}_1),\, \underline{h}\}_{\,\mathrm{pf}} + \{\delta(\underline{l}_2),\, [\delta(\underline{l}_1),\, \underline{h}]\}_{\,\mathrm{pf}} \\
&= -\,\{\delta(\underline{l}_1),\, [\delta(\underline{l}_2),\, \underline{h}]\}_{\,\mathrm{pf}} + \{\delta(\underline{l}_2),\, [\delta(\underline{l}_1),\, \underline{h}]\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\{\delta\left(\{\delta(\underline{l}_1), \delta(\underline{l}_2)\}_{\mathrm{pf}}\right), \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} + \{\delta\left(\{\delta(\underline{l}_1), h\}_{\mathrm{pf}}\right), \delta(\underline{l}_2)\}_{\mathrm{pf}} \\
&\quad + \{\delta\left(\{\delta(\underline{l}_2), \delta(\underline{l}_1)\}_{\mathrm{pf}}\right), \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} - \{\delta\left(\{\delta(\underline{l}_2), h\}_{\mathrm{pf}}\right), \delta(\underline{l}_1)\}_{\mathrm{pf}} \\
&= -\{\delta([\underline{l}_1, \underline{l}_2], \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} + [\{\delta(\underline{l}_1), h\}_{\mathrm{pf}}, \underline{l}_2] + \{\delta([\underline{l}_2, \underline{l}_1], \underline{h}\}_{\mathrm{pf}} - [\{\delta(\underline{l}_2), h\}_{\mathrm{pf}}, \underline{l}_1] \\
&= +\underline{h} \rhd' [\underline{l}_1, \underline{l}_2] - [\underline{h} \rhd' \underline{l}_1, \underline{l}_2] - \underline{h} \rhd' [\underline{l}_2, \underline{l}_1] + [\underline{h} \rhd' \underline{l}_2, \underline{l}_1]\,,
\end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje (6). Ovde smo primenili identitet (2.90) u trećem redu, zatim $\partial(\delta) = 0$ u četvrtom redu, identitet (2.93) u petom redu, identitet (2.88) u šestom redu i definiciju $\rhd'$ (2.97) u sedmom redu. ∎

Lema 7 *Za sve* $\underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$ *važi* ***Pajferov identitet****:*

$$\delta(\underline{l}_1) \rhd' \underline{l}_2 = [\underline{l}_1, \underline{l}_2]\,.$$

Dokaz. Za sve $\underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$:

$$\delta(\underline{l}_1) \rhd' \underline{l}_2 = -\{\delta(\underline{l}_2), \delta(\underline{l}_1)\}_{\mathrm{pf}} = -[\underline{l}_2, \underline{l}_1]\,,$$

odakle sledi tvrđenje (7), pri čemu smo iskoristili definiciju (2.97) u prvoj jednakosti i identitet (2.88) u drugoj jednakosti. ∎

Lema 8 *Za sve* $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ *i* $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ *važi:*

$$\delta(\underline{h} \rhd' \underline{l}) = [\underline{h}, \delta(\underline{l})] \,.$$

Dokaz. Za sve $\underline{h} \in \mathfrak{h}$ i $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ važi:

$$\delta(\underline{h} \rhd' \underline{l}) = -\delta(\{\delta(\underline{l}), \underline{h}\}_{\mathrm{pf}}) = -\langle \delta(\underline{l}), \underline{h} \rangle_{\mathrm{pf}} = -[\delta(\underline{l}), \underline{h}] + \partial(\delta(\underline{l})) \rhd \underline{h} \,,$$

odakle sledi tvrđenje (8) kad primenimo $\partial\delta = 0$. Ovde smo iskoristili definiciju (2.97) kod prve jednakosti, identitet (2.86) kod druge jednakosti i definiciju Pajferovog komutatora (2.9) kod treće jednakosti. ∎

Na osnovu osobine 5. možemo da primetimo da trivijalno preslikavanje δ, ili trivijalno Pajferovo podizanje, povlače da L mora da bude Abelova grupa. Odnosno, ako je L Abelova grupa, makar jedno od ova dva preslikavanja, δ ili Pajferovo podizanje, mora da bude trivijalno. Ovo nam nagoveštava da komponente koje formiraju strukturu 3-grupe nisu međusobno nezavisne, tj. da je pri formiranju 3-grupe potrebno pažljivo birati grupe G, H i L i preslikavanja ∂, δ i $\{\_\,,\,\_\}_{\mathrm{pf}}$, tako da zajedno zaista formiraju strukturu 3-grupe.

Detaljnija analiza strukture 3-grupe izložena je u [18].

2.3.3 Kompozicija 3-morfizama

U ovom odeljku ćemo opisati kako se na jeziku 3-gejdž teorije definišu kompozicije elementarnih putanja, površina i zapremina. U 3-gejdž teoriji geometrijski objekti su obojeni na tri nivoa. Krive su označene elementima grupe $g \in G$, a njihova kompozicija i promena orijentacije definisana je kao u standardnoj gejdž teoriji. Površine su označene elementima grupe $h \in H$, a njihova vertikalna kompozicija definisana je na isti način kao u 2-gejdž teoriji diskutovanoj u prethodnom odeljku. Nadovezivanje 2-morfizma sa 1-morfizmom sa leve i desne strane takođe je definisano na isti način kao u 2-gejdž teoriji, dok to nije slučaj sa horizontalnom kompozicijom koja sada u 3-gejdž teoriji rezultuje *izmenskim 3-morfizmom*. Zapremine su označene elementima grupe $l \in L$.

Za svaku zapreminu, podelimo granicu na dve površine, pri čemu je izvorna površina označena sa $\partial_3^-(l) = h_1$ i ciljna površina označena sa $\partial_3^+(l) = h_2$. Na zajedničkoj granici površine izvora i mete biramo dve referentne tačke i delimo granicu na dve krive, pri čemu je izvorna kriva označena sa $\partial_2^-(l) = g_1$ i ciljna kriva označena sa $\partial_2^+(l) = g_2$, kao što je prikazano na dijagramu ispod,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[r, phantom, "\overset{l}{\Rrightarrow}"] & \bullet \arrow[r, phantom, "\Downarrow h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \end{tikzcd} \,,$$

tako da element $l \in L$ zadovoljava relaciju:

$$\delta(l) = h_2 h_1^{-1} \,. \tag{2.99}$$

Orijentacija zapremine se može obrnuti, pri čemu je zapremina promenjene orijentacija označena inverznim elementom l^{-1},

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[r, phantom, "\overset{l^{-1}}{\Lleftarrow}"] & \bullet \arrow[r, phantom, "\Downarrow h_2"] & \bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \end{tikzcd} \,,$$

dok promena orijentacije krivih i površina dovodi do površinskog elementa označenog sa $\tilde{l} = g_1^{-1} \triangleright l$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, "g_1^{-1}"] \arrow[r, bend right=50, "g_2^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow g_1^{-1}\triangleright h_1"] & \bullet \end{tikzcd} \overset{\tilde{l}}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, "g_1^{-1}"] \arrow[r, bend right=50, "g_2^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow g_1^{-1}\triangleright h_2"] & \bullet \end{tikzcd} .$$

Da bismo definisali kada su elementarne zapremine kompozibilne označimo izvor i metu k-strelice ($k = 1, 2, 3$) 3-morfizma l kao $\partial_k^-(l)$ i $\partial_k^+(l)$, respektivno.

Kompozicija 3-morfizama prema gore

- *Kompozicija* dva 3-morfizama *prema gore* daje 3-morfizam, kada su oni kompozibilni, odnosno kada $\partial_3^+(l_1) = \partial_3^-(l_2)$,

$$\begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_1}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} \overset{l_2}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_1 l_2}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} ,$$

  odnosno za dva 3-morfizma (g_1, h_1, l_1) i (g_1, h_2, l_2) važi:

$$(g_1, h_2, l_2) \#_3 (g_1, h_1, l_1) = (g_1, h_1, l_2 l_1) . \tag{2.100}$$

- Kompozicija 3-morfizama prema gore je asocijativna operacija, odnosno za $l_1, l_2, l_3 \in L$ koji zadovoljavaju $\partial_3^-(l_3) = \partial_3^+(l_2)$ i $\partial_3^-(l_3) = \partial_3^+(l_2)$,

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_2 l_1}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} \overset{l_3}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_4"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_1}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} \overset{l_3 l_2}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_4"] \end{tikzcd} ,$$

  formalno zapisano:

$$(g_1, h_3, l_3) \#_3 (g_1, h_1, l_2 l_1) = (g_1, h_2, l_3 l_2) \#_3 (g_1, h_1, l_1) . \tag{2.101}$$

- Za svaki element $h \in H$ postoji 3-morfizam koji je identitet za kompoziciju 3-morfizama prema gore:

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} \overset{1_h}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, bend right=50, "g_1"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h"] \end{tikzcd} .$$

Vertikalna kompozicija 3-morfizama

- Vertikalna kompozicija dva 3-morfizama, kada su oni kompozibilni, odnosno kada je $\partial_2^+(l_1) = \partial_2^-(l_2)$,

$$\begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_1}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow h_1'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} \overset{l_2}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y\bullet & \bullet x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow h_2'"] \end{tikzcd} ,$$

daje 3-morfizam:

$$\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=40, "g_1"'] \arrow[l, bend left=40, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2h_1"] \end{tikzcd} \overset{l_2h_2\rhd' l_1}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=40, "g_1"'] \arrow[l, bend left=40, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \delta(l_2h_2\rhd' l_1)h_2h_1"] \end{tikzcd} .$$

Formalno zapisano, vertikalna kompozicija (g_1, h_1, l_1) i (g_2, h_2, l_2) daje 3-morfizam:

$$(g_2, h_2, l_2)\#_2(g_1, h_1, l_1) = (g_1, h_2h_1, l_2h_2 \rhd' l_1) \,. \tag{2.102}$$

- Vertikalna kompozicija je asocijativna operacija, odnosno za $l_1, l_2, l_3 \in L$ za koje je $\partial_2^+(l_1) = \partial_2^-(l_2)$ i $\partial_2^+(l_2) = \partial_2^-(l_1)$,

$$\begin{array}{ccc}
\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, bend right=15, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=40, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} & \overset{l_1}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, bend right=15, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=40, "\Downarrow h'_1"] \end{tikzcd} \\
\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=20, "g_2"'] \arrow[l, bend left=20, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} & \overset{l_2}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=20, "g_2"'] \arrow[l, bend left=20, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h'_2"] \end{tikzcd} \\
\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend left=15, "g_3"'] \arrow[l, bend left=60, "g_1"] \arrow[l, phantom, bend left=40, "\Downarrow h_3"] \end{tikzcd} & \overset{l_3}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend left=15, "g_3"'] \arrow[l, bend left=60, "g_1"] \arrow[l, phantom, bend left=40, "\Downarrow h'_3"] \end{tikzcd} \,,
\end{array}$$

važi:

$$(g_3, h_3, l_3)\#_2(g_1, h_2h_1, l_2h_2 \rhd' l_1) = (g_2, h_3h_2, l_3h_3 \rhd' l_2)\#_2(g_1, h_1, l_1) \,. \tag{2.103}$$

Dokaz. Ovu jednakost dokazujemo sličnim postupkom kao u (2.25). Leva strana jednačine (2.103) daje:

$$(g_3, h_3, l_3)\#_2(g_1, h_2h_1, l_2h_2 \rhd' l_1) = (g_1, h_3h_2h_1, l_3h_3 \rhd' (l_2h_2 \rhd' l_1)) \,. \tag{2.104}$$

Desna strana jednačine (2.103) daje takođe

$$\begin{aligned} (g_2, h_3h_2, l_3h_3 \rhd' l_2)\#_2(g_1, h_1, l_1) &= (g_1, h_3h_2h_1, l_3\, h_3 \rhd' l_2\, (h_3h_2) \rhd' l_1) \\ &= (g_1, h_3h_2h_1, l_3\, h_3 \rhd' l_2\, h_3 \rhd' (h_2 \rhd' l_1)) \\ &= (g_1, h_3h_2h_1, l_3\, h_3 \rhd' (l_2\, h_2 \rhd' l_1)) \,, \end{aligned} \tag{2.105}$$

primenom Leme 2. Ovim smo dokazali jednakost (2.103). ■

- Kompozicija 3-morfizama je invarijantna na redosled vršenja vertikalne kompozicije 3-morfizama i kompozicije 3-morfizama prema gore, odnosno važi:

$$\big((g_2,h'_2,l'_2)\#_3(g_2,h_2,l_2)\big)\#_2\big((g_1,h'_1,l'_1)\#_3(g_1,h_1,l_1)\big)=\big((g_2,h'_2,l'_2)\#_2(g_1,h'_1,l'_1)\big)\#_3\big((g_2,h_2,l_2)\#_2(g_1,h_1,l_1)\big), \tag{2.106}$$

što se lepo vidi u dijagramskoj notaciji, gde dijagram oblika

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=35, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} & \overset{l_1}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=35, "\Downarrow h'_1"] \end{tikzcd} & \overset{l'_1}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=35, "\Downarrow h''_1"] \end{tikzcd} \\
\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=35, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} & \overset{l_2}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=35, "\Downarrow h'_2"] \end{tikzcd} & \overset{l'_2}{\Rrightarrow} & \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left=60, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=35, "\Downarrow h''_2"] \end{tikzcd}
\end{array}$$

jednoznačno određuje 3-morfizam.

Dokaz. Dokažimo jednakost (2.106). Leva strana jednačine je jednaka:

$$\begin{aligned}\big((g_2,h_2',l_2')\#_3(g_2,h_2,l_2)\big)\#_2\big((g_1,h_1',l_1')\#_3(g_1,h_1,l_1)\big) &= \big(g_2,h_2,l_2'l_2\big)\#_2\big(g_1,h_1,l_1'l_1\big)\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'l_2\,h_2\rhd'(l_1'l_1)\big)\,.\end{aligned}\tag{2.107}$$

Desna strana jednačine (2.106) je jednaka:

$$\begin{aligned}\big((g_2,h_2',l_2')\#_2(g_1,h_1',l_1')\big)\#_3\big((g_2,h_2,l_2)\#_2(g_1,h_1,l_1)\big) &= \big(g_1,h_2'h_1',l_2'h_2'\rhd'l_1'\big)\#_3\big(g_1,h_2h_1,l_2h_2\rhd'l_1\big)\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'h_2'\rhd'l_1'l_2h_2\rhd'l_1\big) && (l_2'{=}\delta(l_2)h_2)\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'(\delta(l_2)h_2)\rhd'l_1'l_2h_2\rhd'l_1\big) && \text{(Lema 1)}\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'\delta(l_2)\rhd'(h_2\rhd'l_1')l_2h_2\rhd'l_1\big) && \text{(Pajferov id.)}\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'l_2(h_2\rhd'l_1')l_2^{-1}l_2h_2\rhd'l_1\big) && (l_2^{-1}l_2{=}e)\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'l_2h_2\rhd'l_1'h_2\rhd'l_1\big) && \text{(Lema 2)}\\ &= \big(g_1,h_2h_1,l_2'l_2h_2\rhd'(l_1'l_1)\big).\end{aligned}\tag{2.108}$$

Ovim smo dokazali jednakost (2.106). ∎

Kompozicija 3-morfizma i 1-morfizma

- *Nadovezivanje* je način na koji se vrši kompozicija 3-morfizma l i 1-morfizma g_1 koji se nalazi sa leve strane, tj. kada je $\partial_1^+(l)=\partial_1^-(g_1)$:

$$\begin{tikzcd} z & y \arrow[l, "g_1"'] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} z & y \arrow[l, "g_1"'] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd}\,.$$

Ovako formiran 3-morfizam naziva se *nadovezivanje* 3-morfizma l i 1-morfizma g_1 *sa leve strane* $g_1\#_1 l$, osnosno 3-morfizam l *proširen sa leve strane* sa 1-morfizmom g_1. Ova kompozicija formirana je kao $(g_1,1_{g_1})\#_1(g_2,h_1,l)$

$$\begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] \end{tikzcd} \overset{l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_1}"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} =$$

$$\begin{tikzcd} z & & x \arrow[ll, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_1g_2'"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow g_1\rhd h_1"] \end{tikzcd} \overset{g_1\rhd l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} z & & x \arrow[ll, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_1g_2'"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow g_1\rhd h_2"] \end{tikzcd}\,,$$

odnosno formalno zapisano:

$$(g_1,1_{g_1})\#_1(g_2,h_1,l)=(g_1g_2,g_1\rhd h,g_1\rhd l)\,.\tag{2.109}$$

- Na sličan način možemo formirati i *nadovezivanje* 3-morfizma l i 1-morfizma g_2 *sa desne strane*, kada je $\partial_1^-(l)=\partial_1^+(g_2)$, osnosno 3-morfizam l *proširen sa desne strane* sa 1-morfizmom g_2,

$$\begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & x \arrow[l, "g_2"'] \end{tikzcd} \overset{l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] & x \arrow[l, "g_2"'] \end{tikzcd}\,,$$

koju formiramo kao $(g_1, h_1, l)\#_1(g_2, 1_{g_2})$,

$$
\begin{tikzcd}
z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_2}"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow 1_{g_2}"]
\end{tikzcd}
=
$$

$$
\begin{tikzcd}
z & & x \arrow[ll, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_1'g_2"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
z & & x \arrow[ll, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[ll, bend left, "g_1'g_2"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
,
$$

tj. formalno zapisano:

$$
(g_1, h_1, l)\#_1(g_2, 1_{g_2}) = (g_1 g_2, h_1, l)\,. \tag{2.110}
$$

Kompozicija 3-morfizma i 2-morfizma

- *Nadovezivanje* 3-morfizma l i 2-morfizma h_2 *sa gornje strane*, odnosno 3-morfizam l *proširen sa gornje strane* sa 2-morfizmom h_1, kada su oni kompozibilni, odnosno kada $\partial_2^+(l) = \partial_2^-(h_2)$, posmatramo kao vertikalnu kompoziciju (g_1, h_1, l) i $(g_2, h_2, 1_{h_2})$

$$
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=20, "\Downarrow h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=20, "\Downarrow h_1'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
\overset{1_{h_2}}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
,
$$

koja rezultuje 3-morfizmom:

$$
\begin{tikzcd}
y & & x \arrow[ll, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_3"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow h_2 h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{h_2 \rhd' l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
y & & x \arrow[ll, bend right, "g_1"'] \arrow[ll, bend left, "g_3"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow \delta(h_2 \rhd' l) h_2 h_1"]
\end{tikzcd}
.
$$

Formalno zapisano:

$$
(g_1, h_1, l)\#_2(g_2, h_2, 1_{h_2}) = (g_1, h_2 h_1, h_2 \rhd' l)\,. \tag{2.111}
$$

- *Nadovezivanje* 3-morfizma l i 2-morfizma h_1 *sa donje strane*, odnosno 3-morfizam l *proširen sa donje strane* sa 2-morfizmom h_1, kada su oni kompozibilni, odnosno kada $\partial_2^-(l) = \partial_2^+(h_1)$, posmatramo kao vertikalnu kompoziciju $(g_1, h_1, 1_{h_1})$ i (g_2, h_2, l)

$$
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=20, "\Downarrow h_1"]
\end{tikzcd}
\overset{1_{h_1}}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, "g_2"] \arrow[l, phantom, bend right=20, "\Downarrow h_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
\overset{l}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
y & x \arrow[l, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\Downarrow h_2'"]
\end{tikzcd}
,
$$

koja rezultuje sa 3-morfizmom:

$$\begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2h_1"] \end{tikzcd} \overset{l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} y & x \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_3"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \delta(l)h_2h_1"] \end{tikzcd} .$$

Formalno zapisano:

$$(g_1, h_1, 1_{h_1})\#_2(g_2, h_2, l) = (g_1, h_2h_1, l)\,. \tag{2.112}$$

2.3.4 Horizontalna kompozicija 2-morfizama - izmenski 3-morfizam

- *Horizontalna kompozicija 2-morfizma* h_1 i h_2 kada važi $\partial_1^-(h_1) = \partial_1^+(h_2)$ daje *izmenski 3-morfizam*[14].

$$\begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} .$$

Kompozicija rezultuje 3-morfizmom, čiji je izvor 2-morfizam

$$\partial_3^-(l) = \big((g_1, h_1)\#_1 g_2'\big)\#_2\big(g_1\#_1(g_2, h_2)\big)\,,$$

a meta 2-morfizam

$$\partial_3^+(l) = \big(g_1'\#_1(g_2, h_2)\big)\#_2\big((g_1, h_1)\#_1 g_2\big)\,,$$

$$\begin{tikzcd} z & y \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} z & x \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1'g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1g_1\triangleright h_2"] \end{tikzcd} \overset{l}{\Rrightarrow} \begin{tikzcd} z & x \arrow[l, bend right, "g_1g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_1'g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow g_1'\triangleright h_2h_1"] \end{tikzcd} .$$

Formalno zapisano:

$$(g_1, h_1)\#_1(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1g_1 \triangleright h_2, l)\,. \tag{2.113}$$

U jednačini (2.113) 3-morfizam l jednak je Pajferovom podizanju $\{h_1, g_1\triangleright h_2\}_{\mathrm{pf}}^{-1}$. Koristeći identitet (2.99), dobijamo:

$$(\partial(h_1)g_1) \triangleright h_2h_1 = \delta(l)h_1\big(g_1 \triangleright h_2\big)\,. \tag{2.114}$$

Koristeći definiciju Pajferovog komutatora, tj. identitet (2.55) i prvu osobinu 2-ukrštenog modula, tj. $\delta(\{h_1, h_2\}_{\mathrm{p}}) = \langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{pf}}$, dobijamo da je 3-morfizam l:

$$\delta(l)^{-1} = h_1g_1 \triangleright h_2h_1^{-1}(\partial(h_1)g_1) \triangleright h_2{}^{-1} = \langle h_1, g_1 \triangleright h_2\rangle_{\mathrm{pf}} = \delta(\{h_1, g_1 \triangleright h_2\}_{\mathrm{p}})\,. \tag{2.115}$$

- Horizontalna kompozicija vertikalne kompozicije 2-morfizma h_1 i h_1' i 2-morfizma h_2 *sa desne strane*, kada su kompozibilni, tj. kada je $\partial_1^-(h_1) = \partial_1^-(h_1') = \partial_1^+(h_2)$ i $\partial_2^+(h_1) = \partial_2^-(h_1')$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] z & y \arrow[l, bend right=60, "g_1"'] \arrow[l, "g_1'" description] \arrow[l, bend left=60, "g_1''"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow h_1"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow h_1'"] & x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"] \end{tikzcd} ,$$

---

[14]eng. *the interchanging 3-arrow.*

dobija se kao izmenski 3-morfizam $(g_1, h_1'h_1)\#_1(g_2, h_2)$,

$$
\begin{tikzcd}
z\bullet & y\bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1''"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1'h_1"] & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2"]
\end{tikzcd}
= (g_1, h_1'h_1)\#_1(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1'h_1g_1 \rhd h_2, l)\,.
$$

U prethodnoj formuli $l = \{h_1'h_1, g_1 \rhd h_2\}_{\mathrm{pf}}^{-1}$, gde je površina $h_1'h_1g_1 \rhd h_2$ izvor, a površina $g_1'' \rhd h_2h_1'h_1$ meta 3-morfizma.

- Horizontalna kompozicija vertikalne kompozicije 2-morfizma h_2 i h_2' i 2-morfizma h_1 *sa leve strane*, kada su kompozibilni, tj. kada je $\partial_1^+(h_2) = \partial_1^+(h_2') = \partial_1^-(h_1)$ i $\partial_2^+(h_2) = \partial_2^-(h_2')$,

$$
\begin{tikzcd}
z\bullet & y\bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & x\bullet \arrow[l, bend right=50, "g_2"'] \arrow[l, "g_2'"'] \arrow[l, bend left=50, "g_2''"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow h_2"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow h_2'"]
\end{tikzcd}\ ,
$$

dobija se kao izmenski 3-morfizam $(g_1, h_1)\#_1(g_2, h_2'h_2)$,

$$
\begin{tikzcd}
z\bullet & y\bullet \arrow[l, bend right, "g_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_1"] & \bullet x \arrow[l, bend right, "g_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2''"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_2'h_2"]
\end{tikzcd}
= (g_1, h_1)\#_1(g_2, h_2'h_2) = (g_1g_2, h_1g_1 \rhd (h_2'h_2), l)\,.
$$

U prethodnoj formuli $l = \{h_1, g_1 \rhd (h_2'h_2)\}_{\mathrm{pf}}^{-1}$, gde je površina $h_1g_1 \rhd (h_2'h_2)$ izvor, a površina $g_1' \rhd (h_2'h_2)h_1$ meta 3-morfizma.

2.3.5 3-koneksija i 3-krivina

Neka su $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$ Lijeve algebre koje odgovaraju grupama G, H i L. Možemo definisati 3-koneksiju, uređenu trojku (α, β, γ), gde su diferencijalne forme elementi algebre $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$, $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$ i $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{l})$. Odgovarajuća *lažna*[15] 3-*krivina* $(\mathcal{F}\,, \mathcal{G}\,, \mathcal{H})$ se definiše kao:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{F} = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta\,, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{d}\beta + \alpha \wedge^{\rhd} \beta - \delta\gamma\,, \\
\mathcal{H} = \mathrm{d}\gamma + \alpha \wedge^{\rhd} \gamma + \beta \wedge^{\{,\}} \beta\,.
\end{gathered}
\tag{2.118}
$$

Primetimo da je koneksija γ diferencijalna 3-forma, odnosno da je njena odgovarajuća jačina polja $\mathcal{H}$ diferencijalna 4-forma, što povlači da prostorvremenska mnogostrukost $\mathcal{M}$ za koju

[15]Pravimo razliku između 3-*krivine* i *lažne* 3-*krivine*. Obična 3-krivina, uređena trojka (F, G, H) za koneksiju $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathfrak{g}, \mathcal{M}_4)$, $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{h}, \mathcal{M}_4)$ i $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathfrak{l}, \mathcal{M}_4)$ definiše se na standardan način:

$$
\begin{aligned}
F &= \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha, \\
G &= \mathrm{d}\beta + \alpha \wedge^{\rhd} \beta, \\
H &= \mathrm{d}\gamma + \alpha \wedge^{\rhd} \gamma\,.
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

Lažna 3-*krivina*, uređena trojka $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ ima dodatne članove i definisana je kao:

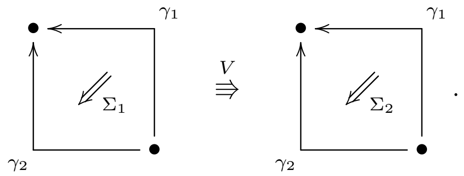
$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= F - \partial\beta, \\
\mathcal{G} &= G - \delta\gamma, \\
\mathcal{H} &= H + \beta \wedge^{\{,\}} \beta\,.
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

definišemo $3BF$ dejstvo mora biti najmanje 4-dimenzionalna. Ako uporedimo definiciju 3-krivine u 3-gejdž teoriji sa definicijom 2-krivine u 2-gejdž teoriji, primećujemo da je krivina $\mathcal{G}$ definisana sa dodatnim članom[16].

Krivine možemo raspisati u bazisima odgovarajućih algebri i diferencijalnih formi:

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\mu\nu}\tau_{\alpha}\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\nu}, \quad \mathcal{G}=\frac{1}{3!}\mathcal{G}^{a}{}_{\mu\nu\rho}t_{a}\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\nu}\wedge\mathrm{d}x^{\rho}, \quad \mathcal{H}=\frac{1}{4!}\mathcal{H}^{A}{}_{\mu\nu\rho\sigma}T_{A}\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\nu}\wedge\mathrm{d}x^{\rho}\wedge\mathrm{d}x^{\sigma},$$

[16]Posmatrajmo zapreminu V:



Ovaj kocka predstavlja 3-morfizam

$$V:\Sigma_1\to\Sigma_2\,, \tag{2.119}$$

gde su Σ_1 i Σ_2 2-morfizmi prikazani na slici. Želimo da izračunamo:

$$\mathrm{hol}(V):\mathrm{hol}(\Sigma_1)\to\mathrm{hol}(\Sigma_2)\,. \tag{2.120}$$

Holonomija $\mathrm{hol}(V)$ zavisi od 3-koneksije γ. Njen izvor i meta zavise samo od 2-forme β. Dobra definisanost izvora i mete 3-morfizma V osigurava se vezom između 2-koneksije β i 3-koneksije γ. Sa jedne strane, imamo da je:

$$\mathrm{hol}(\Sigma_1)=\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma_1}\beta\right)\,, \qquad \mathrm{hol}(\Sigma_2)=\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma_2}\beta\right)\,. \tag{2.121}$$

Takođe, znamo da je 3-morfizam $l:h_1\to h_2$ određen elementom $l\in L$ takvim da $h_2=\delta(l)h_1$. To znači da je 3-morfizam $\mathrm{hol}(V):\mathrm{hol}(\Sigma_1)\to\mathrm{hol}(\Sigma_2)$ određen elementom $l\in L$, pri čemu

$$\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma_2}\beta\right)=\delta(l)\,\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\Sigma_1}\beta\right)\,, \tag{2.122}$$

odnosno

$$\delta(l)=\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\partial V}\beta\right)\,, \tag{2.123}$$

gde je granična površina zapremine $\partial V=\Sigma_2\Sigma_1^{-1}$. Imajući u vidu da je kvadrat mali i koristeći Stoksovu teoremu dobijamo:

$$\mathcal{P}\mathrm{exp}\left(\int_{\partial V}\beta\right)\approx\exp\left(\int_{V}G\right)\,. \tag{2.124}$$

Sa druge strane, 3-morfizam l izražen preko 3-forme γ je:

$$l\approx\exp\left(\int_{V}\gamma\right)\,. \tag{2.125}$$

Da bi ovi izrazi bili jednaki potrebno je da važi jednakost

$$\delta(\exp\left(\int_{V}\gamma\right))\approx\exp\left(\int_{V}G\right)\,, \tag{2.126}$$

odnosno:

$$\delta(\gamma)=G=\mathrm{d}\beta+\alpha\wedge\beta\,. \tag{2.127}$$

gde su koeficijenti:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \alpha^\alpha{}_\nu - \partial_\nu \alpha^\alpha{}_\mu + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \alpha^\beta{}_\mu \alpha^\gamma{}_\nu - \beta^a{}_{\mu\nu}\partial_a{}^\alpha \,,\\
\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu \beta^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu \beta^a{}_{\rho\mu} + \partial_\rho \beta^a{}_{\mu\nu} + \alpha^\alpha{}_\mu \beta^b{}_{\nu\rho} \rhd_{\alpha b}{}^a + \alpha^\alpha{}_\nu \beta^b{}_{\rho\mu} \rhd_{\alpha b}{}^a + \alpha^\alpha{}_\rho \beta^b{}_{\mu\nu} \rhd_{\alpha b}{}^a - \gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\delta_A{}^a \,,\\
\mathcal{H}^A{}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu \gamma^A{}_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu \gamma^A{}_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho \gamma^A{}_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\\
&\quad + 2\beta^a{}_{\mu\nu}\beta^b{}_{\rho\sigma} X_{\{ab\}}{}^A - 2\beta^a{}_{\mu\rho}\beta^b{}_{\nu\sigma} X_{\{ab\}}{}^A + 2\beta^a{}_{\mu\sigma}\beta^b{}_{\nu\rho} X_{\{ab\}}{}^A\\
&\quad + \alpha^\alpha{}_\mu \gamma^B{}_{\nu\rho\sigma} \rhd_{\alpha B}{}^A - \alpha^\alpha{}_\nu \gamma^B{}_{\rho\sigma\mu} \rhd_{\alpha B}{}^A + \alpha^\alpha{}_\rho \gamma^B{}_{\sigma\mu\nu} \rhd_{\alpha B}{}^A - \alpha^\alpha{}_\sigma \gamma^B{}_{\mu\nu\rho} \rhd_{\alpha B}{}^A \,.
\end{aligned}
$$

pogledati [17], [18] za više detalja.

Transformacije 3-koneksije i 3-krivine

U teoriji kategorija, 3-grupa daje tri tipa gejdž transformacija generisanih grupama G, H i L. Pri G-gejdž transformacijama, 3-koneksija se transformiše na sledeći način,

$$\alpha' = g\alpha g^{-1} + g\mathrm{d}g^{-1}\,, \qquad \beta' = g \rhd \beta\,, \qquad \gamma' = g \rhd \gamma\,, \tag{2.128}$$

gde je $g : \mathcal{M}_4 \to G$ element G-glavnog raslojenja mnogostrukosti $\mathcal{M}_4$. Zatim, pri H-gejdž transformacijama, generisanih elementom $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$, 3-koneksija se transformiše po zakonu transformacije:

$$\alpha' = \alpha + \partial\eta\,, \qquad \beta' = \beta + \mathrm{d}\eta + \alpha' \wedge^{\rhd} \eta - \eta\wedge\eta\,, \qquad \gamma' = \gamma - \beta' \wedge^{\{,\}} \eta - \eta \wedge^{\{,\}} \beta\,. \tag{2.129}$$

Na kraju, pri L-gejdž transformacijama, generisanih sa $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{l})$, 3-koneksija se transformiše po zakonu transformacije:

$$\alpha' = \alpha\,, \qquad \beta' = \beta - \delta\theta\,, \qquad \gamma' = \gamma - \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\rhd} \theta\,. \tag{2.130}$$

Teorema 5 *Kompozicija G-gejdž, H-gejdž i L-gejdž transformacija dovodi do transformacije 3-koneksije:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= g\alpha g^{-1} + g\mathrm{d}g^{-1} + \partial(\eta)\,,\\
\tilde{\beta} &= g \rhd \beta + \mathrm{d}\eta + \tilde{\alpha} \wedge^{\rhd} \eta - \eta\wedge\eta - \delta(\theta)\,,\\
\tilde{\gamma} &= g \rhd \gamma - \mathrm{d}\theta - \tilde{\alpha}\wedge\theta - \tilde{\beta} \wedge^{\{,\}} \eta - \eta \wedge^{\{,\}} (g\rhd\beta) + \eta \wedge^{\rhd'} \theta\,,
\end{aligned} \tag{2.131}
$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$, $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ redom parametri G-, H- i L-gejdž transformacija.

Na osnovu transformacija 3-koneksije, dobijamo zakon transformacije 3-krivine definisane izrazom (2.118) pri 3-gejdž transformacijama.

Teorema 6 *Pri G-gejdž transformacijama 3-krivina $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F} \to g\mathcal{F}g^{-1}\,, \qquad \mathcal{G} \to g \rhd \mathcal{G}\,, \qquad \mathcal{H} \to g \rhd \mathcal{H}\,, \tag{2.132}$$

pri H-gejdž transformacijama na sledeći način

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G} \to \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \eta\,, \qquad \mathcal{H} \to \mathcal{H} - \mathcal{G}' \wedge^{\{,\}} \eta + \eta \wedge^{\{,\}} \mathcal{G}\,, \tag{2.133}$$

a pri L-gejdž transformacijama kao:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G} \to \mathcal{G}\,, \qquad \mathcal{H} \to \mathcal{H} - \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \theta\,, \tag{2.134}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$, $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ redom parametri G-, H- i L-gejdž transformacija.

Za više detalja i dokaze ovih teorema pogledati [18], odnosno dodatak A.

Glava 3

Hamiltonova analiza

Hamiltonova analiza teorije je neophodan prvi korak kanonske kvantizacione procedure koju je formulisao Pol Dirak za Hamiltonove sisteme sa vezama [31]. Ova procedura nam dozvoljava da formulišemo kvantnu teoriju za sisteme koju poseduju gejdž simetriju. Ovaj pristup može se podeliti na dva glavna koraka.

1. Prvo, neophodno je izvršiti Hamiltonovu analizu sistema, čiji je rezultat algebra veza prve klase i veza druge klase prisutnih u teoriji. Veze prve klase generišu nefizičke transformacije dinamičkih varijabli, gejdž transformacije, koje ne menjaju fizičko stanje sistema. Veze prve klase F i veze druge klase S, zajedno definišu potprostor Γ^* faznog prostora Γ dimenzije
$$2n = 2N - (2F + S)\,, \tag{3.1}$$
u kome se odigrava dinamika nezavisnih stepeni slobode.

   U ovom poglavlju predstavljene su osnovne ideje Dirakovog metoda. Zatim, prikazan je kratak pregled sistemskog pristupa konstrukciji *generatora gejdž transformacija* na osnovu poznate Hamiltonove strukture – *Kastelanijeve procedure.*

2. Prelaz sa klasične na kvantnu teoriju sa gejdž stepenima slobode u koordinatnoj reprezentaciji postiže se na sledeći način:

   - Dinamičke varijable koordinata i njihovih kanonskih impulsa postaju operatori:
   $$q(x) \to \hat{q}(x)\,,$$
   $$\pi(x) \to \hat{\pi}(x)\,;$$
   - Zatim, pomoću Poasonove zagrade uvede se Dirakova zagrada $\{\_,\_\}_D$, čime se iz teorije eliminišu veze druge klase, ukoliko ih ima u teoriji;
   - Zatim, Dirakova zagrada operatora q i π, tzv. *Hajzenbergove algebre*, postaje komutator:
   $$\{q(x),\, \pi(x)\} \to -i[\hat{q}(x),\, \hat{\pi}(x)]\,;$$
   - Veze prve klase postaju uslovi na fizička stanja:
   $$\hat{\Phi}\,|\psi\rangle = 0\,.$$

   Ovi uslovi su analogni Gupta-Blojlerovim uslovima iz kvantne elektrodinamike.

3.1 Lagranžev i Hamiltonov formalizam

U ovom odeljku prikazan je kratak osvrt na Lagranžev i Hamiltonov formalizam. Neka je n *broj stepeni slobode* nekog fizičkog sistema, koji predstavlja minimalan broj veličina potrebnih da se potpuno opiše položaj svih čestica, odnosno konfiguracija sistema. Lagranževa funkcija, ili *Lagranžijan* je funkcija oblika:

$$L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q_N}, t)\,, \tag{3.2}$$

gde su veličine q_i i $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, N$, generalisane koordinate i njihovi vremenski izvodi. *Hamiltonovo dejstvo* je po definiciji jednako:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q_N}, t)\,. \tag{3.3}$$

Ako na posmatrani fizički sistem deluju samo potencijalne sile i ako se u Lagranzijanu pojavljuju samo prvi izvodi generalisanih koordinata po vremenu, *Ojler-Lagranževe jednačine kretanja* imaju oblik

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,, \tag{3.4}$$

gde je $\frac{\delta S}{\delta q_i}$ funkcionalni izvod dejstva po generalisanoj koordinati q_i. Jednačine kretanja su posledica *Hamiltonovog principa najmanjeg dejstva.* Ojler-Lagranževe jednačine možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,, \tag{3.5}$$

gde je matrica $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ Hesijan Lagranžijana L. Ako je Hesijan invertibilan, tj.

$$\det H^{ij} = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0\,, \tag{3.6}$$

jednačine (3.5), ako su zadovoljeni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina, a za date inicijalne uslove, možemo rešiti po ubrzanjima $\ddot{q}_i$. Ovakve teorije nazivamo *nesingularnim.* Kažemo da je teorija *singularna* ako uslov (3.6) nije zadovoljen, tj. ako je

$$\det H^{ij} = 0\,. \tag{3.7}$$

Kanonski impulsi su definisani na sledeći način:

$$p^i = \pi(q_i) = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,. \tag{3.8}$$

U ovom trenutku možemo da preformulišemo definiciju nesingularne teorije – vidimo da Hesijan možemo izraziti kao $\frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}_j}$, pa uslov (3.6) možemo razumeti kao zahtev da se brzine $\dot{q}_i$ mogu izraziti kao funkcija generalisanih koordinata i njihovih kanonskih impulsa.

U slučaju nesingularne teorije, definišemo *Hamiltonijan*,

$$H = \sum_i p^i\,\dot{q}_i - L\,. \tag{3.9}$$

Jednačine kretanja u Hamiltonovom formalizmu su:

$$\dot{p^i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,. \tag{3.10}$$

Poasonova zagrada funkcija $f = f(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q_N}, t)$ i $g = g(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q_N}, t)$ je definisana na sledeći način:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial g}{\partial p^i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) . \tag{3.11}$$

Koristeći Poasonovu zagradu, definišemo vremensku evoluciju proizvoljne funkcije f na faznom prostoru

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} , \tag{3.12}$$

pa Hamiltonove jednačine kretanja možemo napisati u obliku:

$$\dot{p}^i = \{p^i, H\} , \qquad \dot{q}_i = \{q_i, H\} , \qquad i = 1, \ldots, N . \tag{3.13}$$

Definicije date u ovom odeljku pravolinijski se generalizuju na slučaj teorije sa beskonačno mnogo stepeni slobode. U slučaju teorije koja opisuje polje ϕ^α u prostorvremenu čije su koordinate x^μ, *gustina Lagranžijana* $\mathcal{L}$ je funkcija oblika:

$$L = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha) , \tag{3.14}$$

pa *dejstvo* definišemo na sledeći način:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha) . \tag{3.15}$$

Kanonski impulsi su u ovom slučaju funkcije koordinata

$$p^\alpha(x) = \pi(\phi_\alpha) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_\alpha(x)} , \tag{3.16}$$

a *Hamiltonijan*:

$$H = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3x \left[\sum_\alpha p^\alpha(x) \, \dot{\phi}_\alpha(x) \right] - L . \tag{3.17}$$

U ovom odeljku napravili smo kratak pregled Lagranževog i Hamiltonovog formalizma, pri čemu smo našu pažnju ograničili isključivo na nesingularne teorije, tj. one koji ispunjavaju uslov (3.6). U narednom odeljku razmatraćemo *singularne teorije.*

3.2 Sistemi sa vezama

Singularne teorije se odlikuju prisustvom redundantnih stepeni slobode u fizičkom sistemu, tj. postojanjem dodatnih, nefizičkih varijabli u dejstvu, tako da je ukupan broj varijabli u teoriji veći od broja varijabli koje opisuju fiziku sistema. Za analizu ovih fizičkih sistema neophodna je *Hamiltonova analiza sistema sa vezama*, tj. *Dirakova procedura.*

3.2.1 Dirakova teorija

Primarne veze

Ako nije moguće invertovati relacije (3.8) i izraziti brzine kao funkcije generalisanih koordinata i njihovih konjugovanih impulsa, tj. ako je zadovoljen uslov (3.7), teorija je singularna. Sve relevantne fizičke teorije, kao što su Standardni Model elementarnih čestica i Opšta teorija relativnosti, spadaju u ovu klasu. *Singularne teorije* odlikuje postojanje seta relacija između varijabli i impulsa, koje nazivamo *primarnim vezama*

$$P_m(q,p) \approx 0\,, \qquad m = 1,\ldots,P\,, \tag{3.18}$$

gde P predstavlja ukupan broj primarnih veza u teoriji, a znak $\approx$ obeležava slabu jednakost[1]. Iz jednačine (3.8) dobijamo oblik primarnih veza:

$$P(q_i) \equiv \pi(q_i) - \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\,. \tag{3.19}$$

Primarne veze određuju potprostor Γ_1 ukupnog faznog prostora Γ u kome se odigrava dinamika sistema. Primarne veze P_m ne moraju biti sve međusobno nezavisne. Ako je broj nezavisnih primarnih veza $P' \leq P$, onda je dimenzija faznog potprostora $2N - P'$. Tada je Hesijan $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ matrica ranga $N - P'$.

Kanonski i totalni Hamiltonijan

Definišemo *kanonski Hamiltonijan*

$$H_c = \sum_{i=1}^{N} p^i\,\dot{q}_i - L\,, \tag{3.20}$$

koji je dobro definisan na površini određenoj primarnim vezama. U slučaju singularne teorije definišemo *totalni hamiltonijan* koji je definisan na celom faznom prostoru Γ

$$H_T = H_c + \sum_m \lambda^m P_m\,, \tag{3.21}$$

gde su $\lambda^m(q)$ proizvoljni Lagranževi množitelji. Jednačine kretanja za kanonske varijable i njihove impulse dobijene totalnim Hamiltonijanom

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_T}{\partial q_i}\,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H_T}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,N\,, \tag{3.22}$$

primenom jednačine (3.21) postaju:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda^m \frac{\partial P_m}{\partial q_i}\,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial P_m}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,N\,. \tag{3.23}$$

Ako je $A(q,p)$ neka proizvoljna dinamička varijabla u teoriji, njena jednačina kretanja je

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i\,, \tag{3.24}$$

pa primenom jednačina (3.22) dobijamo:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H_T}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H_T}{\partial q_i} = \{A, H_T\}\,. \tag{3.25}$$

[1] Neka je $F(q,p)$ funkcija koja je definisana i diferencibilna u okolini $\mathcal{O} \subseteq \Gamma$ koja sadrži podprostor Γ_1. Ako je funkcija $F(q,p)$ na Γ_1 jednaka nuli, kažemo da je F *slabo jednaka* nuli:

$$F(q,p) \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(q,p)|_{\Gamma_1} = 0\,.$$

Ako su funkcija F i svi njeni prvi izvodi jednaki nula na Γ_1, kažemo da je F *jako jednaka* nuli:

$$F(q,p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(q,p)|_{\Gamma_1} = \frac{\partial F(q,p)}{\partial q}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial F(q,p)}{\partial p}|_{\Gamma_1} = 0\,.$$

Uslovi konzistentnosti i sekundarne veze

Uslovi konzistentnosti primarnih veza zahtevaju da primarne veze budu sačuvane tokom dinamičke evolucije sistema:

$$\dot{P}(q_i) \equiv \{\, P(q_i)\,,\, H_T \,\} \approx 0\,. \tag{3.26}$$

Uslovi konzistentnosti rezultuju u jednom od tri ishoda.

1. Poasonova zagrada (3.26) jednaka je nekoj linearnoj kombinaciji primarnih veza, pa kao takva je slabo jednaka nuli – uslov konzistentnosti je automatski zadovoljen.

2. Uslovi konzistentnosti rezultuju u dobijanju *sekundardnih veza* u teoriji:

$$\mathcal{S}(q_i) = \{\, P(q_i)\,,\, H_T \,\} \approx 0\,. \tag{3.27}$$

   Sekundardne veze koje su se pojavile u teoriji takođe moraju da zadovolje *uslove konzistentnosti*:

$$\dot{\mathcal{S}}(q_i) \equiv \{\, \mathcal{S}(q_i)\,,\, H_T \,\} \approx 0\,. \tag{3.28}$$

   Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza mogu dovesti do pojave novih veza u teoriji – *tercijarnih veza*. Tada moramo zahtevati da tercijarne veze ostaju nepromenjene, tj. da zadovoljavaju uslove konzistentnosti, što takođe rezultuje nekim od ovde navedenih ishodom. Ovaj proces se nastavlja sve dok uslovi konzistentnosti ne prestanu da uvode nove veze.

3. Konačno, uslovi konzistentnosti mogu odrediti neke Lagranževe množitelje λ^m.

Zajedno P primarnih veza $P(q,p)$ i K novih veza $\mathcal{S}(q,p)$ (sekundarnih, tercijarnih...), dobijenih uslovima konzistentnosti, čine skup svih veza u teoriji:

$$\phi_m(q,p) \approx 0\,, \qquad m = 1,\dots,P,P+1,\dots,P+K\,. \tag{3.29}$$

Može se pokazati da je neka funkcija na faznom prostoru $F(q,p)$ slabo jednaka nuli, ako i samo ako je jednaka linearnoj kombinaciji veza:

$$F \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = \sum_m \lambda^m \phi_m\,.$$

Primenom definicije totalnog Hamiltonijana, uslovi konzistentnosti za sve veze u teoriji postaju:

$$\{\, \phi_m\,,\, H_c \,\} + \sum_{m'} \lambda^{m'} \{\, \phi_m\,,\, \phi_{m'} \,\} \approx 0\,. \tag{3.30}$$

Neka je L broj uslova konzistentnosti koji nisu automatski zadovoljeni, tj. koji nameću ograničenja na Lagranževe množitelje. Tada sistem od L diferencijalnih jednačina (3.30) možemo rešiti po λ^m

$$\lambda^m = U^m + \sum_a v^a(t) V_a^m\,, \tag{3.31}$$

gde su $v^a(t)$ arbitrarne funkcije vremena, V_a^m homogeni

$$\sum_{m'} \sum_a v^a(t) V_a^{m'} \{\, \phi_m\,,\, \phi_{m'} \,\} \approx 0\,, \tag{3.32}$$

i U^m partikularni deo rešenja sistema diferencijalnih jednačina. Dakle, zakljuučujemo da u totalnom Hamiltonijanu postoje proizvoljne funkcije vremena. Na kraju, primetimo da, kako su funkcije $v^a(t)$ proizvoljne funkcije vremena, važi relacija:

$$\sum_{m'} V_a^{m'} \{\, \phi_m\,,\, \phi_{m'} \,\} \approx 0\,. \tag{3.33}$$

Veze prve i veze druge klase

Dinamička varijabla $R(q,p)$ je *prve klase* ako njene Poasonove zagrade sa svim vezama u teoriji slabo nestaju:

$$\{R(q,p), \phi_m(q,p)\} \approx 0 \,.$$

Kao i svaka funkcija koja je slabo jednaka nuli, ova Poasonova zagrada je jednaka linearnoj kombinaciji veza. Možemo primetiti, na osnovu ove definicije, da je totalni Hamiltonijan H_T veličina prve klase. Ako promenljiva $R(q,p)$ nije prve klase, ona je *druge klase*. Dok je razlika između primarnih i sekundarnih veza od malog značaja za Hamiltonovu analizu, razlika između veza prve i veza druge klase je suštinska za dinamičku interpretaciju veza u okviru Hamiltonove teorije. Veze prve klase su definisane jednačinom,

$$\{\Phi(q,p), \phi_m(q,p)\} \approx 0 \,, \tag{3.34}$$

dok veze druge klase zadovoljavaju uslov

$$\{\chi(q,p), \phi_m(q,p)\} \not\approx 0 \,, \tag{3.35}$$

gde su $\phi_m(q,p)$ sve veze, primarne i sekunardne (tercijarne ako postoje itd), u teoriji.

Na kraju prethodnog dela zaključili smo da u totalnom Hamiltonijanu figurišu proizvoljne funkcije vremena $v^a(t)$. Prisustvo ovih proizvoljnih funkcija u Hamiltonijanu, pa time i u jednačinama kretanja i njihovim rešenjima, znači da varijable $(q(t), p(t))$ ne mogu biti jednoznačno određene pri poznatim početnim uslovima $(q(t=0), p(t=0))$. Ako varijable $(q(t), p(t))$ ne mogu biti jednoznačno određene u svakom trenutku, znači da nemaju direktnu fizičku interpretaciju, tj. to nisu fizičke varijable u teoriji. Neka je f neka varijabla u teoriji, njena dinamička evolucija je:

$$\begin{aligned} f(\delta t) &= f(t=0) + \delta t\, \dot{f} \\ &= f(t=0) + \delta t\, \{f, H_T\} \\ &= f(t=0) + \delta t\, \{f, H_c\} + \delta t \sum_m U^m \{f, \phi_m\} + \delta t \sum_m \sum_a v^a(t)\, V_a^m \{f, \phi_m\} \\ &= f(t=0) + \delta t\, \{f, H'\} + \delta t \sum_a v^a(t)\, \{f, \phi_a\} \,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

gde su $H' = H_c + \sum_m U^m \phi_m$ i $\phi_a = \sum_m V_a^m \phi_m$. Na osnovu činjenice da je totalni Hamiltonijan veličina prve klase i na osnovu relacije (3.33) zaključujemo da su i veličine H' i ϕ_a prve klase, tj. da njihove Poasonove zagrade sa svim vezama u teoriji slabo nestaju. U poslednjem članu u izrazu (3.36) figurišu proizvoljne funkcije vremena, pa stoga funkcija

$$f_1(\delta t) = f(t=0) + \delta t\, \{f, H'\} \,,$$

i funkcija

$$f_2(\delta t) = f(t=0) + \delta t\, \{f, H'\} + \delta t \sum_a v^a(t)\, \{f, \phi_a\} \,,$$

odgovaraju istom fizičkom stanju. Transformacija

$$\delta f(\delta t) = \delta t \sum_a v^a(t)\, \{f, \phi_a\} = \sum_a \epsilon^a(t)\, \{f, \phi_a\} \,, \tag{3.37}$$

je nefizička. Dakle, zaljučujemo da primarne veze prve klase ϕ_a generišu nefizičke transformacije dinamičkih varijabli koje ne menjaju fizičko stanje sistema – *gejdž transformacije*.

Kako je uzastopna primena, kao i razlika, dve nefizičke transformacije takođe nefizička transformacija,

$$\delta_1(\delta_2 f) - \delta_2(\delta_1 f) = \sum_{a,b} \epsilon_1^b(t)\epsilon_2^a(t) \left(\{\{f,\phi_a\},\phi_b\} - \{\{f,\phi_b\},\phi_a\}\right) = \sum_{a,b} \epsilon_1^b(t)\epsilon_2^a(t) \{f,\{\phi_a,\phi_b\}\} ,$$

zaključujemo da je Poasonova zagrada dve primarne veze prve klase $\{\phi_a, \phi_b\}$ takođe generator nefizičkih transformacija. Ova Poasonova zagrada svakako mora biti jednaka nekoj linearnoj kombinaciji veza, pa možemo očekivati da u njoj figurišu i sekunarne veze. Ove sekundarne veze su prve klase, jer Poasonova zagrada veza prve klase daje vezu prve klase. To znači da očekujemo da su neke sekundarne veze prve klase generatori nefizičkih transformacija u teoriji, a u narednom delu ćemo demonstrirati da ovo važi za sve veze prve klase.

Fizičke informacije o sistemu u nekom proizvoljnom trenutku t mogu se dobiti iz funkcija koje su definisane na potprostoru Γ' ukupnog faznog prostora Γ, definisanim vezama u teoriji - tj. iz *fizičkih observabli* u teoriji.

Veze druge klase i fizičke observable u teoriji

Neka su Φ_f veze prve klase u teoriji, $f = 1, \ldots, F$, i χ_s veze druge klase, gde je $s = 1, \ldots, S$. Kako su veze χ_s druge klase, matrica $\Delta_{rs} = \{\chi_r, \chi_s\}$ je nesingularna i dakle invertibilna. Kako svaka antisimetrična matrica od neparane dimenzije ima determinantu jednaku nuli, a matrica Δ_{rs} je antisimetrična i invertibilna, zaključujemo da broj vaza druge klase mora biti paran.

Možemo definisati novu Poasonovu zagradu – tzv. *Dirakovu zagradu*

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} - \{f,\chi_r\}\, \Delta^{-1}_{rs}\{\chi_s, g\} , \tag{3.38}$$

koja je, kao i Poasonova zagrada, antisimetrično bilinearno preslikavanje. Na osnovu definicije vidimo da je Dirakova zagrada bilo koje veze druge klase sa proizvoljnom promenljivom jednaka nuli:

$$\{\chi_p, g\}_D = \{\chi_p, g\} - \{\chi_p, \chi_r\}\, \Delta^{-1}_{rs}\{\chi_s, g\} = \{\chi_p, g\} - \Delta_{pr}\, \Delta^{-1}_{rs}\{\chi_s, g\} = \{\chi_p, g\} - \delta_{ps}\{\chi_s, g\} = 0 . \tag{3.39}$$

Dakle, nakon konstrukcje Dirakovih zagrada veze druge klase postaju jako jednake nuli, a jednačina kretanja za proizvoljnu varijablu g u teoriji je:

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}_D . \tag{3.40}$$

Razlika između veza prve klase i veza druge klase definisana je uz pomoć Poasonove zagrade, jednačinama (3.34) i (3.35). Jednom kada uvedemo Dirakovu zagradu, prestaje potreba za korišćenjem Poasonovih zagrada – veze druge klase postaju jake jednakosti i celokupna teorija se može formulisati u terminima Dirakovih zagrada. Kao što smo videli, prisustvo veza druge klase znači da postoje dinamički stepeni slobode u teoriji koji nisu od značaja. Eliminisanje ovih varijabli se postiže definisanjem Dirakove zagrade koja se odnosi samo na fizički relevantne stepene slobode. Ipak, u praksi u teorijama koje poseduju veliki broj veza druge klase to može biti izuzetno teško.

Broj stepeni slobode

U opštem slučaju, za N inicijalnih polja u teoriji, F nezavisnih veza prve klase i S nezavisnih veza druge klase, *broj lokanih propagirajućih stepeni slobode* dat je relacijom:

$$n = N - F - \frac{S}{2} . \tag{3.41}$$

Jednačina (3.41) je posledica činjenice da je postojanje veza druge klase S ekvivalentno iščezavanju $S/2$ kanonskih koordinata i $S/2$ njihovih impulsa. Postojanje F veza prve klase u teoriji je ekvivalentno nestajanju F kanonskih koordinata, a kako veze prve klase generišu gejdž simetrije, možemo nametnuti F uslova za fiksiranje gejdža za odgovarajućih F kanonskih momenata. Prema tome, postoji $2N - 2F - S$ nezavisnih kanonskih koordinata i momenata i stoga je $2n = 2N - 2F - S$, što dovodi do jednačine (3.41).

3.2.2 Generator gejdž transformacija

U ovom delu prikazaćemo algoritam za konstruisanje generatora gejdž simetrija u teoriji – tzv. *Kastelanijevu proceduru.*

Razmotrimo sistem koji je određen ukupnim Hamiltonijanom H_T i kompletnim skupom veza u teoriji ϕ_m, gde je $m = 1, \dots, M, M+1, \dots, M+K$. Neka je $(q(t), p(t))$ neka trajektorija u faznom prostoru određena parametrom t, pri čemu početna tačka $(q(t=0), p(t=0))$ leži na hiperpovrši određenoj vezama. Jednačine kretanja dobijene totalnim Hamiltonijanom (3.22) nemaju isti oblik kao jednačine kretanja dobijene primenom (3.10), ali je njihova razlika nefizička. Primenom jednačine $H_T = H' + \sum_a v^a(t)\phi_a$ dobija se

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} - v^a(t)\frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i} + v^a(t)\frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\,, \qquad i = 1, \dots, N\,, \tag{3.42}$$

dok su jednačine kretanja za $v^a(t)$:

$$\phi_a(q,p) = 0\,. \tag{3.43}$$

Posmatrajmo sada novu trajektoriju koja počinje u istoj tački $(q(t=0), p(t=0))$ na hiperpovrši određenoj vezama, pri čemu $(q(t)+\delta_0 q(t), p(t)+\delta_0 p(t))$ takođe zadovoljavaju jednačine kretanja za funkciju $v^a(t) + \delta_0 v^a(t)$:

$$\begin{aligned}
\delta_0\dot{p}_i &= -\sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0 q_j\frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\frac{\partial H_T}{\partial q_i} - \delta_0 v^a(t)\,\frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\,,\\
\delta_0\dot{q}_i &= \sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0 q_j\frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\frac{\partial H_T}{\partial p_i} + \delta_0 v^a(t)\,\frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\,,\\
&\sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0 q_j\frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\phi_a(q,p) = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Razlika ove dve trajektorije u nekom fiksnom trenutku t predstavlja nefizičku transformaciju.

Sa druge strane, varijacije formi pri gejdž transformacijama određene su generatorom:

$$\begin{aligned}
\delta_0 q_i &= \epsilon(t)\{\, q_i\,,\, G\,\} &= \epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial p_i}\,,\\
\delta_0 p_i &= \epsilon(t)\{\, p_i\,,\, G\,\} &= -\epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial q_i}\,,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

gde smo primenili definiciju Poasonove zagrade. Dalje, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta_0\dot{q}_i &= \dot{\epsilon}(t)\frac{\partial G}{\partial p_i} + \epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial p_i}\,,\, H_T\,\}\,,\\
\delta_0\dot{p}_i &= -\,\dot{\epsilon}(t)\frac{\partial G}{\partial q_i} - \epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial q_i}\,,\, H_T\,\}\,.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Upoređivanjem jednačina (3.44) i (3.46) dobijamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0 q_j\frac{\partial}{\partial q_j}+\delta_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\frac{\partial H_T}{\partial p_i}+\delta_0 v^a(t)\,\frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} &=\dot\epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial p_i}+\epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial p_i}\,,\,H_T\,\}\,,\\ \sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0 q_j\frac{\partial}{\partial q_j}+\delta_0 p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\frac{\partial H_T}{\partial q_i}+\delta_0 v^a(t)\,\frac{\partial \phi_a}{\partial q_i} &=\dot\epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial q_i}+\epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial q_i}\,,\,H_T\,\}\,,\end{aligned} \tag{3.47}$$

tj.

$$\begin{aligned}\epsilon(t)\{\,\tfrac{\partial H_T}{\partial p_i}\,,\,G\,\}+\delta_0 v^a(t)\,\tfrac{\partial \phi_a}{\partial p_i} &= \dot\epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial p_i}+\epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial p_i}\,,\,H_T\,\}\,,\\ \epsilon(t)\{\,\tfrac{\partial H_T}{\partial q_i}\,,\,G\,\}+\delta_0 v^a(t)\,\tfrac{\partial \phi_a}{\partial q_i} &= \dot\epsilon(t)\frac{\partial G}{\partial q_i}+\epsilon(t)\{\,\frac{\partial G}{\partial q_i}\,,\,H_T\,\}\,,\\ \epsilon(t)\{\,\phi_a(q,p)\,,\,G\,\} &= 0\,.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Ove jednačine dalje možemo prepisati na sledeći način,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(\dot\epsilon(t)G+\epsilon(t)\{\,H_T\,,\,G\,\}-v^a(t)\,\phi_a\Big) &= 0\,,\\ \frac{\partial}{\partial q_i}\Big(\dot\epsilon(t)G+\epsilon(t)\{\,H_T\,,\,G\,\}-v^a(t)\,\phi_a\Big) &= 0\,,\\ \epsilon(t)\{\,\phi_a(q,p)\,,\,G\,\} &= 0\,,\end{aligned} \tag{3.49}$$

pa zaključujemo da za bilo koju dinamičku varijablu $F(q,p)$ važi:

$$\{\,F(q,p)\,,\,\dot\epsilon(t)G+\epsilon(t)\{\,H_T\,,\,G\,\}-v^a(t)\,\phi_a\,\}=0\,. \tag{3.50}$$

Sledi da je izraz $\dot\epsilon(t)G+\epsilon(t)\{\,H_T\,,\,G\,\}-v^a(t)\,\phi_a$ trivijalna funkcija, jednaka nuli ili nekom stepenu veza, pa dobijamo da su zadovoljene relacije:

$$G=\alpha^a\phi_a\,,\qquad \{\,G\,,\,H_T\,\}=0\,. \tag{3.51}$$

U opštem slučaju, generatori gejdž transformacija su oblika

$$G=\sum_{n=0}^{k}\epsilon^{(n)}G_n\,, \tag{3.52}$$

gde $\epsilon^{(n)}$ označava n-ti vremenski izvod parametra ϵ po vremenu $\epsilon^{(n)}=\dfrac{\partial^n\epsilon}{\partial t^n}$. Generatori G_n, gde je $n=1,\ldots,k$, su određeni rekurzivno *Kastelanijevom procedurom* i moraju da zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\begin{aligned}G_k &= C_{PFC}\,,\\ &\vdots\\ G_1+\{G_2,H_T\} &= C_{PFC}\,,\\ G_0+\{G_1,H_T\} &= C_{PFC}\,,\\ \{G_0,H_T\} &= C_{PFC}\,,\end{aligned} \tag{3.53}$$

gde C_{PFC} predstavlja neku primarnu vezu prve klase. Ukupan broj generatora k je jednak broju generacija sekundarnih veza – ako u teoriji postoje samo primarne i sekundarne veze sledi da je $k = 1$. Tada, generator ima oblik:

$$G = \epsilon(t)G_0 + \dot{\epsilon}(t)G_1 \,. \tag{3.54}$$

U tom slučaju, rekurzivni algoritam Kastelanijeve procedure opisan relacijama (3.53) dobija jednostavniji oblik:

$$\begin{aligned} G_1 &= C_{PFC} \,, \\ G_0 + \{G_1, H_T\} &= C_{PFC} \,, \\ \{G_0, H_T\} &= C_{PFC} \,, \end{aligned} \tag{3.55}$$

gde C_{PFC} predstavlja neku primarnu vezu prve klase.

Varijacija forme pri transformacijama simetrije proizvoljne varijable A definisane na faznom prostoru se računa primenom formule:

$$\delta_0 A = \{A, G\} \,. \tag{3.56}$$

Glava 4

BF teorija

U ovom poglavlju predstavljena je BF teorija, definisana za neku opštu Lijevu grupu i n-dimenzionalnu mnogostrukost. Kao topološka teorija, BF teorija je teorija bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode, pa se opis fizički relevantnih sistema dobija dodavanjem određenih veza na topološko BF dejstvo, tj. definisanjem BF dejstva sa vezama. Najpoznatiji primer ove konstrukcije je Plebanski dejstvo [32]. Slično, simetriju BF dejstva moguće je narušiti dodavanjem člana koji narušava simetriju, kao što je to slučaj u Mekdauel-Mansuri teoriji [33].

Kovarijantna kvantizaciona procedura, sprovedena za različite izbore klasičnog BF dejstva, daje *topološke kvantne teorije polja* u smislu da zadovoljavaju Atijine aksiome. Procedura je rezultovala u mnogobrojnim *modelima spinske pene* kvantne gravitacije, počevši od Ponzano-Redže modela trodimenzionalne gravitacije [5], pa sve do trenutno najsofisticiranijeg $EPRL/FK$ modela definisanog u četiri prostorvremenske dimenzije [9], [10]. Međutim, svim modelima spinske pene može se zameriti da opisuju teorije čiste gravitacije, bez prisustva polja materije, što je posledica činjenice da BF dejstvo ne sadrži tetradna polja u eksplicitnom obliku. Umesto toga, tetrade se pojavljuju kao posledica klasičnih jednačina kretanja, pa stoga predstavljaju "on-shell" varijable. Iz tog razloga u okviru BF teorija nemoguće je dodati materiju na kvantnom nivou. Pogledati [32], [34], [35] za više informacija o BF teoriji.

Poglavlje pred nama je organizovano na sledeći način. U odeljku 4.1 dat je kratak pregled topološke BF teorije. Pododeljak 4.1.1 sadrži Hamiltonovu analizu BF teorije i rezultujuću kanonsku strukturu, uključujući veze prve klase i veze druge klase prisutne u teoriji, kao i algebru veza. U istom pododeljku predstavljen je Bjankijev identitet koji zadovoljavaju veze prve klase, koji smanjuje broj nezavisnih veza prve klase prisutnih u teoriji. Na osnovu ovih rezultata izvršeno je brojanje fizičkih stepeni slobode u BF teoriji. U pododeljku 4.1.1 predstavljen je oblik generatora gejdž transformacija teorije, kao i varijacije svih varijabli i njihovih kanonskih impulsa u teoriji, dok je Kastelanijeva procedura kojom je dobijen ovaj generator data u Dodatku D.1. Ovaj rezultat koristimo u pododeljku 4.1.2 gde su dobijene sve gejdž simetrije BF teorije, grupe G-gejdž i M-gejdž transformacija. Sumiranjem ovih rezultata predstavljena je kompletna struktura grupe simetrije, uključujući njenu Lijevu algebru, kao i konkretan izbor parametara kojim se dobijaju difeomorfizam transformacije u BF teoriji. Konačno, ova glava se završava odeljkom 4.2, gde diskutujemo Jang-Milsovu teoriju u ravnom prostorvremenu predstavljenu kao topološku BF teoriju sa vezama i odeljkom 4.3, gde je predstavljeno poznato Plebanski dejstvo za Opštu relativnost.

4.1 Topološka BF teorija

Za Lijevu grupu G, njenu odgovarajuću Lijevu algebru $\mathfrak{g}$ i neku 4-dimenzionalnu prostorvremensku mnogostrukost $\mathcal{M}_4$, možemo definisati topološko BF dejstvo na sledeći način:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge F \rangle_{\mathfrak{g}} \,. \tag{4.1}$$

Ovde je 2-forma F krivina za 1-formu koneksije $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$ elementa algebre $\mathfrak{g}$ kao što je definisana jednačinom (2.1), $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$ je Lagranžev množitelj 2-forma, dok oznaka $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ označava G-invarijantnu simetričnu nedegenerisanu bilinearnu formu. Dejstvo (4.1) napisano je u manifestno difeomorfizam invarijantnom obliku i invarijantno je na gejdž transformacije generisane grupom G. Variranjem dejstva (4.1) po varijablama B^β i α^β dobijaju se jednačine kretanja:

$$F^\beta = 0\,, \qquad \nabla B^\beta \equiv \mathrm{d}B^\beta + f_{\gamma\delta}{}^\beta \alpha^\gamma \wedge B^\delta = 0\,. \tag{4.2}$$

Ovde je indeks β grupni indeks G grupe koji prebrojava generatore $\mathfrak{g}$, a $f_{\gamma\delta}{}^\beta$ označava strukturne konstante Lijeve grupe G.

Na osnovu prve jednačine kretanja u (4.2) zaključujemo da je koneksija α ravna, odnosno $\alpha = 0$ (do na gejdž transformacije). Koristeći ovaj rezultat u drugoj jednačini kretanja dobijamo da je Lagranžev množitelj B konstantan. Stoga, dejstvo (4.1) opisuje teoriju bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode, odnosno *topološku teoriju*[1].

Formalno se broj stepeni slobode dobija Hamiltonovom analizom dejstva, što je urađeno u odeljku 4.1.1.

4.1.1 Hamiltonova analiza topološke BF teorije

Topološka BF teorija zadata je dejstvom (4.1), odakle raspisivanjem po prostornovremenskim indeksima diferencijalnih formi $\mu, \nu ...$ i grupnim indeksima $\alpha, \beta ...$ grupe G dobijamo:

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^\alpha{}_{\mu\nu} F^\beta{}_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} \,. \tag{4.7}$$

[1] *Topološka kvantna teorija polja* je kvantna teorija polja koja se bavi izračunavanjem topoloških invarijanti. U topološkoj teoriji konfiguracioni integral je

$$Z^I = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\big[iS_{\scriptscriptstyle TOP}[\phi]\big], \tag{4.3}$$

gde je dejstvo jednako nekoj konstanti $\chi(\mathcal{M}_D)$ koja zavisi samo od topologije:

$$S_{\scriptscriptstyle TOP}[\phi] = \int_{\mathcal{M}_D} \mathrm{d}^D x \, \mathcal{L}^{\scriptscriptstyle TOP}(\phi, \partial\phi) = \chi(\mathcal{M}_D). \tag{4.4}$$

Dakle, u konfiguracionom integralu konstanta $\exp[i\chi]$ tada izlazi ispred integrala i dobijamo:

$$Z^I = \exp\big[i\chi(\mathcal{M}_D)\big] \int \mathcal{D}\phi = \mathrm{const} \cdot \exp\big[i\chi(\mathcal{M}_D)\big]. \tag{4.5}$$

Ovaj konfiguracioni integral nazivamo prvom kvantizacijom. Drugu kvantizaciju, tj. konfiguracioni integral Z^{II} diskretizovane teorije dobijamo sabiranjem po svim triangulacijama mnogostrukosti. Diskretizovana teorija je *topološka* ako partitivna funkcija Z^I ne zavisi od triangulacije mnogostrukosti. U tom slučaju su I i II kvantizacija identične

$$Z^{II} = \sum_{T(\mathcal{M}_D)} Z^I = Z^I \sum_{T(\mathcal{M}_D)} 1 = \mathrm{const} \cdot Z^I, \tag{4.6}$$

gde Z^I izlazi ispred sume jer ne zavisi od triangulacije. Kako nam triangulacija definiše broj stepeni slobode u teoriji, a fizičke opservable ne zavise od triangulacije, zaključujemo da fizičkih stepeni slobode nema.

Pretpostavljajući da je prostorvreme globalno hiperbolično možemo da izvršimo folijaciju prostorvremena na prostorne hiperpovrši Σ_3 i napišemo Lagranžijan za BF teoriju:

$$L_{3BF} = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B^{\alpha}{}_{\mu\nu} F^{\beta}{}_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta}\,. \tag{4.8}$$

Kanonski impulsi, definisani jednačinom (3.16), koji odgovaraju varijablama $B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ i α^{α}, dobijeni variranjem Lagranžijana po vremenskim izvodima varijabli su:

$$\begin{aligned} \pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu}} = 0\,, \\ \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu}} = \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\alpha\nu\rho}\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Kako ove jednačine ne možemo rešiti po vremenskim izvodima varijabli one daju *primarne veze* (3.19):

$$\begin{aligned} P(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} &\equiv \pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} \approx 0\,, \\ P(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} &\equiv \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\alpha\nu\rho} \approx 0\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Koristeći fundamentalnu Poasonovu zagradu definisanu na sledeći način:

$$\begin{aligned} \{\, B^{\alpha}{}_{\mu\nu}(\vec{x})\,,\, \pi(B)_{\beta}{}^{\rho\sigma}(\vec{y}) \,\} &= 2\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\ \{\, \alpha^{\alpha}{}_{\mu}(\vec{x})\,,\, \pi(\alpha)_{\beta}{}^{\nu}(\vec{y}) \,\} &= \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\nu}_{\mu}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \end{aligned} \tag{4.11}$$

izračunavamo Poasonovu zagradu između primarnih veza:

$$\{\, P(B)_{\alpha}{}^{jk}(\vec{x})\,,\, P(\alpha)_{\beta}{}^{i}(\vec{y}) \,\} = \epsilon^{0ijk}\, g_{\alpha\beta}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{4.12}$$

Kanonski Hamiltonijan, definisan jednačinom (3.20), glasi:

$$H_c = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu}\, \partial_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu}\, \partial_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} \right] - L\,. \tag{4.13}$$

Koristeći definiciju krivine $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, možemo da prepišemo Hamiltonijan (4.13) tako da vremenski izvodi varijabli množe primarne veze, pa su u *"on-shell"* objektu ti članovi identički jednaki nuli:

$$H_c = -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \epsilon^{0ijk} \left[\frac{1}{2} B_{\alpha 0i}\, F^{\alpha}{}_{jk} + \frac{1}{2}\alpha^{\alpha}{}_{0} \nabla_i B_{\alpha\, jk} \right]. \tag{4.14}$$

Ovako napisan kanonski Hamiltonijan ne zavisi od kanonskih impulsa i sadrži samo polja i njihove vremenske izvode. Uvodeći Lagranževe množitelje λ koji odgovaraju dvema primarnim vezama možemo da definišemo *"off-shell" totalni Hamiltonijan*, definisan jednačinom (3.21):

$$H_T = H_c + \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\lambda(B)^{\alpha}{}_{\mu\nu} P(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} + \lambda(\alpha)^{\alpha}{}_{\mu} P(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} \right]. \tag{4.15}$$

Kako primarne veze moraju biti konstantne, *uslovi konzistentnosti* (3.26) za sve primarne veze moraju biti zadovoljeni. Za primarne veze $P(B)_{\alpha}{}^{0i}$ i $P(\alpha)_{\alpha}{}^{0}$ ovi uslovi dovode do sekundarnih veza (3.27) u teoriji $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(F)_{\alpha}{}^{i} &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk} F_{\alpha jk} \approx 0\,, \\ \mathcal{S}(\nabla B)_{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk} \nabla_{[i} B_{\alpha\, j]k} \approx 0\,, \end{aligned} \tag{4.16}$$

dok u slučaju primarnih veza $P(\alpha)_\alpha{}^k$ i $P(B)_\alpha{}^{jk}$ uslov konzistentnosti određuje Lagranževe množitelje:

$$\begin{aligned} \lambda(B)_{\alpha ij} &\approx \nabla_i B_{\alpha 0j} - \nabla_j B_{\alpha 0i} + g_{\alpha\gamma}{}^\beta \alpha_{\beta 0} B^\gamma{}_{ij}\,, \\ \lambda(\alpha)^\alpha{}_i &\approx \nabla_i \alpha^\alpha{}_0\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Primetimo da Lagranževi množitelji

$$\lambda(B)^\alpha{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\alpha)^\alpha{}_0\,, \tag{4.18}$$

ostaju neodređeni. *Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza* (3.28) ne dovode do pojave novih veza,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{S}(F)^{\alpha i}\,,\, H_T\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{S}(F)^{\beta i} \alpha^\gamma{}_0 && \approx 0\,, \\ \{\mathcal{S}(\nabla B)_\alpha\,,\, H_T\} &= -f_{\beta\gamma\alpha} B^\gamma{}_{0k} \mathcal{S}(F)^{\beta k} + f_{\beta\alpha}{}^\gamma \alpha^\beta{}_0 \mathcal{S}(\nabla B)_\gamma && \approx 0\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Zamenjujući izraze za Lagranževe množitelje, totalni Hamiltonijan se svodi na

$$H_T = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \Big[\lambda(B)_{\alpha 0i}\, \Phi(B)^{\alpha i} + \lambda(\alpha)_\alpha\, \Phi(\alpha)^\alpha - B_{\alpha 0i}\, \Phi(F)^{\alpha i} - \alpha_{\alpha 0}\, \Phi(\nabla B)^\alpha \Big]\,, \tag{4.20}$$

gde su *veze prve klase* (3.34)

$$\begin{aligned} \Phi(B)^{\alpha i} &= P(B)^{\alpha 0i}\,, \\ \Phi(\alpha)^\alpha &= P(\alpha)^{\alpha 0}\,, \\ \Phi(F)^{\alpha i} &= \mathcal{S}(F)^{\alpha i} - \nabla_j P(B)^{\alpha ij}\,, \\ \Phi(\nabla B)^\alpha &= \mathcal{S}(\nabla B)^\alpha + \nabla_i P(\alpha)^{\alpha i} - \frac{1}{2} f_{\gamma\beta}{}^\alpha B^\beta{}_{ij} P(B)^{\gamma ij}\,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

dok su *veze druge klase* (3.35):

$$\chi(B)_\alpha{}^{jk} = P(B)_\alpha{}^{jk} \qquad \chi(\alpha)_\alpha{}^i = P(\alpha)_\alpha{}^i\,. \tag{4.22}$$

Poasonova zagrada veza prve klase glasi:

$$\begin{aligned} \{\, \Phi(F)^\alpha{}_i(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \Phi(F)^\gamma{}_i(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\ \{\, \Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \Phi(\nabla B)_\gamma(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \end{aligned} \tag{4.23}$$

dok je Poasonova zagrada veza prve sa vezama druge klase daje relacije:

$$\begin{aligned} \{\, \Phi(F)^{\alpha i}(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\beta{}^j(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\ \{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\beta{}^i(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(\alpha)^{\gamma i}(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\ \{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(B)_\beta{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Komutatori veza prve klase sa Hamiltonijanom su,

$$\begin{aligned}
\{\Phi(B)_\alpha{}^i\,, H_T\} &= \Phi(F)_\alpha{}^i\,,\\
\{\Phi(\alpha)_\alpha\,, H_T\} &= \Phi(\nabla B)_\alpha\,,\\
\{\Phi(F)^\alpha{}_i\,, H_T\} &= -\alpha^\beta{}_0\, f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \Phi(F)^\gamma{}_i\,,\\
\{\Phi(\nabla B)_\alpha\,, H_T\} &= B_{\beta 0i}\, f_{\alpha\gamma}{}^\beta\, \Phi(F)^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0\, f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \Phi(\nabla B)_\gamma\,,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

rezultat koji ćemo kasnije iskoristiti da konstruišemo generator gejdž simetrija BF teorije i odredimo ukupnu grupu simetrija.

Broj stepeni slobode topološke BF teorije

Da bi smo izračunali broj nezavisnih komponenti primarnih veza neophodna je primena Bjankijevih identiteta.

Teorema 7 (BI za BF teoriju) *Bjankijev identitet (BI) za 1-formu koneksije α, odnosno odgovarajuću 2-formu krivine*

$$F^\alpha = \mathrm{d}\alpha^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \alpha^\beta \wedge \alpha^\gamma\,, \tag{4.26}$$

glasi

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\, \nabla_\mu F^\alpha{}_{\nu\rho} = 0\,. \tag{4.27}$$

$\alpha^\alpha{}_\mu$	$B^\alpha{}_{\mu\nu}$
$4p$	$6p$

Tabela 4.1: Ukupan broj inicijalnih polja u BF teoriji.

Prebrojavanjem inicijalnih polja u teoriji prikazanih u tabeli 4.1 zaključujemo da je $N = 10p$, gde je p dimenzionalnost grupe G. Slično, broj veza druge klase možemo da pročitamo iz tabele (4.2) $S = 6p$. Posmatrajući veze prve klase zaključujemo da one nisu sve međusobno nezavisne

$\chi(B)_\alpha{}^{jk}$	$\chi(\alpha)_\alpha{}^i$
$3p$	$3p$

Tabela 4.2: Ukupan broj veza druge klase u BF teoriji.

i zadovoljavaju sledeći identitet,

$$\nabla_i \Phi(F)_\alpha{}^i = \epsilon^{ijk} \nabla_i F_{\alpha jk}\,, \tag{4.28}$$

što postaje

$$\nabla_i \Phi(F)_\alpha{}^i = 0\,, \tag{4.29}$$

kada iskoristimo da je desna strana jednačine (4.28) $\epsilon^{ijk}\, \nabla_i F^a_{jk} = 0$ komponenta $\lambda = 0$ BI (4.27).

Imajući ovu vezu između veza prve klase u vidu, broj nezavisnih komponenti veza prve klase možemo da pročitamo iz tabele 4.3. Vidimo da je broj nezavisnih veza prve klase:

$$F = 8p - p = 7p\,.$$

U prethodnom izrazu smo od ukupnog broja veza prve klase navedenih u tabeli (4.3) oduzeli p relacija (4.29). Dakle, broj stepeni slobode u BF teoriji, definisan jednačinom (3.41) je

$$n = 10p - 7p - \frac{6p}{2} = 0\,, \tag{4.30}$$

odnosno *BF teorija nema lokalne propagirajuće stepene slobode.*

$\Phi(B)_\alpha{}^i$	$\Phi(\alpha)_\alpha$	$\Phi(F)^{\alpha i}$	$\Phi(\nabla B)^\alpha$
$3p$	p	$3p-p$	p

Tabela 4.3: Ukupan broj veza prve klase u BF teoriji.

Generator gejdž transformacija za BF teoriju

Generator gejdž transformacija za BF teoriju glasi:

$$G=\int \nabla_0\epsilon^\alpha{}_i\Phi(B)_\alpha{}^i-\epsilon^\alpha{}_i\Phi(F)_\alpha{}^i+\nabla_0\epsilon^\alpha\Phi(\alpha)_\alpha+\epsilon^\alpha\left(f_{\alpha\gamma}{}^\beta B_{\beta 0i}\Phi(B)^{\gamma i}-\Phi(\nabla B)_\alpha\right)\,. \tag{4.31}$$

Postupak izvođenja generatora Kastelanijevom procedurom prikazan je u dodatku D.1. Varijacije formi varijabli i njihovih konjugovanih impulsa računamo primenom jednačine (3.56), što daje:

$$\begin{aligned}
\delta_0 B^\alpha{}_{0i} &= \nabla_0\epsilon^\alpha{}_i - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon^\beta B^\gamma{}_{0i}\,, & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{0i} &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(B)_\gamma{}^{0i}\,,\\
\delta_0 B^\alpha{}_{ij} &= 2\nabla_{[i}\epsilon^\alpha{}_{j]} - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon^\beta B^\gamma{}_{ij}\,, & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{ij} &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(B)_\gamma{}^{ij}\,,\\
\delta_0\alpha^\alpha{}_0 &= \nabla_0\epsilon^\alpha\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^0 &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_i\pi(B)_\gamma{}^{0i} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\gamma\pi(\alpha)_\gamma\,,\\
\delta_0\alpha^\alpha{}_i &= \nabla_i\epsilon^\alpha\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^i &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_j\pi(B)_\gamma{}^{ij} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(\alpha)_\gamma{}^i + \epsilon^{0ijk}\nabla_j\epsilon_{\alpha k}\,.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

4.1.2 Simetrije BF dejstva

Grupa simetrije G

Posmatrajući varijacije formi varijabli (4.32) primetimo da članovi odgovaraju transformaciji definisanoj u Teoremi 8,

$$\delta_0\alpha^\alpha{}_\mu=\partial_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha+f_{\beta\gamma}{}^\alpha\alpha^\beta{}_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\gamma\,,\qquad \delta_0 B^\alpha{}_{\mu\nu}=-f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\beta B^\gamma{}_{\mu\nu}\,, \tag{4.33}$$

gde je slobodan parametar $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha=\epsilon^\alpha$.

Teorema 8 (G-gejdž transformacije) *U BF teoriji nad proizvoljnom Lijevom grupom G, sledeća transformacija je simetrija:*

$$\begin{aligned}
\alpha &\to \alpha' = \mathrm{Ad}_g\alpha + g\mathrm{d}g^{-1}\,, & B &\to B' = gBg^{-1}\,,\\
\beta &\to \beta' = g\rhd\beta\,, & C &\to C\,,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

gde je $g=\exp(\epsilon_{\mathfrak{g}}\cdot\hat{G})=\exp(\epsilon_{\mathfrak{g}\alpha}\hat{G}^\alpha)\in G$, a $\epsilon_{\mathfrak{g}}:\mathcal{M}_4\to\mathfrak{g}$ je parametar transformacija.

Dokaz. Pri G-gejdž transformacijama definisanim u Teoremi 8 za parametar $g\in G$, krivina F se transformiše na sledeći način:

$$\mathcal{F}\to\mathcal{F}'=g\mathcal{F}g^{-1}\,. \tag{4.35}$$

Teoremu dokazujemo direktnom proverom:

$$\begin{aligned}
S_{BF}\to S'_{BF} &= \frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}_4}\mathrm{d}^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(B^\alpha{}_{\mu\nu}-f_{\gamma\delta}{}^\alpha\epsilon_{\mathfrak{g}}^\gamma B^\delta{}_{\mu\nu}\right)\left(F^\beta{}_{\rho\sigma}-f_{\epsilon\tau}{}^\beta\epsilon_{\mathfrak{g}}^\epsilon F^\tau{}_{\rho\sigma}\right)g_{\alpha\beta}\\
&= S_{BF}-\frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}_4}\mathrm{d}^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(f_{\gamma\delta}{}^\alpha\epsilon_{\mathfrak{g}}^\gamma B^\delta{}_{\mu\nu}F^\beta{}_{\rho\sigma}+f_{\epsilon\tau}{}^\beta\epsilon_{\mathfrak{g}}^\epsilon B^\alpha{}_{\mu\nu}F^\tau{}_{\rho\sigma}\right)g_{\alpha\beta}\,,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

gde je drugi član jednak nuli. Takođe, posmatrajući konačnu transformaciju, možemo da pišemo

$$\langle B, F\rangle_{\mathfrak{g}} \to \langle g^{-1}Bg, g^{-1}Fg\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle B, F\rangle_{\mathfrak{g}}\,, \tag{4.37}$$

budući da je Kilingova forma $\langle \_, \_\rangle_{\mathfrak{g}}$ G-invarijantna. ■

Posmatrajmo dve infinitezimalne G-gejdž transformacije, određene infinitezimalnim parametrima ${\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1$ i ${\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2$. Za izračunavanje komutatora između generatora G-gejdž transformacija koristićemo Baker-Kampbel-Hausdorf (BCH)[2] formulu u slučaju kada su parametri transformacija mali

$$e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\hat{G}_\alpha}e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\hat{G}_\beta} = e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\hat{G}_\alpha + {\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\hat{G}_\beta + \frac{1}{2}{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\,{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\,[\hat{G}_\alpha,\hat{G}_\beta] + O({\epsilon_{\mathfrak{g}}}^3)}\,, \tag{4.38}$$

iz čega sledi:

$$e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\hat{G}_\alpha}e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\hat{G}_\beta} - e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\hat{G}_\beta}e^{{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\hat{G}_\alpha} = {\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1\,{\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2\,[\hat{G}_\alpha,\hat{G}_\beta] + O({\epsilon_{\mathfrak{g}}}^3)\,. \tag{4.39}$$

Koristeći jednačinu (4.39), dobijamo da generatori G-gejdž transformacija definisanih u Teoremi 8 zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{G}_\gamma\,, \tag{4.40}$$

gdje su $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ strukturne konstante algebre $\mathfrak{g}$. Primećujući da postoji izomorfizam između generatora $\hat{G}_\alpha \cong \tau_\alpha$, zaključujemo da je G-gejdž grupa transformacija iz Teoreme 8 isto što i grupa G koja odgovara formiranom BF dejstvu.

Grupa simetrija $\tilde{M}$

Posmatrajući transformacije varijabli (4.32) uočavamo da preostali članovi oblika $\delta_0 B^{\alpha}{}_{0i} = \nabla_0\epsilon_i$ i $\delta_0 B^{\alpha}{}_{ij} = 2\nabla_{[i|}\epsilon_{|j]}$ odgovaraju transformaciji definisanoj u Teoremi 9:

$$\delta_0\alpha^{\alpha}{}_{\mu} = 0\,, \qquad \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu|}\epsilon^{\alpha}_{\mathfrak{m}|\nu]}\,, \tag{4.41}$$

gde je slobodan parametar $\epsilon^{\alpha}_{\mathfrak{m}\mu} = \epsilon^{\alpha}{}_{\mu}$.

Teorema 9 (M-gejdž transformacije) *U BF teoriji nad proizvoljnom Lijevom grupom G, sledeća transformacija je simetrija:*

$$\alpha \to \alpha' = \alpha\,, \qquad B \to B' = B + \nabla\epsilon_{\mathfrak{m}}\,, \tag{4.42}$$

gde je $\epsilon^{\alpha}_{\mathfrak{m}\mu}$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{g}$, a ∇ kovarijantan spoljašnji izvod definisan na standardni način, tj.

$$\nabla\epsilon_{\mathfrak{m}} = \mathrm{d}\epsilon_{\mathfrak{m}} + [\alpha\wedge\epsilon_{\mathfrak{m}}]\,. \tag{4.43}$$

Dokaz. Teoremu dokazujemo direktnom proverom:

$$\begin{aligned} S_{BF} \to S'_{BF} &= \frac{1}{4}\int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(B^{\alpha}{}_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu|}\epsilon^{\alpha}_{\mathfrak{m}|\nu]} + 2f_{\gamma\delta}{}^{\alpha}\alpha^{\gamma}{}_{[\mu|}\epsilon^{\delta}_{\mathfrak{m}|\nu]}\right)F^{\beta}{}_{\rho\sigma}g_{\alpha\beta} \\ &= S_{BF} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\,\epsilon^{\mu\rho\sigma\nu}\left(\partial_\mu F^{\tau}{}_{\rho\sigma} + f_{\gamma\beta}{}^{\tau}\alpha^{\gamma}{}_{\mu}F^{\beta}{}_{\rho\sigma}\right)\epsilon^{\delta}_{\mathfrak{m}\nu}\,g_{\tau\delta} + \text{član na granici}\,, \end{aligned} \tag{4.44}$$

gde je drugi član jednak nuli jer je $\epsilon^{\mu\rho\sigma\nu}\left(\partial_\mu F^{\tau}{}_{\rho\sigma} + f_{\gamma\beta}{}^{\tau}\alpha^{\gamma}{}_{\mu}F^{\beta}{}_{\rho\sigma}\right) = 0$ na osnovu BI (7). ■

Primetimo da su transformacije definisane u Teoremi 9 linearne transformacije, a dve uzastopne

[2]eng. *Baker-Campbell-Hausdorff formula.*

M-gejdž transformacije daju jednu M-gejdž transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{m}1} + \epsilon_{\mathfrak{m}2}$. Ako označimo generatore M-gejdž transformacija kao $\hat{M}_\alpha{}^\mu$,

$$e^{\epsilon_{\mathfrak{m}1}\cdot\hat{M}} e^{\epsilon_{\mathfrak{m}2}\cdot\hat{M}} = e^{(\epsilon_{\mathfrak{m}1}+\epsilon_{\mathfrak{m}2})\cdot\hat{M}}\,, \tag{4.45}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{m}} \cdot \hat{M} = \epsilon^{\alpha}_{\mathfrak{m}\mu}\hat{M}_\alpha{}^\mu$, iz čega sledi da je komutator generatora trivijalan,

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{M}_\beta{}^\nu] = 0\,. \tag{4.46}$$

Dakle, M-gejdž transformacije formiraju Abelovu grupu, koju ćemo u daljem tekstu označavati $\tilde{M}$. Prema indeksnoj strukturi njenih parametara i generatora, vidimo da je ova grupa izomorfna grupi $\mathbb{R}^{4p}$, gde je p dimenzija grupe G:

$$\tilde{M} \cong \mathbb{R}^{4p}\,. \tag{4.47}$$

Zatim, može se ispitati odnos M-gejdž transformacija i G-gejdž transformacija definisanih u prethodnom odeljku[3],

$$[\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{m}} \cdot \hat{M}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{m}}) \cdot \hat{M}\,, \tag{4.48}$$

na osnovu čega dobijamo komutator:

$$[\hat{G}_\alpha\,, \hat{M}_\beta{}^\mu] \;=\; f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu\,. \tag{4.49}$$

Ovim smo završili izračunavanje algebra generatora gejdž transformacija u BF teoriji.

Ukupna gejdž grupa simetrije *BF* dejstva

Sumirajući rezultate prethodnih pododeljaka, može se zapisati algebra generatora ukupne gejdž grupe simetrije.

- Algebra $\mathfrak{g}$ grupe G data je komutacionim relacijama,

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] \;=\; f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{G}_\gamma\,. \tag{4.50}$$

- Algebra generatora M-gejdž transformacija:

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{M}_\beta{}^\nu] \;=\; 0\,. \tag{4.51}$$

- Dejstvo generatora grupe G na generatore M-gejdž transformacija:

$$[\hat{G}_\alpha\,, \hat{M}_\beta{}^\mu] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu\,. \tag{4.52}$$

Na osnovu komutacionih relacija (4.51) zaključujemo da je grupa $\tilde{M}$ *invarijantna podgrupa*[4] ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{BF}$. Na osnovu komutacionih relacija (4.52) dobijamo da semidirektan proizvod podgrupa G i $\tilde{M}$ daje ukupnu grupu simetrija BF dejstva:

$$\mathcal{G}_{BF} = G \ltimes \tilde{M}\,. \tag{4.53}$$

[3]Dejstvo parametra $\epsilon_{\mathfrak{g}}$ na parametar $\epsilon_{\mathfrak{m}}$, $\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{m}}$, je definisano kao $\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{m}} \equiv \rhd_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\beta{}_\mu \mathrm{d}x^\mu$, pri čemu je $\rhd_{\alpha\beta}{}^\gamma = f_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Sledi da je

$$(\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{m}}) \cdot \hat{M} = f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\beta{}_\mu \tilde{M}_\gamma{}^\mu\,.$$

[4]Podgrupa je *invarijantna podgrupa* neke grupe, ili ekvivalentno *normalna podgrupa*, ako je invarijantna pri konjugaciji elemenata podgrupe elementima grupe. Formalno, kažemo da je grupa H invarijantna podgrupa grupe G, ako je H podgrupa od G, tj. $H \leq G$, i za sve elemente $h \in H$ i $g \in G$, konjugacija elementa H elementom G je element H, tj. $\exists h' \in H$ takav da $ghg^{-1} = h'$. Na nivou algebre, odgovarajući objekt je *ideal*. Odnosno, algebra A je podalgebra algebre L u odnosu na operaciju množenje u L, tj. $[A, A] \subset A$. Zatim, podalgebra A algebre L je *ideal* u L ako njeni elementi, pomnoženi sa bilo kojim elementom algebre, daju ponovo element podalgebre, tj. $[A, L] \subset A$.

Difeomorfizmi

Druga važna tema za diskusiju je invarijantnost teorije na difeomorfizme. Iz činjenice da je BF dejstvo formulisano na manifestno kovarijantni način preko diferencijalnih formi, očigledno je da su difeomorfizmi simetrija teorije. Međutim, gledajući strukturu gejdž grupe $\mathcal{G}_{BF}$, ne vidi se odmah da li je *Diff*$(\mathcal{M}_4, \mathbb{R})$ njena podgrupa.

Razmotrimo difeomorfizam transformacije

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)\,, \tag{4.54}$$

gde je parametar $\xi^\mu(x)$ proizvoljna funkcija koordinata. Takođe, označimo parametre transformacija gejdž simetrija $\epsilon_i(x)$. Ako su difeomorfizmi simetrija dejstva, onda za svako polje $\phi(x)$ u teoriji i svaki parametar difeomorfizam transformacija $\xi^\mu(x)$, postoji izbor gejdž $\epsilon_i(x)$ i Eno-Taitelboim[5] parametara $\epsilon^{\rm HT}(x)$, tako da:

$$({\delta_0}^{\rm gauge} + {\delta_0}^{\rm HT} + {\delta_0}^{\rm diff})\,\phi = 0\,. \tag{4.57}$$

Drugim rečima, ako su difeomorfizmi simetrija teorije, njihove varijacije forme se mogu izraziti kao zbir varijacija formi varijabli pri gejdž transformacijama i varijacija formi pri HT transformacijama:

$${\delta_0}^{\rm diff}\,\phi = -{\delta_0}^{\rm gauge}\phi - {\delta_0}^{\rm HT}\phi\,. \tag{4.58}$$

Konkretno, BF dejstvo zavisi od varijabli $\alpha^\alpha{}_\mu$ i $B^\alpha{}_{\mu\nu}$. Parametri HT transformacija $\epsilon^{{\rm HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}$ su definisani relacijama (4.55)

$${\delta_0}^{\rm HT}\alpha^\alpha{}_\mu \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{{\rm HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta B^\beta{}_{\nu\rho}}\,, \qquad {\delta_0}^{\rm HT}B^\alpha{}_{\mu\nu} \;=\; -\epsilon^{{\rm HT}\alpha\beta}{}_{\rho\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta\alpha^\beta{}_\rho}\,, \tag{4.59}$$

dok su gejdž parametri $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$ i $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu$ definisani u Teoremama 8 i 9. Možemo pokazati da zaista postoji izbor ovih parametara, tako da je jednačina (4.57) zadovoljena za sva polja. Konkretno, ako odaberemo gejdž parametre kao

$$\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha = -\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda\,, \quad \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu = \xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda}\,, \tag{4.60}$$

a HT parametre kao

$$\epsilon^{{\rm HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,, \tag{4.61}$$

primenom jednačine (4.58) dobijamo upravo standardne varijacije formi koje odgovaraju difeomorfizmima:

$$\begin{array}{rcl} {\delta_0}^{\rm diff}\alpha^\alpha{}_\mu &=& -\partial_\mu\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda\alpha^\alpha{}_\mu\,, \\ {\delta_0}^{\rm diff}B^\alpha{}_{\mu\nu} &=& -\partial_\mu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda B^\alpha{}_{\mu\nu}\,. \end{array} \tag{4.62}$$

Ovim se utvrđuje da su difeomorfizmi zaista simetrija teorije, čak i ako nisu sadržani u ukupnoj gejdž grupi simetrija $\mathcal{G}_{BF}$, već u direktnom proizvodu ukupne grupe simetrija i HT grupe simetrija.

[5]Lako je videti da je svako dejstvo, koje zavisi od najmanje dva polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$, invarijantno na Eno-Taitelboim (HT) transformaciju [36], određenu parametrom $\epsilon^{\rm HT}$

$${\delta_0}^{\rm HT}\phi_1 = \epsilon^{\rm HT}(x)\frac{\delta S}{\delta\phi_2}\,, \qquad {\delta_0}^{\rm HT}\phi_2 = -\epsilon^{\rm HT}(x)\frac{\delta S}{\delta\phi_1}\,, \tag{4.55}$$

što se može lako proveriti izračunavanjem varijacije dejstva:

$$\delta^{\rm HT}S[\phi_1,\phi_2] = \frac{\delta S}{\delta\phi_1}{\delta_0}^{\rm HT}\phi_1 + \frac{\delta S}{\delta\phi_2}{\delta_0}^{\rm HT}\phi_2 = 0\,. \tag{4.56}$$

Ova simetrija prisutna je čak i u teorijama koje nemaju gejdž simetriju, ali se ne vidi se u generatoru gejdž simetrija (4.31) dobijenim Kastelanijevom procedurom. Razlog za to sastoji se u tome da je HT-varijacija polja ϕ_1 i ϕ_2 uvek jednaka nuli on-shell, tj. varijacije su uvek linearne kombinacije veza, pa prema tome slabo jednake nuli.

4.2 Jang-Milsova teorija

U fizici smo najčešće zainteresovani za teorije koje nisu topološke, odnosno teorije koje poseduju lokalne propagirajuće stepene slobode. Kako bi topološko BF dejstvo transformisali u dejstvo sa propagirajućim stepenima slobode dodaje se dodatni član u dejstvo, tzv. *veza jednostavnosti.* Rezultujuće dejstvo daje *BF teoriju sa vezama.*

Jedan primer takvog dejstva je *Jang-Milsova teorija* za $SU(N)$ grupu u prostoru Minkovskog, koju možemo da napišemo kao BF dejstvo sa vezama na sledeći način:

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int B_I \wedge F^I + \lambda^I \wedge \Big(B_I - \frac{12}{g} M_{abI} \delta^a \wedge \delta^b \Big) \\ & + \zeta^{abI} \Big(M_{abI} \varepsilon_{cdef} \delta^c \wedge \delta^d \wedge \delta^e \wedge \delta^f - g_{IJ} F^J \wedge \delta_a \wedge \delta_b \Big) \,. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ovde je $F \equiv \mathrm{d}A + A \wedge A$ 2-forma krivine za 1-formu koneksije $A \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{su}(N))$, a $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{su}(N))$ 2-forma Lagranžev množitelj. Kilingova forma $g_{IJ} \equiv \langle \tau_I, \tau_J \rangle_{\mathfrak{su}(N)} \propto f_{IK}{}^L f_{JL}{}^K$ definiše podizanje i spuštanje indeksa $I, J, \dots$ koji prebrojavaju generatore $SU(N)$ grupe, dok $f_{IJ}{}^K$ označava strukturne konstante $\mathfrak{su}(N)$ algebre. Dejstvo (4.63) dobijeno je nametanjem veza topološkom dejstvu (4.1), dodavanjem dva dodatna člana u obliku proizvoda Lagranževih množitelja, 2-forme λ^I i 0-forme ζ^{abI}, i odgovarajućih veza. Funkcija, odnosno 0-forma, M_{abI} je takođe Lagranžev množitelj, dok g označava kapling konstantu za Jang-Milsovo polje. Najzad, δ^a je nedinamičko polje 1-forma, takvo da postoji globalni koordinatni sistem u kome su njegove komponente jednake Kronekerovoj delti $\delta^a{}_\mu$. Dakle, ova 1-forma predstavlja pozadinsko polje, i definiše globalnu prostorvremensku metriku jednačinom

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{ab} \delta^a{}_\mu \delta^b{}_\nu \,, \tag{4.64}$$

gde je $\eta_{ab} \equiv \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ metrika Minkovskog. Stoga, prostorvremenska mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ je ravna. Indeksi $a, b, \dots$ su lokalni Lorencovi indeksi, koji uzimaju vrednosti $0, \dots, 3$. Polje δ^a ima sve osobine 1-forme tetrade e^a u ravnom prostorvremenu Minkovskog. Primetimo da je dejstvo (4.63) manifestno difeomorfizam invarijantno i invarijantno pri gejdž transformcijama grupe simetrija $SU(N)$, ali nije nezavisno od pozadine zbog prisustva pozadinskog polja δ^a. Variranjem dejstva (4.63) po varijablama ζ^{abI}, M_{abI}, A^I, B_I, i λ^I, dobijamo jednačine kretanja:

$$M_{abI} \varepsilon_{cdef} \delta^c \wedge \delta^d \wedge \delta^e \wedge \delta^f - F_I \wedge \delta_a \wedge \delta_b = 0 \,, \tag{4.65}$$

$$-\frac{12}{g} \lambda^I \wedge \delta^a \wedge \delta^b + \zeta^{abI} \varepsilon_{cdef} \delta^c \wedge \delta^d \wedge \delta^e \wedge \delta^f = 0 \,, \tag{4.66}$$

$$-\mathrm{d}B_I + f_{JI}{}^K B_K \wedge A^J + \mathrm{d}(\zeta^{ab}{}_I \delta_a \wedge \delta_b) - f_{JI}{}^K \zeta^{ab}{}_K \delta_a \wedge \delta_b \wedge A^J = 0 \,, \tag{4.67}$$

$$F_I + \lambda_I = 0 \,, \tag{4.68}$$

$$B_I - \frac{12}{g} M_{abI} \delta^a \wedge \delta^b = 0 \,. \tag{4.69}$$

Primetimo da nismo varirali po pozadinskom polju δ^a. Iz jednačina (4.65), (4.66), (4.68) i (4.69) možemo da izrazimo Lagranževe množitelje kao algebarske funkcije jačine polja $F^I{}_{\mu\nu}$ za dinamičko polje A^I:

$$\begin{aligned} M_{abI} &= \frac{1}{48} \varepsilon_{abcd} F_I{}^{cd} \,, \qquad & \zeta^{abI} &= \frac{1}{4g} \varepsilon^{abcd} F^I{}_{cd} \,, \\ \lambda_{Iab} &= F_{Iab} \,, & B_{Iab} &= \frac{1}{2g} \varepsilon_{abcd} F_I{}^{cd} \,. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Ovde je korišćena notacija $F_{Iab} = F_{I\mu\nu}\delta_a{}^{\mu}\delta_b{}^{\nu}$, analogno za sve varijable. Takođe, podrazumeva se da je $\delta^a{}_{\mu}$ invertibilna matrica. Na osnovu jednačina (4.70) i diferencijalne jednačine kretanja (4.67) dobija se jednačina kretanja za gejdž polje $A^I{}_{\mu}$:

$$\nabla_\rho F^{I\rho\mu} \equiv \partial_\rho F^{I\rho\mu} + f_{JK}{}^I A^J{}_\rho F^{K\rho\mu} = 0\,. \tag{4.71}$$

Ovo je upravo klasična jednačina kretanja za slobodno Jang-Milsovo polje. Dejstvo (4.63) se može transformisati u dejstvo koje opisuje *maseno vektosko polje*, sa dinamikom zadatom Proka jednačinom kretanja, dodavanjem masenog člana:

$$-\frac{1}{4!}m^2 A_{I\mu}A^I{}_\nu \eta^{\mu\nu}\varepsilon_{abcd}\delta^a \wedge \delta^b \wedge \delta^c \wedge \delta^d\,. \tag{4.72}$$

Prisustvo ovog člana u dejstvu naravno eksplicitno narušava $SU(N)$ gejdž simetriju dejstva.

4.3 Plebanski dejstvo za Opštu relativnost

Najpoznatiji primer BF teorije sa vezama je *Plebanski dejstvo za Opštu relativnost* [32], [34]. Plebanski je 1977. godine pokazao kako umesto metrike možemo koristiti polje B kao fundamentalnu varijablu kojom opisujemo gravitaciono polje.

Izborom Lorencove grupe $G = SO(3,1)$ kao gejdž grupe, BF dejstvo definišemo kao

$$S = \int_{\mathcal{M}_4} B_{ab} \wedge R^{ab}\,. \tag{4.73}$$

Ovde je R^{ab} 2-forma krivine za spinsku koneksiju ω^{ab}, B_{ab} je 2-forma Lagranžev množitelj, dok je Kilingova forma definisana kao

$$g_{ab,cd} = \frac{1}{2}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})\,,$$

gde je η_{ab} metrika Minkovskog. Antisimetrični par indeksa prebrojava generatore J_{ab} Lorencove grupe $SO(3,1)$. Dodavanjem odgovarajućih veza dobijamo BF dejstvo sa vezama - *Plebanski dejstvo*:

$$S = \int_{\mathcal{M}_4} B_{ab} \wedge R^{ab} + \frac{1}{2}\phi_{abcd}B^{ab} \wedge B^{cd} + \mu\phi_{abcd}\left(a_1 g^{ab,cd} + a_2\epsilon^{abcd}\right)\,. \tag{4.74}$$

gde je ϕ_{abcd} Lagranžev množitelj 0-forma koji množi vezu $B^{ab} \wedge B^{cd}$, μ je Lagranžev množitelj 4-forma, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ su realni parametri, a $g^{ab,cd}$ je inverzna Kilingova forma. Može se pokazati da se variranjem ovog dejstva po varijablama B_{ab}, ω^{ab}, ϕ_{abcd} i μ dobijaju jednačine kretanja:

$$R_{ab} - \phi_{abcd}B^{cd} = 0\,, \tag{4.75}$$

$$\nabla B_{ab} = 0\,, \tag{4.76}$$

$$\frac{1}{2}B^{ab} \wedge B^{cd} + \mu\left(a_1 g^{ab,cd} + a_2\varepsilon^{abcd}\right) = 0\,, \tag{4.77}$$

$$\phi_{abcd}\left(a_1 g^{ab,cd} + a_2\varepsilon^{abcd}\right) = 0\,. \tag{4.78}$$

Rešavanjem jednačine (4.77) može se pokazati da rešenje za Lagranžev množitelj ima oblik

$$B_{ab} = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_{abcd}e^c \wedge e^d + \beta e_a \wedge e_b\,, \tag{4.79}$$

gde koeficijenti α i β zadovoljavaju jednačinu:

$$a_2\alpha\beta = \frac{a_1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\,.$$

Sada, za uobičajeni izbor u savremenoj literaturi $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$ imamo dva moguća rešenja:

$$B_{ab} = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_{abcd}e^c \wedge e^d\,, \quad \beta = 0\,, \tag{4.80}$$

$$B_{ab} = \beta e_a \wedge e_b\,, \quad \alpha = 0\,. \tag{4.81}$$

Oba rešenja podrazumevaju dakle da je diferencijalna forma B_{ab} *prosta*[6], pa se i veza

$$\frac{1}{2}B^{ab} \wedge B^{cd} + \mu\left(a_1 g^{ab,cd} + a_2\epsilon^{abcd}\right)\,,$$

koja dovodi do ovog rešenja zove *veza jednostavnosti.*

Rešavanjem sistema jednačina (4.75)-(4.78) dobija se da je jednačina (4.75) ekvivalentna Ajnštajnovoj vakuumskoj jednačini Opšte relativnosti:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0\,. \tag{4.82}$$

Primetimo da u ovom modelu polja tetrade nisu eksplicitno prisutna u modelu, već se pojavljuju samo kao rešenja jednačine kretanja. Na osnovu toga sledi da su tetrade *on-shell objekti*, odnosno da se ne mogu kvantovati. Ovo čini model Plebanskog nepovoljnim za kuplovanje polja materije sa gravitacijom [11], [15], [37]. Ipak, uspešno je sproverena kvantizacija Plebanski modela kao modela Opšte relativnosti, u kontekstu *modela spinske pene* [1], [2], [9], [10].

[6]Diferencijalna 2-forma je *prosta* (eng. *simple, decomposable differential form*) ako može da se napiše kao spoljašnji proizvod dve 1-forme.

Glava 5

$2BF$ teorija

Kako bi se rešio problem kvantizacije polja materije prisutne u Standardnom Modelu kuplovanih sa gravitacijom koji postoji u modelu Plebanskog, razvija se novi pravac istraživanja – generalizovani BF modeli u kontekstu teorije kategorija [12], videti [15], [22], [23], [37], [38]. Prvi korak ove kategorijske generalizacije – tzv. *kategorijskih lestvica*, je kategorijska generalizacija pojma grupe na pojam 2-grupe. Ovaj pristup se zasniva na ideji da gejdž simetrije u fizici osim Lijevim grupama možemo opisati i drugim objektima. Generalizacijom BF teorije koja je definisana za neku Lijevu grupu, na teoriju koja je definisana za neku opštu semistriktnu 2-grupu, dolazimo do *$2BF$ teorije*, takođe poznatu i pod nazivom *$BFCG$ teorija* [12], [13], [17], [39].

U kontekstu kvantizacione procedure spinske pene, teorija viših kategorija je uspešno primenjena u formulaciji kvantnog gravitacionog modela, zasnovanog na Poenkareovoj 2-grupi [39] i odgovarajućem $2BF$ dejstvu, tzv. *spinkub modela kvantne gravitacije*. Kako su u spinkub modelu tetrade prisutne u topološkom sektoru teorije kao fundamentalna polja u $2BF$ dejstvu, ovaj model bi u principu mogao biti proširen tako da teorija uključuje sva polja materije prisutna u Standardnom Modelu. Ipak, da bi to bilo ostvareno na kvantnom nivou, neophodno je da i dejstva koja opisuju polja materije budu napisana u obliku prilagođenom za kvantizacionu proceduru spinske pene, za šta je kako se ispostavlja neophodan još jedan korak kategorijske generalizacije – formulacija $3BF$ teorije koja će biti opisana u narednom poglavlju.

Najpre, u ovom poglavlju, u odeljku 5.1 ćemo definisati i analizirati simetrije $2BF$ topološkog dejstva. Pritom, pratićemo sličnu liniju izlaganja kao u poglavlju 4. U odeljku 5.1 dat je kratak pregled topološke $2BF$ teorije. Pododeljak 5.1.1 sadrži Hamiltonovu analizu $2BF$ teorije i rezultujuću kanonsku strukturu, analizu Bjankijevih identiteta koje zadovoljavaju veze prve klase, a koji smanjuju broj nezavisnih veza prve klase prisutnih u teoriji, kao i brojanje fizičkih stepeni slobode u $2BF$ teoriji. Kao što je i očekivano, ovom analizom je dobijeno da je $2BF$ teorija topološka, tj. teorija bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Na kraju pododeljka 5.1.1, dat je konačan oblik generatora gejdž transformacija teorije, kao i varijacije formi svih varijabli i njihovih kanonskih impulsa u teoriji, dok je Kastelanijeva procedura kojom je dobijen ovaj generator predstavljena u Dodatku D.2.2.

Dobijene varijacije formi varijabli koristimo u pododeljku 5.1.2 kako bismo dobili oblik konačnih transformacija svih gejdž simetrija $2BF$ teorije. Poglavlje 5.1.2 je podeljeno na četiri dela. Najpre, diskutujemo gejdž grupu G i odgovarajuće G-gejdž transformacije. U drugom delu, predstavljena je grupa $\tilde{M}$, tj. M-gejdž transformacije, treći deo sadrži analizu grupe $\tilde{H}$ koja se sastoji od H-gejdž transformacija koje su već poznate iz prethodne literature, a četvrti deo sadrži analizu grupe $\tilde{N}$ i N-gejdž transformacija koje takođe nastaju u teoriji. U ovom poglavlju dati su i komutatori generatora ovih transformacija, dok su računski detalji dati u Dodatku D.2.3. Sumiranjem ovih rezultata predstavljena je kompletna struktura gejdž grupe simetrije $2BF$ dejstva, uključujući njenu Lijevu algebru, kao i konkretan izbor parametara kojim se dobijaju difeomorfizam transformacije u $2BF$ teoriji.

Konačno, modifikacijom $2BF$ topološkog dejstva dodavanjem odgovarajućih veza u odeljcima 5.2 i 5.3 formirana su $2BF$ dejstva sa vezama koja opisuju teorije sa netrivijalnom dinamikom – *Opštu relativnost* i *Ajnštajn-Jang-Milsovu teoriju*. Pokazano je kako se gravitaciono i Jang-Milsovo polje u zakrivljenom prostoru mogu zapisati u formi $2BF$ dejstva sa vezama. Ovo nas dovodi jedan korak bliže zapisivanju ukupnog dejstva koje opisuje svu materiju prisutnu u Standardnom Modelu i gravitacije u obliku prilagođenom za kovarijantnu kvantizacionu proceduru spinske pene.

5.1 Topološka $2BF$ teorija

Koristeći definicije 2-grupe, odnosno ukrštenog modula, 2-koneksije i 2-krivine, definiše se generalizacija BF dejstva – tzv. $2BF$ dejstvo [13], [17]:

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} \,. \tag{5.1}$$

Ovde su 2-forma $\mathcal{F} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$ i 3-forma $\mathcal{G} \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$ komponente 2-krivine definisane jednačinom (2.36), 2-forma $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{g})$ i 1-forma $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$ Lagranževi množitelji, dok $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ označavaju G-invarijantne bilinarne simetrične nedegenerisane forme algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Kao posledica strukture ukrštenog modula (videti [16]), bilinearna forma $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ je takođe H-invarijantna. Videti [13], [17] za detaljni pregled teorije i relevantne reference.

Slično kao BF dejstvo, $2BF$ dejstvo je takođe topološko, kao što se može videti iz jednačina kretanja. Variranjem dejstva (5.1) po varijablama B^α i C^a dobijamo jednačine kretanja

$$\mathcal{F}^\alpha = 0\,, \qquad \mathcal{G}^a = 0\,, \tag{5.2}$$

gde indeks α prebrojava generatore grupe G, a a prebrojava generatore grupe H. Variranjem po 2-koneksiji, varijablama α^α i β^a, dobijamo jednačine kretanja za Lagranževe množitelje:

$$\mathrm{d}B_\alpha - f_{\alpha\beta}{}^\gamma B_\gamma \wedge \alpha^\beta - \triangleright_{\alpha a}{}^b C_b \wedge \beta^a = 0\,, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{d}C_a - \partial_a{}^\alpha B_\alpha + \triangleright_{\alpha a}{}^b C_b \wedge \alpha^\alpha = 0\,. \tag{5.4}$$

Primetimo da su jednačine kretanja diferencijalne jednačine prvog reda i da opisuju teoriju bez propagirajućih stepeni slobode. Da je zaista u pitanju teorija sa propagirajućim stepenima slobode rigorozno se pokazuje primenom Hamiltonove analize, kao što je to urađeno u radovima [22], [23]. Na osnovu rezultata Hamiltonove analize sledi da je $2BF$ teorija *topološka teorija.*

5.1.1 Hamiltonova analiza topološke $2BF$ teorije

Topološko $2BF$ dejstvo (5.1) daje Lagranžijan:

$$L_{2BF} = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \big(\frac{1}{4}\, B^\alpha{}_{\mu\nu}\, \mathcal{F}^\beta{}_{\rho\sigma}\, g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3!}\, C^a{}_\mu\, \mathcal{G}^b{}_{\nu\rho\sigma}\, g_{ab} \big)\,. \tag{5.5}$$

Kanonski impulsi za varijable $B^\alpha{}_{\mu\nu}$, $\alpha^\alpha{}_\mu$, $C^a{}_\mu$ i $\beta^a{}_{\mu\nu}$ nalaze se variranjem dejstva po vremenskim izvodima varijabli:

$$\begin{aligned}
\pi(B)_\alpha{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta L}{\delta \partial_0 B^a{}_{\mu\nu}} = 0\,, \\
\pi(\alpha)_\alpha{}^\mu &= \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \alpha^\alpha{}_\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\alpha\nu\rho}\,, \\
\pi(C)_a{}^\mu &= \frac{\delta L}{\delta \partial_0 C^a{}_\mu} = 0\,, \\
\pi(\beta)_a{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \beta^a{}_{\mu\nu}} = -\epsilon^{0\mu\nu\rho} C_{a\rho}\,.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dakle, *primarne veze* u teoriji su izračunavaju se primenom jednačine (3.19):

$$
\begin{aligned}
P(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} &\equiv \pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} \approx 0\,, \\
P(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} &\equiv \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\alpha\nu\rho} \approx 0\,, \\
P(C)_{a}{}^{\mu} &\equiv \pi(C)_{a}{}^{\mu} \approx 0\,, \\
P(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} &\equiv \pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} + \epsilon^{0\mu\nu\rho} C_{a\rho} \approx 0\,.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Fundamentalna Poasonova zagrada varijabli i njihovih kanonskih impulsa definiše se na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\{\, B^{\alpha}{}_{\mu\nu}(\vec{x})\,,\, \pi(B)_{\beta}{}^{\rho\sigma}(\vec{y})\,\} &= 2\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\, \alpha^{\alpha}{}_{\mu}(\vec{x})\,,\, \pi(\alpha)_{\beta}{}^{\nu}(\vec{y})\,\} &= \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\nu}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\, C^{a}{}_{\mu}(\vec{x})\,,\, \pi(C)_{b}{}^{\nu}(\vec{y})\,\} &= \delta^{a}_{b}\delta^{\nu}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\, \beta^{a}{}_{\mu\nu}(\vec{x})\,,\, \pi(\beta)_{b}{}^{\rho\sigma}(\vec{y})\,\} &= 2\delta^{a}_{b}\,\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Na osnovu ove definicije, izračunavamo algebru primarnih veza

$$
\begin{aligned}
\{\, P(B)_{\alpha}{}^{jk}(\vec{x})\,,\, P(\alpha)_{\beta}{}^{i}(\vec{y})\,\} &= \epsilon^{0ijk}\, g_{\alpha\beta}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\, P(C)_{a}{}^{k}(\vec{x})\,,\, P(\beta)_{b}{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= -\epsilon^{0ijk}\, g_{ab}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

dok su ostale Poasonove zagrade jednake nuli. Kanonski *on-shell* Hamiltonijan je definisan jednačinom (3.20)

$$
H_c = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\left[\frac{1}{2}\pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu}\,\partial_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu}\,\partial_0\alpha^{\alpha}{}_{\mu} + \pi(C)_{a}{}^{\mu}\,\partial_0 C^{a}{}_{\mu} + \frac{1}{2}\pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu}\,\partial_0\beta^{a}{}_{\mu\nu}\right] - L\,, \tag{5.10}
$$

odnosno:

$$
\begin{aligned}
H_c \approx -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\epsilon^{0ijk}\Bigg[&\frac{1}{2}B_{\alpha 0i}\,\mathcal{F}^{\alpha}{}_{jk} + \frac{1}{6}C_{a0}\,\mathcal{G}^{a}{}_{ijk} \\
&+ \beta^{a}{}_{0i}\Big(\nabla_j C_{ak} - \frac{1}{2}\partial_a{}^{\alpha} B_{\alpha\, jk}\Big) + \frac{1}{2}\alpha^{\alpha}{}_{0}\Big(\nabla_i B_{\alpha\, jk} - C_{ai} \rhd_{\alpha b}{}^{a}\, \beta^{b}{}_{jk}\Big)\Bigg]\,.
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

U prethodnom izrazu primenili smo da su primarne veze slabo jednake nuli. Dodavanjem proizvoda Lagranževih množitelja λ i primarnih veza, definišemo *totalni off-shell Hamiltonijan* definisan jednačinom (3.21):

$$
H_T = H_c + \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\left[\frac{1}{2}\lambda(B)^{\alpha}{}_{\mu\nu}P(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} + \lambda(\alpha)^{\alpha}{}_{\mu}P(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} + \lambda(C)^{a}{}_{\mu}P(C)_{a}{}^{\mu} + \frac{1}{2}\lambda(\beta)^{a}{}_{\mu\nu}P(\beta)_{a}{}^{\mu\nu}\right]. \tag{5.12}
$$

Uslovi konzistentnosti (3.26) za primarne veze moraju biti zadovoljeni, pa za primarne veze $P(B)_{\alpha}{}^{0i}$, $P(\alpha)_{\alpha}{}^{0}$, $P(C)_{a}{}^{0}$ i $P(\beta)_{a}{}^{0i}$ ovaj uslov dovodi do pojave *sekundarnih veza* $\mathcal{S}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathcal{F})_{\alpha}{}^{i} &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\mathcal{F}_{\alpha jk} &&\approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\nabla B)_{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\big(\nabla_{[i}B_{\alpha\, j]k} - C_{a[i} \rhd_{\alpha b}{}^{a}\, \beta^{b}{}_{j]k}\big) &&\approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\mathcal{G})_{a} &\equiv \frac{1}{6}\epsilon^{0ijk}\mathcal{G}_{aijk} &&\approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\nabla C)_{a}{}^{i} &\equiv \epsilon^{0ijk}\big(\nabla_{[j}C_{ak]} - \frac{1}{2}\partial_a{}^{\alpha}B_{\alpha\, jk}\big) &&\approx 0\,,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

dok u slučaju primarnih veza $P(\alpha)_\alpha{}^k$, $P(B)_\alpha{}^{jk}$, $P(\beta)_a{}^{jk}$ i $P(C)_a{}^k$ uslovi konzistentnosti određuju Lagranževe množitelje:

$$
\begin{aligned}
\lambda(B)_{\alpha ij} &\approx \nabla_i B_{\alpha 0j} - \nabla_j B_{\alpha 0i} + C_{a0}\beta^b{}_{ij} \rhd_{\alpha b}{}^a + C_{bi} \rhd_\alpha{}^b{}_a \beta^a{}_{0j} \\
&\quad - C_{bj} \rhd_\alpha{}^b{}_a \beta^a{}_{0i} + g_{\beta\gamma}{}^\alpha \alpha^\beta{}_0 B^\gamma{}_{ij}, \\
\lambda(\alpha)^\alpha{}_i &\approx \nabla_i \alpha^\alpha{}_0 + \partial_a{}^\alpha \beta^a{}_{0i}, \\
\lambda(C)^a{}_i &\approx \nabla_i C^a{}_0 + C^b{}_i \rhd_\alpha{}^a{}_b \alpha^\alpha{}_0 + B_{\alpha 0i}\partial^{a\alpha}, \\
\lambda(\beta)^a{}_{ij} &\approx \nabla_i \beta^a{}_{0j} - \nabla_j \beta^a{}_{0i} - \beta^b{}_{ij} \rhd_{\alpha b}{}^a \alpha^\alpha{}_0.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Preostali Lagranževi množitelji

$$
\lambda(B)^\alpha{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\alpha)^\alpha{}_0\,, \qquad \lambda(C)^a{}_0\,, \qquad \lambda(\beta)^a{}_{0i}\,, \tag{5.15}
$$

ostaju neodređeni. Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza ne dovode do pojave tercijarnih veza, odnosno dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i}\,,\, H_T\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\beta i}\alpha^\gamma{}_0\,, \\
\{\mathcal{S}(\nabla B)_\alpha\,,\, H_T\} &= f_{\beta\gamma\alpha} B^\gamma{}_{0k}\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\beta k} + f_{\beta\alpha}{}^\gamma \alpha^\beta{}_0 \mathcal{S}(\nabla B)_\gamma + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \mathcal{S}(\mathcal{G})^b \\
&\quad - \rhd_{\alpha a}{}^b \beta^a{}_{0k}\mathcal{S}(\nabla C)_b{}^k\,, \\
\{\mathcal{S}(\mathcal{G})^a\,,\, H_T\} &= \rhd_{\alpha b}{}^a \beta^b{}_{0k}\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha k} - \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha b}{}^a \mathcal{S}(\mathcal{G})^b\,, \\
\{\mathcal{S}(\nabla C)_a{}^i\,,\, H_T\} &= C_{b0} \rhd_\alpha{}^b{}_a \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i} + \rhd_{\alpha a}{}^b \alpha^\alpha{}_0 \mathcal{S}(\nabla C)_b{}^i\,,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Totalni Hamiltonijan možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
H_T = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\bigg[&\lambda(B)^\alpha{}_{0i}\,\Phi(B)_\alpha{}^i + \lambda(\alpha)^\alpha\,\Phi(\alpha)_\alpha + \lambda(C)^a{}_0\,\Phi(C)_a + \lambda(\beta)^a{}_{0i}\,\Phi(\beta)_a{}^i \\
&- B_{\alpha 0i}\,\Phi(\mathcal{F})^{ai} - \alpha_{\alpha 0}\,\Phi(\nabla B)^\alpha - C_{a0}\,\Phi(\mathcal{G})^a - \beta_{a0i}\,\Phi(\nabla C)^{ai}\bigg]\,,
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

gde su

$$
\begin{aligned}
\Phi(B)_\alpha{}^i &= P(B)_\alpha{}^{0i}\,, \\
\Phi(\alpha)_\alpha &= P(\alpha)_\alpha{}^0\,, \\
\Phi(C)_a &= P(C)_a{}^0\,, \\
\Phi(\beta)_a{}^i &= P(\beta)_a{}^{0i}\,, \\
\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} &= \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i} - \nabla_j P(B)^{\alpha ij} - P(C)_a{}^i\partial^{a\alpha}\,, \\
\Phi(\mathcal{G})_a &= \mathcal{S}(\mathcal{G})_a + \nabla_i P(C)_a{}^i - \tfrac{1}{2}\beta_{bij} \rhd_\alpha{}^b{}_a P(B)^{\alpha ij}\,, \\
\Phi(\nabla C)_a{}^i &= \mathcal{S}(\nabla C)_a{}^i - \nabla_j P(\beta)_a{}^{ij} + C_{bj} \rhd{}_\alpha{}^b{}_a P(B)^{\alpha ij} - \partial_a{}^\alpha P(\alpha)_\alpha{}^i\,, \\
\Phi(\nabla B)_\alpha &= \mathcal{S}(\nabla B)_\alpha + \nabla_i P(\alpha)_\alpha{}^i - \tfrac{1}{2}B_{\beta ij} f_{\alpha\gamma}{}^\beta P(B)^{\gamma ij} \\
&\quad - C_{bi} \rhd_{\alpha a}{}^b P(C)^{ai} - \tfrac{1}{2}\beta_{bij} \rhd_{\alpha a}{}^b P(\beta)^{aij}\,,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

veze prve klase, dok su veze druge klase u teoriji:

$$\chi(B)_\alpha{}^{jk} = P(B)_\alpha{}^{jk}\,, \quad \chi(C)_a{}^i = P(C)_a{}^i\,, \quad \chi(\alpha)_\alpha{}^i = P(\alpha)_\alpha{}^i\,, \quad \chi(\beta)_a{}^{ij} = P(\beta)_a{}^{ij}\,. \tag{5.19}$$

Možemo da izračunamo Poasonovu algebru veza prve klase:

$$\begin{aligned}
\{\, \Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla C)_b{}^i(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha b}{}^a\, \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha b}{}^a\, \Phi(\mathcal{G})^b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla C)_a{}^i(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\, \Phi(\nabla C)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\mathcal{F})^\alpha{}_i(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \Phi(\mathcal{F})^\gamma{}_i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{x})\,,\, \Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \Phi(\nabla B)_\gamma(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

kao i Poasonovu algebru veza prve klase i veza druge klase:

$$\begin{aligned}
\{\, \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\beta{}^j(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\alpha{}^i(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha b}{}^a\, \chi(C)^{bi}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\, \chi(\beta)_b{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha b}{}^a\, \chi(B)^{\alpha ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla C)^{ai}(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\alpha{}^j(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha b}{}^a\, \chi(\beta)^{bij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla C)^{ai}(\vec{x})\,,\, \chi(C)_b{}^j(\vec{y})\,\} &= \rhd^a{}_{\alpha b}\, \chi(B)^{\alpha ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(\alpha)_\beta{}^i(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(\alpha)^{\gamma i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(\beta)_a{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\, \chi(\beta)_b{}^{ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(B)_\beta{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.\\
\{\, \Phi(\nabla B)^\alpha(\vec{x})\,,\, \chi(C)_a{}^i(\vec{y})\,\} &= -\rhd^{\alpha b}{}_a\, \chi(C)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Možemo da izračunamo i komutator veza prve klase sa Hamiltonijanom:

$$\begin{aligned}
\{\Phi(B)_\alpha{}^i\,, H_T\} &= \Phi(F)_\alpha{}^i\,,\\
\{\Phi(\alpha)_\alpha\,, H_T\} &= \Phi(\nabla B)_\alpha\,,\\
\{\Phi(F)^\alpha{}_i\,, H_T\} &= -\alpha^\beta{}_0\, f_{\beta\gamma}{}^\alpha\, \Phi(F)^\gamma{}_i\,,\\
\{\Phi(\nabla B)_\alpha\,, H_T\} &= -B_{\beta 0i}\, f_{\alpha\gamma}{}^\beta\, \Phi(F)^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0\, f_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \Phi(\nabla B)_\gamma\,,\\
\{\Phi(C)_a,\, H_T\} &= \Phi(\mathcal{G})_a\,,\\
\{\Phi(\beta)_a{}^i,\, H_T\} &= \Phi(\nabla C)_a{}^i\,,\\
\{\Phi(\mathcal{G})_a,\, H_T\} &= \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{G})_b - \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(F)^{\alpha i}\,,\\
\{\Phi(\nabla C)_a{}^i,\, H_T\} &= \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\nabla C)_b{}^i - C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(F)^{\alpha i}\,.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Broj stepeni slobode topološke $2BF$ teorije

Za određivanje broja stepeni slobode topološke $2BF$ teorije koristićemo sledeće Bjankijeve identitete (BI).

Lema 9 (BI za 1-forme $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{C}$.) *Odgovarajuće 2-forme krivina ovih polja*

$$F^{\alpha} = \mathrm{d}\alpha^{\alpha} + f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,\alpha^{\beta}\wedge\alpha^{\gamma}\,, \qquad T^{a} = \mathrm{d}C^{a} + \rhd_{\alpha b}{}^{a}\,\alpha^{\alpha}\wedge C^{b}\,, \tag{5.23}$$

zadovoljavaju Bjankijeve identitete:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\nabla_{\mu}F^{\alpha}{}_{\nu\rho} = 0\,, \tag{5.24}$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\nabla_{\mu}T^{a}{}_{\nu\rho} - \rhd_{\alpha b}{}^{a}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}C^{b}{}_{\rho}\right) = 0\,. \tag{5.25}$$

Lema 10 (BI za 2-forme $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{\beta}$.) *Odgovarajuće 3-krivine su date izrazima*

$$S^{\alpha} = \mathrm{d}B^{\alpha} + f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,\alpha^{\beta}\wedge B^{\gamma}\,, \qquad G^{a} = \mathrm{d}\beta^{a} + \rhd_{\alpha b}{}^{a}\,\alpha^{\alpha}\wedge\beta^{\beta}\,, \tag{5.26}$$

i zadovoljavaju Bjankijeve identitete:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\frac{2}{3}\nabla_{\lambda}\,S^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho} - f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}F^{\beta}{}_{\lambda\mu}\,B^{\gamma}{}_{\nu\rho}\right) = 0\,, \tag{5.27}$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\frac{2}{3}\nabla_{\lambda}\,G^{a}{}_{\mu\nu\rho} - \rhd_{\alpha b}{}^{a}\,F^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\,\beta^{b}{}_{\nu\rho}\right) = 0\,. \tag{5.28}$$

U slučaju $2BF$ teorije, inicijalan broj polja u teoriji N može se odrediti iz tabele (5.1). Ovde je p dimenzionalnost Lijeve grupe G i q je dimenzionalnost Lijeve grupe H.

$\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$	$\beta^{a}{}_{\mu\nu}$	$B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$	$C^{a}{}_{\mu}$
$4p$	$6q$	$6p$	$4q$

Tabela 5.1: Broj inicijalnih polja u $2BF$ teoriji.

Prebrojavanjem polja u tabeli (5.1) nalazimo da je $N = 10(p+q)$. Broj nezavisnih komponenata veza druge klase određen je prebrojavanjem veza prikazanih u tabeli (5.2). Dobija se da je $S = 6(p+q)$.

$\chi(B)_{\alpha}{}^{jk}$	$\chi(C)_{a}{}^{i}$	$\chi(\alpha)_{\alpha}{}^{i}$	$\chi(\beta)_{a}{}^{ij}$
$3p$	$3q$	$3p$	$3q$

Tabela 5.2: Veze druge klase u $2BF$ teoriji.

Veze prve klase nisu sve međusobno nezavisne i zadovoljavaju relacije

$$\nabla_{i}\Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^{i} + \frac{1}{2}\partial_{a\alpha}\Phi(\mathcal{G})^{a} - \frac{1}{2}\partial^{a}{}_{\alpha}\nabla_{i}\chi(C)_{a}{}^{i} - \frac{1}{2}f_{\beta\gamma\alpha}\partial_{a}{}^{\beta}\beta^{a}{}_{ij}\chi(B)^{\gamma ij} = \epsilon^{ijk}\nabla_{i}F_{\alpha jk}\,, \tag{5.29}$$

odnosno kada iskoristimo da je $\epsilon^{ijk}\,\nabla_{i}F^{a}_{jk} = 0$ kao $\lambda = 0$ komponentu BI (5.24) ovaj izraz se svodi na:

$$\nabla_{i}\Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^{i} + \frac{1}{2}\partial_{a\alpha}\Phi(\mathcal{G})^{a} - \frac{1}{2}\partial^{a}{}_{\alpha}\nabla_{i}\chi(C)_{a}{}^{i} - \frac{1}{2}f_{\beta\gamma\alpha}\partial_{a}{}^{\beta}\beta^{a}{}_{ij}\chi(B)^{\gamma ij} = 0\,. \tag{5.30}$$

Slično, veze prve klase zadovoljavaju relacije

$$\begin{aligned} & \nabla_i \Phi(\nabla C)_a{}^i - \frac{1}{2} C_{bi} \rhd{}_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} + \partial_{a\alpha} S(\nabla B)^\alpha + \\ & + \frac{1}{2} F^\beta{}_{ij} \rhd_{\beta c}{}^b \chi(\beta)^{cij} + T^b{}_{jk} \rhd_{\alpha a}{}^b \chi(B)^{\alpha jk} - \partial_{a\alpha} \nabla_i \chi(\alpha)^{\alpha i} \\ = \; & \epsilon^{ijk} \left(\nabla_i T_{ajk} - \rhd_{\alpha b}{}^a F^\alpha_{jk} C^b_i \right) , \end{aligned} \tag{5.31}$$

odnosno, kako je desna strana jednačine $\lambda = 0$ komponenta (5.25), dobijamo da (5.31) daje vezu:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \Phi(\nabla C)_a{}^i - \frac{1}{2} C_{bi} \rhd{}_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} + \partial_{a\alpha} S(\nabla B)^\alpha + \\ & + \frac{1}{2} F^\beta{}_{ij} \rhd_{\beta c}{}^b \chi(\beta)^{cij} + T^b{}_{jk} \rhd_{\alpha a}{}^b \chi(B)^{\alpha jk} - \partial_{a\alpha} \nabla_i \chi(\alpha)^{\alpha i} = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Broj veza prve klase može biti određen prebrojavanjem veza u tabeli (5.3). Dobija se da je broj veza prve klase dat izrazom

$$F = 8(p+q) - (p+q) = 7(p+q) \,,$$

gde smo oduzeli p relacija (5.30) i q relacija (5.32). Dakle, na osnovu definicije broja stepeni slobode (3.41), sledi:

$$n = 10(p+q) - 7(p+q) - \frac{6(p+q)}{2} = 0 \,. \tag{5.33}$$

Zaključujemo da $2BF$ teorija nema lokalne propagrajuće stepene slobode, odnosno da je *topološka teorija*.

$\Phi(B)_\alpha{}^i$	$\Phi(C)_a$	$\Phi(\alpha)_\alpha$	$\Phi(\beta)_a{}^i$	$\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}$	$\Phi(\mathcal{G})^a$	$\Phi(\nabla C)^{ai}$	$\Phi(\nabla B)^\alpha$
$3p$	q	p	$3q$	$3p-p$	q	$3q-q$	p

Tabela 5.3: Veze prve klase u $2BF$ teoriji.

Generator gejdž transformacija za $2BF$ teoriju

Generator gejdž transformacija u $2BF$ teoriji dat je izrazom:

$$\begin{aligned} G = & \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \Big((\nabla_0 \epsilon^\alpha{}_i) \Phi(B)_\alpha{}^i - \epsilon^\alpha{}_i \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i + (\nabla_0 \epsilon^\alpha) \Phi(\alpha)_\alpha \\ & + \epsilon^\alpha \big(f_{\alpha\gamma}{}^\beta B_{\beta 0i} \Phi(B)^{\gamma i} + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)^{b0i} - \Phi(\nabla B)_\alpha \big) \\ & + (\nabla_0 \epsilon^a) \Phi(C)_a - \epsilon^a \left(\beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a \right) \\ & + (\nabla_0 \epsilon^a{}_i) \Phi(\beta)_a{}^i - \epsilon^a{}_i \left(C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\nabla C)_a{}^i \right) \Big) \,. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Ovde su $\epsilon^{ab}{}_i$, ϵ^{ab}, ϵ_i, ϵ^a i $\epsilon^a{}_i$ nezavisni parametri gejdž transformacija. Postupak izvođenja generatora (5.34) prikazan je u Dodatku D.2.

Varijaciju forme varijabla i njihovih konjugovanih impulsa računamo primenom (3.56):

$$
\begin{array}{rclrcl}
\delta_0 B^\alpha{}_{0i} & = & \nabla_0\epsilon^\alpha{}_i - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon^\beta B^\gamma{}_{0i} & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{0i} & = & f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(B)_\gamma{}^{0i}\,, \\
 & & -\epsilon^a \rhd_{\alpha a}{}^b\beta_{b0i} - \epsilon^a{}_i \rhd_{\alpha a}{}^b C_{b\,0}\,, & & & \\
\delta_0 B^\alpha{}_{ij} & = & 2\nabla_{[i}\epsilon^\alpha{}_{j]} - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon^\beta B^\gamma{}_{ij} & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{ij} & = & f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(B)_\gamma{}^{ij} - \epsilon^a{}_k\epsilon^{0ijk}\partial_{a\alpha}\,, \\
 & & -\epsilon^a \rhd_{\alpha a}{}^b\beta_{bij} - 2\epsilon^a{}_{[j|} \rhd_{\alpha a}{}^b C_{b\,|i]}\,, & & & \\
\delta_0\alpha^\alpha{}_0 & = & \nabla_0\epsilon^\alpha\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^0 & = & -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_i\pi(B)_\gamma{}^{0i} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\gamma\pi(\alpha)_\gamma{}^0 \\
 & & & & & -\epsilon^b \rhd_{\alpha b}{}^a\pi(C)_a - \epsilon^b{}_i \rhd_{\alpha b}{}^a\pi(\beta)_a{}^i\,, \\
\delta_0\alpha^\alpha{}_i & = & \nabla_i\epsilon^\alpha + \partial_a{}^\alpha\epsilon^a{}_i\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^i & = & -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_j\pi(B)_\gamma{}^{ij} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(\alpha)_\gamma{}^i\,, \\
 & & & & & \\
\delta_0 C^a{}_0 & = & \nabla_0\epsilon^a - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a C^b{}_0\,, & \delta_0\pi(C)_a{}^0 & = & \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(C)_b{}^0 + \epsilon_{bi} \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha 0i}\,, \\
\delta_0 C^a{}_i & = & \nabla_i\epsilon^a - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a C^b{}_i\,, & \delta_0\pi(C)_a{}^i & = & \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(C)_b{}^i + \epsilon_{bj} \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha ij}\,, \\
\delta_0\beta^a{}_{0i} & = & \nabla_0\epsilon^a{}_i - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a\beta^b{}_{0i}\,, & \delta_0\pi(\beta)_a{}^{0i} & = & \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(\beta)_b{}^{0i} + \epsilon_b \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha 0i}\,, \\
\delta_0\beta^a{}_{ij} & = & 2\nabla_{[i}\epsilon^a{}_{j]} - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a\beta^b{}_{ij}\,, & \delta_0\pi(\beta)_a{}^{ij} & = & \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(\beta)_b{}^{ij} + \epsilon_b \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha ij} \\
 & & & & & -\epsilon^\alpha{}_k\epsilon^{0ijk}\partial_{a\alpha}\,.
\end{array}
\tag{5.35}
$$

5.1.2 Simetrije $2BF$ dejstva

Grupa simetrija G

Dejstvo (5.1) poseduje dodatne simetrije u odnosu na transformacije simetrija definisane za BF dejstvo u Teoremama 8 i 9.

Transformacije generisane gejdž parametrom $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$, na osnovu varijacija formi varijabli (5.35), date su izrazima

$$
\begin{array}{rclrcl}
\delta_0\alpha^\alpha{}_\mu & = & -\,\partial_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\alpha^\beta{}_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\gamma\,, & \delta_0 B^\alpha{}_{\mu\nu} & = & f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\beta B^\gamma{}_{\mu\nu}\,, \\
\delta_0\beta^a{}_{\mu\nu} & = & \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\beta^b{}_{\mu\nu}\,, & \delta_0 C^a{}_\mu & = & \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha C^b{}_\mu\,,
\end{array}
\tag{5.36}
$$

što analogno možemo zapisati

$$
\begin{array}{rclrcl}
\alpha \;\to\; \alpha' & = & \alpha - \nabla\epsilon_{\mathfrak{g}}\,, & B \;\to\; B' & = & B - [B,\epsilon_{\mathfrak{g}}]\,, \\
\beta \;\to\; \beta' & = & \beta + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \beta\,, & C \;\to\; C' & = & C + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd C\,,
\end{array}
\tag{5.37}
$$

Na osnovu ovih infinitezimalnih transformacija, možemo ekstrapolirati konačne transformacije, definisane Teoremom 10.

Teorema 10 (G-gejdž transformacije) *U $2BF$ teoriji konstruisanoj za proizvoljni ukršteni modul $(H \xrightarrow{\partial} G, \rhd)$, sledeća transformacija je transformacija simetrije*

$$
\begin{array}{rclrcl}
\alpha \;\to\; \alpha' & = & \mathrm{Ad}_g\alpha + g\mathrm{d}g^{-1}\,, & B \;\to\; B' & = & gBg^{-1}\,, \\
\beta \;\to\; \beta' & = & g \rhd \beta\,, & C \;\to\; C' & = & g \rhd C\,,
\end{array}
\tag{5.38}
$$

gde je $g = \exp(\epsilon_{\mathfrak{g}}\cdot\hat{G}) = \exp(\epsilon_{\mathfrak{g}\alpha}\hat{G}^\alpha) \in G$, a $\epsilon_{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}_4 \to \mathfrak{g}$ parametar transformacija.

Dokaz. Pri ovim transformacijama, 2-krivina se transformiše na sledeći način:

$$\mathcal{F} \;\to\; \mathcal{F}' = g\mathcal{F}g^{-1}\,, \qquad \mathcal{G} \;\to\; \mathcal{G}' = g \rhd \mathcal{G}\,. \tag{5.39}$$

Invarijantnost $2BF$ dejstva pri ovoj transformaciji sledi na osnovu G-invarijantnosti bilinearnih formi $\langle \_\,, \_\rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle \_\,, \_\rangle_{\mathfrak{h}}$:

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle B, \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C, G\rangle_{\mathfrak{h}}\Big) \to S'_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle g^{-1}Bg, g^{-1}\mathcal{F}g\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle g^{-1} \rhd C, g^{-1} \rhd G\rangle_{\mathfrak{h}}\Big)\,, \tag{5.40}$$

odakle dobijamo da je $2BF$ dejstvo invarijantno. Invarijantnost se može takođe pokazati na sličan način kao u Teoremi 8. ■

Prethodna teorema je generalizacija Teoreme 8 za slučaj $2BF$ teorije.

Grupa simetrija $\tilde{M}$

Zatim, posmatrajući transformacije varijabli uočavamo da članovi oblika $\delta_0 B^{\alpha}{}_{0i} = \nabla_0 \epsilon_i$ i $\delta_0 B^{\alpha}{}_{ij} = 2\nabla_{[i}\epsilon_{j]}$ odgovaraju transformaciji definisanoj u Teoremi 11, kao u slučaju BF teorije.

Teorema 11 (M-gejdž transformacije) *U $2BF$ teoriji nad proizvoljnim ukrštenim modulom $(H \overset{\partial}{\to} G, \rhd)$, sledeća transformacija je simetrija:*

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha & \to & \alpha' & = & \alpha\,, & B & \to & B' & = & B - \nabla\epsilon_{\mathfrak{m}}\,, \\ \beta & \to & \beta' & = & \beta\,, & C^a & \to & C'^a & = & C^a - \partial^a{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}\,, \end{array} \tag{5.41}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{m}}$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{g}$, a ∇ kovarijantan spoljasnji izvod definisan na standardni način, tj.

$$\nabla\epsilon_{\mathfrak{m}} = \mathrm{d}\epsilon_{\mathfrak{m}} + [\alpha \wedge \epsilon_{\mathfrak{m}}]\,. \tag{5.42}$$

Dokaz. Varijacija $2BF$ dejstva pri M-gejdž transformacijama je

$$S'_{2BF} = S_{2BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{2}(\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\nu})\mathcal{F}_{\alpha\rho\sigma} - \frac{1}{3!}\partial^a{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu} G_{a\nu\rho\sigma}\right)\,. \tag{5.43}$$

Primenom definicije 2-krivine (2.37), dobijamo:

$$S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(- \frac{1}{2}(\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\nu})\,(F_{\alpha\rho\sigma} - \partial^a{}_{\alpha}\beta_{a\rho\sigma}) - \frac{1}{3!}\partial^a{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu}\, 3\nabla_\nu \beta_{a\rho\sigma}\Big)\,. \tag{5.44}$$

Drugi član u zagradi i treći član se krate, pa se izraz svodi na:

$$S'{}_{3BF} = S_{3BF} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu} \nabla_\nu F_{\alpha\rho\sigma}\,. \tag{5.45}$$

Član $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu F_{\alpha\rho\sigma} = 0$ je BI (5.24). Zaključujemo da je $2BF$ dejstvo S_{2BF} invarijantno na M-gejdž transformacije definisane Teoremom 11. ■

Ova teorema je generalizacija Teoreme 9 u slučaju $2BF$ teorije. Komutatori između generatora G-gejdž transformacija, između generatora M-gejdž transformacija, kao i komutatori između generatora G- i M-gejdž transformacija izračunati su istim postupkom kao i u slučaju BF-teorije i dobijeni su isti rezultati, odnosno jednačine (4.40), (4.46) i (4.49). Slično kao u slučaju simetrija BF dejstva, postoji izomorfizam između generatora $\hat{G}_\alpha \cong \tau_\alpha$, tj. možemo zaključiti da je grupa G-gejdž transformacija iz Teoreme 10 upravo grupa G iz ukrštenog modula $(H \overset{\partial}{\to} G, \rhd)$. Ovo je važan rezultat, koji neće važiti za preostale transformacije simetrije $2BF$ dejstva, kao što ćemo videti u nastavku.

Grupa simetrija $\tilde{H}$

Uočimo u jednačinama varijacija formi (5.35) varijacije varijabli na prostornoj hiperpovrši Σ_3 koje odgovaraju parametru $\epsilon^a{}_i$. Na osnovu njih možemo da ekstrapoliramo varijacije formi varijabli koje odgovaraju parametru $\epsilon^a{}_\mu$ i definišemo H-gejdž transformacije Teoremom 12,

$$\begin{array}{rclrcl} \delta_0 \alpha^\alpha{}_\mu & = & \partial_a{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu \,, & \delta_0 B^\alpha{}_{\mu\nu} & = & -2C_{a[\mu|} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b{}_{|\nu]} \rhd_{\beta b}{}^a g^{\alpha\beta} \,, \\ \delta_0 \beta^a{}_{\mu\nu} & = & 2\nabla_{[\mu|} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_{|\nu]} \,, & \delta_0 C^a{}_\mu & = & 0 \,, \end{array} \tag{5.46}$$

pri čemu identifikujemo $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i = \epsilon^a{}_i$ i $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_0 = 0$.

Teorema 12 (H-gejdž transformacije) *U $2BF$ teoriji nad proizvoljnim ukrštenim modulom $(H \xrightarrow{\partial} G, \rhd)$, sledeća transformacija je simetrija*

$$\begin{array}{rclcl} \alpha & \to & \alpha' & = & \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}} \,, \\ \beta & \to & \beta' & = & \beta - \nabla'\epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}} \,, \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} B & \to & B' & = & B - C' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \,, \\ C & \to & C' & = & C \,, \end{array} \tag{5.47}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{h}}$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{h}$, a oznaka ∇' je kovarijantni izvod sa koneksijom α'. Preslikavanje τ definisano je u Dodatku A jednačinom (A.13) i predstavlja rešenje jednačine:

$$\langle C \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C, \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \epsilon_{\mathfrak{h}} \rangle_{\mathfrak{h}} = 0 \,.$$

Dokaz. Invarijantnost se može pokazati direktnom proverom. Transformacija 3-krivine je

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' & = & \mathcal{F} \,, \\ \mathcal{G} & \to & \mathcal{G}' & = & \mathcal{G} - \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \epsilon_{\mathfrak{h}} \,. \end{array} \tag{5.48}$$

Pri transformacijama 3-krivine (5.48) i transformacijama Lagranževih množitelja, dejstvo S_{3BF} se transformiše

$$S'_{2BF} = S_{2BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \Big(- \langle C' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} - \langle C', \mathcal{F} \wedge^{\rhd} \epsilon_{\mathfrak{h}} \rangle_{\mathfrak{h}} \Big) \,. \tag{5.49}$$

Definicija preslikavanja $\mathcal{T}$ data jednačinom (A.13) osigurava da se članovi u zagradi poništavaju, odnosno da dejstvo ostaje invarijantno. ■

Označimo generatore H-gejdž transformacija datih Teoremom 12 sa $\hat{H}_a{}^\mu$. Istim postupkom kojim su izvedeni komutatori G- i M-gejdž transformacija sada nalazimo komutatore H-gejdž transformacija. Ako se izvedu dve uzastopne infinitezimalne H-gejdž transformacije, definisane parametrima $\epsilon_{\mathfrak{h}1}$ i $\epsilon_{\mathfrak{h}2}$, dobijamo

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}1} \cdot \hat{H}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}2} \cdot \hat{H}} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}2} \cdot \hat{H}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}1} \cdot \hat{H}} = 0 \,, \tag{5.50}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot \hat{H} = \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu \hat{H}_a{}^\mu$. Na osnovu prethodne jednačine komutator H-gejdž transformacija je

$$[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{H}_b{}^\nu] = 0 \,. \tag{5.51}$$

Ovaj komutator izračunat je u Dodatku D.2.3. Dakle, H-gejdž transformacije formiraju Abelovu grupu, koju ćemo u daljem tekstu označavati $\tilde{H}$. Prema indeksnoj strukturi njenih parametara i generatora, vidimo da je ova grupa izomorfna grupi $\mathbb{R}^{4q}$, gde je q dimenzija grupe H:

$$\tilde{H} \cong \mathbb{R}^{4q} \,. \tag{5.52}$$

Zatim, komutatori generatora grupa G i $\tilde{M}$ i generatora H-gejdž transformacija su

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{H}_a{}^\mu] = \rhd_{\alpha a}{}^b \, \hat{H}_b{}^\mu \,, \qquad [\hat{H}_a, \hat{M}_\alpha{}^\mu] = 0 \,. \tag{5.53}$$

Grupa simetrija $\tilde{N}$

Teorema 13 (N-gejdž transformacije) *U $2BF$ teoriji nad proizvoljnim ukrštenim modulom $(H \stackrel{\partial}{\to} G, \rhd)$, sledeća transformacija je simetrija:*

$$
\begin{array}{lllllllll}
\alpha & \to & \alpha' & = & \alpha\,, \qquad & B & \to & B' & = & B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\
\beta & \to & \beta' & = & \beta\,, \qquad & C & \to & C' & = & C - \nabla\epsilon_{\mathfrak{n}}\,,
\end{array}
\tag{5.54}
$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{n}}$ proizvoljna 0-forma element algebre $\mathfrak{h}$.

Dokaz. Dokaz je pravolinijski. Pri transformacijama definisanim u Teoremi 13 $2BF$ dejstvo se transformiše na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
S_{2BF} \to S'_{2BF} &= \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} \left(B_{\alpha\,\mu\nu} - \beta_{b\mu\nu} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \right) \mathcal{F}^{\alpha}{}_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!} \left(C^{a}{}_{\mu} + \nabla_{\mu}\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \right) G_{a\nu\rho\sigma} \right) \\
&= S_{2BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{4} \beta_{b\mu\nu} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \mathcal{F}^{\alpha}{}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \beta_{a\rho\sigma} \right) \\
&= S_{2BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{4} \beta_{b\mu\nu} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \mathcal{F}^{\alpha}{}_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \rhd_{\alpha b}{}^{a} F^{\alpha}{}_{\mu\nu} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{b} \beta_{a\rho\sigma} \right) .
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da je član

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \beta_{b\mu\nu} \partial_{c}{}^{\alpha} \beta^{c}{}_{\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{ca}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \beta_{b\mu\nu} \beta^{c}{}_{\rho\sigma} = 0\,,
$$

identički jednak nuli zbog Pajferovog identiteta (2.20) i antisimetričnosti strukturne konstante.
■

Grupu N-gejdž transformacija definisanih u Teoremi 13 obeležavamo sa $\tilde{N}$. Ove transformacije su linearne, a kompozicija dve N-gejdž transformacije daje jednu N-gejdž transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{n}1} + \epsilon_{\mathfrak{n}2}$. Obeležavajući generatore grupe $\tilde{N}$ sa $\hat{N}_a$, dobijamo

$$
\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}1}\cdot\hat{N}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}2}\cdot\hat{N}} = \mathrm{e}^{(\epsilon_{\mathfrak{n}1}+\epsilon_{\mathfrak{n}2})\cdot\hat{N}}\,,
\tag{5.56}
$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot \hat{N} = \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \hat{N}_a$, odnosno generatori gejdž tansformacija komutiraju:

$$
[\hat{N}_a, \hat{N}_b] = 0\,.
\tag{5.57}
$$

Odatle sledi, da je grupa $\tilde{N}$ Abelova, a indeksna struktura parametara i generatora pokazuje da je ona izomorfna grupi realnih brojeva $\mathbb{R}^q$, gde je q dimenzija grupe H. Dakle,

$$
\tilde{N} \cong \mathbb{R}^q\,.
\tag{5.58}
$$

Zatim se može ispitati komutator N-gejdž transformacija sa komutatorima G, H i M-gejdž transformacija. Razmatranjem G-gejdž transformacija, dobijamo[1]

$$
[\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot \hat{N}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{n}}) \cdot \hat{N}\,,
\tag{5.59}
$$

dakle komutator G- i N-gejdž transformacija je:

$$
[\hat{G}_\alpha, \hat{N}_a] \;=\; \rhd_{\alpha a}{}^{b}\, \hat{N}_b\,.
\tag{5.60}
$$

[1]Dejstvo paraetra $\epsilon_{\mathfrak{g}}$ na parametar $\epsilon_{\mathfrak{n}}$, $\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{n}}$, je definisano kao $\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{n}} \equiv \rhd_{\alpha a}{}^{b}\, \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$. Sledi da je

$$
(\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{n}}) \cdot \hat{N} = \rhd_{\alpha a}{}^{b}\, \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \tilde{N}_b\,.
$$

Ispitivanjem odnosa između N-gejdž transformacija i H-gejdž transformacija dobijamo relaciju,

$$e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}} - e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}} = -(\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \cdot \hat{M}\,, \tag{5.61}$$

gde je dokaz dat u Dodatku D.2.3. Dobija se da je komutator između generatora H-gejdž transformacija i N-gejdž transformacija linearna kombinacija generatora M-gejdž transformacije:

$$[\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{N}^b] = \rhd_{\alpha a}{}^b \hat{M}^{\alpha\mu}\,. \tag{5.62}$$

Analogno tome, može se proveriti da važi

$$e^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot\hat{M}}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}} = e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}}e^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot\hat{M}}\,, \tag{5.63}$$

što dovodi do zaključka da generatori M-gejdž transformacija i N-gejdž transformacija komutiraju, tj.

$$[\hat{M}_{\alpha}{}^{\mu}, \hat{N}_a] = 0\,. \tag{5.64}$$

Ovim smo završili izračunavanje algebre generatora gejdž transformacija u $2BF$ teoriji.

Ukupna gejdž grupa simetrije $2BF$ dejstva

Sumirajući rezultate prethodnih pododeljaka, može se zapisati algebra generatora ukupne grupe gejdž simetrije na sledeći način.

- Algebra $\mathfrak{g}$ grupe G 2-ukrštenog modula $(H \stackrel{\partial}{\to} G\,, \rhd\,,)$ zadovoljava komutacione relacije:

$$[\hat{G}_{\alpha}, \hat{G}_{\beta}] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{G}_{\gamma}\,. \tag{5.65}$$

- Algebra grupe $\tilde{H}$ koja se sastoji iz generatora H-gejdž transformacija,

$$[\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{H}_b{}^{\nu}] = 0\,, \tag{5.66}$$

- Algebra generatora M-gejdž transformacija:

$$[\hat{M}_{\alpha}{}^{\mu}, \hat{M}_{\beta}{}^{\nu}] = 0\,. \tag{5.67}$$

- Algebra generatora N-gejdž transformacija:

$$[\hat{N}_a, \hat{N}_b] = 0\,. \tag{5.68}$$

- Komutatori između generatora grupa $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$ glase:

$$[\hat{M}_{\alpha}{}^{\mu}, \hat{N}_a] = 0\,. \tag{5.69}$$

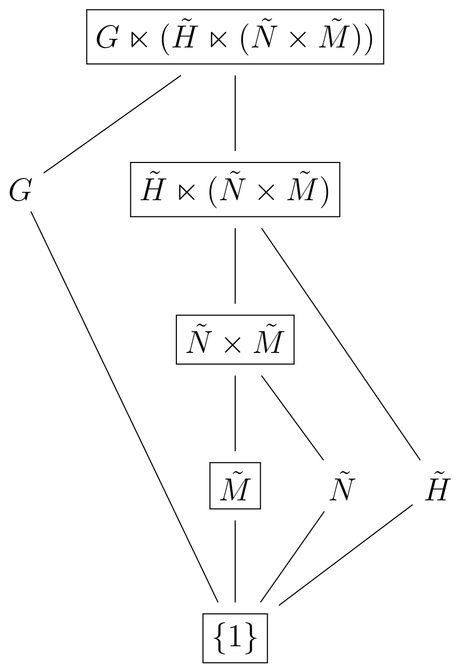
- Dejstvo generatora grupe $\tilde{H}$ na generatore M- i N-gejdž transformacija:

$$\begin{aligned} [\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{N}^b] &= \rhd_{\alpha a}{}^b \hat{M}^{\alpha\mu}\,, \\ [\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{M}_{\alpha}{}^{\nu}] &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.70}$$

- Dejstvo generatora grupe G na generatore transformacija H-, M- i N-gejdž transformacija:

$$
\begin{aligned}
[\hat{G}_\alpha, \hat{H}_a{}^\mu] &= \rhd_{\alpha a}{}^b \, \hat{H}_b{}^\mu \,, \\
[\hat{G}_\alpha \,, \hat{M}_\beta{}^\mu] &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu \,, \\
[\hat{G}_\alpha, \hat{N}_a] &= \rhd_{\alpha a}{}^b \, \hat{N}_b \,.
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

Na osnovu jednačina (5.65)-(5.71), može se analizirati struktura ukupne grupe simetrije. Na dijagramu Heseovog tipa prikazanom na slici 5.1, uključili smo samo relevantne podgrupe ukupne grupe simetrije $\mathcal{G}_{2BF}$, gde su *invarijantne podgrupe* uokvirene.



Slika 5.1: Relevantne podgrupe grupe simetrija $\mathcal{G}_{2BF}$. Invarijantne podgrupe su uokvirene.

Grupa M-gejdž transformacija $\tilde{M}$, grupa H-gejdž transformacija $\tilde{H}$ i grupa N-gejdž transformacija $\tilde{N}$ su podgrupe ukupne grupe simetrije $\mathcal{G}_{2BF}$. Grupa $\tilde{M}$ je invarijantna podgrupa, pošto su jedini netrivijalni komutatori između generatora $\hat{M}_\alpha{}^\mu$ i generatora grupe G, jednaki nekim linearnim kombinacijama generatora $\tilde{M}$. Grupa $\tilde{N}$ nije invarijantna podgrupa, pošto su komutator između generatora $\hat{N}_a$ i $\hat{H}_a{}^\mu$ linearne kombinacije generatora $\hat{M}_\alpha{}^\mu$. Međutim, generatori grupa $\tilde{N}$ i $\tilde{M}$ komutiraju, a grupa $\tilde{N}$ je invarijantna podgrupa direktnog proizvoda grupa $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$. Dobijena grupa $\tilde{N} \times \tilde{M}$ je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrije.

Sa druge strane, grupa H-gejdž transformacija, zbog oblika komutatora generatora $\hat{H}_a{}^\mu$ i $\hat{N}_b$, nije invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija. Možemo pomnožiti ove dve podgrupe, od kojih je jedna invarijantna, a druga nije, koristeći semidirektan proizvod, pri čemu se dobija grupa $\tilde{H} \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M})$. Dobijena grupa je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrije $\mathcal{G}_{2BF}$.

Konačno, prateći istu liniju rezonovanja, dobijenu grupu i grupu G-gejdž transformacija možemo pomnožiti semidirektnim prozvodom, pri čemu dobijamo kompletnu grupu gejdž simetrija $\mathcal{G}_{2BF}$ kao:

$$
\mathcal{G}_{2BF} = G \ltimes (\tilde{H} \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M}))\,. \tag{5.72}
$$

Ovim je završena analiza grupe gejdž simetrija za $2BF$ teoriju.

Difeomorfizmi

Slično kao kod BF teorija, ako su difeomorfizmi simetrija teorije, njihove varijacije forme se mogu izraziti kao zbir varijacija formi varijabli pri gejdž transformacijama i varijacija formi pri HT transformacijama:

$$\delta_0{}^{\text{diff}}\,\phi = -\delta_0{}^{\text{gauge}}\phi - \delta_0{}^{\text{HT}}\phi\,. \tag{5.73}$$

Konkretno, $2BF$ dejstvo zavisi od parametara $\alpha^\alpha{}_\mu$, $\beta^a{}_{\mu\nu}$, $B^\alpha{}_{\mu\nu}$ i $C^a{}_\mu$. Parametri HT transformacija $\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}$ i $\epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho}$ su definisani relacijama (4.55)

$$\begin{aligned}
\delta_0{}^{\text{HT}}\alpha^\alpha{}_\mu &= \frac{1}{2}\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta B^\beta{}_{\nu\rho}}\,, & \delta_0{}^{\text{HT}}B^\alpha{}_{\mu\nu} &= -\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\rho\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta \alpha^\beta{}_\rho}\,,\\
\delta_0{}^{\text{HT}}\beta^a{}_{\mu\nu} &= \epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta C^b{}_\rho}\,, & \delta_0{}^{\text{HT}}C^a{}_\mu &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\nu\rho\mu}\frac{\delta S}{\delta \beta^b{}_{\nu\rho}}\,,
\end{aligned} \tag{5.74}$$

dok su gejdž parametri $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a$ definisani u Teoremama 10–13. Možemo pokazati da zaista postoji izbor ovih parametara, tako da je jednačina (4.57) zadovoljena za sva polja. Konkretno, ako odaberemo gejdž parametre kao

$$\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha = -\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda\,, \quad \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu = \xi^\lambda\beta^a{}_{\mu\lambda}\,, \quad \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu = \xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda}\,, \quad \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a = -\xi^\lambda C^a{}_\lambda\,, \tag{5.75}$$

a HT parametre kao

$$\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,, \qquad \epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{ab}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,, \tag{5.76}$$

primenom jednačine (5.73) dobijamo upravo standardne varijacije formi koje odgovaraju difeomorfizmima:

$$\begin{aligned}
\delta_0{}^{\text{diff}}\alpha^\alpha{}_\mu &= -\partial_\mu\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda\alpha^\alpha{}_\mu\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}\beta^a{}_{\mu\nu} &= -\partial_\mu\xi^\lambda\beta^a{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\xi^\lambda\beta^a{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda\beta^a{}_{\mu\nu}\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}B^\alpha{}_{\mu\nu} &= -\partial_\mu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda B^\alpha{}_{\mu\nu}\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}C^a{}_\mu &= -\partial_\mu\xi^\lambda C^a{}_\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda C^a{}_\mu\,.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Ovim se utvrđuje da su difeomorfizmi zaista simetrija teorije, čak i ako nisu sadržani u ukupnoj gejdž grupi simetrija $\mathcal{G}_{2BF}$, već u direktnom proizvodu ukupne grupe simetrija i HT grupe simetrija.

5.2 Opšta relativnost

Bitan primer strukture ukrštenog modula je vektorski prostor V sa grupom izometrija prostora O. Vektorski prostor V možemo da posmatramo kao Abelovu Lijevu grupu sa sabiranjem vektora kao grupnom operacijom, pa reprezentacija grupe O na prostoru V postaje dejstvo $\triangleright$ grupe O na grupu V. Za definisanje ukrštenog modula $(V \xrightarrow{\partial} O\,, \triangleright)$, neophodno je definisati još homomorfizam $\partial : V \to O$, tako da bude trivijalan, odnosno da svaki element V preslikava u jedinični element grupe O). *Poenkareova 2-grupa*, odnosno njoj ekvivalentan ukršteni modul, je konstruisana na ovaj način. Izbor Lijevih grupa je

$$G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \tag{5.78}$$

preslikavanje ∂ je trivijalno, a dejstvo $\triangleright$ je prirodno dejstvo grupe $SO(3,1)$ na $\mathbb{R}^4$, definisano jednačinom

$$M_{ab} \triangleright P_c = \eta_{[bc}P_{a]}\,, \tag{5.79}$$

gde su sa M_{ab} i P_a označeni generatori grupa $SO(3,1)$ i $\mathbb{R}^4$. Dejstvo $\triangleright$ grupe $SO(3,1)$ na samu sebe dato je konjugacijom, na osnovu definicije strukture ukrštenog modula. Na nivou algebre, dejstvo konjugacijom predstavlja pridruženu reprezentaciju, tako da je dejstvo zadato standardnim komutacionim relacijama za generatore $SO(3,1)$:

$$M_{ab} \triangleright M_{cd} = [M_{ab}, M_{cd}] \equiv \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{ac}M_{bd} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{bd}M_{ac}\,. \tag{5.80}$$

Zatim, 2-koneksija (α, β) je zadata parom diferencijalnih formi elementima algebri, 1-formom $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{so}(3,1))$ i 2-formom $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{R}^4)$

$$\alpha = \omega^{ab}M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \tag{5.81}$$

gde je ω^{ab} spinska koneksija. Odgovarajuća 2-krivina, uređeni par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dat je izrazima:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (\mathrm{d}\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb})M_{ab} \equiv R^{ab}M_{ab}\,, \\ \mathcal{G} &= (\mathrm{d}\beta^a + \omega^a{}_b \wedge \beta^b)P_a \equiv \nabla\beta^a P_a \equiv G^a P_a\,, \end{aligned} \tag{5.82}$$

Primetimo da je, kako je homomorfizam ∂ trivijalan, "lažna" krivina jednaka običnoj krivini. Definisanjem bilinearnih formi

$$\langle M_{ab}, M_{cd}\rangle_{\mathfrak{g}} = \eta_{a[c}\eta_{bd]}\,, \qquad \langle P_a, P_b\rangle_{\mathfrak{h}} = \eta_{ab}\,, \tag{5.83}$$

može se pokazati da se 1-forma C^a tranformiše na isti način kao 1-forma tetrade e^a pri Lorencovim transformacijama i difeomorfizmima, tj. da polja C^a možemo identifikovati sa tetradom. Imajući sve ovo u vidu, $2BF$ dejstvo (5.1) za Poenkareovu 2-grupu definiše se kao:

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a\,. \tag{5.84}$$

Primetimo da je prepoznavanje tetrada tj. njihova identifikacija kao polja $C^a \equiv e^a$, bio krucijalan korak, omogućavajući da polja tetrade budu eksplicitno prisutna u $2BF$ dejstvu za Poenkareovu grupu. Kako bi u dejstvo (5.84) uveli stepene slobode koji odgovaraju teoriji opšte relativnosti, nephodno je napisati dodatni član:

$$S = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a - \lambda_{ab} \wedge \Big(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon^{abcd}e_c \wedge e_d\Big)\,. \tag{5.85}$$

Ovde je λ_{ab} 2-forma Lagranževog množitelja, a l_p označava Plankovu dužinu. Variranjem dejstva (5.85) redom po varijablama B_{ab}, e_a, ω_{ab}, β_a i λ_{ab}, dobijaju se jednačine kretanja:

$$R_{ab} - \lambda_{ab} = 0\,, \tag{5.86}$$

$$\nabla\beta_a + \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc} \wedge e^d = 0\,, \tag{5.87}$$

$$\nabla B_{ab} - e_{[a} \wedge \beta_{b]} = 0\,, \tag{5.88}$$

$$\nabla e_a = 0\,, \tag{5.89}$$

$$B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon^{abcd}e_c \wedge e_d = 0\,. \tag{5.90}$$

Iz jednačina (5.89) i (5.90) sledi da je $\nabla B^{ab} = 0$, što dalje povlači, primenom jednačine (5.88), jednakost $e_{[a} \wedge \beta_{b]} = 0$. Pretpostavljajući da su tetrade invertibilne, $e \equiv \det(e^a{}_\mu) \neq 0$, može se pokazati da je ovaj zahtev ekvivalentan jednačini $\beta^a = 0$ [15]. Dalje, iz jednačina (5.86), (5.88), (5.89) i (5.90) dobijamo:

$$\lambda^{ab}{}_{\mu\nu} = R^{ab}{}_{\mu\nu}\,, \quad \beta^a{}_{\mu\nu} = 0\,, \quad B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu\,, \quad \omega^{ab}{}_\mu = \triangle^{ab}{}_\mu\,. \tag{5.91}$$

Ovde su Ričijevi koeficijenti rotacije dati izrazom

$$\triangle^{ab}{}_\mu \equiv \frac{1}{2}(c^{abc} - c^{cab} + c^{bca})e_{c\mu}\,, \tag{5.92}$$

gde je

$$c^{abc} = e^\mu{}_b e^\nu{}_c \left(\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu\right)\,. \tag{5.93}$$

Poslednja jednačina predstavlja spin koneksiju ω^{ab} izraženu kao funkciju tetrada, što dalje povlači da i 2-formu R^{ab} možemo napisati u tom obliku. Preostala jednačina (5.87) predstavlja jednačine kretanja za tetrade:

$$\varepsilon_{abcd}R^{bc} \wedge e^d = 0\,. \tag{5.94}$$

Lako se uočava da ovaj izraz predstavlja ništa drugo no Ajnštanove jednačine kretanja zapisane na jeziku diferencijalnih formi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0\,.$$

Zaključujemo da je dejstvo (5.85) klasično ekvivalentno *opštoj teoriji relativnosti*.

5.3 Ajnštajn-Jang-Milsova teorija

Kao što smo već naveli, osnovna prednost teorije (5.85) nad Plebanski modelom leži upravo u činjenici da su polja tetrade eksplicitno prisutna u topološkom sektoru teorije. Ova činjenica nam omogućava da kuplujemo polja materije sa gravitacijom, kao što je urađeno u radu [15]. Ipak, moguće je kuplovati i Jang-Milsovo polje materije u okviru formalizma 2-grupe [16]. Naime, Poenkareovu 2-grupu možemo proširiti tako da obuhvati $SU(N)$ gejdž polja. Da bi se to uradilo biramo sledeće Lijeve grupe kao elemente ukrštenog modula

$$G = SO(3,1) \times SU(N)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \tag{5.95}$$

dok se dejstvo $\triangleright$ grupe G bira na sledeći način. Kao što je to bio slučaj kod Poenkareove 2-grupe, grupa G deluje na samu sebe konjugacijom. Dejstvo grupe G na grupu H je takvo da pogrupa $SO(3,1)$ deluje na $\mathbb{R}^4$ vektorskom reprezentacijom (5.79), kao što je to bio slučaj kod Ponkareove 2-grupe, dok je dejstvo podgrupe $SU(N)$ na grupu H trivijalno

$$\tau_I \triangleright P_a = 0\,, \tag{5.96}$$

gde su τ_I generatori $SU(N)$ grupe. Preslikavanje $\partial : H \to G$ ostaje trivijalno. Oblik 2-koneksije (α, β) oslikava strukturu grupe G, pa na osnovu direktnog proizvoda imamo razlaganje koneksije α na dva sabirka, od kojih svaki odgovara jednoj podgrupi:

$$\alpha = \omega^{ab}M_{ab} + A^I\tau_I\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \tag{5.97}$$

gde A^I označava 1-formu gejdž koneksije. Element $\mathcal{F}$ uređenog para 2-krivine $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ postaje

$$\mathcal{F} = R^{ab}M_{ab} + F^I\tau_I\,, \qquad F^I \equiv \mathrm{d}A^I + f_{JK}{}^I A^J \wedge A^K\,, \tag{5.98}$$

dok element $\mathcal{G}$ ostaje isti kao u slučaju Poenkareove 2-grupe, što sledi iz dejstva (5.96). Najzad, struktura direktnog proizvoda prisutna u grupi G znači da se Kilingova forma $\langle \_ , \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ razdvaja na dve podgrupe, odnosno na Kilingove forme za $SO(3,1)$ i $SU(N)$, odnosno da važi

$$\langle M_{ab}, M_{cd} \rangle = \eta_{a[c|}\eta_{b|d]} \,, \quad \langle \tau_I, \tau_J \rangle = \delta_{IJ} \,, \quad \langle M_{ab}, \tau_I \rangle_{\mathfrak{g}} = 0 \,. \tag{5.99}$$

Na osnovu definicije ukrštenog modula sledi da je Kilingova forma definisana na ovaj način invarijantna na G-gejdž transformacije i na H-gejdž transformacije. Topološko $2BF$ dejstvo (5.1) definisano za ovakav izbor ukrštenog modula je dato izrazom

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + B^I \wedge F_I + e_a \wedge \nabla \beta^a \,, \tag{5.100}$$

gde je $B^I \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{su}(N))$ novi Lagranžev množitelj. Dejstvo (5.100) je topološko dejstvo i neophodno je dodati odgovarajuće veze kako bismo ga transformisali u dejstvo koje opisuje teoriju sa odgovarajućom netrivijalnom dinamikom. Veza koja dovodi do jednačina kretanja za opštu relativnost data je izrazom (5.85), dok veza koja dovodi do odgovarajuće dimanike za gejdž polja data kao u dejstvu (4.63), pri čemu je učinjena smena $\delta^a \to e^a$. Dakle, dejstvo za Jang-Milsovo polje kulovano sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom dato je izrazom:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + B^I \wedge F_I + e_a \wedge \nabla \beta^a \\ & - \lambda_{ab} \wedge \Big(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \Big) + \lambda^I \wedge \Big(B_I - \frac{12}{g} M_{abI} e^a \wedge e^b \Big) \\ & + \zeta^{abI} \Big(M_{abI} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - g_{IJ} F^J \wedge e_a \wedge e_b \Big) \,. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Vidimo da je veza koja dovodi do pojave Jang-Milsovog polja u zakrivljenom prostorvremenu u dejstvu (5.101) dobijena iz dejstva za Jang-Milsovo polje u prostoru Minkovskog (4.63) zamenom nedinamičkog pozadinskog polja δ^a prisutnog u dejstvu (4.63) sa dinamičkim poljem tetrade e^a. Veza između ova dva polja već je nagoveštena jednačinom (4.64), koja opisuje vezu između δ^a i metrike ravnog prostora Minkovskog $\eta_{\mu\nu}$. Posle zamene ovog polja poljem e^a, ovo polje postaje dinamičko zbog gravitacionog sektora dejstva, dok jednačina (4.64) postaje uobičajena relacija koja povezuje polja tetrade i prostorvremensku metriku,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \,. \tag{5.102}$$

Ovom smenom dejstvo (5.101) postaje nezavisno od pozadine, kao što je očekivano u opštoj relativnosti. Napomenimo još jednom da je ova konstrukcija moguća na osnovu prisustva tetrada u topološkom sektoru dejstva (5.85).

Varirajem dejstva (5.101) redom po varijablama B_{ab}, ω_{ab}, β_a, λ_{ab}, ζ^{abI}, M_{abI}, B_I, λ^I, A^I i

e^a, dobijaju se jednačine kretanja:

$$R^{ab} - \lambda^{ab} = 0\,, \tag{5.103}$$

$$\nabla B^{ab} - e^{[a} \wedge \beta^{b]} = 0\,, \tag{5.104}$$

$$\nabla e^a = 0\,, \tag{5.105}$$

$$B_{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd} e^c \wedge e^d = 0\,, \tag{5.106}$$

$$M_{abI}\varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F_I \wedge e_a \wedge e_b = 0\,, \tag{5.107}$$

$$-\frac{12}{g}\lambda^I \wedge e^a \wedge e^b + \zeta^{abI}\varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f = 0\,, \tag{5.108}$$

$$F_I + \lambda_I = 0\,, \tag{5.109}$$

$$B_I - \frac{12}{g} M_{abI} e^a \wedge e^b = 0\,, \tag{5.110}$$

$$-\mathrm{d}B_I + B_K \wedge f_{JI}{}^K A^J + \mathrm{d}(\zeta_I^{ab} e_a \wedge e_b) - \zeta_K^{ab} e_a \wedge e_b \wedge f_{JI}{}^K A^J = 0\,, \tag{5.111}$$

$$\nabla \beta_a + \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc} \wedge e^d - \frac{24}{g} M_{abI}\lambda^I \wedge e^b + 4\zeta^{efI} M_{ef\,I}\varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d - 2\zeta_{ab}{}^I F_I \wedge e^b = 0\,. \tag{5.112}$$

Ovaj sistem jednačina opisuje dva dinamička polja e_a i A^I, dok sve ostale varijable možemo izraziti preko njih i njihovih izvoda, kao što sledi iz jednačina (5.103)–(5.110):

$$\begin{gathered} \lambda_{ab\mu\nu} = R_{ab\mu\nu}\,, \quad \beta_{a\mu\nu} = 0\,, \quad \omega_{ab\mu} = \triangle_{ab\mu}\,, \quad \lambda_{abI} = F_{abI}\,, \quad B_{\mu\nu I} = -\frac{e}{2g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}{}_I\,, \\ B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd} e^c{}_\mu e^d{}_\nu\,, \quad M_{abI} = -\frac{1}{4eg}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}{}^I e^a{}_\rho e^b{}_\sigma\,, \quad \zeta^{abI} = \frac{1}{4eg}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}{}^I e^a{}_\rho e^b{}_\sigma\,. \end{gathered} \tag{5.113}$$

Korišćenjem ovih izraza za varijable u jednačinama kretanja (5.111) i (5.112) dobijamo jednačinu kretanja za A^I:

$$\nabla_\rho F^{I\rho\mu} \equiv \partial_\rho F^{I\rho\mu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} F^{I\lambda\mu} + f_{JK}{}^I A^J{}_\rho F^{K\rho\mu} = 0\,, \tag{5.114}$$

gde je $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ standardna oznaka za Levi-Čivita koneksiju, i jednačinu kretanja za e^a

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi l_p^2\, T^{\mu\nu}\,, \tag{5.115}$$

gde je

$$T^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4g}\left(F_{\rho\sigma}{}^I F^{\rho\sigma}{}_I g^{\mu\nu} + 4F^{\mu\rho}{}_I F_\rho{}^{\nu I}\right)\,. \tag{5.116}$$

Sistem jednačina (5.113)–(5.116) ekvivalentan je sistemu jednačina (5.103)–(5.112). Primetimo da smo ponovo dobili identitet $\beta^a = 0$, kao što je to bio slučaj kod čiste gravitacije.

Generalizacija izbora gejdž grupe za Jang-Milsovu teoriju sa $SU(N)$ na kompleksiji slučaj, recimo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, je pravolinijska.

Glava 6

$3BF$ teorija

Premda je struktura 2-grupe uspešno primenjena za opisivanje gravitacionog i gejdž polja, nedovoljna je da opiše ostala polja materije, kao što su skalarno i fermionsko polje. Da bi opisali ova polja neophodno je izvršiti još jedan korak kategorijskih lestvica, kategorijskom generalizacijom algebarske strukture 2-grupe na strukturu 3-grupe. Ispostaviće se da struktura 3-grupe uspešno opisuje sva polja prisutna u Standardnom Modelu kuplovana sa gravitacijom. Pored toga, struktura 3-grupe poseduje i treći tip gejdž transformacija, koji je novitet u odnosu na strukturu 2-grupe i odgovara izboru skalarnih i fermionskih polja prisutnih u teoriji. Ovaj neočekivan i intrigantan rezultat detaljno je analiziran u [16].

Struktura ovog poglavlja prati strukturu prethodnih poglavlja 4 i 5 u kojima su razmatrane BF i $2BF$ teorija. Najpre, u odeljku 6.1 ćemo definisati i analizirati simetrije $3BF$ topološkog dejstva. Pododeljak 6.1.1 sadrži Hamiltonovu analizu za $3BF$ teoriju, koja rezultuje kompletnom kanonskom strukturom teorije, kao i vezama prve klase i vezama druge klase prisutnim u teoriji i njihovom algebrom. Zatim, na osnovu ovih rezultata, u nastavku pododeljka 6.1.1 analiziramo Bjankijeve identitete koje zadovoljavaju veze prve klase, koji smanjuju broj nezavisnih veza prve klase prisutnih u teoriji. Konačno, sumiranjem ovih rezultata dobijen je broj lokalnih propagirajućih stepeni slobode prisutnih u $3BF$ teoriji, tj. da je $3BF$ teorija topološka teorija. Konačno, ovaj pododeljak se završava konstrukcijom generatora gejdž simetrija za topološku teoriju, na osnovu Kastelanijeve procedure za konstrukciju generatora čiji su računski detalji prikazani u Dodatku D.3.2, i izračunavanjem varijacija formi za varijable prisutne u teoriji i njihove konjugovane impulse.

Pododeljak 6.1.2 sadrži glavne rezultate našeg rada i posvećen je analizi gejdž simetrija $3BF$ dejstva. Na osnovu rezultata prethodnog pododeljka, varijacija svih varijabli i njihovih kanonskih impulsa, a imajući u vidu da ove varijacije predstavljaju infinitezimalne transformacije gejdž simetrije na nekoj prostornoj hiperpovrši Σ_3 koje odgovaraju nultoj vremenskoj komponenti parametra transformacija, možemo ekstrapolirati infinitezimalnu transformaciju varijabli na čitavom prostorvremenu. Zatim, za ove infinitezimalne transformacije pogođen je oblik konačnih transformacija i na taj način je dobijeno pet vrsta gejdž transformacija u teoriji – već poznate G-gejdž, H-gejdž i L-gejdž transformacije, kao i M-gejdž i N-gejdž transformacije koje predstavljaju nov rezultat. Analiza transformacija simetrija, tj. izračunavanje komutatora generatora ovih transformacija, nam ukazuje na jednu bitnu razliku u odnosu na $2BF$ teoriju, a to je da u $3BF$-teoriji H-gejdž transformacije ne čine grupu. Videćemo da u strukturi $3BF$ teorije bitnu ulogu igra gejdž grupa $\tilde{H}_L$ koju čine H-gejdž i L-gejdž transformacije. Računski detalji izračunavanja komutatora prikazani su u Dodatku D.3.3. Rezultati ovog pododeljka su na kraju sumirani u kompletnoj strukturi gejdž grupe simetrije.

Zatim, modifikacijom topološkog $3BF$ dejstva dodavanjem odgovarajućih veza, formirana su $3BF$ *dejstva sa vezama* koja opisuju teorije sa netrivijalnom dinamikom. Videćemo u odeljcima 6.2 i 6.3 kako se *Klajn-Gordonovo* i *Dirakovo polje* u zakrivljenom prostoru mogu zapisati u formi 3BF dejsva sa vezama. Radi kompletnosti, u 6.4 analizirana su i *Vajlova* i *Majorana polja* u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom. U odeljku 6.5 videćemo kako se svi ovi rezultati mogu primeniti za konstrukciju 3BF dejstva sa vezama koje opisuje svu materiju prisutnu u Standardnom Modelu kuplovanu sa gravitacionim poljem. Na kraju ovog poglavlja, predstavljen je jednostavan model koji opisuje skalarnu elektrodinamiku kao 3BF teoriju sa vezama, dok je u Dodatku C urađena kompletna Hamiltonova analiza ove teorije.

Zaključujemo da su gravitacija, gejdž polja i polja materije uspešno obuhvaćena formalizmom 3-grupe. Klasična teorija time je uspešno zapisana u obliku prilagođenom za kovarijantnu kvantizacionu proceduru.

6.1 Topološka 3BF teorija

Slično kao kod BF i 2BF dejstva, definišemo gejdž invarijantno topološko 3BF dejstvo za mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ i 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \rhd\,, \{\_\,,\_\})$:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H}\rangle_{\mathfrak{l}}\,. \tag{6.1}$$

U prethodnoj jednačini 2-forma $\mathcal{F} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$, 3-forma $\mathcal{G} \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{h})$ i 4-forma $\mathcal{H} \in \mathcal{A}^4(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{l})$ označavaju komponente 3-krivine definisane jednačinom (2.118). Pored Lagranževih množitelja 2-forme $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{g})$ i 1-forme $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{h})$ prisutnih i u 2BF teoriji, u 3BF teoriji imamo i Lagranžev množitelj $D \in \mathcal{A}^0(\mathcal{M}_4\,,\mathfrak{l})$ koji ima interesantnu fizičku interpretaciju koju ćemo diskutovati kasnije. Zagrade $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{h}}$ i $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{l}}$ označavaju G-invarijantne bilinarne simetrične nedegenerisane forme algebri $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$.

Variranjem 3BF topološkog dejstva (6.1) po varijablama B^α, C^a i D^A (gde indeksi A prebrojavaju generatore grupe L), dobijaju se jednačine kretanja:

$$\mathcal{F}^\alpha = 0\,, \qquad \mathcal{G}^a = 0\,, \qquad \mathcal{H}^A = 0\,, \tag{6.2}$$

dok se variranjem dejstva po varijablama α^α, β^a i γ^A dobijaju:

$$\mathrm{d}B_\alpha - f_{\alpha\beta}{}^\gamma B_\gamma \wedge \alpha^\beta - \rhd_{\alpha a}{}^b C_b \wedge \beta^a + \rhd_{\alpha B}{}^A D_A \wedge \gamma^B = 0\,, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{d}C_a - \partial_a{}^\alpha B_\alpha + \rhd_{\alpha a}{}^b C_b \wedge \alpha^\alpha + 2X_{\{ab\}}{}^A D_A \wedge \beta^b = 0\,, \tag{6.4}$$

$$\mathrm{d}D_A - \rhd_{\alpha A}{}^B D_B \wedge \alpha^\alpha + \delta_A{}^a C_a = 0\,. \tag{6.5}$$

6.1.1 Hamiltonova analiza topološke 3BF teorije

U ovom odeljku prikazaćemo kompletnu Hamiltonovu analizu topološke 3BF teorije [19]. Pretpostavljajući da je prostorvremenska mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ globalno hiperbolička možemo da definišemo Lagranžijan na prostornoj folijaciji Σ_3 za 3BF dejstvo:

$$L_{3BF} = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(\frac{1}{4}\,B^\alpha{}_{\mu\nu}\,\mathcal{F}^\beta{}_{\rho\sigma}\,g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3!}\,C^a{}_\mu\,\mathcal{G}^b{}_{\nu\rho\sigma}\,g_{ab} + \frac{1}{4!}D^A\mathcal{H}^B{}_{\mu\nu\rho\sigma}g_{AB}\Big)\,. \tag{6.6}$$

Za Lagranžijan (6.6) konjugovani impulsi koji odgovaraju varijablama $B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$, $C^{a}{}_{\mu}$, $\beta^{a}{}_{\mu\nu}$, D^{A} i $\gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}$, dobijeni varijacijom Lagranžijana po vremenskim izvodima varijabli, su:

$$
\begin{aligned}
\pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 B^{a}{}_{\mu\nu}} &&= 0\,,\\
\pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu}} &&= \tfrac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho}B_{\alpha\nu\rho}\,,\\
\pi(C)_{a}{}^{\mu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 C^{a}{}_{\mu}} &&= 0\,,\\
\pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu}} &&= -\epsilon^{0\mu\nu\rho}C_{a\rho}\,,\\
\pi(D)_{A} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 D^{A}} &&= 0\,,\\
\pi(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} &= \frac{\delta L}{\delta\partial_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}} &&= \epsilon^{0\mu\nu\rho}D_{A}\,.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Kako relacije (6.7) ne mogu biti invertovane po vremenskim izvodima varijabli, zaključujemo da imamo sledeće primarne veze u teoriji:

$$
\begin{aligned}
P(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} &\equiv \pi(B)_{\alpha}{}^{\mu\nu} \approx 0\,,\\
P(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} &\equiv \pi(\alpha)_{\alpha}{}^{\mu} - \tfrac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho}B_{\alpha\nu\rho} \approx 0\,,\\
P(C)_{a}{}^{\mu} &\equiv \pi(C)_{a}{}^{\mu} \approx 0\,,\\
P(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} &\equiv \pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} + \epsilon^{0\mu\nu\rho}C_{a\rho} \approx 0\,,\\
P(D)_{A} &\equiv \pi(D)_{A} \approx 0\,,\\
P(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} &\equiv \pi(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} - \epsilon^{0\mu\nu\rho}D_{A} \approx 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Koristimo fundamentalnu Poasonovu zagradu definisanu na sledeći način,

$$
\begin{aligned}
\{\, B^{\alpha}{}_{\mu\nu}(\vec{x})\,,\, \pi(B)_{\beta}{}^{\rho\sigma}(\vec{y})\,\} &= 2\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \alpha^{\alpha}{}_{\mu}(\vec{x})\,,\, \pi(\alpha)_{\beta}{}^{\nu}(\vec{y})\,\} &= \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\nu}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, C^{a}{}_{\mu}(\vec{x})\,,\, \pi(C)_{b}{}^{\nu}(\vec{y})\,\} &= \delta^{a}_{b}\delta^{\nu}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \beta^{a}{}_{\mu\nu}(\vec{x})\,,\, \pi(\beta)_{b}{}^{\rho\sigma}(\vec{y})\,\} &= 2\delta^{a}_{b}\,\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, D^{A}(\vec{x})\,,\, \pi(D)_{B}(\vec{y})\,\} &= \delta^{A}_{B}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}(\vec{x})\,,\, \pi(\gamma)_{B}{}^{\sigma\tau\xi}(\vec{y})\,\} &= 3!\delta^{A}_{B}\,\delta^{\sigma}_{[\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\xi}_{\rho]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

da izračunamo *algebru primarnih veza*:

$$
\begin{aligned}
\{\, P(B)_{\alpha}{}^{jk}(\vec{x})\,,\, P(\alpha)_{\beta}{}^{i}(\vec{y})\,\} &= \epsilon^{0ijk}\, g_{\alpha\beta}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, P(C)_{a}{}^{k}(\vec{x})\,,\, P(\beta)_{b}{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= -\epsilon^{0ijk}\, g_{ab}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, P(D)_{A}(\vec{x})\,,\, P(\gamma)_{B}{}^{ijk}(\vec{y})\,\} &= \epsilon^{0ijk}\, g_{AB}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Sve ostale Poasonove zagrade su jednake nuli. *Kanonski "on-shell" Hamiltonijan* je:

$$
\begin{aligned}
H_c = \int_\Sigma \mathrm{d}^3\vec{x} \bigg[& \frac{1}{2}\pi(B)_\alpha{}^{\mu\nu}\,\partial_0 B^\alpha{}_{\mu\nu} + \pi(\alpha)_\alpha{}^\mu\,\partial_0\alpha^\alpha{}_\mu + \pi(C)_a{}^\mu\,\partial_0 C^a{}_\mu \\
& + \frac{1}{2}\pi(\beta)_a{}^{\mu\nu}\,\partial_0\beta^a{}_{\mu\nu} + \pi(D)_A\,\partial_0 D^A + \frac{1}{3!}\pi(\gamma)_A{}^{\mu\nu\rho}\,\partial_0\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\bigg] - L\,.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Raspisivajem 3-krivine, odnosno zamenom relacija (2.3.5), Hamiltonijan (6.11) prepisujemo u formi članova koji su jednaki proizvodu primarnih veza i vremenskih izvoda varijabli i ostatka. Primarne veze su nula "on-shell" tako da kanonski Hamiltonijan postaje:

$$
\begin{aligned}
H_c \approx - \int_\Sigma \mathrm{d}^3\vec{x}\,\epsilon^{0ijk}\bigg[& \frac{1}{2}B_{\alpha 0i}\,\mathcal{F}^\alpha{}_{jk} + \frac{1}{6}C_{a0}\,\mathcal{G}^a{}_{ijk} + \beta^a{}_{0i}\Big(\nabla_j C_{ak} - \frac{1}{2}\partial_a{}^\alpha B_{\alpha\, jk} + \beta^b{}_{jk}\,D_A\,X_{\{ab\}}{}^A\Big) \\
& + \frac{1}{2}\alpha^\alpha{}_0\Big(\nabla_i B_{\alpha\, jk} - C_{ai}\,\rhd_{\alpha b}{}^a\,\beta^b{}_{jk} + \frac{1}{3}D_A \rhd_{\alpha B}{}^A\,\gamma^B{}_{ijk}\Big) + \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij}\Big(\nabla_k D_A + C_{ak}\,\delta_A{}^a\Big)\bigg].
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Dodavanjem proizvoda Lagranževih množitelja λ i primarnih veza za svaku vezu možemo da dobijemo "off-shell" totalni Hamiltonijan:

$$
\begin{aligned}
H_T \;=\; H_c + \int \mathrm{d}^3\vec{x}\bigg[& \frac{1}{2}\lambda(B)^\alpha{}_{\mu\nu}P(B)_\alpha{}^{\mu\nu} + \lambda(\alpha)^\alpha{}_\mu P(\alpha)_\alpha{}^\mu + \lambda(C)^a{}_\mu P(C)_a{}^\mu \\
& + \frac{1}{2}\lambda(\beta)^a{}_{\mu\nu}P(\beta)_a{}^{\mu\nu} + \lambda(D)^A P(D)_A + \frac{1}{3!}\lambda(\gamma)^A{}_{\mu\nu\rho}P(\gamma)_A{}^{\mu\nu\rho}\bigg].
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Kako bi primarne veze bile očuvane u toku evolucije sistema one moraju da zadovoljavaju uslove konzistentnosti

$$
\dot{P} \equiv \{\, P\,,\, H_T\,\} \approx 0\,,
\tag{6.14}
$$

za svaku primarnu vezu P. Korišćenjem (6.14) za primarne veze $P(B)_\alpha{}^{0i}$, $P(\alpha)_\alpha{}^0$, $P(C)_a{}^0$, $P(\beta)_a{}^{0i}$ i $P(\gamma)_A{}^{0ij}$ dobijamo sekundarne veze $\mathcal{S}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathcal{F})_\alpha{}^i &\equiv \tfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\mathcal{F}_{\alpha jk} \approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\nabla B)_\alpha &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\big(\nabla_{[i}B_{\alpha\, j]k} - C_{a[i}\,\rhd_{\alpha b}{}^a\,\beta^b{}_{j]k} + \frac{1}{3}D_A \rhd_{\alpha B}{}^A\,\gamma^B{}_{ijk}\big) \approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\mathcal{G})_a &\equiv \frac{1}{6}\epsilon^{0ijk}\mathcal{G}_{aijk} \approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\nabla C)_a{}^i &\equiv \epsilon^{0ijk}\big(\nabla_{[j}C_{ak]} - \frac{1}{2}\partial_a{}^\alpha B_{\alpha\, jk} + \beta^b{}_{jk}\,D_A\,X_{\{ab\}}{}^A\big) \approx 0\,, \\
\mathcal{S}(\nabla D)_A{}^{ij} &\equiv \epsilon^{0ijk}\big(\nabla_k D_A + C_{ak}\,\delta_A{}^a\big) \approx 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

dok u slučaju primarnih veza $P(\alpha)_\alpha{}^k$, $P(B)_\alpha{}^{jk}$, $P(\beta)_a{}^{jk}$, $P(C)_a{}^k$, $P(\gamma)_A{}^{ijk}$ i $P(D)_A$ uslovi konzistentnosti određuju Lagranževe množitelje:

$$
\begin{aligned}
\lambda(B)_{\alpha ij} &\approx \nabla_i B_{\alpha 0j} - \nabla_j B_{\alpha 0i} + C_{a0}\beta^b{}_{ij} \rhd_{\alpha b}{}^a + C_{bi} \rhd_\alpha{}^b{}_a \beta^a{}_{0j} \\
&\quad - C_{bj} \rhd_\alpha{}^b{}_a \beta^a{}_{0i} + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \alpha^\beta{}_0 B^\gamma{}_{ij} + D_B \gamma^A{}_{0ij} \rhd_\alpha{}^B{}_A, \\
\lambda(\alpha)^\alpha{}_i &\approx \nabla_i \alpha^\alpha{}_0 + \partial_a{}^\alpha \beta^a{}_{0i}, \\
\lambda(C)^a{}_i &\approx \nabla_i C^a{}_0 + C^b{}_i \rhd_\alpha{}^a{}_b \alpha^\alpha{}_0 - 2\beta_{b0i} D_A X^{\{ba\}A} + B_{\alpha 0i}\partial^{a\alpha}, \\
\lambda(\beta)^a{}_{ij} &\approx \nabla_i \beta^a{}_{0j} - \nabla_j \beta^a{}_{0i} - \beta^b{}_{ij} \rhd_{\alpha b}{}^a \alpha^\alpha{}_0 + \gamma^A{}_{0ij}\delta_A{}^a, \\
\lambda(D)_A &\approx \alpha^\alpha{}_0 D_B \rhd_{\alpha A}{}^B - C_{a0}\delta_A{}^a, \\
\lambda(\gamma)^A{}_{ijk} &\approx -2\beta^a{}_{0i}\beta^b{}_{jk} X_{\{ab\}}{}^A + 2\beta^a{}_{0j}\beta^b{}_{ik} X_{\{ab\}}{}^A - 2\beta^a{}_{0k}\beta^b{}_{ij} X_{\{ab\}}{}^A \\
&\quad - \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha B}{}^A \gamma^B{}_{ijk} + \nabla_i \gamma^A{}_{0jk} - \nabla_j \gamma^A{}_{0ik} + \nabla_k \gamma^A{}_{0ij}.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Preostali Lagranževi množitelji

$$
\lambda(B)^\alpha{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\alpha)^\alpha{}_0\,, \qquad \lambda(C)^a{}_0\,, \qquad \lambda(\beta)^a{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\gamma)^A{}_{0ij} \tag{6.17}
$$

ostaju neodređeni iz uslova konzistentnosti primarnih veza. Sekundarne veze takođe moraju biti očuvane, pa se zahtevaju i uslovi konzistentnosti sekundarnih veza, koji u ovom slučaju ne dovode do pojave novih veza u teoriji:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i}\,,\, H_T\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\beta i}\alpha^\gamma{}_0\,, \\
\{\mathcal{S}(\nabla B)_\alpha\,,\, H_T\} &= f_{\beta\gamma\alpha} B^\gamma{}_{0k}\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\beta k} + f_{\beta\alpha}{}^\gamma \alpha^\beta{}_0 \mathcal{S}(\nabla B)_\gamma + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \mathcal{S}(\mathcal{G})^b \\
&\quad - \rhd_{\alpha a}{}^b \beta^a{}_{0k}\mathcal{S}(\nabla C)_b{}^k + \tfrac{1}{2} \rhd_\alpha{}^B{}_A \gamma^A{}_{0jk} S(\nabla D)_B{}^{jk}\,, \\
\{\mathcal{S}(\mathcal{G})^a\,,\, H_T\} &= \rhd_{\alpha b}{}^a \beta^b{}_{0k}\mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha k} - \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha b}{}^a \mathcal{S}(\mathcal{G})^b\,, \\
\{\mathcal{S}(\nabla C)_a{}^i\,,\, H_T\} &= C_{b0} \rhd_\alpha{}^b{}_a \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i} + \rhd_{\alpha a}{}^b \alpha^\alpha{}_0 \mathcal{S}(\nabla C)_b{}^i + 2X_{\{ab\}}{}^A \beta^b{}_{0j}\mathcal{S}(\nabla D)_A{}^{ij}\,, \\
\{\mathcal{S}(\nabla D)_A{}^{ij}\,,\, H_T\} &= \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha A}{}^B \mathcal{S}(\nabla D)_B{}^{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Najzad, totalni Hamiltonijan može da se zapiše u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
H_T = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \bigg[& \lambda(B)^\alpha{}_{0i}\,\Phi(B)_\alpha{}^i + \lambda(\alpha)^\alpha\,\Phi(\alpha)_\alpha + \lambda(C)^a{}_0\,\Phi(C)_a + \lambda(\beta)^a{}_{0i}\,\Phi(\beta)_a{}^i + \frac{1}{2}\lambda(\gamma)^A{}_{0ij}\Phi(\gamma)_A{}^{ij} \\
& - B_{\alpha 0i}\,\Phi(\mathcal{F})^{ai} - \alpha_{\alpha 0}\,\Phi(\nabla B)^\alpha - C_{a0}\,\Phi(\mathcal{G})^a - \beta_{a0i}\,\Phi(\nabla C)^{ai} - \frac{1}{2}\gamma_{A0ij}\,\Phi(\nabla D)^{Aij} \bigg]\,,
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

gde su

$$
\begin{aligned}
\Phi(B)_\alpha{}^i &= P(B)_\alpha{}^{0i}\,,\\
\Phi(\alpha)_\alpha &= P(\alpha)_\alpha{}^{0}\,,\\
\Phi(C)_a &= P(C)_a{}^{0}\,,\\
\Phi(\beta)_a{}^i &= P(\beta)_a{}^{0i}\,,\\
\Phi(\gamma)_A{}^{ij} &= P(\gamma)_A{}^{0ij}\,,\\
\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} &= \mathcal{S}(\mathcal{F})^{\alpha i} - \nabla_j P(B)^{\alpha ij} - P(C)_a{}^i \partial^{a\alpha}\,,\\
\Phi(\mathcal{G})_a &= \mathcal{S}(\mathcal{G})_a + \nabla_i P(C)_a{}^i - \frac{1}{2}\beta_{bij} \rhd_\alpha{}^b{}_a P(B)^{\alpha ij} + P(D)^A \delta_{Aa}\,,\\
\Phi(\nabla C)_a{}^i &= \mathcal{S}(\nabla C)_a{}^i - \nabla_j P(\beta)_a{}^{ij} + C_{bj} \rhd{}_\alpha{}^b{}_a P(B)^{\alpha ij}\\
&\quad -\partial_a{}^\alpha P(\alpha)_\alpha{}^i + 2D_A X_{\{ab\}}{}^A P(C)^{bi} + \beta^b{}_{jk} X_{\{ab\}}{}^A P(\gamma)_A{}^{ijk}\,,\\
\Phi(\nabla B)_\alpha &= \mathcal{S}(\nabla B)_\alpha + \nabla_i P(\alpha)_\alpha{}^i - \frac{1}{2} f_{\alpha\gamma}{}^\beta B_{\beta ij} P(B)^{\gamma ij}\\
&\quad -C_{bi} \rhd_{\alpha a}{}^b P(C)^{ai} - \frac{1}{2}\beta_{bij} \rhd_{\alpha a}{}^b P(\beta)^{aij}\\
&\quad -P(D)^A D_B \rhd_{\alpha A}{}^B + \frac{1}{3!} P(\gamma)_A{}^{ijk} \gamma^B{}_{ijk} \rhd_{\alpha B}{}^A\,,\\
\Phi(\nabla D)_A{}^{ij} &= \mathcal{S}(\nabla D)_A{}^{ij} + \nabla_k P(\gamma)_A{}^{ijk} - P(\beta)_a{}^{ij} \delta_A{}^a - P(B)^{\alpha ij} \rhd_\alpha{}^B{}_A D_B\,,
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

veze prve klase, a

$$
\begin{aligned}
\chi(B)_\alpha{}^{jk} = P(B)_\alpha{}^{jk}\,, \qquad \chi(C)_a{}^i = P(C)_a{}^i\,, \qquad \chi(D)_A = P(D)_A\,,\\
\chi(\alpha)_\alpha{}^i = P(\alpha)_\alpha{}^i\,, \qquad \chi(\beta)_a{}^{ij} = P(\beta)_a{}^{ij}\,, \qquad \chi(\gamma)_A{}^{ijk} = P(\gamma)_A{}^{ijk}\,,
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

veze druge klase.

Poasonova algebra veza prve klase je:

$$
\begin{aligned}
\{\,\Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla C)_b{}^i(\vec{y})\,\} &= -\rhd{}_{\alpha b}{}^a\,\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla C)_a{}^i(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla C)_b{}^j(\vec{y})\,\} &= -2X_{\{ab\}}{}^A\,\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^a(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha b}{}^a\,\Phi(\mathcal{G})^b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla C)_a{}^i(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\,\Phi(\nabla C)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{F})^\alpha{}_i(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\,\Phi(\mathcal{F})^\gamma{}_i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla B)_\beta(\vec{y})\,\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\Phi(\nabla B)_\gamma(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)_\alpha(\vec{x})\,,\,\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha A}{}^B\Phi(\nabla D)_B{}^{ij}(\vec{x})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Poasonova zagrada veza prve klase sa vezama druge klase je:

$$
\begin{aligned}
\{\,\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}(\vec{x})\,,\,\chi(\alpha)_{\beta}{}^{j}(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,\chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^{a}(\vec{x})\,,\,\chi(\alpha)_{\alpha}{}^{i}(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha b}{}^{a}\,\chi(C)^{bi}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^{a}(\vec{x})\,,\,\chi(\beta)_{b}{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha b}{}^{a}\,\chi(B)^{\alpha ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(x-y)\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ai}(\vec{x})\,,\,\chi(\alpha)_{\alpha}{}^{j}(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha b}{}^{a}\,\chi(\beta)^{bij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ai}(\vec{x})\,,\,\chi(\beta)_{b}{}^{jk}(\vec{y})\,\} &= -2X^{\{ac\}A}g_{bc}\,\chi(\gamma)_{A}{}^{ijk}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla C)^{ai}(\vec{x})\,,\,\chi(C)_{b}{}^{j}(\vec{y})\,\} &= \rhd^{a}{}_{\alpha b}\,\chi(B)^{\alpha ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ai}(\vec{x})\,,\,\chi(D)_{A}(\vec{y})\,\} &= X^{\{ab\}}{}_{A}\,\chi(C)_{b}{}^{i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(\alpha)_{\beta}{}^{i}(\vec{y})\,\} &= f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,\chi(\alpha)^{\gamma i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(\beta)_{a}{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\,\chi(\beta)_{b}{}^{ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(x-y)\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(\gamma)_{A}{}^{ijk}(\vec{y})\,\} &= -\rhd_{\alpha A}{}^{B}\,\chi(\gamma)_{B}{}^{ijk}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(B)_{\beta}{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= -f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,\chi(B)^{\gamma ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(C)_{a}{}^{i}(\vec{y})\,\} &= -\rhd^{\alpha b}{}_{a}\,\chi(C)_{b}{}^{i}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{\alpha}(\vec{x})\,,\,\chi(D)_{A}(\vec{y})\,\} &= -\rhd^{\alpha B}{}_{A}\,\chi(D)_{B}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla D)^{Aij}(\vec{x})\,,\,\chi(\alpha)_{\alpha}{}^{k}\,\} &= -\rhd_{\alpha B}{}^{A}\chi(\gamma)^{Bijk}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla D)^{Aij}(\vec{x})\,,\,\chi(D)_{B}\,\} &= \frac{1}{2}\rhd_{\alpha B}{}^{A}\chi(B)^{\alpha ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Najzad, korisno je izračunati Poasonovu zagradu između veza prve klase i Hamiltonijana:

$$
\begin{aligned}
\{\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}\,,\,H_T\} &= f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\Phi(\mathcal{F})^{\beta i}\alpha^{\gamma}{}_{0}\,,\\
\{\Phi(\nabla B)_{\alpha}\,,\,H_T\} &= f_{\beta\gamma\alpha}B^{\gamma}{}_{0k}\Phi(\mathcal{F})^{\beta k}+f_{\beta\alpha}{}^{\gamma}\alpha^{\beta}{}_{0}\Phi(\nabla B)_{\gamma}+C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(\mathcal{G})^{b}\\
&\quad-\rhd_{\alpha a}{}^{b}\beta^{a}{}_{0k}\Phi(\nabla C)_{b}{}^{k}+\frac{1}{2}\rhd_{\alpha}{}^{B}{}_{A}\gamma^{A}{}_{0jk}\Phi(\nabla D)_{B}{}^{jk}\,,\\
\{\Phi(\mathcal{G})^{a}\,,\,H_T\} &= \rhd_{\alpha b}{}^{a}\beta^{b}{}_{0k}\Phi(\mathcal{F})^{\alpha k}-\alpha^{\alpha}{}_{0}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(\mathcal{G})^{b}\,,\\
\{\Phi(\nabla C)_{a}{}^{i}\,,\,H_T\} &= C_{b0}\rhd_{\alpha}{}^{b}{}_{a}\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}+\rhd_{\alpha a}{}^{b}\alpha^{\alpha}{}_{0}\Phi(\nabla C)_{b}{}^{i}+2X_{\{ab\}}{}^{A}\beta^{b}{}_{0j}\Phi(\nabla D)_{A}{}^{ij}\,,\\
\{\Phi(\nabla D)_{A}{}^{ij}\,,\,H_T\} &= \alpha^{\alpha}{}_{0}\rhd_{\alpha A}{}^{B}\Phi(\nabla D)_{B}{}^{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Broj stepeni slobode topološke $3BF$ teorije

Bjankijevi identiteti (BI) za 1-forme α i C i 2-forme β i B dati su izrazima kao u slučaju $2BF$ teorije (5.24), (5.25), (5.26) i (5.27). Osim njih, u $3BF$ teoriji postoji Bjankijev identitet koji odgovara 0-formi D.

Lema 11 (BI za 0-formu D) *Definisanjem varijable*

$$Q^{A}=\mathrm{d}D^{A}+\rhd_{\alpha B}{}^{A}\alpha^{\alpha}\wedge D^{B}\,, \tag{6.25}$$

dobijamo da važi sledeći identitet:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\nabla_\nu Q^A{}_\rho - \rhd_{\alpha B}{}^A F^\alpha{}_{\nu\rho} D^B\right) = 0\,. \tag{6.26}$$

Bjankijevi identiteti igraju važnu ulogu u određivanju broja stepeni slobode u dejstvu.

Obeležimo sa p dimenzionalnost grupe G, sa q dimenzionalnost grupe H i sa r dimenzionalnost grupe L. Sada možemo dobiti broj inicijalnih polja u $3BF$ teoriji prebrojavanjem polja navedenih u tabeli 6.1.

$\alpha^\alpha{}_\mu$	$\beta^a{}_{\mu\nu}$	$\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$	$B^\alpha{}_{\mu\nu}$	$C^a{}_\mu$	D^A
$4p$	$6q$	$4r$	$6p$	$4q$	r

Tabela 6.1: Inicijalna polja u $3BF$ teoriji.

Dobijamo da je $N = 10(p+q) + 5r$. Slično se može odrediti broj nazavisnih komponenata veza druge klase prebrojavanjem komponenti veza prikazanih u tabeli (6.2).

$\chi(B)_\alpha{}^{jk}$	$\chi(C)_a{}^i$	$\chi(D)_A$	$\chi(\alpha)_\alpha{}^i$	$\chi(\beta)_a{}^{ij}$	$\chi(\gamma)_A{}^{ijk}$
$3p$	$3q$	r	$3p$	$3q$	r

Tabela 6.2: Veze druge klase u $3BF$ teoriji.

Dobijamo da je $S = 6(p+q) + 2r$.

Veze prve klase nisu sve međusobno nezavisne. Osim identiteta (5.30) i (5.32) koji su zadovoljeni i u slučaju $2BF$ teorije, u $3BF$ teoriji pojavljuje se novi identitet. Naime, veze prve klase zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}\nabla_i\Phi(\nabla D)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\delta_A{}^a\mathcal{S}(\nabla C)_a{}^j - \nabla_i\nabla_k\chi(\gamma)_A{}^{ijk} + \frac{1}{2}\chi(\beta)_a{}^{ij}\delta_A{}^a - \frac{1}{2}\rhd_\alpha{}^B{}_A D_B\Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^j \\ + \frac{1}{2}\rhd_\alpha{}^B{}_A D_B\partial_a{}^\alpha\chi(C)^{aj} = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}(\nabla_i Q_{Ak} + \rhd_{\alpha A}{}^B F^\alpha{}_{ik} D_B)\,,\end{aligned} \tag{6.27}$$

odnosno, kako je desna strana upravo $\lambda = 0$ komponenta Bjankijevog identiteta (6.26), dobija se:

$$\begin{aligned}\nabla_i\Phi(\nabla D)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\delta_A{}^a\mathcal{S}(\nabla C)_a{}^j - \nabla_i\nabla_k\chi(\gamma)_A{}^{ijk} + \frac{1}{2}\chi(\beta)_a{}^{ij}\delta_A{}^a \\ - \frac{1}{2}\rhd_\alpha{}^B{}_A D_B\Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^j + \frac{1}{2}\rhd_\alpha{}^B{}_A D_B\partial_a{}^\alpha\chi(C)^{aj} = 0\,.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Broj nezavisnih komponenti veza prve klase može se odrediti prebrojavanjem veza prikazanih u tabeli 6.3, a zatim oduzimanjem broja nezavisnih Bjankijevih identiteta od tog broja.

$\Phi(B)_\alpha{}^i$	$\Phi(C)_a$	$\Phi(\alpha)_\alpha$	$\Phi(\beta)_a{}^i$	$\Phi(\gamma)_A{}^{ij}$	$\Phi(\mathcal{F})^{\alpha i}$	$\Phi(\mathcal{G})^a$	$\Phi(\nabla C)^{ai}$	$\Phi(\nabla B)^\alpha$	$\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}$
$3p$	q	p	$3q$	$3r$	$3p-p$	q	$3q-q$	p	$3r-2r$

Tabela 6.3: Broj veza prve klase u $3BF$ teoriji.

Broj nezavisnih komponenata veza prve klase je:

$$F = 8(p+q) + 6r - p - q - 2r = 7(p+q) + 4r\,,$$

gde smo od broja komponenta veza prve klase navedenih u tabeli 6.3 oduzeli p relacija (5.30), q relacija (5.32) i $2r$ nezavisnih[1] relacija (6.28). Najzad, koristeći formulu za izračunavanje broja

[1] Jednačina (6.28) se sastoji od $3r$ identiteta, ali od njih su samo $2r$ međusobno nezavisni. Izračunavanjem divergencije izraza (6.28), dobijamo da je ona automatski jednaka nuli na osnovu Bjankijevog identiteta (5.24). Oduzimanjem od ukupnog broja relacija (6.28) ovih r relacija divergencije koje ne predstavljaju nove identitete koje veze u teoriji zadovoljavaju, dobijamo $2r$ nezavisnih identiteta (6.28).

stepeni slobode u teoriji (3.41), dobija se da je broj stepeni slobode u $3BF$ teoriji

$$n = 10(p+q) + 5r - 7(p+q) - 4r - \frac{6(p+q)+2r}{2} = 0\,, \tag{6.29}$$

odnosno da $3BF$ teorija nema propagirajućih stepeni slobode.

Generator gejdž transformacija za $3BF$ teoriju

Generator gejdž transformacija u $2BF$ teoriji dat je izrazom:

$$\begin{aligned} G \;=\; \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big(& (\nabla_0 \epsilon^\alpha{}_i)\Phi(B)_\alpha{}^i - \epsilon^\alpha{}_i \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i + (\nabla_0\epsilon^\alpha)\Phi(\alpha)_\alpha + \epsilon^\alpha\big(f_{\alpha\gamma}{}^\beta B_{\beta 0i}\Phi(B)^{\gamma i} \\ & + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)^{b0i} - \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij} \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla B)_\alpha\big) \\ & + (\nabla_0 \epsilon^a)\Phi(C)_a - \epsilon^a\left(\beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\right) \\ & + (\nabla_0\epsilon^a{}_i)\Phi(\beta)_a{}^i - \epsilon^a{}_i\left(C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^b{}_{0j} X_{\{ab\}}{}^A \Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\right) \\ & + \frac{1}{2}(\nabla_0 \epsilon^A{}_{ij})\Phi(\gamma)_A{}^{ij} - \frac{1}{2}\epsilon^A{}_{ij}\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}\Big)\,. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Ovde su $\epsilon^\alpha{}_i$, ϵ^α, ϵ^a, $\epsilon^a{}_i$ and $\epsilon^A{}_{ij}$ nezavisni parametri gejdž transformacija. Postupak izvođenja generatora (6.30) prikazan je u dodatku D.3.

Varijaciju forme varijabli i njihovih konjugovanih impulsa računamo primenom (3.56):

$$\begin{aligned}
\delta_0 B^\alpha{}_{0i} &= \nabla_0\epsilon^\alpha{}_i - f_{\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^\beta B^\gamma{}_{0i} & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{0i} &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma \epsilon^\beta \pi(B)_\gamma{}^{0i}\,, \\
&\quad -\epsilon^a \rhd_{\alpha a}{}^b \beta_{b0i} - \epsilon^a{}_i \rhd_{\alpha a}{}^b C_{b0}\,, & & \\
\delta_0 B^\alpha{}_{ij} &= 2\nabla_{[i}\epsilon^\alpha{}_{j]} - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon^\beta B^\gamma{}_{ij} - \epsilon^A{}_{ij} \rhd_{\alpha A}{}^B D_B & \delta_0\pi(B)_\alpha{}^{ij} &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(B)_\gamma{}^{ij}\,, \\
&\quad -\epsilon^a \rhd_{\alpha a}{}^b \beta_{bij} - 2\epsilon^a{}_{[j|} \rhd_{\alpha a}{}^b C_{b|i]}\,, & & \\
\delta_0 \alpha^\alpha{}_0 &= \nabla_0\epsilon^\alpha\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^0 &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_i\pi(B)_\gamma{}^{0i} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(\alpha)_\gamma{}^0 \\
& & &\quad - \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon^b\pi(C)_a{}^0 - \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon^b{}_i\pi(\beta)_a{}^i \\
& & &\quad -\frac{1}{2}\rhd_{\alpha B}{}^A\epsilon^B{}_{ij}\pi(\gamma)_A{}^{0ij}\,, \\
\delta_0\alpha^\alpha{}_i &= \nabla_i\epsilon^\alpha + \partial_a{}^\alpha\epsilon^a{}_i\,, & \delta_0\pi(\alpha)_\alpha{}^i &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta{}_j\pi(B)_\gamma{}^{ij} - f_{\alpha\beta}{}^\gamma\epsilon^\beta\pi(\alpha)_\gamma{}^i \\
& & &\quad - \rhd_{\alpha b}{}^\alpha\epsilon^b\pi(C)_a{}^i - \rhd_{\alpha b}{}^\alpha\epsilon^b{}_j\pi(\beta)_a{}^{ij} \\
& & &\quad -\frac{1}{2}\rhd_{\alpha B}{}^A\epsilon^B{}_{jk}\pi(\gamma)_A{}^{ijk} + \epsilon^{0ijk}\nabla_j\epsilon_{\alpha k}\,, \\
& & &\quad +\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\epsilon^a \rhd_{\alpha b}{}^a\beta^b{}_{jk}\,, \\
\delta_0 C^a{}_0 &= \nabla_0\epsilon^a - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a C^b{}_0\,, & \delta_0\pi(C)_a{}^0 &= \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(C)_b{}^0 - \epsilon_{bi} \rhd_{\alpha a}{}^b \pi(B)^{\alpha 0i}\,, \\
\delta_0 C^a{}_i &= \nabla_i\epsilon^a - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a C^b{}_i & \delta_0\pi(C)_a{}^i &= \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha a}{}^b\pi(C)_b{}^i - \epsilon_{bj} \rhd_{\alpha a}{}^b \pi(B)^{\alpha ij}\,, \\
&\quad +\epsilon^\alpha{}_i\partial^a{}_\alpha - 2\epsilon^b{}_i D_A X_{\{bc\}}{}^A g^{ac}\,, & &
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_0\beta^a{}_{0i} &= \nabla_0\epsilon^a{}_i - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a\beta_{b0i}\,, \\
\delta_0\beta^a{}_{ij} &= 2\nabla_{[i}\epsilon^a{}_{j]} - \epsilon^\alpha \rhd_{\alpha b}{}^a\beta^b{}_{ij} + \epsilon^A{}_{ij}\delta_A{}^a\,, \\
\delta_0\gamma^A{}_{0ij} &= -\epsilon^\alpha\gamma^B{}_{0ij}\rhd_{\alpha B}{}^A + \nabla_0\epsilon^A{}_{ij} \\
&\quad +4\epsilon^a{}_{[i|}\beta^b{}_{0|j]}\,X_{\{ab\}}{}^A\,, \\
\delta_0\gamma^A{}_{ijk} &= -\epsilon^\alpha\gamma^B{}_{ijk}\rhd_{\alpha B}{}^A + \nabla_i\epsilon^A{}_{jk} \\
&\quad -\nabla_j\epsilon^A{}_{ki} + \nabla_k\epsilon^A{}_{ij} - 3!\epsilon^a{}_{[i}\,\beta^b{}_{jk]}\,X_{\{ab\}}{}^A\,, \\
\delta_0 D^A &= -\epsilon^a\delta_a{}^A - \epsilon^\alpha D^B\rhd_{\alpha B}{}^A\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_0\pi(\beta)_a{}^{0i} &= \epsilon^\alpha\rhd_{\alpha a}{}^b\pi(\beta)_b{}^{0i} - \epsilon_b\rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha 0i} \\
&\quad +2\epsilon^b{}_jX_{\{ab\}}{}^A\pi(\gamma)_A{}^{0ij}\,, \\
\delta_0\pi(\beta)_a{}^{ij} &= \epsilon^\alpha\rhd_{\alpha a}{}^b\pi(\beta)_b{}^{ij} - \epsilon_b\rhd_{\alpha a}{}^b\pi(B)^{\alpha ij} \\
&\quad +2\epsilon^b{}_kX_{\{ab\}}{}^A\pi(\gamma)_A{}^{ijk} \\
&\quad -\epsilon^{0ijk}\nabla_k\epsilon_a - \epsilon^{0ijk}\epsilon^\alpha{}_k\partial_{\alpha a}\,, \\
\delta_0\pi(\gamma)_A{}^{0ij} &= \epsilon^\alpha\rhd_{\alpha A}{}^B\,\pi(\gamma)_B{}^{0ij}\,, \\
\delta_0\pi(\gamma)_A{}^{ijk} &= \epsilon^\alpha\rhd_{\alpha A}{}^B\,\pi(\gamma)_B{}^{ijk} - \epsilon^{oijk}\delta_{aA}\epsilon^a\,, \\
\delta_0\pi(D)_A &= 2\epsilon^a{}_iX_{\{ab\}A}\pi(C)^{bi} \\
&\quad -\frac{1}{2}\epsilon_B{}^{ij}\rhd_{\alpha A}{}^B\pi(B)^\alpha{}_{0ij} \\
&\quad +\epsilon^\alpha\rhd_{\alpha A}{}^B\pi(D)_B\,.
\end{aligned}
$$

6.1.2 Simetrije 3BF dejstva

Dejstvo (6.1) poseduje dodatne simetrije u odnosu na transformacije simetrija definisane za 2BF dejstvo u Teoremama 10, 11 i 12. Naime, važe sledeće teoreme [19].

Grupa G

Najpre, posmatrajmo infinitezimalne transformacije određene parametrom $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$, date varijacijama formi

$$
\begin{aligned}
\delta_0\alpha^\alpha{}_\mu &= -\,\partial_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha - f_{\beta\gamma}{}^\alpha\alpha^\beta{}_\mu\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\gamma\,, & \delta_0 B^\alpha{}_{\mu\nu} &= f_{\beta\gamma}{}^\alpha\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\beta B^\gamma{}_{\mu\nu}\,, \\
\delta_0\beta^a{}_{\mu\nu} &= \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\beta^b{}_{\mu\nu}\,, & \delta_0 C^a{}_\mu &= \rhd_{\alpha b}{}^a\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha C^b{}_\mu\,, \\
\delta_0\gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &= \rhd_{\alpha B}{}^A\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\gamma^B{}_{\mu\nu\rho}\,, & \delta_0 D^A &= \rhd_{\alpha B}{}^A\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha D^B\,,
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

koje analogno možemo da zapišemo na sledeći način:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\alpha & \to & \alpha' & = & \alpha + \nabla\epsilon_{\mathfrak{g}}\,, & B & \to & B' & = B + [B,\epsilon_{\mathfrak{g}}]\,, \\
\beta & \to & \beta' & = & \beta - \epsilon_{\mathfrak{g}}\rhd\beta\,, & C & \to & C' & = C - \epsilon_{\mathfrak{g}}\rhd C\,, \\
\gamma & \to & \gamma' & = & \gamma - \epsilon_{\mathfrak{g}}\rhd\gamma\,, & D & \to & D' & = D - \epsilon_{\mathfrak{g}}\rhd D\,,
\end{array}
\tag{6.33}
$$

Na osnovu ovih infinitezimalnih transformacija možemo ekstrapolirati konačnu transformaciju definisanu u Teoremi 14.

Teorema 14 (G-gejdž transformacije) *U 3BF teoriji nad proizvoljnim 2-ukrštenim modulom $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija,*

$$
\begin{array}{llll}
\alpha & \to & \alpha' = \mathrm{Ad}_g\alpha + g\mathrm{d}g^{-1}\,, & B \to B' = gBg^{-1}\,, \\
\beta & \to & \beta' = g\rhd\beta\,, & C \to C' = g\rhd C\,, \\
\gamma & \to & \gamma' = g\rhd\gamma\,, & D \to D' = g\rhd D\,,
\end{array}
\tag{6.34}
$$

gde je $g = \exp(\epsilon_{\mathfrak{g}}\cdot\hat{G}) = \exp(\epsilon_{\mathfrak{g}\alpha}\hat{G}^\alpha) \in G$ i $\epsilon_{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}_4 \to \mathfrak{g}$ parametar transformacije.

Dokaz. Transformacija 3-koneksije definisana u Teoremi 14 dovodi do sledeće transformacije 3-krivine:

$$\mathcal{F} \;\rightarrow\; \mathcal{F}' = g\mathcal{F}g^{-1}\,, \qquad \mathcal{G} \;\rightarrow\; \mathcal{G}' = g \rhd \mathcal{G}\,, \qquad \mathcal{H} \;\rightarrow\; \mathcal{H}' = g \rhd \mathcal{H}\,, \tag{6.35}$$

Primenom ove transformacije, 3BF dejstvo postaje:

$$\begin{aligned} S_{3BF} &= \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle B, \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C, \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D, \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{h}} \Big) \\ \rightarrow S'_{BF} &= \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle gBg^{-1}, g\mathcal{F}g^{-1} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle g \rhd C, g \rhd \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle g \rhd D, g \rhd \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}} \Big)\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Iz G-invarijantnosti bilinearnih formi $\langle \_, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle \_, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ i $\langle \_, \_ \rangle_{\mathfrak{l}}$ sledi da je 3BF dejstvo invarijantno. Invarijantnost se može takođe pokazati na sličan način kao u Teoremi 8. ∎

Razmatranjem dve uzastopne infinitezimalne G-gejdž transformacije, određene malim parametrima ${\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}{}_1$ i ${\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\beta}{}_2$, izračunavamo komutator dva generatora G-gejdž transformacija na sličan način kao što je to urađeno u slučaju BF teorije. Dobijamo da generatori G-gejdž transformacija definisanih u Teoremi 14 zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\hat{G}_{\alpha}, \hat{G}_{\beta}] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\hat{G}_{\gamma}\,, \tag{6.37}$$

gde su $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ strukturne konstante algebre $\mathfrak{g}$. Primetimo da, isto kao što je to bio slučaj kod BF i 2BF transformacija, postoji izomorfizam između generatora $\hat{G}_{\alpha} \cong \tau_{\alpha}$, tj. možemo zaključiti da je grupa G-gejdž transformacija iz Teoreme 14 upravo grupa G iz 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$. Ovo je važan rezultat, koji neće važiti za preostale transformacije simetrije, kao što ćemo videti u nastavku.

Gejdž grupa $\tilde{H}_L$

Razmotrimo sada varijacije formi koje odgovaraju parametru transformacija ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{i}$. Na primer, iz jednačina (6.31) se može videti da je varijacija formi promenljivih $\alpha^{\alpha}{}_0$ i $\alpha^{\alpha}{}_i$:

$$\delta_0\alpha^{\alpha}{}_o = 0\,, \qquad \delta_0\alpha^{\alpha}{}_i = -\partial_a{}^{\alpha}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_i\,. \tag{6.38}$$

Uzimajući u obzir da dejstvo generatora (6.30) daje transformacije simetrije na jednoj prostornoj hiperpovrši Σ_3 sa vremenskom komponentom parametra transformacije jednakom nuli ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_0 = 0$, može se ekstrapolirati transformacija za parametre prostorvremenskih gejdž transformacija ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}$. Dobijamo da je varijacija forme promenljive $\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$

$$\delta_0\alpha^{\alpha}{}_{\mu} = -\partial_a{}^{\alpha}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}\,, \tag{6.39}$$

a slično se može zaključiti i za preostale varijable. Tako je infinitezimalna transformacija u celom prostorvremenu koji odgovara parametru ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}$ data varijacijama formi:

$$\begin{aligned} \delta_0\alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= -\partial_a{}^{\alpha}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}\,, & \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= 2C_{a[\mu|}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{b}{}_{|\nu]} \rhd_{\beta b}{}^{a} g^{\alpha\beta}\,, \\ \delta_0\beta^{a}{}_{\mu\nu} &= -2\nabla_{[\mu|}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{|\nu]}\,, & \delta_0 C^{a}{}_{\mu} &= 2D_A X_{(ab)}{}^{A}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{b}{}_{\mu}\,, \\ \delta_0\gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} &= 3!\beta^{a}{}_{[\mu\nu}{\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{b}{}_{\rho]}X_{(ab)}{}^{A}\,, & \delta_0 D &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Za ove infinitezimalne transformacije dobijaju se konačne transformacije simetrije date u Teoremi 15.

Teorema 15 ($\boldsymbol{H}$-gejdž transformacije) *U 3BF teoriji nad proizvoljnim 2-ukrštenim modulom* $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$*, sledeća transformacija je simetrija:*

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha & \to & \alpha' & = & \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \\
\beta & \to & \beta' & = & \beta - \nabla'\epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \\
\gamma & \to & \gamma' & = & \gamma + \{\beta', \epsilon_{\mathfrak{h}}\}_{\mathrm{pf}} + \{\epsilon_{\mathfrak{h}}, \beta\}_{\mathrm{pf}}\,,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
B & \to & B' & = & B - C' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} D\,, \\
C & \to & C' & = & C - D \wedge^{\mathcal{X}_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D \wedge^{\mathcal{X}_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \\
D & \to & D' & = & D\,,
\end{array}
\tag{6.41}
$$

gde je parametar $\epsilon_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ *proizvoljna* 1*-forma element algebre* $\mathfrak{h}$*, a oznaka* ∇' *je kovarijantni izvod sa koneksijom* α'*. Preslikavanja* $\mathcal{T}$*,* $\mathcal{D}$*,* $\mathcal{X}_1$ *i* $\mathcal{X}_2$ *su definisana u Dodatku A, jednačinama (A.13), (A.51), (A.47) i (A.48).*

Dokaz. Primetimo da se 3-krivina pri transformacijama simetrije definisanim u Teoremi 15 transformiše na sledeći način:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' = \mathcal{F}\,, \\
\mathcal{G} & \to & \mathcal{G}' = \mathcal{G} - \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \\
\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \{\mathcal{G}', \epsilon_{\mathfrak{h}}\}_{\mathrm{pf}} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \mathcal{G}\}_{\mathrm{pf}}\,.
\end{array}
\tag{6.42}
$$

Koristeći izraze za transformacije 3-krivine (6.42) i za transformacije Lagranževih množitelja, dobija se da je transformisano dejstvo S'_{3BF}:

$$
\begin{aligned}
S'{}_{3BF} = & S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \Big(- \langle C' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} - \langle \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} D, \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} - \langle C', \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \epsilon_{\mathfrak{h}}\rangle_{\mathfrak{h}} - \langle D \wedge^{\mathcal{X}_1} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}} \\
& - \langle D \wedge^{\mathcal{X}_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D, \{\mathcal{G}, \epsilon_{\mathfrak{h}}\}_{\mathrm{pf}}\rangle_{\mathfrak{l}} - \langle D, \{\mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \epsilon_{\mathfrak{h}}, \epsilon_{\mathfrak{h}}\}_{\mathrm{pf}}\rangle_{\mathfrak{l}} - \langle D, \{\epsilon_{\mathfrak{h}}\,, \mathcal{G}\}_{\mathrm{pf}}\rangle_{\mathfrak{l}} \Big)\,.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

Koristeći definicije preslikavanja $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, date u Dodatku A, vidimo da se preostali članovi međusobno pokrate, tj. da dejstvo ostaje invarijantno pri ovim transformacijama $S'{}_{3BF} = S_{3BF}$. Konkretno, prvi član se skraćuje sa trećim, drugi sa sedmim, četvrti sa osmim i peti član se skraćuje sa šestim članom. ■

Možemo pokazati da H-gejdž transformacije ne čine grupu. Naime, može se proveriti da dve uzastopne H-gejdž transformacije ne daju transformaciju iste vrste, tačnije, aksiom zatvaranja grupe nije zadovoljen. Analogan slučaj imamo kod dobro poznate strukture Lorencove grupe, gde bust transformacije nisu zatvorene tj. ne formiraju grupu. Zaista, moraju se uzeti u obzir i rotacije i bustovi da bi se dobio skup transformacija koje formiraju Lorencovu grupu. U slučaju H-gejdž transformacija, pokazaćemo da pored njih treba uzeti u obzir i transformacije koje odgovaraju parametru $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij}$. Iz jednačina (6.31) vidimo varijacije formi na prostornoj hiperpovrši Σ_3 koje odgovaraju ovom parametru. Slično kao što smo to uradili u slučaju H-gejdž trasformacija, možemo ekstrapolirati prostorvremenske varijacije formi koje odgovaraju parametru $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}$:

$$
\begin{array}{lll}
\delta_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} & = & 0\,, \\[1ex]
\delta_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu} & = & \delta_A{}^{a} \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}\,, \\[1ex]
\delta_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} & = & \nabla_{\mu}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\nu\rho} - \nabla_{\nu}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\rho} + \nabla_{\rho}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}\,,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} & = & -D_A \triangleright_{\beta B}{}^{A} \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{B}{}_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\,, \\[1ex]
\delta_0 C^{a}{}_{\mu} & = & 0\,, \\[1ex]
\delta_0 D^{A} & = & 0\,.
\end{array}
\tag{6.44}
$$

Ove infinitezimalne transformacije odgovaraju konačnim transformacijama simetrije definisanim u Teoremi 16.

Teorema 16 (L-gejdž transformacije) *U $3BF$ teoriji nad proizvoljnim 2-ukrštenim modulom $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija:*

$$\begin{array}{lllllllll} \alpha & \to & \alpha' & = & \alpha\,, & B & \to & B' & = & B + D\wedge^{\mathcal{S}}\epsilon_{\mathfrak{l}}\,,\\ \beta & \to & \beta' & = & \beta+\delta\epsilon_{\mathfrak{l}}\,, & C & \to & C' & = & C\,,\\ \gamma & \to & \gamma' & = & \gamma+\nabla\epsilon_{\mathfrak{l}}\,, & D & \to & D' & = & D\,, \end{array} \tag{6.45}$$

gde je parametar transformacije $\epsilon_{\mathfrak{l}} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ proizvoljna 2-forma element algebre $\mathfrak{l}$, a preslikavanje $\mathcal{S}$ je definisano u Dodatku A jednačinom (A.43).

Dokaz. Pri transformacijama definisanim u Teoremi 16 3-krivina se transformiše na sledeći način:

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}' & = & \mathcal{F}\,,\\ \mathcal{G} & \to & \mathcal{G}' & = & \mathcal{G}\,,\\ \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}' & = & \mathcal{H}+\mathcal{F}\wedge^{\triangleright}\epsilon_{\mathfrak{l}}\,. \end{array} \tag{6.46}$$

Uzimajući u obzir transformacije 3-krivine (6.46) i transformacije Lagranževih množitelja, $3BF$ dejstvo se transformiše:

$$S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle D\wedge^{\mathcal{S}}\epsilon_{\mathfrak{l}}, \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle D, \mathcal{F}\wedge^{\triangleright}\epsilon_{\mathfrak{l}}\rangle_{\mathfrak{l}} \Big)\,. \tag{6.47}$$

Primenjujući definiciju preslikavanja $\mathcal{S}$ datu u Dodatku A, članovi u zagradi se pokrate. ■

Označimo generatore H-gejdž transformacija definisanih u Teoremi 15 kao $\hat{H}_a{}^{\mu}$ i generatore L-gejdž transformacija definisanih u Teoremi 16 kao $\hat{L}_A{}^{\mu\nu}$. Sada možemo proveriti da li H-gejdž transformacije definisane u Teoremi 15 formiraju grupu. Ako izvršimo dve uzastopne H-gejdž transformacije, definisane parametrima $\epsilon_{\mathfrak{h}1}$ i $\epsilon_{\mathfrak{h}2}$, dobijamo

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot\hat{H}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot\hat{H}} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot\hat{H}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot\hat{H}} = 2\left(\{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\mathrm{pf}} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\mathrm{pf}}\right)\cdot\hat{L}\,, \tag{6.48}$$

gde $\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H} = \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_{\mu}\hat{H}_a{}^{\mu}$ i $\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot\hat{L} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{\mu\nu}\hat{L}_A{}^{\mu\nu}$. Koristeći jednačinu analognu BCH formuli (4.38), dobijamo da je komutator generatora dve H-gejdž transformacije generator L-gejdž transformacije (detalji računa dati su u Dodatku D):

$$[\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{H}_b{}^{\nu}] = 2X_{(ab)}{}^A\hat{L}_A{}^{\mu\nu}\,. \tag{6.49}$$

Transformacije definisane u Teoremi 16 su linearne transformacije, a dve uzastopne L-gejdž transformacije daju L-gejdž transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{l}1}+\epsilon_{\mathfrak{l}2}$, tj. formalno zapisano:

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}1}\cdot\hat{L}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}2}\cdot\hat{L}} = \mathrm{e}^{(\epsilon_{\mathfrak{l}1}+\epsilon_{\mathfrak{l}2})\cdot\hat{L}}\,, \tag{6.50}$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da L-gejdž transformacije komutiraju:

$$[\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{L}_B{}^{\rho\sigma}] = 0\,. \tag{6.51}$$

Stoga, L-gejdž transformacije čine Abelovu grupu $\tilde{L}$. Prema strukturi indeksa parametara i generatora, možemo zaključiti da je grupa $\tilde{L}$ izomorfna grupi $\mathbb{R}^{6r}$, gde je r red grupe L:

$$\tilde{L} \cong \mathbb{R}^{6r}\,. \tag{6.52}$$

Obratimo pažnju da Abelovu grupu $\tilde{L}$ ne treba pomešati sa ne-Abelovom grupom L koja je deo strukture 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$.

Razmotrimo sada odnos između H-gejdž transformacija i L-gejdž transformacija. Na osnovu jednakosti,

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot\hat{L}} = \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot\hat{L}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}}\,, \tag{6.53}$$

možemo zaključiti da je komutator između generatora H-gejdž transformacija i generatora L-gejdž transformacija jednak nuli:

$$[\hat{H}_a{}^{\mu}, \hat{L}_A{}^{\nu\rho}] = 0\,. \tag{6.54}$$

Na osnovu relacija (6.49), (6.51) i (6.54) vidimo da H-gejdž transformacije zajedno sa L-gejdž transformacijama formiraju grupu, obeležimo je kao $\tilde{H}_L$. Na kraju, dejstvo grupe G na H-gejdž i L-gejdž transformacije dobijamo izračunavanjem sledećih izraza,

$$[\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot \hat{H}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{h}}) \cdot \hat{H}\,, \qquad [\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{l}} \cdot \hat{L}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{l}}) \cdot \hat{L}\,, \tag{6.55}$$

na osnovu kojih dobijamo komutacione relacije

$$\begin{aligned} [\hat{G}_\alpha, \hat{H}_a{}^{\mu}] &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\, \hat{H}_b{}^{\mu}\,, \\ [\hat{G}_\alpha, \hat{L}_A{}^{\mu\nu}] &= \rhd_{\alpha A}{}^{B}\, \hat{L}_B{}^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Teoreme 14, 15 i 16 predstavljaju G-, H- i L-gejdž transformacije, za više informacija videti [18], [40]).

Grupe $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$

Zatim, razmotrimo infinitezimalnu transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$, datu varijacijama formi (6.31). Slično kao što je to učinjeno u prethodnom delu, na osnovu varijacija formi varijabli dobijenih kao rezultat Hamiltonove analize tj. transformacija na jednoj prostornoj hiperpovrši Σ_3, možemo pogoditi transformacije u celom prostorvremenu. Imajući u vidu da varijacije na hiperpovrši imaju vremensku komponentu parametra jednaku nuli $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_0 = 0$, ekstrapoliramo varijacije formi na celom prostorvremenu koje odgovaraju parametru $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu}$:

$$\begin{aligned} \delta_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= 0\,, & \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= -2\nabla_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{|\nu]}\,, \\ \delta_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu} &= 0\,, & \delta_0 C^{a}{}_{\mu} &= -\partial^{a}{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu}\,, \\ \delta_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} &= 0\,, & \delta_0 D^{A} &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Na osnovu ovog rezultata, dobija se konačna transformacija simetrije u celom prostorvremenu, kao što definisano Teoremom 17, koje nazivamo M-gejdž transformacijama.

Teorema 17 (M-gejdž transformacije) *U 3BF teoriji nad proizvoljnim 2-ukrštenim modulom $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija*

$$\begin{array}{lllll} \alpha & \to & \alpha' & = & \alpha\,, \\ \beta & \to & \beta' & = & \beta\,, \\ \gamma & \to & \gamma' & = & \gamma\,, \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} B & \to & B' & = & B - \nabla\epsilon_{\mathfrak{m}}\,, \\ C^a & \to & C'^a & = & C^a - \partial^a{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}\,, \\ D & \to & D' & = & D\,, \end{array} \tag{6.58}$$

gde je parametar transformacija $\epsilon_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{g}$.

Dokaz. Razmotrimo transformaciju 3BF dejstva pri transformacijama definisanim u Teoremi 17. Dobijamo:

$$S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(-\frac{1}{2}(\nabla_{\mu}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\nu})\mathcal{F}_{\alpha\rho\sigma} - \frac{1}{3!}\partial^{a}{}_{\alpha}\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu}\mathcal{G}_{a\nu\rho\sigma} \right)\,. \tag{6.59}$$

Primenom definicije 3-krivine (2.3.5):

$$S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big(-\frac{1}{2}(\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\nu)\,(F_{\alpha\rho\sigma} - \partial^a{}_\alpha \beta_{a\rho\sigma}) - \frac{1}{3!}\partial^a{}_\alpha \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu \left(3\nabla_\nu \beta_{a\rho\sigma} - \delta^A{}_a \gamma_{A\nu\rho\sigma}\right)\Big)\,. \tag{6.60}$$

U prethodnom izrazu drugi i treći član se pokrate, dok je poslednji član nula zbog identiteta (2.73), pa sledi:

$$S'{}_{3BF} = S_{3BF} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu \nabla_\nu F_{\alpha\rho\sigma}\,. \tag{6.61}$$

Na kraju, član $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\nu F_{\alpha\rho\sigma} = 0$ je upravo BI (5.24). Zaključujemo da je S_{3BF} invarijantno pri transformacijama definisanim Teoremom 17. ■

Možemo pokazati da su transformacije definisane u Teoremi 17 linearne transformacije, tj. da dve uzastopne M-gejdž transformacije daju jednu M-gejdž transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{m}1} + \epsilon_{\mathfrak{m}2}$. Ako generatore M-gejdž transformacija obeležimo sa $\hat{M}_\alpha{}^\mu$, možemo pisati

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}1}\cdot \hat{M}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}2}\cdot \hat{M}} = \mathrm{e}^{(\epsilon_{\mathfrak{m}1}+\epsilon_{\mathfrak{m}2})\cdot \hat{M}}\,, \tag{6.62}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{m}} \cdot \hat{M} = \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu \hat{M}_\alpha{}^\mu$. Dobijamo komutacionu relaciju:

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{M}_\beta{}^\nu] = 0\,. \tag{6.63}$$

Stoga, M-gejdž transformacije formiraju Abelovu grupu $\tilde{M}$. Prema strukturi indeksa njenih parametara i generatora, vidimo da je ova grupa izomorfna sa grupom $\mathbb{R}^{4p}$, gde je p dimenzija grupe G:

$$\tilde{M} \cong \mathbb{R}^{4p}\,. \tag{6.64}$$

Zatim se može ispitati odnos M-gejdž transformacija sa G, H i L-gejdž transformacijama definisanim u prethodnim delovima. Konkretno, za generatore G-gejdž transformacija važi relacija,

$$[\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{m}} \cdot \hat{M}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \triangleright \epsilon_{\mathfrak{m}}) \cdot \hat{M}\,, \tag{6.65}$$

na osnovu čega dobijamo komutator:

$$[\hat{G}_\alpha\,, \hat{M}_\beta{}^\mu] \;=\; f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu\,. \tag{6.66}$$

Za generatore H- i L-gejdž transformacija, dobijamo relacije

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot \hat{H}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot \hat{M}} &= \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot \hat{M}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot \hat{H}}\,, \\ \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot \hat{L}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot \hat{M}} &= \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot \hat{M}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot \hat{L}}\,, \end{aligned} \tag{6.67}$$

na osnovu čega zaključujemo da generatori M-gejdž transformacija komutiraju kako sa generatorima H-gejdž transformacija, tako i sa generatorima L-gejdž transformacija:

$$[\hat{H}_a, \hat{M}_\alpha{}^\mu] = 0\,, \quad [\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{M}_\alpha{}^\rho] = 0\,. \tag{6.68}$$

Poslednji tip transformacija dobijamo razmatranjem varijacija formi varijabli dobijenih u (6.31) koje odgovaraju parametru transformacija $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a$,

$$\begin{aligned} \delta_0 \alpha^\alpha{}_\mu &= 0\,, & \delta_0 B^\alpha{}_{\mu\nu} &= \beta_{b\mu\nu} \rhd_{\alpha' a}{}^b \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a g^{\alpha\alpha'}\,, \\ \delta_0 \beta^a{}_{\mu\nu} &= 0\,, & \delta_0 C^a{}_\mu &= -\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a\,, \\ \delta_0 \gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &= 0\,, & \delta_0 D^A &= \delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a\,. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Ove, N-gejdž transformacije, definisane su Teoremom 18. Primetimo da su N-gejdž transformacije transformacije u celom prostorvremenu, pošto parametar ne nosi prostorvremenske indekse.

Teorema 18 (*N*-gejdž transformacije) *U* $3BF$ *teoriji nad proizvoljnim 2-ukrštenim modulom* $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$*, sledeća transformacija je simetrija*

$$\begin{array}{lllllll} \alpha & \to & \alpha' & = & \alpha\,, & B & \to & B' & = & B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\ \beta & \to & \beta' & = & \beta\,, & C & \to & C' & = & C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\ \gamma & \to & \gamma' & = & \gamma\,, & D^A & \to & D'^A & = & D^A + \delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a\,, \end{array} \tag{6.70}$$

gde je parametar $\epsilon_{\mathfrak{n}} : \mathcal{M}_4 \to \mathfrak{h}$ *proizvoljna* 0*-forma element algebre* $\mathfrak{h}$*.*

Dokaz. Pri transformacijama definisanim Teoremom 18, $3BF$ dejstvo se transformiše na sledeći način:

$$S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} \beta_{b\mu\nu} \triangleright_{\alpha a}{}^b \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \mathcal{F}^\alpha{}_{\rho\sigma} - \frac{1}{3!} (\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a) \mathcal{G}_{a\nu\rho\sigma} + \frac{1}{4!} \delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \mathcal{H}_{A\,\mu\nu\rho\sigma} \right) . \tag{6.71}$$

Primenom definicije 3-krivine (2.118), dobijamo:

$$\begin{aligned} S'_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Big(& \frac{1}{4} \beta_{b\mu\nu} \triangleright_{\alpha a}{}^b \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \left(F^\alpha{}_{\rho\sigma} - \partial_c{}^\alpha \beta^c{}_{\rho\sigma} \right) - \frac{1}{3!} (\nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a) \left(3 \nabla_\nu \beta_{a\rho\sigma} - \delta^A{}_a \gamma_{A\,\nu\rho\sigma} \right) \\ & + \frac{1}{4!} \delta^A{}_a \epsilon^a \left(4 \nabla_\mu \gamma_{A\,\nu\rho\sigma} + 6 X_{(bc)A} \beta^b{}_{\mu\nu} \beta^c{}_{\rho\sigma} \right) \Big) . \end{aligned} \tag{6.72}$$

Nakon parcijalne integracije poslednji član u prvom redu jednačine (6.72) i prvim član u drugom redu se skraćuju. Takođe, koristeći identitet

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a) \beta_{a\rho\sigma} = -\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \beta_{b\rho\sigma} \triangleright_{\alpha a}{}^b \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a F^\alpha{}_{\mu\nu}\,, \tag{6.73}$$

pokratiće će i prvi i treći član u prvom redu. Konačno, dobijamo izraz:

$$S'{}_{3BF} = S_{3BF} + \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}x^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{\mathfrak{n}a} \triangleright_{\alpha(b|}{}^a \partial_{|c)}{}^\alpha \beta^b{}_{\mu\nu} \beta^c{}_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \epsilon_{\mathfrak{n}a} \delta_A{}^a X_{(bc)}{}^A \beta^b{}_{\mu\nu} \beta^c{}_{\rho\sigma} \right) . \tag{6.74}$$

Zbir preostala dva člana jednak je nuli zbog simetrizovanog oblika identiteta (2.87),

$$\triangleright_{\alpha(b|}{}^a \partial_{|c)}{}^\alpha + \delta_A{}^a X_{(bc)}{}^A = f_{(bc)}{}^a = 0\,,$$

zbog antisimetričnosti strukturnih konstanti. Zaključujemo da dejstvo S_{3BF} ostaje invarijantno pri transformacijama definisanim u Teoremi 18. ■

Transformacije definisane Teoremom 18 – N-gejdž transformacije, formiraju grupu koju obeležavamo sa $\tilde{N}$. Imamo na kraju da su ove transformacije takođe linearne, a dve N-gejdž transformacije daju N-gejdž transformaciju sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{n}1} + \epsilon_{\mathfrak{n}2}$. Ako generatore grupe $\tilde{N}$ obeležimo sa $\hat{N}_a$, možemo da pišemo

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}1} \cdot \hat{N}} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}2} \cdot \hat{N}} = \mathrm{e}^{(\epsilon_{\mathfrak{n}1} + \epsilon_{\mathfrak{n}2}) \cdot \hat{N}}\,, \tag{6.75}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot \hat{N} = \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \hat{N}_a$. Iz ovoga sledi da je komutator dva generatora N-gejdž transformacija,

$$[\hat{N}_a, \hat{N}_b] = 0\,, \tag{6.76}$$

tj. da je $\tilde{N}$ Abelova grupa. Pritom, indeksna struktura parametara i generatora ukazuje na to da je $\tilde{N}$ izomorfna sa grupom $\mathbb{R}^q$, gde je q dimenzija grupe H:

$$\tilde{N} \cong \mathbb{R}^q\,. \tag{6.77}$$

Zatim se može ispitati odnos N-gejdž transformacija i G, H i L-gejdž transformacijama definisanim u prethodnim delovima. Konkretno, za generatore G-gejdž transformacija važi relacija

$$[\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}, \epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot \hat{N}] \;=\; (\epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \epsilon_{\mathfrak{n}}) \cdot \hat{N} \,, \tag{6.78}$$

tj. komutator G-gejdž i N-gejdž transformacija je:

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{N}_a] \;=\; \rhd_{\alpha a}{}^b \, \hat{N}_b \,. \tag{6.79}$$

Ispitajmo sada odnos između N-gejdž i H-gejdž transformacija, izračunavajući sledeći izraz:

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot\hat{H}} \;=\; -(\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \cdot \hat{M} \,. \tag{6.80}$$

Dokaz je dat u Dodatku D. Dobijamo da je komutator H- i N-gejdž transformacija linearna kombinacija M-gejdž generatora:

$$[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{N}^b] = \rhd_{\alpha a}{}^b \hat{M}^{\alpha\mu} \,. \tag{6.81}$$

Analognim postupkom, dobijamo relacije

$$\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot\hat{L}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}} = \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}\cdot\hat{L}} \,, \quad \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot\hat{M}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}} = \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot\hat{N}}\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{m}}\cdot\hat{M}} \,, \tag{6.82}$$

iz kojih sledi da generatori L- i M-gejdž transformacija komutiraju sa generatorima N-gejdž transformacija:

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{N}_a] = 0 \,, \qquad [\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{N}_a] = 0 \,. \tag{6.83}$$

Ukupna gejdž grupa simetrije $3BF$ dejstva

Sumirajući rezultate prethodnih delova, može se napisati ukupna algebra generatora grupe gejdž simetrija na sledeći način.

- Algebra $\mathfrak{g}$ koja odgovara grupi G iz 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G \,, \rhd \,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ data je komutacionim relacijama:

$$[\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] \;=\; f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{G}_\gamma \,. \tag{6.84}$$

- Algebra koja odgovara grupi $\tilde{H}_L$ sastoji se od generatora H- i L-gejdž transformacija koji zadovoljavaju komutacione relacije:

$$[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{H}_b{}^\nu] = 2X_{(ab)}{}^A \hat{L}_A{}^{\mu\nu} \,, \qquad [\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{L}_B{}^{\rho\sigma}] = 0 \,, \qquad [\hat{H}_a{}^\mu, \hat{L}_A{}^{\nu\rho}] = 0 \,. \tag{6.85}$$

- Algebra generatora M-gejdž transformacija određena je komutacionim relacijama:

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{M}_\beta{}^\nu] \;=\; 0 \,. \tag{6.86}$$

- Algebra generatora N-gejdž transformacija određena je komutacionim relacijama:

$$[\hat{N}_a, \hat{N}_b] \;=\; 0 \,. \tag{6.87}$$

- Komutatori između generatora grupa $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$:

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{N}_a] \;=\; 0\,. \tag{6.88}$$

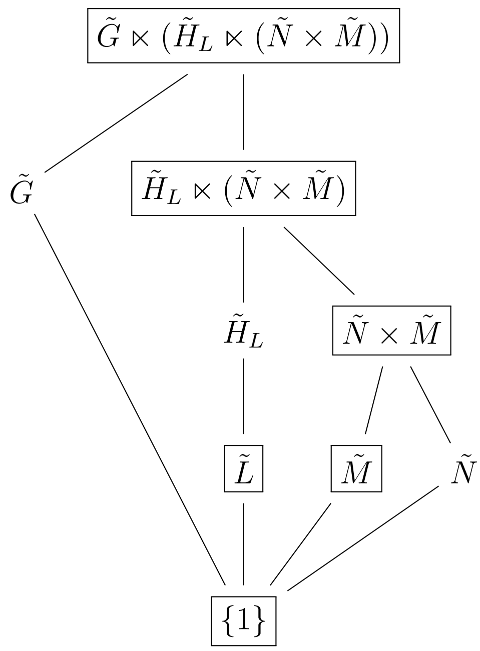
- Dejstvo generatora grupe $\tilde{H}_L$ na generatore M- i N-gejdž transformacija:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{N}^b] &= \rhd_{\alpha a}{}^b \hat{M}^{\alpha\mu}\,,\\
[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{M}_\alpha{}^\nu] &= 0\,,\\
[\hat{L}_A{}^{\nu\rho}, \hat{M}_\alpha{}^\mu] &= 0\,,\\
[\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{N}_a] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{6.89}$$

- Dejstvo generatora grupe G na generatore H-, L-, M- i N-gejdž transformacija:

$$\begin{aligned}
[\hat{G}_\alpha, \hat{H}_a{}^\mu] &= \rhd_{\alpha a}{}^b\, \hat{H}_b{}^\mu\,,\\
[\hat{G}_\alpha, \hat{L}_A{}^{\mu\nu}] &= \rhd_{\alpha A}{}^B \hat{L}_B{}^{\mu\nu}\,,\\
[\hat{G}_\alpha\,, \hat{M}_\beta{}^\mu] &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu\,,\\
[\hat{G}_\alpha, \hat{N}_a] &= \rhd_{\alpha a}{}^b\, \hat{N}_b\,.
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Na osnovu jednačina (6.84)-(6.90) dobijamo strukturu ukupne gejdž grupe simetrija. Na dijagramu Heseovog tipa prikazanom na slici 6.1, prikazane su sve relevantne podgrupe ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$, pri čemu su *invarijantne podgrupe* uokvirene.



Slika 6.1: Relevantne podgrupe ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$. Invarijantne podgrupe su uokvirene.

Na osnovu komutacionih relacija vidimo da su grupe $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$ podgrupe ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$. Da su grupe $\tilde{L}$ i $\tilde{M}$ invarijantne podgrupe zaključujemo na osnovu toga što su jedini netrivijani komutatori generatora $\hat{L}_A{}^{\mu\nu}$, odnosno $\hat{M}_\alpha{}^\mu$, i generatora grupe G jednaki nekoj linearnoj kombinaciji generatora grupe $\tilde{L}$, odnosno $\tilde{M}$. Da grupa $\tilde{N}$ nije invarijantna podgrupa, zaključujemo na osnovu komutatora generatora $\hat{N}_a$ i generatora $\hat{H}_a{}^\mu$ koji su jednaki linearnim kombinacijama generatora $\hat{M}_\alpha{}^\mu$. Ipak, generatori $\tilde{N}$ i $\tilde{M}$ međusobno komutiraju, pa je grupa $\tilde{N}$ invarijantna podgrupa direktnog proizvoda grupa $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$, tj. grupe $\tilde{N}\times\tilde{M}$. Grupa $\tilde{N}\times\tilde{M}$ je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija.

Sa druge strane, u prethodnom delu smo videli da generatori H-gejdž transformacija zajedno sa generatorima L-gejdž transformacija formiraju grupu $\tilde{H}_L$. Da ova grupa nije invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$ vidimo iz oblika komutatora $\hat{H}_a{}^\mu$ i $\hat{N}_b$. Sada, ove dve podgrupe, $\tilde{N}\times\tilde{M}$ i $\tilde{H}_L$ formiraju semidirektan proizvod $\tilde{H}_L\ltimes(\tilde{N}\times\tilde{M})$. Proizvod je semidirektan jer grupa $\tilde{H}_L$ nije invarijantna podgrupa grupe $\tilde{H}_L\ltimes(\tilde{N}\times\tilde{M})$, zbog oblika komutatora između generatora $\hat{H}_a{}^\mu$ i $\hat{N}_b$, dok je grupa $\tilde{N}\times\tilde{M}$ invarijantna podgrupa iste grupe. Grupa $\tilde{H}_L\ltimes(\tilde{N}\times\tilde{M})$ je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$.

Na kraju, uzimajući u obzir generatore G-gejdž transformacija, tj. komutacione relacije (6.90), a po istom principu zaključivanja, dobija se ukupna gejdž grupa simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$:

$$\mathcal{G}_{3BF} = G\ltimes(\tilde{H}_L\ltimes(\tilde{N}\times\tilde{M}))\,. \tag{6.91}$$

Difeomorfizmi

Druga važna tema za diskusiju je invarijantnost $3BF$ teorije na difeomorfizme. Slično kao u slučaju $2BF$ teorije, ako su difeomorfizmi simetrija teorije, njihove varijacije forme se mogu izraziti kao zbir varijacija formi varijabli pri gejdž transformacijama i varijacija formi pri HT transformacijama:

$$\delta_0{}^{\text{diff}}\,\phi = -\delta_0{}^{\text{gauge}}\phi - \delta_0{}^{\text{HT}}\phi\,. \tag{6.92}$$

Konkretno, $3BF$ dejstvo zavisi od parametara $\alpha^\alpha{}_\mu$, $\beta^a{}_{\mu\nu}$, $\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$, $B^\alpha{}_{\mu\nu}$, $C^a{}_\mu$ i D^A. Parametri HT transformacija $\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}$, $\epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho}$, i $\epsilon^{\text{HT}AB}{}_{\mu\nu\rho}$ su definisani relacijama (4.55)

$$\begin{array}{rclrcl}
\delta_0{}^{\text{HT}}\alpha^\alpha{}_\mu &=& \dfrac{1}{2}\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}\dfrac{\delta S}{\delta B^\beta{}_{\nu\rho}}\,, & \delta_0{}^{\text{HT}}B^\alpha{}_{\mu\nu} &=& -\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\rho\mu\nu}\dfrac{\delta S}{\delta\alpha^\beta{}_\rho}\,,\\
\delta_0{}^{\text{HT}}\beta^a{}_{\mu\nu} &=& \epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho}\dfrac{\delta S}{\delta C^b{}_\rho}\,, & \delta_0{}^{\text{HT}}C^a{}_\mu &=& -\dfrac{1}{2}\epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\nu\rho\mu}\dfrac{\delta S}{\delta\beta^b{}_{\nu\rho}}\,,\\
\delta_0{}^{\text{HT}}\gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &=& \epsilon^{\text{HT}AB}{}_{\mu\nu\rho}\dfrac{\delta S}{\delta D^B}\,, & \delta_0{}^{\text{HT}}D^A &=& -\dfrac{1}{3!}\epsilon^{\text{HT}AB}{}_{\mu\nu\rho}\dfrac{\delta S}{\delta\gamma^B{}_{\mu\nu\rho}}\,,
\end{array} \tag{6.93}$$

dok su gejdž parametri $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a$ definisani u Teoremama 14–18. Možemo pokazati da zaista postoji izbor ovih parametara, tako da je jednačina (4.57) zadovoljena za sva polja. Konkretno, ako odaberemo gejdž parametre kao

$$\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha = -\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_\mu = \xi^\lambda\beta^a{}_{\mu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{\mu\nu} = \xi^\lambda\gamma^A{}_{\mu\nu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_\mu = \xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a = -\xi^\lambda C^a{}_\lambda\,, \tag{6.94}$$

a HT parametre kao

$$\epsilon^{\text{HT}\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,,\qquad \epsilon^{\text{HT}ab}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{ab}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,,\qquad \epsilon^{\text{HT}AB}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^\lambda g^{AB}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,, \tag{6.95}$$

primenom jednačine (6.92) dobijamo upravo standardne varijacije formi koje odgovaraju difeomorfizmima:

$$\begin{array}{rcl}
\delta_0{}^{\text{diff}}\alpha^\alpha{}_\mu &=& -\partial_\mu\xi^\lambda\alpha^\alpha{}_\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda\alpha^\alpha{}_\mu\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}\beta^a{}_{\mu\nu} &=& -\partial_\mu\xi^\lambda\beta^a{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\xi^\lambda\beta^a{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda\beta^a{}_{\mu\nu}\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}\gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &=& -\partial_\mu\xi^\lambda\gamma^A{}_{\lambda\nu\rho} - \partial_\nu\xi^\lambda\gamma^A{}_{\mu\lambda\rho} - \partial_\rho\xi^\lambda\gamma^A{}_{\mu\nu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}B^\alpha{}_{\mu\nu} &=& -\partial_\mu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\xi^\lambda B^\alpha{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda\partial_\lambda B^\alpha{}_{\mu\nu}\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}C^a{}_\mu &=& -\partial_\mu\xi^\lambda C^a{}_\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda C^a{}_\mu\,,\\
\delta_0{}^{\text{diff}}D^A &=& -\xi^\lambda\partial_\lambda D^A\,.
\end{array} \tag{6.96}$$

Ovim se utvrđuje da su difeomorfizmi zaista simetrija teorije, čak i ako nisu sadržani u ukupnoj gejdž grupi simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$, već u direktnom proizvodu ukupne grupe simetrija i HT grupe simetrija.

6.2 Klajn-Gordonova teorija

U ovom odeljku ćemo demonstrirati kako možemo da iskoristimo strukturu 3-grupe, odnosno odgovarajuću $3BF$ teoriju da opišemo Klajn-Gordonovo polje koje interaguje sa gravitacionim poljem [16]. Najpre, neophodno je precizirati 2-ukršteni modul za koji se definiše $3BF$ teorija, a zatim se teorija sa odgovarajućom dinamikom konstruiše dodavanjem odgovarajućih *veza* topološkom $3BF$ dejstvu. Definišimo 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\,\_\}_{\mathrm{pf}})$, na sledeći način. Lijeve grupe G, H i L su:

$$G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}\,. \tag{6.97}$$

Grupa G deluje na samu sebe konjugacijom, na grupu H po vektorskoj reprezentaciji, dok je dejstvo grupe G na grupu L trivijalno. Ovim je definisano dejstvo $\triangleright$. Preslikavanje ∂ je trivijalno, kao što je to slučaj kod čiste gravitacije. Preslikavanje δ je takođe izabrano da bude trivijalno, odnosno svaki element grupe L se preslikava u jedinični element grupe H. Najzad, Pajferovo podizanje je takođe trivijalno, odnosno svaki uređeni par elemenata grupe H se preslikava u jedinični element grupe L. Ovo definiše jedan određeni izbor 2-ukrštenog modula, koji odgovara jednom skalarnom polju u interakciji sa gravitacionim poljem, kao što ćemo to demonstrirati u ovom odeljku.

Za ovaj izbor 2-ukrštenog modula, 3-koneksija $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ je

$$\alpha = \omega^{ab}M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma \mathbb{I}\,, \tag{6.98}$$

gde $\mathbb{I}$ označava generator Lijeve grupe $\mathbb{R}$. Kako su preslikavanja ∂, δ i Pajferovo podizanje trivijalni, lažna 3-krivina (2.118) se svodi na običnu 3-krivinu,

$$\mathcal{F} = R^{ab}M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla\beta^a P_a\,, \qquad \mathcal{H} = \mathrm{d}\gamma\,. \tag{6.99}$$

Ovde je iskorišćena činjenica da je dejstvo grupe G na grupu L trivijalno, tj. $M_{ab} \triangleright \mathbb{I} = 0$. Ovo znači da se 3-forma γ transformiše kao skalar pri Lorencovim transformacijama. Dakle, odgovarajući Lagranžev množitelj D se transformiše na isti način, što vidimo na osnovu njegove indeksne strukture. Kako je D 0-forma, on se transformiše kao skalar i pri delovanju simetrije difeomorfizama. Na osnovu ovoga sledi da se Lagranžev množitelj D transformiše kao realno skalarno polje pri svim transformacijama, odnosno možemo ga označiti kao $D \equiv \phi$, i napisati topološko $3BF$ dejstvo (6.1) kao:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + \phi\,\mathrm{d}\gamma\,, \tag{6.100}$$

gde je bilinearna forma na L definisana kao $\langle \mathbb{I}, \mathbb{I} \rangle_{\mathfrak{l}} = 1$.

Da bi opisali skalarno polje mase m sa odgovarajućom dinamikom opisanom Klajn-Gordonovom jednačinom u interakciji sa gravitacionim poljem neophodno je dodati odgovarajuće veze topološkom dejstvu (6.100):

$$
\begin{aligned}
S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla \beta^a + \phi \, \mathrm{d}\gamma \\
& - \lambda_{ab} \wedge \left(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \right) \\
& + \lambda \wedge \left(\gamma - \frac{1}{2} H_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) \\
& + \Lambda^{ab} \wedge \left(H_{abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \mathrm{d}\phi \wedge e_a \wedge e_b \right) \\
& - \frac{1}{2 \cdot 4!} m^2 \phi^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \, .
\end{aligned}
\tag{6.101}
$$

U prethodnom izrazu prvi red predstavlja topološki sektor (6.100), drugi red je poznata *simplicity veza* za gravitaciju uvedena u dejstvu (5.85), treći i četvrti red nove *simplicity veze* u kojima se pojavljuju 1-forme Lagranževi množitelji λ i Λ^{ab} i 0-forma Lagranžev množitelj H_{abc}, dok poslednji red obezbeđuje odgovarajuću masu m skalarnog polja ϕ. Variranjem dejstva (6.101) redom po varijablama B_{ab}, ω_{ab}, β_a, λ_{ab}, Λ_{ab}, γ, λ, H_{abc}, ϕ i e^a dobijamo jednačine kretanja:

$$R^{ab} - \lambda^{ab} = 0 \, , \tag{6.102}$$

$$\nabla B^{ab} - e^{[a} \wedge \beta^{b]} = 0 \, , \tag{6.103}$$

$$\nabla e^a = 0 \, , \tag{6.104}$$

$$B_{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon_{abcd} e^c \wedge e^d = 0 \, , \tag{6.105}$$

$$H_{abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \mathrm{d}\phi \wedge e_a \wedge e_b = 0 \, , \tag{6.106}$$

$$\mathrm{d}\phi - \lambda = 0 \, , \tag{6.107}$$

$$\gamma - \frac{1}{2} H_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c = 0 \, , \tag{6.108}$$

$$-\frac{1}{2} \lambda \wedge e^a \wedge e^b \wedge e^c + \varepsilon^{cdef} \Lambda^{ab} \wedge e_d \wedge e_e \wedge e_f = 0 \, , \tag{6.109}$$

$$\mathrm{d}\gamma - \mathrm{d}(\Lambda^{ab} \wedge e_a \wedge e_b) - \frac{1}{4!} m^2 \phi \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = 0 \, , \tag{6.110}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \beta_a + \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon_{abcd} \lambda^{bc} \wedge e^d + \frac{3}{2} H_{abc} \lambda \wedge e^b \wedge e^c + 3 H^{def} \varepsilon_{abcd} \Lambda_{ef} \wedge e^b \wedge e^c \\
- 2 \Lambda_{ab} \wedge \mathrm{d}\phi \wedge e^b - 2 \frac{1}{4!} m^2 \phi \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d = 0 \, .
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

Ovaj sistem jednačina opisuje dva dinamička polja, tetrade e^a i skalarno polje ϕ, dok se sve ostale varijable mogu izraziti kao funkcije njih i njihovih izvoda:

$$
\begin{aligned}
& \lambda_{ab\mu\nu} = R_{ab\mu\nu} \, , \qquad \omega^{ab}{}_\mu = \triangle^{ab}{}_\mu \, , \qquad \gamma_{\mu\nu\rho} = -\frac{e}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma \phi \, , \\
& \beta^a{}_{\mu\nu} = 0 \, , \qquad \Lambda^{ab}{}_\mu = \frac{1}{12e} g_{\mu\lambda} \varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} \partial_\nu \phi e^a{}_\rho e^b{}_\sigma \, , \qquad \lambda_\mu = \partial_\mu \phi \, , \\
& H^{abc} = \frac{1}{6e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \phi e^a{}_\nu e^b{}_\rho e^c{}_\sigma \, , \qquad B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2} \varepsilon_{abcd} e^c{}_\mu e^d{}_\nu \, .
\end{aligned}
\tag{6.112}
$$

Za razliku od jednačina kretanja za Lagranževe množitelje, jednačine kretanja za e^a i ϕ su diferencijalne jednačine kretanja, pri čemu jednačina kretanja za ϕ (6.110) daje Klajn-Gordonovu jednačinu kretanja,

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2\right)\phi = 0\,, \tag{6.113}$$

dok je jednačina kretanja za polja tetrada (6.111)

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi l_p^2\, T^{\mu\nu}\,, \tag{6.114}$$

gde je tenzor energije-impulsa realnog skalarnog polja

$$T^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + m^2\phi^2\right). \tag{6.115}$$

6.3 Ajnštajn-Kartan-Dirak teorija

Kako bismo opisali Dirakovo polje koje interaguje sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom definišemo 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \rhd\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ na sledeći način [16]. Lijeve grupe G, H i L su

$$G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}^8(\mathbb{G})\,, \tag{6.116}$$

gde je $\mathbb{G}$ oznaka za skup Grasmanovih brojeva. Preslikavanja ∂, δ i Pajferovo podizanje ostaju trivijalni, kao što je to bio slučaj kod skalarnog polja. Grupa G deluje na samu sebe konjugacijom, na grupu H po vektorskoj reprezentaciji, dok na grupu L deluje po spinorskoj reprezentaciji. Formalno zapisano, ako su P_α i P^α 8 generatora Lijeve grupe $\mathbb{R}^8(\mathbb{G})$, pri čemu indeks α uzima vrednosti $1,\dots,4$, dejstvo $\rhd$ grupe G na grupu L definisano je na sledeći način:

$$M_{ab} \rhd P_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^\beta{}_\alpha P_\beta\,, \qquad M_{ab} \rhd P^\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta P^\beta\,, \tag{6.117}$$

gde je korišćena standardna notacija za $\sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$, gde su γ_a Dirakove matrice, koje zadovoljavaju antikomutacione relacije

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} \equiv \gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = -2\eta_{ab}\,.$$

Kao što je to bio slučaj kod skalarnog polja, vidimo da izbor grupe L određuje polja materije prisutna u teoriji, dok dejstvo $\rhd$ grupe G na grupu L osigurava odgovarajuće transformacione osobine polja.

Sada kada smo upotpunili definiciju 2-ukrštenog modula, možemo definisati odgovarajuće 3BF dejstvo. Uređena trojka 3-koneksije $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ za ovaj izbor 3-grupe je:

$$\alpha = \omega^{ab} M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma^\alpha P_\alpha + \bar{\gamma}_\alpha P^\alpha\,, \tag{6.118}$$

dok je 3-krivina $(\mathcal{F}\,,\mathcal{G}\,,\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= R^{ab} M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla\beta^a P_a\,, \\ \mathcal{H} &= \left(\mathrm{d}\gamma^\alpha + \frac{1}{2}\omega^{ab}(\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta\gamma^\beta\right)P_\alpha + \left(\mathrm{d}\bar{\gamma}_\alpha - \frac{1}{2}\omega^{ab}\bar{\gamma}_\beta(\sigma_{ab})^\beta{}_\alpha\right)P^\alpha \\ &\equiv (\overrightarrow{\nabla}\gamma)^\alpha P_\alpha + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})_\alpha P^\alpha\,. \end{aligned} \tag{6.119}$$

U prethodnim izrazima korišćena je definicija dejstva $\rhd$ (6.117). Bilinearna forma $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{l}}$ je definisana delovanjem na generatore grupe L, na sledeći način

$$\begin{aligned} \langle P_\alpha, P_\beta\rangle_{\mathfrak{l}} &= 0\,, \qquad \langle P^\alpha, P^\beta\rangle_{\mathfrak{l}} = 0\,, \\ \langle P_\alpha, P^\beta\rangle_{\mathfrak{l}} &= -\delta_\alpha^\beta\,, \qquad \langle P^\alpha, P_\beta\rangle_{\mathfrak{l}} = \delta^\alpha_\beta\,. \end{aligned} \tag{6.120}$$

Primetimo da je bilinearna forma definisana na ovaj način antisimetrična kada deluje na generatore, za razliku od bilinearne simetrične koju smo imali u primerima do sada. Motivacija za ovako definisanom bilinearnom formom sastoji se u sledećem. Za elemente $A, B \in \mathfrak{l}$ bilinearna forma je simetrična bilinearna nedegenerisana forma. Razvijajući elemente A i B po bazisu algebre vidimo da je:

$$\langle A, B\rangle_{\mathfrak{l}} = A^I B^J g_{IJ}\,, \qquad \langle B, A\rangle_{\mathfrak{l}} = B^J A^I g_{JI}\,. \tag{6.121}$$

Kako bilinearna forma mora biti simetrična, dva izraza u prethodnoj jednačini moraju biti jednaka. Kako su koeficijenti u $\mathfrak{l}$ Grasmanovi brojevi, imamo da je $A^I B^J = -B^J A^I$, iz čega sledi da je $g_{IJ} = -g_{JI}$. Sada je jasna antisimetričnost (6.120) — ona kompenzuje antikomutirajuću prirodu Grasmanovih brojeva, osiguravajući da bilinearna forma bude simetrična za bilo koja dva elementa $A, B \in \mathfrak{l}$.

Dejstvo $\triangleright$ grupe G na grupu L se definiše tako da obezbedi spinorsku prirodu Lagranževog množitelja D u dejstvu (6.1). Grupa L određuje strukturu polja D tako da su njegove komponente 8 nezavisnih Grasmanovih polja materije. Dalje, na osnovu činjenice da je polje D diferencijalna 0-forma i da se transformiše po spinorskoj reprezentaciji pod dejstvom grupe $SO(3,1)$, možemo ga identifikovati sa Dirakovim bispinorom:

$$D = \psi^\alpha P_\alpha + \bar{\psi}_\alpha P^\alpha\,. \tag{6.122}$$

Kao u slučaju skalarnog polja, ovo je demonstracija kako struktura sektora materije prisutne u teoriji može biti zadata određenim izborom grupe L i dejstvom $\triangleright$ grupe G na nju, komponentama 2-ukrštenog modula. Transformacione osobine polja pri delovanju Lorencove grupe definišemo odgovarajućim izborom dejstva $\triangleright$.

Za ovaj izbor 2-ukrštenog modula, a nakon izvršene identifikacije polja, možemo definisati odgovarajuće $3BF$ dejstvo:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})_\alpha \psi^\alpha + \bar{\psi}_\alpha (\overrightarrow{\nabla}\gamma)^\alpha\,. \tag{6.123}$$

Kako bismo definisali spinorska polja sa odgovarajućom dinamikom kuplovana sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom, neophodno je dejstvu (6.123) dodati odgovarajuće *simplicity veze*:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})_\alpha \psi^\alpha + \bar{\psi}_\alpha (\overrightarrow{\nabla}\gamma)^\alpha \\ & - \lambda_{ab} \wedge \left(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \right) \\ & - \lambda^\alpha \wedge \left(\bar{\gamma}_\alpha - \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi}\gamma^d)_\alpha \right) \\ & + \bar{\lambda}_\alpha \wedge \left(\gamma^\alpha + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d \psi)^\alpha \right) \\ & - \frac{1}{12} m\, \bar{\psi}\psi\, \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 2\pi i l_p^2\, \bar{\psi}\gamma_5\gamma^a\psi\, \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge \beta^d. \end{aligned} \tag{6.124}$$

Analogno prethodnom slučaju skalarnog polja, prvi red je topološki sektor dejstva (6.123), drugi red je gravitaciona veza, dok su treći i četvrti red nove *simplicity veze* za Dirakovo polje, u kojima se pojavljuju 1-forme Lagranževih množitelja λ^α i $\bar{\lambda}_\alpha$. Peti red sadrži maseni član za Dirakovo polje i član koji osigurava odgovarajuću interakciju između torzije i spina Dirakovog polja. Na osnovu Ajnštajn-Kartanove teorije imamo da je

$$T_a \equiv \nabla e_a = 2\pi l_p^2 s_a\,, \tag{6.125}$$

jedna jednačina kretanja, gde je

$$s_a = i\varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \bar{\psi}\gamma_5\gamma^d\psi \tag{6.126}$$

2-forma Dirakovog spina. Naravno, alternativni izbori su mogući, ali ćemo se u ovom izlaganju ograničiti na ovaj.

Variranjem dejstva (6.124) redom po varijablama B_{ab}, λ^{ab}, $\bar{\gamma}_\alpha$, γ^α, λ^α, $\bar{\lambda}_\alpha$, $\bar{\psi}_\alpha$, ψ^α, e^a, β^a i ω^{ab}, dobijamo jednačine kretanja:

$$R^{ab} - \lambda^{ab} = 0\,, \tag{6.127}$$

$$B_{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd} e^c \wedge e^d = 0\,, \tag{6.128}$$

$$(\vec{\nabla}\psi)^\alpha - \lambda^\alpha = 0\,, \tag{6.129}$$

$$(\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla})_\alpha - \bar{\lambda}_\alpha = 0\,, \tag{6.130}$$

$$\bar{\gamma}_\alpha - \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi}\gamma^d)_\alpha = 0\,, \tag{6.131}$$

$$\gamma^\alpha + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d\psi)^\alpha = 0\,, \tag{6.132}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\gamma^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \gamma^\beta + \frac{i}{6}\lambda^\beta \wedge \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \gamma^{d\alpha}{}_\beta + \frac{1}{12} m\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \psi^\alpha \\ &\qquad + i2\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c (\gamma_5\gamma^d\psi)^\alpha = 0\,, \end{aligned} \tag{6.133}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\bar{\gamma}_\alpha - \bar{\gamma}_\beta \wedge \omega^\beta{}_\alpha + \frac{i}{6}\bar{\lambda}_\beta \wedge \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \gamma^{d\beta}{}_\alpha - \frac{1}{12} m\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \bar{\psi}_\alpha \\ &\qquad - i2\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c (\bar{\psi}\gamma_5\gamma^d)_\alpha = 0\,, \end{aligned} \tag{6.134}$$

$$\begin{aligned} &\nabla\beta_a + 2\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc} \wedge e^d - \frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\lambda^\alpha \wedge e^b \wedge e^c (\bar{\psi}\gamma^d)_\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\bar{\lambda}_\alpha \wedge e^b \wedge e^c (\gamma^d\psi)^\alpha \\ &\qquad - \frac{1}{3}\varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d m\bar{\psi}\psi - 4\pi l_p^2 i\varepsilon_{abcd} e^b \wedge \beta^c \bar{\psi}\gamma_5\gamma^d\psi = 0\,, \end{aligned} \tag{6.135}$$

$$\nabla e_a - i2\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \bar{\psi}\gamma_5\gamma^d\psi = 0\,, \tag{6.136}$$

$$\nabla B_{ab} - e_{[a} \wedge \beta_{b]} + \bar{\gamma}\frac{1}{8}[\gamma_a, \gamma_b]\psi + \bar{\psi}\frac{1}{8}[\gamma_a, \gamma_b]\gamma = 0\,. \tag{6.137}$$

Jedina dinamička polja u teoriji su e^a, ψ i $\bar{\psi}$, dok se preostala mogu algebarski izraziti u funkciji dinamičkih polja i njihovih izvoda:

$$\begin{gathered} B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd} e^c{}_\mu e^d{}_\nu\,, \qquad \lambda^\alpha{}_\mu = (\vec{\nabla}_\mu\psi)^\alpha\,, \qquad \bar{\lambda}_{\alpha\mu} = (\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\mu)_\alpha\,, \\ \bar{\gamma}_{\alpha\mu\nu\rho} = i\varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho (\bar{\psi}\gamma^d)_\alpha\,, \qquad \gamma^\alpha{}_{\mu\nu\rho} = -i\varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho (\gamma^d\psi)^\alpha\,, \\ \beta^a{}_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \lambda_{ab\mu\nu} = R_{ab\mu\nu}\,, \qquad \omega^{ab}{}_\mu = \triangle^{ab}{}_\mu + K^{ab}{}_\mu\,. \end{gathered} \tag{6.138}$$

Ovde je $K^{ab}{}_\mu$ tenzor kontorzije, definisan na standardan način kao funkcija tenzora torzije. Pored toga, vidimo dejstvo daje odgovarajuću torziju, kako dobijamo da je jedna jednačina kretanja upravo (6.125):

$$T_a \equiv \nabla e_a = 2\pi l_p^2 s_a\,. \tag{6.139}$$

Najzad, jednačine kretanja za varijable ψ i $\bar{\psi}$ su standardne kovarijantne Dirakove jednačine kretanja

$$(i\gamma^a e^\mu{}_a \overrightarrow{\nabla}_\mu - m)\psi = 0\,, \tag{6.140}$$

i konjugovana,

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\nabla}_\mu e^\mu{}_a \gamma^a + m) = 0\,, \tag{6.141}$$

gde je $e^\mu{}_a$ inverzna tetrada. Jednačina kretanja za polje tetrade e^a je

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi l_p^2\, T^{\mu\nu}\,, \tag{6.142}$$

gde je tenzor energije-impulsa:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^a \overleftrightarrow{\nabla}^\nu e^\mu{}_a \psi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{\psi}\Big(i\gamma^a \overleftrightarrow{\nabla}_\rho e^\rho{}_a - 2m\Big)\psi\,, \tag{6.143}$$

Ovde je korišćena notacija $\overleftrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla}$. Kao što je očekivano, jednačine (6.139), (6.140), (6.141) i (6.142) su upravo jednačine kretanja koje opisuje Dirakovo polje koje interaguje sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom.

6.4 Vajlova i Majorana polja u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom

Kao što znamo, rešenje Dirakove jednačine nije ireducibilna reprezentacija Lorencove grupe. Dirakove fermione moguće je prepisati tako da razdvojimo polja leve kiralnosti i polja desne kiralnosti, koji su ireducibilne reprezentacije, odnosno koji pri Lorencovim transformacijama ne menjaju svoju kiralnost. Da bismo u okviru našeg pristupa razmatrali ove spinorske reprezentacije neophodno naprepisati teoriju levog i desnog Vajlovog polja kao $3BF$ dejstvo sa vezama. Radi jednostavnosti, ovde ćemo razmatrati samo levo kiralno polje, pri čemu se teorija desnog kiralnog polja definiše analogno. Vajlovi i Majorana fermioni mogu se tretirati na ovaj način, pri čemu je u slučaju Majorana fermiona dejstvu neophodno dodati dodatni maseni član.

Odgovarajući 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ se definiše na sledeći način [16]. Lijeve grupe G, H i L su:

$$G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}^4(\mathbb{G})\,. \tag{6.144}$$

Preslikavaja ∂, δ i Pajferovo podizanje su trivijalna. Dejstvo $\triangleright$ grupe G na grupe G, H i L je definisano na isti način kao u slučaju Dirakovih fermiona, pri čemu je spinorska reprezentacija za levo kiralno polje:

$$M_{ab} \triangleright P^\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta P^\beta\,, \qquad M_{ab} \triangleright P_{\dot\alpha} = \frac{1}{2}(\bar\sigma_{ab})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} P_{\dot\beta}\,, \tag{6.145}$$

gde su $\sigma^{ab} = -\bar\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\sigma^a\bar\sigma^b - \sigma^b\bar\sigma^a)$, za $\sigma^a = (1,\vec\sigma)$ i $\bar\sigma^a = (1,-\vec\sigma)$, pri čemu oznaka $\vec\sigma$ označava tri Paulijeve matrice. Četiri generatora grupe L su označena sa P^α i $P_{\dot\alpha}$, gde Vajlovi indeksi $\alpha, \dot\alpha$ uzimaju vrednosti $1, 2$.

Odgovarajuća 3-koneksija $(\alpha\,, \beta\,, \gamma)$ za ovakav izbor 2-ukrštenog modula ima sledeći oblik

$$\alpha = \omega^{ab}M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma_\alpha P^\alpha + \bar\gamma^{\dot\alpha} P_{\dot\alpha}\,, \tag{6.146}$$

dok je odgovarajuća lažna 3-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ definisana jednačinom (2.118):

$$\begin{gathered}\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla\beta^a P_a\,,\\ \mathcal{H} = \big(\mathrm{d}\gamma_\alpha + \frac{1}{2}\omega_{ab}(\sigma^{ab})^\beta{}_\alpha\gamma_\beta\big)P^\alpha + \big(\mathrm{d}\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\omega_{ab}(\bar{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\gamma}^{\dot{\beta}}\big)P_{\dot{\alpha}} \equiv (\vec{\nabla}\gamma)_\alpha P^\alpha + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}\,.\end{gathered} \tag{6.147}$$

Analogno slučaju Dirakovih spinora, Lagranžev množitelj D identifikuje se sa spinorskim poljima ψ_α i $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$

$$D = \psi_\alpha P^\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}\,, \tag{6.148}$$

dok se bilinearna forma $\langle\_\,,\_\rangle_{\mathfrak{l}}$ na grupi L definiše delovanjem na generatore

$$\langle P^\alpha, P^\beta\rangle_{\mathfrak{l}} = \varepsilon^{\alpha\beta}\,, \qquad \langle P_{\dot{\alpha}}, P_{\dot{\beta}}\rangle_{\mathfrak{l}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,, \qquad \langle P^\alpha, P_{\dot{\beta}}\rangle_{\mathfrak{l}} = 0\,, \qquad \langle P_{\dot{\alpha}}, P^\beta\rangle_{\mathfrak{l}} = 0\,. \tag{6.149}$$

U prethodnim jednačinama $\varepsilon^{\alpha\beta}$ i $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ su standardne oznake za dvodimenzionalan Levi-Čivita simbol. Sada je moguće definisati topološko 3*BF* dejstvo (6.1) za spinorska polja i gravitaciju

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab}\wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + \psi^\alpha \wedge (\vec{\nabla}\gamma)_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \wedge (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}}\,. \tag{6.150}$$

Kako bismo dobili teoriju sa odgovarajućom dinamikom Vajlovih spinora, neophodno je dejstvu (6.150) dodati odgovarajuće *simplicity veze*, tako da je 3*BF* dejstvo sa vezama:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab}\wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + \psi^\alpha \wedge (\vec{\nabla}\gamma)_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \wedge (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}}\\ & - \lambda_{ab}\wedge\big(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon^{abcd} e_c\wedge e_d\big)\\ & - \lambda^\alpha \wedge \big(\gamma_\alpha + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd} e^a\wedge e^b \wedge e^c \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\big) - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\wedge\big(\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd} e^a\wedge e^b\wedge e^c \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta\big)\\ & - 4\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta)\,. \end{aligned} \tag{6.151}$$

Treći red sadrži nove veze i 1-forme Lagranževih množitelja λ_α i $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$. Četvrti red osigurava odgovarajuću interakciju između torzije i spina Vajlovog polja. Ovde smo koristeći interakciju torzije i spina u slučaju Dirakovih čestica, definisali odgovarajuću interakciju spina Vajlovog polja

$$s_a \equiv i\varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c\, \psi^\alpha \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\,, \tag{6.152}$$

i torzije na sledeći način:

$$T_a = 4\pi l_p^2 s_a\,. \tag{6.153}$$

Majorana polja su definisana analogno, pri čemu se dejstvu dodaje još i maseni član :

$$-\frac{1}{12} m\varepsilon_{abcd} e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d(\psi^\alpha\psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})\,. \tag{6.154}$$

Variranjem dejstva (6.151) redom po varijablama B_{ab}, λ^{ab}, γ_α, $\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}}$, λ_α, $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, ψ_α, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, e^a, β^a i ω^{ab} dobijamo jednačine kretanja, koje su prikazane u dodatku B. Jedini dinamički stepeni slobode su polja ψ_α, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ i e^a, dok je preostale varijable moguće algebarski izraziti kao funkcije ovih polja i njihovih izvoda:

$$\begin{gathered}\lambda^{ab}{}_{\mu\nu} = R^{ab}{}_{\mu\nu}\,, \quad B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd} e^c{}_\mu e^d{}_\nu\,, \quad \lambda_{\alpha\mu} = \nabla_\mu\psi_\alpha\,, \quad \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}{}_\mu = \nabla_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\,,\\ \gamma_{\alpha\mu\nu\rho} = i\varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\,, \quad \bar{\gamma}^{\dot{\alpha}}{}_{\mu\nu\rho} = i\varepsilon_{abcd} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta\,, \quad \omega_{ab\mu} = \triangle_{ab\mu} + K_{ab\mu}\,.\end{gathered} \tag{6.155}$$

Primetimo da je rezultat $\beta = 0$ nepromenjen. Najzad, jednačine kretanja dinamičkih polja u teoriji su

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\beta} e^{\mu}{}_{a} \nabla_{\mu} \psi_{\beta} = 0 \,, \qquad \sigma^{a}{}_{\alpha\dot{\beta}} e^{\mu}{}_{a} \nabla_{\mu} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = 0 \,, \\
R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi l_p^2 \, T^{\mu\nu} \,, \\
T^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \bar{\psi} \bar{\sigma}^{b} e^{\nu}{}_{b} \nabla^{\mu} \psi + \frac{i}{2} \psi \sigma^{b} e^{\nu}{}_{b} \nabla^{\mu} \bar{\psi} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \Big(i \bar{\psi} \bar{\sigma}^{a} e^{\lambda}{}_{a} \nabla_{\lambda} \psi + i \psi \sigma^{a} e^{\lambda}{}_{a} \nabla_{\lambda} \bar{\psi} \Big) \,.
\end{aligned}
\tag{6.156}
$$

U Majorana slučaju jednačine kretanja (6.155) ostaju ista, dok su jednačine kretanja za polja ψ_α i $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$,

$$
i \sigma^{a}{}_{\alpha\dot{\beta}} e^{\mu}{}_{a} \nabla_{\mu} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} - m \psi_{\alpha} = 0 \,, \qquad i \bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\beta} e^{\mu}{}_{a} \nabla_{\mu} \psi_{\beta} - m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = 0 \,, \tag{6.157}
$$

a tenzor energije-impulsa ima oblik:

$$
T^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \bar{\psi} \bar{\sigma}^{b} e^{\nu}{}_{b} \nabla^{\mu} \psi + \frac{i}{2} \psi \sigma^{b} e^{\nu}{}_{b} \nabla^{\mu} \bar{\psi} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left[i \bar{\psi} \bar{\sigma}^{a} e^{\lambda}{}_{a} \nabla_{\lambda} \psi + i \psi \sigma^{a} e^{\lambda}{}_{a} \nabla_{\lambda} \bar{\psi} - \frac{1}{2} m \left(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi} \right) \right] . \tag{6.158}
$$

6.5 Standardni Model

Odgovarajuća 3-grupa koja opisuje sva polja prisutna u Standardnom Modelu sa odgovarajućom dinamikom dobija se izborom Lijevih grupa G, H i L na sledeći način [16]:

$$
G = SO(3,1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1) \,, \quad H = \mathbb{R}^4 \,, \quad L = \mathbb{R}^4(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \,, \tag{6.159}
$$

gde je $\mathbb{C}$ oznaka za skup kompleksnih brojeva. Motivacija iza ovog izbora grupa postaje jasna analizirajući tabelu 6.4.

I generacija leptona	crvena boja I generacija kvarkova	zelena boja I generacija kvarkova	plava boja I generacija kvarkova
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_r \\ d_r \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_g \\ d_g \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_b \\ d_b \end{pmatrix}_L$
$(\nu_e)_R$	$(u_r)_R$	$(u_g)_R$	$(u_b)_R$
$(e^-)_R$	$(d_r)_R$	$(d_g)_R$	$(d_b)_R$

Tabela 6.4: Polja materije prisutna u Standardnom Modelu čestica (I generacija).

Prebrojavanjem polja u tabeli 6.4 zaključujemo da je neophodno definisati 16 spinora kako bismo definisati prvu generaciju spinorskih polja materije prisutnih u Standardnom Modelu čestica, odnosno da grupu L treba izabrati na sledeći način $L = \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G})$. Kako postoje ukupno tri generacije materije, ukupna podgrupa grupe L koja opisuje fermionska polja u teoriji je $L = \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G})$. Da bismo definisali Higsov sektor neophodno je definisati dva kompleksna skalarna polja $\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$, odnosno pogrupa grupe L koja odgovara skalarnom sektoru Standardnog Modela je $L = \mathbb{R}^4(\mathbb{C})$.

Dalje, kako bi definisali 2-ukršteni modul kome odgovara $3BF$ dejstvo sa odgovarajućom dinamikom, neophodno je definisati preslikavanja ∂, δ i Pajferovo podizanje da budu trivijalna. Takođe, dejstvo grupe G na samu sebe je, po definiciji 2-ukrštenog modula, konjugacija. Dejstvo podgrupe $SO(3,1)$ grupe G na grupu H je po vektorskoj reprezentaciji, dok je dejstvo podgrupe $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ grupe G na grupu H trivijalno. Dejstvo podgrupe $SO(3,1)$ na podgrupu grupe L koja odgovara skalarnom sektoru materije, tj. $\mathbb{R}^4(\mathbb{C})$ podgrupu grupe L, je trivijalno, dok je zadato spinorskom reprezentacijom za svaku četvorku generatora koja opisuje jedno skalarno polje, kao što je to prikazano u odeljku 6.3. Transformacione osobine spinorskih polja pod dejstvom podgrupe $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ grupe G zadate su dejstvom ove podgrupe na grupu L.

6.5.1 Leptoni i elektroslaba interakcija

Demonstriraćemo proceduru definisanja 2-ukrštenog modula na jednostavnom primeru jedne leptonske familije i elektroslabe interakcije. Ostatak Standardnog Modela definiše se analogno.

Lijeve grupe G, H i L definišemo na sledeći način:

$$G=SO(3,1)\times SU(2)\times U(1)\,,\quad H=\mathbb{R}^4\,,\quad L^{\text{ leptoni i Higsov bozon}}=\mathbb{R}^{16}(\mathbb{G})\times\mathbb{R}^4(\mathbb{C})\,. \tag{6.160}$$

Zatim, odgovarajuća 3-koneksija je:

$$\alpha=\omega^{ab}M_{ab}+W^IT_I+AY\,,\quad \beta=\beta^aP_a\,,\quad \gamma=\gamma_\alpha{}^{\tilde L}P^\alpha{}_{\tilde L}+\gamma^{\dot\alpha}{}_{\tilde L}P_{\dot\alpha}{}^{\tilde L}+\gamma_\alpha{}^{\tilde R}P^\alpha{}_{\tilde R}+\gamma^{\dot\alpha}{}_{\tilde R}P_{\dot\alpha}{}^{\tilde R}+\gamma^{\tilde a}P_{\tilde a}\,. \tag{6.161}$$

Ovde indeksi $I,J,\dots$ uzimaju vrednosti $1,2,3$ i prebrojavaju Paulijeve matrice, generatore grupe $SU(2)$, dok indeksi $\tilde L,\tilde L',\dots$ uzimaju vrednosti $1,2$ i prebrojavaju komponente levog dubleta, $\tilde R$ označava desni singlet $(e^-)_R$ i desni singlet $(\nu_e)_R$, dok indeksi $\tilde a,\tilde b,\dots$ uzimaju vrednosti $1,2$ i prebrojavaju komponente skalarnog dubleta. Takođe, definišimo indeks $\tilde i=(\tilde L,\tilde R)$ koji uzima vrednosti $1,\dots,4$.

Dejstvo grupe G na grupu L definiše se na sledeći način:

$$\begin{gathered}
M_{ab}\rhd P^\alpha{}_i=\frac{1}{2}(\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta P^\beta{}_i\,,\qquad M_{ab}\rhd P_{\dot\alpha i}=\frac{1}{2}(\bar\sigma_{ab})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}P_{\dot\beta i}\,,\qquad M_{ab}\rhd P_{\tilde a}=0\,,\\
T_I\rhd P^\alpha{}_{\tilde L}=\frac{1}{2}(\sigma_I)^{\tilde L'}{}_{\tilde L}P^\alpha{}_{\tilde L'}\,,\quad T_I\rhd P_{\dot\alpha\tilde L}=\frac{1}{2}(\sigma_I)^{\tilde L'}{}_{\tilde L}P_{\dot\alpha\tilde L'}\,,\\
T_I\rhd P^\alpha{}_{\tilde R}=0\,,\qquad T_I\rhd P_{\dot\alpha\tilde R}=0\,,\qquad T_I\rhd P_{\tilde a}=\frac{1}{2}(\sigma_I)^{\tilde b}{}_{\tilde a}P_{\tilde b}\,,\\
Y\rhd P^\alpha{}_{\tilde L}=-P^\alpha{}_{\tilde L}\,,\quad Y\rhd P^\alpha{}_{\tilde R}=-2P^\alpha{}_{\tilde R}\,,\quad Y\rhd P_{\tilde a}=P_{\tilde a}\,,\\
Y\rhd P_{\dot\alpha\tilde L}=-P_{\dot\alpha\tilde L}\,,\quad Y\rhd P_{\dot\alpha\tilde R}=-2P_{\dot\alpha\tilde R}\,.
\end{gathered} \tag{6.162}$$

Odgovarajuće 3-krivine za ovaj izbor 2-ukrštenog modula su:

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}=R^{ab}M_{ab}+F^IT_I+FY\,,\qquad \mathcal{G}=\nabla\beta^aP_a\,,\\
\mathcal{H}=(\overrightarrow{\nabla}\gamma^{\tilde L})_\alpha P^\alpha{}_{\tilde L}+(\bar\gamma_{\tilde L}\overleftarrow{\nabla})^{\dot\alpha}P_{\dot\alpha}{}^{\tilde L}+(\overrightarrow{\nabla}\gamma^{\tilde R})_\alpha P^\alpha{}_{\tilde R}+(\bar\gamma_{\tilde R}\overleftarrow{\nabla})^{\dot\alpha}P_{\dot\alpha}{}^{\tilde R}+\mathrm{d}\gamma^{\tilde a}P_{\tilde a}\,.
\end{gathered} \tag{6.163}$$

Topološko $3BF$ dejstvo je:

$$S=\int B_{ab}R^{ab}+B_IF^I+BF+e_a\nabla\beta^a+\psi^\alpha{}_{\tilde i}(\overrightarrow{\nabla}\gamma^{\tilde i})_\alpha+\bar\psi_{\dot\alpha}{}^{\tilde i}(\bar\gamma_{\tilde i}\overleftarrow{\nabla})^{\dot\alpha}+\phi^{\tilde a}\mathrm{d}\gamma_{\tilde a}\,. \tag{6.164}$$

Sada možemo pojednostaviti notaciju uvođenjem indeksa $\hat\alpha$ koji prebrojavaju generatore grupe G, indeksa $\hat a$ grupe H i indeksa $\hat A$ grupe L. Kako bismo u teoriju uveli odgovarajuće stepene slobode koji opisuju teoriju prve leptonske familije u interakciji sa elektroslabim gejdž poljima, Higsovim poljem i gravitacijom, neophodno je topološkom dejstvu (6.164) dodati odgovarajuće *simplicity veze*, na sledeći način

$$
\begin{aligned}
S = \int & B_{\hat{\alpha}} \wedge \mathcal{F}^{\hat{\alpha}} + e_{\hat{a}} \wedge \mathcal{G}^{\hat{a}} + D_{\hat{A}} \wedge \mathcal{H}^{\hat{A}} \\
& + \left(B_{\hat{\alpha}} - C_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}} M_{cd\hat{\beta}} e^c \wedge e^d\right) \wedge \lambda^{\hat{\alpha}} - \left(\gamma_{\hat{A}} - e^a \wedge e^b \wedge e^c C_{\hat{A}}{}^{\hat{B}} M_{abc\hat{B}}\right) \wedge \lambda^{\hat{A}} \\
& + \zeta^{ab}{}_{\hat{\alpha}} \wedge \left(M_{ab}{}^{\hat{\alpha}} \varepsilon^{cdef} e_c \wedge e_d \wedge e_e \wedge e_f - F^{\hat{\alpha}} \wedge e_c \wedge e_d\right) \\
& + \zeta^{ab}{}_{\hat{A}} \wedge \left(M_{abc}{}^{\hat{A}} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - F^{\hat{A}} \wedge e_a \wedge e_b\right) \\
& - \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \, \left(Y_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}} D^{\hat{A}} D^{\hat{B}} D^{\hat{C}} + M_{\hat{A}\hat{B}} D^{\hat{A}} D^{\hat{B}} + L_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} D^{\hat{A}} D^{\hat{B}} D^{\hat{C}} D^{\hat{D}}\right) \\
& - 4\pi i \, l_p^2 \, \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c D_{\hat{A}} T^{d\hat{A}}{}_{\hat{B}} D^{\hat{B}} \,,
\end{aligned}
\tag{6.165}
$$

gde su:

$$
B_{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} B_{ab} & B_I & B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}^{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} R_{ab} & F_I & F \end{bmatrix}^T, \quad D_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \psi^{\alpha}{}_{\tilde{L}} & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}\tilde{L}} & \psi^{\alpha}{}_{R} & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}R} & \phi_{\tilde{a}} \end{bmatrix},
$$

$$
\mathcal{H}^{\hat{A}} = \begin{bmatrix} (\overrightarrow{\nabla}\gamma_{\tilde{L}})_{\alpha} & (\bar{\gamma}_{\tilde{L}}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}} & (\overrightarrow{\nabla}\gamma_{\tilde{R}})_{\alpha} & (\bar{\gamma}_{\tilde{R}}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}} & \mathrm{d}\gamma_{\tilde{a}} \end{bmatrix}^T, \quad \gamma_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \gamma^{\alpha}{}_{\tilde{L}} & \bar{\gamma}_{\dot{\alpha}\tilde{L}} & \gamma^{\alpha}{}_{\tilde{R}} & \bar{\gamma}_{\dot{\alpha}\tilde{R}} & \gamma_{\tilde{a}} \end{bmatrix},
$$

$$
\lambda^{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} -\lambda^{ab} & \lambda^I & \lambda \end{bmatrix}^T, \quad M_{cd\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{abcd} & M_{cdI} & M_{cd} \end{bmatrix},
$$

$$
\lambda^{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha L} & \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}{}_{L} & \lambda_{\alpha R} & \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}{}_{R} & \lambda^{\tilde{a}} \end{bmatrix}^T, \quad \zeta^{cd}{}_{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^{cd}{}_{I} & \zeta^{cd} \end{bmatrix}, \quad \zeta^{ab}{}_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \zeta^{ab} & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
M_{abc\hat{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{abcd}\sigma^{d}{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}{}_{L} & \varepsilon_{abcd}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_{\beta L} & \varepsilon_{abcd}\sigma^{d}{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}{}_{R} & \varepsilon_{abcd}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_{\beta R} & M_{abc\tilde{a}} \end{bmatrix}.
$$

Matrice $C^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$, $C^{\hat{A}}{}_{\hat{B}}$, $M_{\hat{A}\hat{B}}$, $Y_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}}$, $L_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}}$ i $T^{d\hat{A}}{}_{\hat{B}}$ su konstantne matrice koje nose informaciju o odgovarajućim konstantama interakcije, masi Higsovog polja, Jukava kaplingu, uglovima mešanja, Higsovoj konstanti samointerakcije i torziji.

6.6 Skalarna elektrodinamika kao $3BF$ teorija sa vezama

Kao prvi korak ka proučavanju Hamiltonove strukture $3BF$ teorija, razmatran je najjednostavniji netrivijalni primer – teorija skalarne elektrodinamike kuplovane sa gravitacijom [24].

Standardni način da se definiše skalarna elektrodinamika kuplovana sa gravitacijom je dejstvom:

$$
S = \int \mathrm{d}^4 k \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi l_p^2} R - \frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + g^{\mu\nu} \nabla_{\mu}\phi^* \nabla_{\nu}\phi - m^2 \phi^* \phi \right] . \tag{6.166}
$$

Ovde je $g_{\mu\nu}$ metrika prostorvremena, $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ je njena determinanta, R je Ričijev skalar, a l_p je Plankova dužina. Kovarijantni izvod ∇_{μ} kompleksnog skalarnog polja ϕ je definisan izrazom $\nabla_{\mu}\phi = (\partial_{\mu} + ikA_{\mu})\phi$, gde je A_{μ} elektromagnetni potencijal, a k označava konstantu interakcije, tj. električni naboj polja ϕ. U ovom odeljku ćemo preformulisati ovaj model kao $3BF$ teoriju sa vezama za određenu 3-grupu. Razmatrana je Hamiltonova struktura teorije, koja je neophodan korak njene kanonske kvantizacije. Radi jednostavnosti, Hamiltonova analiza je za sada urađena samo za topološki sektor teorije, zanemarujući sektor sa vezama, videti Dodatak C.

Kako bi se dobila teorija skalarne elektrodinamike u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom ukršteni modul se bira na sledeći način. Lijeve grupe G, H i L su:

$$G = SO(3,1) \times U(1)\,, \quad H = \mathbb{R}^4\,, \quad L = \mathbb{R}^2\,.$$

Preslikavanja ∂ i δ su trivijalna. Dejstvo algebre $\mathfrak{g}$ na algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$ definisano delovanjem na generatore:

$$\begin{aligned} &M_{ab} \rhd P_c = \rhd_{ab,c}{}^d P_d = \delta_{[a|}{}^d \eta_{|b]c} P_d = \eta_{[b|c} P_{|a]}\,, && T \rhd P_a = 0\,, \\ &M_{ab} \rhd P_A = 0\,, && T \rhd P_A = \rhd_A{}^B P_B \end{aligned} \tag{6.167}$$

gde su M_{ab} šest generatora $\mathfrak{so}(3,1)$, T je generator $\mathfrak{u}(1)$, P_a su četiri generatora $\mathbb{R}^4$ i P_A su dva generatora $\mathbb{R}^2$. U prethodnom izrazu dejstvo $\rhd_A{}^B$ algebre $\mathfrak{u}(1)$ na algebru $\mathbb{R}^2$ je definisano kao

$$\rhd_A{}^B = iq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dejstvo algebre $\mathfrak{g}$ na samu sebe zadato je pridruženom reprezentacijom i za izbor $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1) \times \mathfrak{u}(1)$ glasi

$$\begin{gathered} M_{ab} \rhd M_{cd} = \rhd_{ab\,,cd}{}^{ef} M_{ef} = f_{ab\,,cd}{}^{ef} M_{ef} = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac}\,, \\ M_{ab} \rhd T = 0\,, \quad T \rhd M_{ab} = 0\,, \quad T \rhd T = 0\,, \end{gathered} \tag{6.168}$$

kao posledica strukture direktnog proizvoda i toga što je grupa $U(1)$ Abelova podgrupa. Pajferovo podizanje,

$$\{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}} : H \times H \to L\,,$$

je takođe trivijalno, tj. svi koeficijenti $X_{ab}{}^A$ su jednaki nuli:

$$\{P_a\,, P_b\}_{\mathrm{pf}} \equiv X_{ab}{}^A T_A = 0\,. \tag{6.169}$$

Odgovarajuća 3-krivina za ovaj izbor 2-ukrštenog modula dobija najpre definisanjem koneksije (α, β, γ), a zatim primenom formule (2.118). Na osnovu strukture direktnog proizvoda, koneksija $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$ se može zapisati kao $\alpha = \omega + A$, gde su $\omega \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{so}(3,1))$ i $A \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{u}(1))$ diferencijalne 1-forme elementi odgovarajućih algebri. Definišemo i koneksije $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathbb{R}^4)$ i $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,, \mathbb{R}^2)$. Sada možemo naći odgovarajuću 3-krivinu $(\mathcal{F}\,, \mathcal{G}\,, \mathcal{H})$ primenom formule (2.118):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= R^{ab} M_{ab} + F T &&= \big(\mathrm{d}\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}\big) M_{ab} + \mathrm{d}A\, T\,, \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}^a P_a &&= \big(\mathrm{d}\beta^a + \omega^a{}_b \wedge \beta^b\big) P_a\,, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}^A P_A &&= \big(\mathrm{d}\gamma^A + \rhd_B{}^A A \wedge \gamma^B\big) P_A\,. \end{aligned} \tag{6.170}$$

Primetimo da koneksija ω^{ab} nije prisutna u poslednjem izrazu, što sledi na osnovu definicija dejstva $\rhd$ i Pajferovog podizanja $\{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}}$, videti (6.167) i (6.169):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathrm{d}\gamma + \alpha \wedge^{\rhd} \gamma + \{\beta \wedge \beta\} \\ &= \mathrm{d}\gamma^A P_A + (\omega^{ab} M_{ab} + AT) \wedge^{\rhd} (\gamma^A P_A) \\ &= \mathrm{d}\gamma^A P_A + \omega^{ab} \wedge \gamma^A M_{ab} \rhd P_A + A \wedge \gamma^A T \rhd P_A \\ &= \mathrm{d}\gamma^A P_A + A \wedge \gamma^A \rhd_A{}^B P_B \\ &= (\mathrm{d}\gamma^A + \rhd_B{}^A A \wedge \gamma^B) P_A\,. \end{aligned} \tag{6.171}$$

Koeficijenti diferencijalnih 2-formi F i R^{ab}, 3-forme $\mathcal{G}$, i 4-forme $\mathcal{H}$ su:

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,, \\
R^{ab}{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \omega^{ab}{}_\nu - \partial_\nu \omega^{ab}{}_\mu + \omega^a{}_{c\mu}\omega^{cb}{}_\nu - \omega^a{}_{c\nu}\omega^{cb}{}_\mu \,, \\
\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu \beta^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu \beta^a{}_{\rho\mu} + \partial_\rho \beta^a{}_{\mu\nu} + \omega^a{}_{b\mu}\,\beta^b{}_{\nu\rho} + \omega^a{}_{b\nu}\,\beta^b{}_{\rho\mu} + \omega^a{}_{b\rho}\,\beta^b{}_{\mu\nu} \,, \\
\mathcal{H}^A{}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \partial_\mu \gamma^A{}_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu \gamma^A{}_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho \gamma^A{}_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \gamma^A{}_{\mu\nu\rho} \\
&\quad + \rhd_B{}^A A_\mu \gamma^B{}_{\nu\rho\sigma} - \rhd_B{}^A A_\nu \gamma^B{}_{\rho\sigma\mu} + \rhd_B{}^A A_\rho \gamma^B{}_{\sigma\mu\nu} - \rhd_B{}^A A_\sigma \gamma^B{}_{\mu\nu\rho} \,.
\end{aligned}
\tag{6.172}
$$

Sada možemo definisati 3BF dejstvo:

$$
S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \Big(\langle B, \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C, \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D, \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}} \Big) \,,
\tag{6.173}
$$

gde su $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{so}(3,1))$, $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4\,, \mathbb{R}^4)$ i $D \in \mathcal{A}^0(\mathcal{M}_4\,, \mathbb{R}^2)$ Lagranževi množitelji. Forme $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$, $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ i $\langle \_\,, \_ \rangle_{\mathfrak{l}}$ su G-invarijantne bilinearne simetrične nedegenerisane forme na $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{l}$, redom, definisane delovanjem na generatore

$$
\langle M_{ab}, M_{cd} \rangle_{\mathfrak{g}} = g_{ab,\,cd} \,, \quad \langle T, T \rangle_{\mathfrak{g}} = 1 \,, \quad \langle M_{ab}, T \rangle_{\mathfrak{g}} = 0 \,, \quad \langle P_a, P_b \rangle_{\mathfrak{h}} = \eta_{ab} \,, \quad \langle P_A, P_B \rangle_{\mathfrak{l}} = g_{AB} \,,
$$

gde su

$$
g_{ab,\,cd} = \eta_{a[c|}\eta_{b|d]} \,, \qquad \eta_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad g_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .
$$

Identifikovanjem Lagranževog množitelja C^a kao tetrade e^a, i Lagranževog množitelja D^A kao dubleta skalarnih polja ϕ^A,

$$
\phi = \phi^A P_A = \phi P_1 + \phi^* P_2 \,,
$$

na osnovu njihovih transformacionih osobina, kao što je diskutovano u odeljku (6.2), dejstvo (6.173) možemo zapisati u sledećem obliku:

$$
S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \mathrm{d}^4x \, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \big(\frac{1}{4}\, B^{ab}{}_{\mu\nu}\, R^{cd}{}_{\rho\sigma}\, g_{ab,\,cd} + \frac{1}{4}\, B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!}\, e^a{}_\mu\, \mathcal{G}^b{}_{\nu\rho\sigma}\, \eta_{ab} + \frac{1}{4!}\, \phi^A \mathcal{H}^B{}_{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{AB} \big) \,.
\tag{6.174}
$$

Variranjem dejstva (6.174) dobijamo jednačine kretanja:

$$
\begin{aligned}
\delta B^{ab} &: & 2R_{ab} &= 0 \,, \\
\delta \omega^{ab} &: & \nabla B_{ab} - e_{[a|} \wedge \beta_{|b]} &= 0 \,, \\
\delta B &: & F &= 0 \,, \\
\delta A &: & \mathrm{d}B + \phi_A \rhd_B{}^A \gamma^B &= 0 \,, \\
\delta e^a &: & \mathcal{G}_a &= 0 \,, \\
\delta \beta^a &: & \nabla e_a &= 0 \,, \\
\delta \phi^A &: & \nabla \gamma_A &= 0 \,, \\
\delta \gamma^A &: & \nabla \phi_A &= 0 \,.
\end{aligned}
\tag{6.175}
$$

Kako želimo da dobijemo teoriju koja opisuje dublet skalarnih polja ϕ^A mase m i naelektrisanja q minimalno kuplovanih sa gravitacijom i elektromagnetnim poljem, dejstvu (6.174) je neophodno dadati odgovarajuće veze kako bismo dobili jednačine kretanja ekvivalentne jednačinama kretanja dobijenih variranjem dejstva (6.166):

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + B \wedge F + e_a \wedge \nabla \beta^a + \phi_A \nabla \gamma^A \\ & - \lambda_{ab} \wedge \Big(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \Big) \\ & + \lambda^A \wedge \Big(\gamma_A - \frac{1}{2} H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c \Big) + \Lambda^{abA} \wedge \Big(H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \nabla \phi_A A \wedge e_a \wedge e_b \Big) \\ & + \lambda \wedge \Big(B - \frac{12}{q} M_{ab} e^a \wedge e^b \Big) + \zeta^{ab} \Big(M_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F \wedge e_a \wedge e_b \Big) \\ & - \frac{1}{2 \cdot 4!} m^2 \phi_A \phi^A \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \,. \end{aligned} \tag{6.176}$$

Variranjem dejstva (6.176) redom po varijablama B_{ab}, B, ω_{ab}, β_a, λ_{ab}, Λ^{abA}, γ^A, λ^A, H_{abcA}, ζ^{ab}, M_{ab}, λ, A, ϕ^A i e^a dobijaju se jednačine kretanja:

$$R^{ab} - \lambda^{ab} = 0 \,, \tag{6.177}$$

$$F + \lambda = 0 \,, \tag{6.178}$$

$$\nabla B^{ab} - e^{[a|} \wedge \beta^{|b]} = 0 \,, \tag{6.179}$$

$$\nabla e^a = 0 \,, \tag{6.180}$$

$$B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d = 0 \,, \tag{6.181}$$

$$H_{abcA} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \nabla \phi_A \wedge e_a \wedge e_b = 0 \,, \tag{6.182}$$

$$\nabla \phi_A - \lambda_A = 0 \,, \tag{6.183}$$

$$\gamma_A - \frac{1}{2} H_{abcA} e^a \wedge e^b \wedge e^c = 0 \,, \tag{6.184}$$

$$-\frac{1}{2} \lambda^A \wedge e^a \wedge e^b \wedge e^c + \varepsilon^{cdef} \Lambda^{abA} \wedge e_d \wedge e_e \wedge e_f = 0 \,, \tag{6.185}$$

$$M_{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - F \wedge e_a \wedge e_b = 0 \,, \tag{6.186}$$

$$-\frac{12}{q} \lambda \wedge e^a \wedge e^b + \zeta^{ab} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f = 0 \,, \tag{6.187}$$

$$B - \frac{12}{g} M_{ab} e^a \wedge e^b = 0 \,, \tag{6.188}$$

$$-\mathrm{d}B + \mathrm{d}(\zeta^{ab} e_a \wedge e_b) - \phi_A \rhd_B{}^A \gamma^B - \Lambda^{abA} \rhd^B{}_A \phi_B \wedge e_a \wedge e_b = 0 \,, \tag{6.189}$$

$$\nabla \gamma_A - \nabla (\Lambda^{ab}{}_A \wedge e_a \wedge e_b) - \frac{1}{4!} m^2 \phi_A \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = 0 \,, \tag{6.190}$$

(6.191)

$$
\begin{aligned}
&\nabla\beta_a + \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc}\wedge e^d + \frac{3}{2}H_{abcA}\lambda^A\wedge e^b\wedge e^c + 3H^{defA}\varepsilon_{abcd}\Lambda_{efA}\wedge e^b\wedge e^c \\
&\quad - 2\Lambda_{abA}\wedge\nabla\phi^A\wedge e^b - 2\frac{1}{4!}m^2\phi_A\,\phi^A\varepsilon_{abcd}e^b\wedge e^c\wedge e^d \\
&\quad - \frac{24}{q}M_{ab}\lambda\wedge e^b + 4\zeta^{ef}M_{ef}\varepsilon_{abcd}e^b\wedge e^c\wedge e^d - 2\zeta_{ab}F\wedge e^b = 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.192}
$$

Dinamički stepeni slobode su tetrade e^a, skalarno polje ϕ^A i elektromagnetni potencijal A, dok preostale varijable mogu biti određene kao funkcije dinamičkih varijabli i njihovih izvoda. Jednačine (6.177)–(6.188) daju izraze za nedinamičke varijable:

$$
\begin{gathered}
\lambda_{ab\mu\nu} = R_{ab\mu\nu}\,, \qquad \omega^{ab}{}_\mu = \triangle^{ab}{}_\mu\,, \qquad \gamma^A{}_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2e}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\nabla^\sigma\phi^A\,, \\
\Lambda^{abA}{}_\mu = \frac{1}{12e}g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}\nabla_\nu\phi^A\,e^a{}_\rho e^b{}_\sigma\,, \qquad \beta^a{}_{\mu\nu} = 0\,, \qquad B_{ab\mu\nu} = \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu\,, \\
H^{abcA} = \frac{1}{6e}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\nabla_\mu\phi^A\,e^a{}_\nu e^b{}_\rho e^c{}_\sigma\,, \qquad \lambda^A{}_\mu = \nabla_\mu\phi^A\,, \\
\lambda_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\,, \quad B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2eq}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\,, \\
M^{ab} = -\frac{1}{4e}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\,e^a{}_\rho e^b{}_\sigma\,, \quad \zeta^{ab} = \frac{1}{4eq}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\,e^a{}_\rho e^b{}_\sigma\,.
\end{gathered}
\tag{6.193}
$$

Primetimo da na osnovu jednačina (6.179), (6.180) i (6.181) sledi da je koneksija $\beta^a = 0$, kao što je to bio slučaj kod čiste gravitacije. Jednačina kretanja (6.190) daje kovarijantnu Klajn-Gordonovu jednačinu za skalarno polje kuplovano sa elektromagnetnim potencijalom A,

$$
\left(\nabla_\mu\nabla^\mu - m^2\right)\phi_A = 0\,. \tag{6.194}
$$

Jednačina (6.189) daje diferencijalnu jednačinu kretanja za elektromagnetni potencijal A:

$$
\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu\,, \qquad j^\mu \equiv \frac{1}{2}\Big(\nabla^\nu\phi^A \rhd^B{}_A\phi_B - \phi_A \rhd_B{}^A\nabla^\nu\phi^B\Big) = iq\Big(\nabla\phi^*\,\phi - \phi^*\nabla\phi\Big)\,. \tag{6.195}
$$

Najzad, jednačina kretanja (6.191) za e^a nakon sređivanja daje:

$$
\begin{gathered}
R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi l_p^2\,T^{\mu\nu}\,, \\
T^{\mu\nu} \equiv \nabla^\mu\phi_A\,\nabla^\nu\phi^A - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\nabla_\rho\phi_A\,\nabla^\rho\phi^A + m^2\phi_A\,\phi^A\right) - \frac{1}{4q}\left(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + 4F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu\right)\,.
\end{gathered}
\tag{6.196}
$$

Sistem jednačina (6.177)–(6.191) je ekvivalentan sistemu jednačina (6.193)–(6.196).

Kompletna Hamiltonova analiza topološkog sektora skalarne elektrodinamike data je u Dodatku C.

Deo II

Kvantna teorija

Glava 7

Modeli spinske pene: $\boldsymbol{BF}$ teorija

Ajnštajnova opšta teorija relativnosti dovela je do našeg shvatanja prirode prostora i vremena kao manifestacije gravitacionog polja. Kao što i ostala fizička polja ispoljavaju njihova kvantna svojstva na određenoj skali, prirodno je očekivati da i gravitaciono polje, pa time i prostorvreme, poseduju određena kvantna svojstva. Stoga, neophodno je modifikovati naše razumevanje prirode prostora i vremena, kako bismo uzeli u obzir ove kvantne osobine. Problem leži u tome da sadašnje teorije, opšta teorija relativnosti i kvantna teorija polja, ne mogu da opišu kvantno ponašanje gravitacionog polja. Neophodna je *kvantna teorija gravitacije* koja ima prediktivnu moć da opiše fenomene gde i gravitacija i kvantna teorija igraju ulogu, kao što je to slučaj kod crnih rupa, ranog univerzuma, fizike na malim rastojanjima itd.

Godine 1936. Bronštajn je ponovio Bor-Rozenfeldovu analizu za elektromagnetno polje u slučaju gravitacionog polja i pokazao da kvantna teorija zabranjuje određivanje polja u proizvoljno maloj oblasti prostorvremena. Ako merimo polje u tački x, koju želimo da odredimo sa preciznošću L, zbog postojanja *Hajzenbergove relacije neodređenosti* koja povezuje poziciju i impuls čestice, sledi da neodređenost impulsa mora biti $\Delta p \geqslant \hbar/L$. U ultrarelativističkom limitu imamo da je energija $E \sim cp$, pa vidimo da oštra lokalizacija zahteva veliku energiju. Na osnovu opšte teorije relativnosti znamo da energija zakrivljuje prostor, a krivina raste kako je energija koncentrisanija u prostoru, sve do tačke formiranja crne rupe kada je masa $M \sim E/c^2$ koncentrisana u radijusu $R \sim GM/c^2$. Zahtevanjem bolje lokalizacije, dolazimo do tačke gde je $L_{Plank} = R$ ispod koje je nemoguće ići, jer bi tada lokalizacija bila sakrivena horizontom crne rupe[1]. Na osnovu prethodnih relacija dobija se:

$$L_{Plank} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33}\mathrm{cm}\,.$$

Na skalama većim od one određene *Plankovom dužinom* L_{Plank}, prostorvreme možemo posmatrati kao glatku mnogostrukost, dok ispod nje kvantne fluktuacije prostorvremena postaju nezanemarljive i više nema smisla pričati o dužini.

Prethodna analiza sugeriše da kvantna teorija polja, formalizam u kome su kvantna polja definisana na nekoj prostorvremenskoj mnogostrukosti, nije dobra slika sveta u teoriji kvantne gravitacije. Neophodan je *kvantni opis geometrije*, gde je geometrija opisana kvantnim stanjima, a prostorvreme je semiklasična aproksimacija takve kvantne konfiguracije. Jedan mogući opis kvantnih stanja geometrije, tj. gravitacionog polja, nam obezbeđuje formalizam teorije *kvantne gravitacije na petljama*[2].

[1] Pri tom se podrazumeva da Opšta teorija relativnosti važi u neizmenjenom obliku i na skalama manjim od Plankove, tj. da postoji rešenje Ajnštajnovih jednačina koje opisuje tako malu crnu rupu.

[2] eng. *Loop Quantum Gravity.*

Kvatna gravitacija na petljama

Kvantna gravitacija na petljama je pristup kvantovanju gravitacije star preko trideset i pet godina, započet Aštekarovim radom 1986. godine. Kao teorija čiste gravitacije ne nastoji da reši *problem unifikacije*, tj. da objedini interakcije i smanji broj stepeni slobode *Standardnog Modela*. Kvantizacija teorije u okviru *kanonske kvantizacione procedure* podrazumeva izbor algebre polja koja postaju kvantni operatori, što je u ovom slučaju algebra zasnovana na *holonomijama gravitacione koneksije*. Holonomija postaje operator koji formira *stanje petlje*. Teorija je nezavisna od pozadine, i stanje petlje je relevantno samo u odnosu na druge petlje i infinitezimalni pomeraj petlje ne proizvodi novo stanje, već stanje ekvivalentno do na gradijentnu transformaciju. Prostor stanja teorije je separabilan Hilbertov prostor sa bazisom stanja petlji, gde konačne linearne kombinacije stanja petlji zovemo *spinskim mrežama*.

Kvantne osobine se manifestuju diskretnim spektrom svojstvenih vrednosti operatora koji odgovaraju veličinama koje opisuju lokalne osobine gravitacionog polja, kao što je na primer operator pridružen svakom linku graničnog grafa dualne triangulacije

$$\vec{E}_l = 8\pi\gamma\hbar G\vec{L}_l\,, \tag{7.1}$$

koji su normale na granične trouglove triangulacije kojima odgovara operator površine:

$$\hat{A}_l = 8\pi\gamma\hbar G|\vec{L}|^2\,. \tag{7.2}$$

Ovaj operator ima diskretni spektar,

$$A = 8\pi\gamma\hbar G\sqrt{j(j+1)}\,, \qquad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

gde je γ *Barbero-Imirci parametar* bezdimenziona konstanta u teoriji, čija je vrednost određena tako da broj mikrostanja u KGP odgovara semiklasično izračunatoj entropiji crne rupe [41], [42]. Takođe, još jedna opservabla u ovoj teoriji je orijentisana zapremina tetraedra,

$$V^2 = \frac{2}{9}(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \times \vec{E}_3 = \frac{2}{9}\epsilon_{ijk}E_1^i E_2^j E_3^k\,, \tag{7.3}$$

odnosno operator zapremine $\hat{V}$

$$\hat{V} = \frac{\sqrt{2}}{3}(8\pi\gamma\hbar G)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2) \times \vec{L}_3} \tag{7.4}$$

koji takođe ima diskretan spektar:

$$\hat{V}\,|i_v\rangle = V\,|i_v\rangle\,. \tag{7.5}$$

To znači da prostor možemo posmatrati kao sastavljen od *ćelija* prostora, tj. tetraedara koji imaju zapreminu određenu ovim spektrom.

Četiri operatora površine $\hat{A}_a$ i operator zapremine $\hat{V}$ formiraju maksimalno komutirajući set operatora koji opisuje kvantno stanje jednog tetraedra, pa se istovremeno mogu dijagonalizovati, a kvantna stanja geometrije tetraedra su jedinstveno određena njihovim svojstvenim vrednostima $|j_a, V\rangle$. Kako je za jedinstven klasičan opis tetraedra inače potrebno šest brojeva, recimo šest dužina njegovih ivica, vidimo da, kao što je i očekivano u kvantnoj teoriji, kvantno stanje tetraedra poseduje izvesnu kvantnu neodređenost na Planovoj skali.

Ova kvalitativna slika kvantne strukture prostorvremena je očuvana u *kovarijantnoj kvantizaciji*, tj. *kvantizacionoj proceduri spinske pene*. U okviru kovarijantne kvantizacione procedure *spinske pene* podrazumeva se *funkcionalni pristup* kvantovanju gravitacije u kom se konfiguracioni integral definiše na isti način na koji je to urađeno u *Fajnmanovoj definiciji integrala po putanjama*.

Po definiciji Majkla Atije, $(n+1)$-dimenzionalna *topološka kvantna teorija polja* (TKTP) je funktorijalno pridruživanje konačnodimenzionalnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\Sigma$ svakoj zatvorenoj orijentisanoj n-mnogostrukosti Σ i vektora $\mathcal{Z}_\mathcal{M} \in \mathcal{H}_\Sigma$ svakoj orijentisanoj $(n+1)$-mnogostrukosti $\mathcal{M}$ koja ima Σ kao svoju granicu. Ako posmatramo kvantno stanje prostora formirano od $|\Lambda_3|$ tetraedara u KGP teoriji, možemo ga predstaviti kao graf u dualnoj triangulaciji, gde verteksi odgovaraju tetraedrima, a linkovi između njih trouglovima koje razdvajaju dva susedna tetraedra. Analogno Atijinoj opštoj definiciji, *model spinske pene* svakom orijentisanom grafu[3] Γ pridružuje Hilbertov prostor $\mathcal{H}_\Gamma$, a svakoj peni[4] $\mathcal{C}$, koja ima graf Γ kao svoju granicu[5], vektor $\mathcal{Z}_\mathcal{C} \in \mathcal{H}_\Gamma$. Pritom su zadovoljene sledeće aksiome [43]:

1. (multiplikativnost) $\mathcal{H}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \mathcal{H}_{\Gamma_1} \otimes \mathcal{H}_{\Gamma_2}$,
2. (dualnost) $\mathcal{H}_{\bar{\Gamma}} = \mathcal{H}^*_\Gamma\,, \qquad \mathcal{Z}_{\bar{\Gamma}} = \mathcal{Z}^\dagger_\Gamma$,
3. (funkcionalnost)[6] $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}_1 \cup_\Gamma \mathcal{C}_2} = \langle \mathcal{Z}_{\bar{\mathcal{C}}_2} | \mathcal{Z}_{\mathcal{C}_1} \rangle_{\mathcal{H}_\Gamma} = \langle \mathcal{Z}_{\bar{\mathcal{C}}_1} | \mathcal{Z}_{\mathcal{C}_2} \rangle_{\mathcal{H}_{\bar{\Gamma}}}$,
4. $\mathcal{H}_\varnothing = \mathbb{C}$,
5. $\mathcal{Z}_{\mathbb{1}_\Gamma} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\Gamma}$.

Dinamika kvantne gravitacije na petljama odgovara ovoj definiciji, pri čemu je Hilbertov prostor pridružen grafu Γ rešetkasti $SU(2)$ Jang-Millsov prostor $L^2(SU(2))^{|L_\Gamma|}/SU(2)^{|N_\Gamma|}$, gde je svaki verteks v u dualnoj triangulaciji prostorvremena obojen sa i_v koji odgovara svojstvenoj vrednosti operatora zapremine V za tu ćeliju, a svaki link ϵ u dualnoj triangulaciji prostorvremena je obojen sa j_ϵ koji odgovara svojstvenoj vrednosti površine A koja spaja te dve ćelije prostora. Ovakvo kvantno stanje prostorvremena nazivamo *spinskom mrežom*. Dalje, ako posmatramo *evoluciju spinske mreže* u vremenu, dobijamo da i_v koji je bojio verteks spinske mreže sada boji ivicu *spinske pene*, dok j_ϵ sada boji stranu. Amplitude pene $\mathcal{Z}_\mathcal{C}$ su definisane kao sumiranje amplituda spinske pene $\mathcal{Z}_\mathcal{C}(\sigma)$ po bojama stranica triangulacije $\sigma = \{j_f\}$, odnosno po irreducibilnim reprezentacijama j_f grupe $SU(2)$,

$$\mathcal{Z}_\mathcal{C} = \Sigma_\sigma \mathcal{Z}_\mathcal{C}(\sigma)\,,$$

kao što je to pokazano u narednim odeljcima.

U narednim odeljcima fokusiraćemo se na konstrukcije topoloških BF suma po stanjima u slučaju trodimenzionalne i četvorodimenzionalne mnogostrukosti uobičajenom kvantizacionom

---

[3] *Graf* je uređeni par $\Gamma = (N_\Gamma, L_\Gamma)$, gde je N_Γ konačan skup čvorova i L_Γ skup uređenih parova čvorova, tj. linkova grafa Γ. Čvorovi n i n' linka $l = (n, n')$ se nazivaju izvor i meta linka l i označavaju $\partial^-(l)$ i $\partial^+(l)$, redom. Inverzni link je definisan kao $l^{-1} \equiv (n', n)$, a $\bar{\Gamma}$ je inverzni graf grafa Γ dobijen inverzijom svih linkova grafa Γ.

[4] *Pena* je uređena trojka $\mathcal{C} = (V_\mathcal{C}, E_\mathcal{C}, F_\mathcal{C})$, gde je $V_\mathcal{C}$ konačni skup verteksa, $E_\mathcal{C}$ set uređenih parova verteksa, tj. ivica $e = (v, v')$, i $F_\mathcal{C}$ konačni skup strana. Strana je konačan niz ivica $f = (e_1, \ldots, e_{n_f})$, gde je $\partial^+(e_n) = \partial^-(e_{n+1})$ i važi $\partial^+(e_{n_f}) = \partial^-(e_1)$. Primetimo da bilo koji podskup F skupa strana $F_\mathcal{C}$ prirodno definiše podkompleks pene $\mathcal{C}$, sačinjen od verteksa, ivica i strana koje se pojavljuju u F. Pena dobijena od $\mathcal{C}$ inverzijom svih njenih ivica i strana označava se sa $\bar{\mathcal{C}}$.

[5] Ivice $E_\mathcal{C}$ koje se pojavljuju tačno jednom i pripadaju samo jednoj strani pene zovemo njenim *linkovima*, dok su ostale ivice *unutrašnje ivice*. Analogno, vertekse $V_\mathcal{C}$ koji se pojavljuju samo jednom u unutrašnjim ivicama nazivamo *nodovima*, dok preostale nazivamo *unutrašnji verteksi*. Skupovi nodova i linkova pene $\mathcal{C}$ u opštem slučaju ne formiraju graf, ali kada to čine i kada se orijentacija svakog linka poklapa sa onom indukovanom jedinstvenom stranom koja prolazi kroz nju, takvu penu nazivamo *prava pena*. U tom slučaju definišemo *granicu pene* $\partial\mathcal{C}$ kao podkompleks pene $\mathcal{C}$ kom pripadaju sve strane $\mathcal{C}$ koje sadrže najmanje jedan link. Graf koji odgovara $\partial\mathcal{C}$ je *granični graf* $\mathcal{C}$.

[6] Definiše se *kompozicija dve prave pene* $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ duž orijentisanog grafa Γ, koju obeležavamo $\mathcal{C}_1 \cup_\Gamma \mathcal{C}_2$, ako je Γ povezana komponenta graničnih grafova $\mathcal{C}_1$ i $\bar{\mathcal{C}}_2$. Kompozicija se dobija uklanjanjem Γ i spajanjem, za svaki nod, jedinstvenih ivica $e_1 \in \mathcal{C}_1$ i $e_2 \in \mathcal{C}_2$ koje sadrže taj nod u jednu ivicu, a za svaki link l jedinstvenih strana $f_1 \in \mathcal{C}_1$ i $f_2 \in \mathcal{C}_2$ u jedinstvenu stranu.

procedurom spinske pene. U trodimenzionalnom slučaju, dobijena suma po stanjima predstavljena u odeljku 7.2.1 daje kvantnu teoriju trodimenzionalne gravitacije – *Ponzano-Redže model*, što je posledica činjenice da na klasičnom nivou odgovarajuća teorija nema lokalne propagirajuće stepene slobode. Kao što znamo, to nije rezultat u realnom četvorodimenzionalnom slučaju, pa kvantnu teoriju gravitacije moramo dobiti modifikacijom amplituda topološke sume po stanjima *Ouguri modela* predstavljene u odeljku 7.2.2. Ipak, ova konstrukcija je van okvira naše diskusije, pogledati [2] za pedagoški pristup kovarijantnoj kvantizacionoj proceduri formiranja sume po stanjima koja opisuje teoriju gravitacije u četiri dimenzije.

7.1 Gejdž invarijantni objekti

Klasične jednačine kretanja BF teorije nameću uslov da je gejdž koneksija ravna, tj. na jeziku holonomija, da svaka nul-homotopna kriva odgovara identitetu gejdž grupe. U Lemi 12 razmatrana je granična kriva trougla i uslov ravnosti gejdž koneksije formulisan je za ovaj element triangulacije mnogostrukosti.

Lema 12 *Posmatrajmo trougao $(jk\ell)$. Ivice trougla $(jk)\,, j<k$ su obeležene grupnim elementima $g_{jk} \in G$. Razmotrimo dijagram (7.6).*

$$\begin{tikzcd} l\bullet & k\bullet \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] & \bullet j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left, "g_{jl}"] \end{tikzcd} \;. \tag{7.6}$$

Kriva $\gamma_1 = g_{k\ell}g_{jk}$ je jednaka krivoj $\gamma_2 = g_{j\ell}$, tj. važi identitet:

$$g_{j\ell} = g_{k\ell}g_{jk}\,. \tag{7.7}$$

7.2 Kvantizacija topološkog BF dejstva

U ovom odeljku predstavljen je postupak kvantovanja BF dejstva uobičajenom heurističkom kvantizacionom procedurom spinske pene. Najpre, konfiguracioni integral topološke sume po stanjima dat je izrazom:

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha\,\mathcal{D}B \exp\left(i\int_{M_4}\langle B\wedge\mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}}\right)\,. \tag{7.8}$$

Formalnom integracijom po Lagraževom množitelju B dobijamo izraz:

$$Z = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\alpha\,\delta(\mathcal{F})\,. \tag{7.9}$$

Zatim, 1-forma koneksije $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4,\mathfrak{g})$ se diskretizuje bojenjem ivica triangulacije $\epsilon = (jk) \in \Lambda_1$ grupnim elementima $g_\epsilon \in G$. Meru konfiguracionog integrala (7.8) diskretizujemo smenom:

$$\int \mathcal{D}\alpha \qquad \mapsto \qquad \prod_{(jk)\in\Lambda_1}\int_G dg_{jk}\,, \tag{7.10}$$

gde dg_{jk} označava integraciju sa Harovom merom na grupi G.

Uslov nestajanja krivine diskretizuje na svakom trouglu $(jkl) \in \Lambda_2$ δ-funkcija $\delta(\mathcal{F})$. Prilikom prelaza sa glatke mnogostrukosti na njenu triangulaciju, δ-funkcija definiše se na skupu trouglova triangulacije,

$$\delta(\mathcal{F}) = \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G(g_{jk\ell}) \,, \tag{7.11}$$

gde je za svaki trougao $(jkl) \in \Lambda_2$ odgovarajuća δ-funkcija $\delta_G(g_{jkl})$ data izrazom:

$$\delta_G(g_{jk\ell}) = \delta_G\big(g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big) \,. \tag{7.12}$$

Identitet (7.12) je posledica jednačine (7.7) iz Leme 12.

Zamenom prethodno definisane diskretizovane mere (7.10) i δ-funkcije (7.11) u jednačinu (7.9) dobija se suma po stanjima[7]:

$$Z = \mathcal{N} \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G dg_{jk} \left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G\big(g_{jk\ell}\big)\right) . \tag{7.18}$$

Zatim, zamenom izraza (7.12) u izraz (7.18), dobijamo eksplicitni izraz za sumu po stanjima date triangulacije prostorvremenske mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Odgovarajućim izborom konstante ispred integrala $\mathcal{N}$, dobijene nakon integracije po Lagranževom množitelju B, ova suma postaje nezavisna od integracije, tj. invarijantna na Pahnerove poteze. Upravo zahtevanjem ove invarijantnosti, za sve Pahnerove poteze, dobijamo odgovarajući izbor konstatne $\mathcal{N}$, dat definicijom 7.2.1.

[7] Sličan postupak možemo sprovesti i u dualnoj triangulaciji. Najpre, diskretizujmo dejstvo:

$$S_{BF}[B,\alpha] \to S_{BF}^{disc}[B,\alpha] \equiv \sum_{f\in\Lambda_2^*} \mathrm{tr}\,\big[B_f g_f\big], \tag{7.13}$$

gde smo integral tenzora krivine zamenili sumom holonomija g_f po svim poligonima f dualnim sklopkama triangulacije, u trodimenzionalnom slučaju ivicama $(jk) \in \Lambda_1$, na kojima je krivina različita od nule, dok smo množilac B zamenili njegovom vrednošću B_f na svakom poligonu f. Holonomija g_f na poligonu f se može napisati kao proizvod holonomija g_l redom po svim ivicama $l \in \Lambda_2^*$ datog poligona $f \in \Lambda_2^*$ [38]:

$$g_f = \prod_{l\in f} g_l . \tag{7.14}$$

Zatim, integracijom po svim množiteljima i holonomijama

$$\begin{aligned} Z \to Z^{disc} &= \int \Big(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \mathcal{D}B_f\Big) \int \Big(\prod_{l\in\Lambda_1^*} \mathcal{D}g_l\Big) \exp\Big(i \sum_{f\in\Lambda_2^*} \mathrm{tr}\,\big[B_f \prod_{l\in f} g_l\big]\Big) \\ &= \int \Big(\prod_{l\in\Lambda_1^*} \mathcal{D}g_l\Big) \prod_{f\in\Lambda_2^*} \Big(\int \mathcal{D}B_f \exp\Big(i\,\mathrm{tr}\,\big[B_f \prod_{l\in f} g_l\big]\Big)\Big) , \end{aligned} \tag{7.15}$$

gde prepoznajemo da je

$$\int \mathcal{D}B_f \exp\Big(i\,\mathrm{tr}\,\big[B_f \prod_{l\in f} g_l\big]\Big) = \mathcal{N}'\delta\big(\prod_{l\in f} g_l\big) = \mathcal{N}'\delta(g_f) \,, \tag{7.16}$$

dobija se suma po stanjima:

$$Z^{disc} = \mathcal{N}\Big(\prod_{l\in\Lambda_1^*} \int \mathcal{D}g_l\Big) \Big(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \delta(g_f)\Big) . \tag{7.17}$$

Dobijena suma po stanjima ekvivalentna je jednačini (7.18) ali je izražena preko elemenata dualne triangulacije.

Definicija 7.2.1 *Neka je $\mathcal{M}_d$ kompaktna i orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost, $d \in \{3,4\}$. Suma po stanjima* topološke gejdž teorije *je definisana kao:*

$$Z = |G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|} \left(\prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G dg_{jk} \right) \left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G\big(g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big) \right) \tag{7.19}$$

U prethodnoj definiciji integracija se vrši po elementima $g_{jk} \in G$ za svaku ivicu $(jk) \in \Lambda_1$. Podintegralna δ-funkcija nameće sledeći uslov.

- Za svaki trougao $(jk\ell) \in \Lambda_2$, uslov $g_{k\ell}\, g_{jk} = g_{j\ell}$ (videti Lemu 12).

Teorema 19 *Neka je $\mathcal{M}_d$ zatvorena i orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost za $d \in \{3,4\}$. Suma po stanjima (7.19) je invarijantna na Pahnerove poteze.*

Za sada Teoremu 19 ostavićemo bez dokaza. U poglavljima 8 i 9 razmatrane su generalizacije ove teoreme u okviru teorije kategorija i njihovi dokazi, pa se dokaz prethodne teoreme može jednostavno dobiti pojednostavljivanjem ovih opštijih slučajeva.

7.2.1 $d = 3$: Ponzano-Redže model

Trodimenzionalna kvantna gravitacija može biti definisana na više načina, a prvi uspešan pristup je *Ponzano-Redže model* kvantne gravitacije na diskretizovanoj trodimenzionalnoj mnogostrukosti formiranjem BF sume po stanjima za izbor gejdž grupe $G = SU(2)$.

Topološka suma po stanjima dobijena u prethodnom odeljku se posle izbora konkretne gejdž grupe G dalje transformiše korišćenjem Piter-Vejlove ili Planšarelove teoreme[8]. Prirodan izbor grupe G je grupa izometrija datog prostora, što je u trodimenzionalnom slučaju grupa $SO(3)$, odnosno $SU(2)$. Stoga za grupu $SU(2)$ možemo pisati:

$$\delta(g_f) = \sum_{j_f} \Big(\mathrm{dim} j_f\Big)\, \mathrm{tr}\left[D^{(j_f)}(g_f)\right], \qquad j_f \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}. \tag{7.20}$$

Zamenom prethodnog izraza za $\delta(g_f)$ u izraz za sumu po stanjima u dualnoj triangulaciji (7.17) dobijamo:

$$\begin{aligned} Z^{disc} &= \mathcal{N} \int \Big(\prod_{l\in\Lambda_1^*} \mathcal{D}g_l \Big) \prod_{f\in\Lambda_2^*} \Big(\sum_{j_f\in\mathcal{N}_0/2} \Big(2j_f+1\Big)\, \mathrm{tr}\Big[\prod_{l\in f} D^{(j_f)}(g_l)\Big]\Big) \\ &= \mathcal{N} \sum_{\{j_f\}} \Big(\prod_{f\in\Lambda_2^*} (2j_f+1) \Big) \int \Big(\prod_{l\in\Lambda_1^*} \mathcal{D}g_l \Big) \Big(\dots D^{(j_f)}{}^{a}{}_{\alpha}(g_l) \dots D^{(j_{f^*})}{}^{a^*}_{\alpha^*}(g_{l^*}) \dots \Big), \end{aligned} \tag{7.21}$$

[8] Piter-Vejlova, odnosno Planšarelova teorema, obezbeđuju dekompoziciju funkcija na grupi u sumu po odgovarajućim ireducibilnim reprezentacijama grupe. Teorema nosi ime *Piter-Vejl* za slučaj kada je grupa G kompaktna, dok je Planšarel dokazao analognu teoremu u slučaju nekompaktne grupe G.

Teorema 20 (Piter-Vejl, Planšarel teorema) *Za δ-funkciju čiji je argument element grupe $g_f \in G$ važi,*

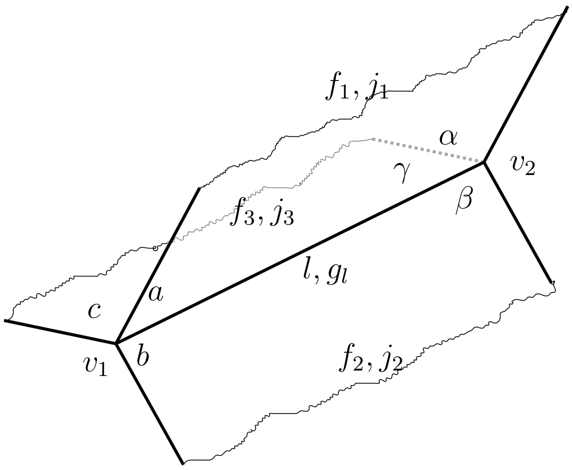
$$\delta(g_f) = \sum_{\Lambda_f} \dim(\Lambda_f)\, \chi(g_f, \Lambda_f)\,,$$

gde su Λ_f unitarne ireducibilne reprezentacije Lijeve grupe G, $\chi(g_f, \Lambda_f)$ je trag elementa g_f u reprezentaciji Λ_f i $\dim(\Lambda_f)$ je dimenzija reprezentacije.

gde su u poslednjem redu svi indeksi kontrakovani. Preuređivanjem elemenata proizvoda u zagradi u prethodnom izrazu tako da grupišemo reprezentacije elementa g_l dobijamo:

$$Z^{disc} = \mathcal{N} \sum_{\{j_f\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} (2j_f+1) \right) \mathrm{tr} \left[\prod_{l\in\Lambda_1^*} \left(\int \mathcal{D}g_l D^{(j_1)}{}^a_\alpha(g_l) D^{(j_2)}{}^b_\beta(g_l) D^{(j_3)}{}^c_\gamma(g_l) \right) \right]. \tag{7.22}$$

Očigledno je da postoje tri takve reprezentacije, odnosno tri stranice f kojima odgovaraju brojevi j_f, koje dele ivicu l, kao što je prikazano na Slici 7.1. Razlog za to je jer ivici l dualne rešetke odgovara trougao, koji ima tri ivice, kojima odgovaraju stranice f. Za grupu $SU(2)$



Slika 7.1: Jedna ivica l dualne rešetke i stranice f_1, f_2 i f_3 kojima je zajednička.

i broj reprezentacija $n = 3$ nekog elementa grupe, postoji samo jedan intertvajner[9] i on je $\{3j\}$-simbol za koji važi

$$\int \mathcal{D}g_l D^{(j_1)}{}^a_\alpha(g_l) D^{(j_2)}{}^b_\beta(g_l) D^{(j_3)}{}^c_\gamma(g_l) = i^{abc} i_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ a & b & c \end{pmatrix}_{SU(2)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}_{SU(2)}. \tag{7.24}$$

Korišćenjem (7.24) jednačina (7.22) postaje:

$$Z^{disc} = \mathcal{N} \sum_{\{j_f\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} (2j_f+1) \right) \mathrm{tr} \left[\prod_{l\in\Lambda_1^*} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \right]. \tag{7.25}$$

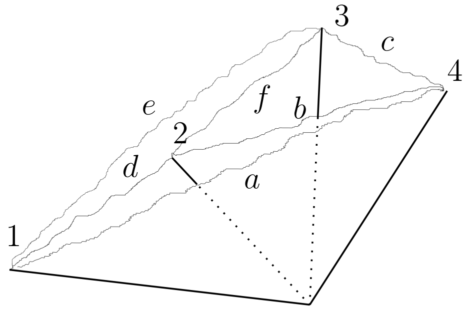
Daljim grupisanjem intertvajnera po zajedničkom verteksu, na način prikazan na Slici 7.2, dobijamo:

$$Z^{disc} = \mathcal{N} \sum_{\{j_f\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} (2j_f+1) \right) \prod_{v\in\Lambda_0^*} \left(\begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_5 \\ a & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_5 & j_6 \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \right). \tag{7.26}$$

[9] Za svaki element grupe $g \in G$ i njene reprezentacije Λ_i postoji jedan ili više objekata koje zovemo *intertvajneri* [1] koji zadovoljavaju jednakost:

$$D^{(\Lambda_1)}{}^a_\alpha(g) D^{(\Lambda_2)}{}^b_\beta(g) D^{(\Lambda_3)}{}^c_\gamma(g) \cdots D^{(\Lambda_n)}{}^n_\nu(g) i^{(\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_n)}_{abc\cdots n} = i^{(\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_n)}_{\alpha\beta\gamma\cdots\nu}. \tag{7.23}$$

Intertvajneri zavise od n, grupe G i njene reprezentacije, ali ne i od elementa grupe $g \in G$.



Slika 7.2: Četiri ivica i šest stranica koje se sastaju u jednom verteksu dualne triangulacije $3D$ mnogostrukosti.

Jednom verteksu odgovara šest[10] stranica i četiri ivica u dualnoj triangulaciji. Četiri $\{3j\}$-simbola grupisana u zagradi čine $\{6j\}$-simbol, funkciju šest brojeva $f(j_1, \cdots, j_6)$[11], pa možemo pisati:

$$Z^{disc} = \mathcal{N} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{|\Lambda_2^*|}} \left(\prod_{f=1}^{|\Lambda_2^*|} (2j_f + 1) \right) \left(\prod_{v=1}^{|\Lambda_0^*|} \{6j\}^v_{SU(2)} \right). \tag{7.27}$$

Zapisano preko elemenata triangulacije suma po stanjima *Ponzano-Redže modela* je:

$$Z^{disc} = \mathcal{N} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{|\Lambda_1|}} \left(\prod_{\epsilon=1}^{|\Lambda_1|} (2j_\epsilon + 1) \right) \left(\prod_{\tau=1}^{|\Lambda_3|} \{6j\}^\tau_{SU(2)} \right). \tag{7.28}$$

Konstruisana BF suma po stanjima daje kvantnu teoriju gravitacije u slučaju trodimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti. Stoga, klasična teorija mora biti dobijena u klasičnom limitu ove kvantne teorije. U kvantnoj mehanici, klasičan limit se dobija u limitu velikih kvantnih brojeva, gde kvantna diskretnost postaje zanemarljiva. Ponzano i Redže su ukazali, a Roberts je formalno dokazao, da u limitu velikih kvantnih brojeva j važi

$$\{6j\} \underset{j \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos(S + \frac{\pi}{4}), \tag{7.29}$$

gde je V zapremina tetraedra, a S klasično Redže dejstvo tetraedra. Raspisivanjem kosinusa i korišćenjem adicionih formula za kosinus dobijamo:

$$\{6j\} \underset{j \to \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{-12i\pi V}} \exp(iS) + \frac{1}{2\sqrt{12i\pi V}} \exp(-iS). \tag{7.30}$$

U limitu velikih kvantnih brojeva, zbir po spinovima u jednačini (7.28) možemo aproksimirati integralom po dužinama u Redže geometriji. Na osnovu jednačine (7.30) vidimo da integrand ima oblik eksponenta dejstva, pa se ispostavlja da se Ajnštajn–Hilbertovo dejstvo krije u $\{6j\}$ simbolu. Stoga, u klasičnom limitu dobijamo[12] integral po putanjama za Ajnštajn–Hilbertovo dejstvo:

$$Z \sim \int \mathcal{D}g \, e^{\frac{i}{\hbar} \int \sqrt{-g} R}. \tag{7.31}$$

[10] Verteks dualne triangulacije odgovara tetraedru obične triangulacije $3D$ mnogostrukosti, četiri ivice koje se sastaju u verteksu dualne triangulacije odgovaraju trouglovima $\mathcal{T}(\mathcal{M}_3)$, šest stranica dualne triangulacije odgovara šest ivica $\mathcal{T}(\mathcal{M}_3)$, itd.

[11] U jednom verteksu sastaju se četiri ivice, gde za svake dve postoji stranica koja ih obe sadrži. Intertvajneri oblika i^{pqr} nose informaciju o tri stranice p, q i r kojima je zajednička ivica kojoj odgovara taj intertvajner, odnosno tri broja j_f koje stranice nose.

[12] Primetimo da u izrazu (7.30) postoje dva člana sa suprotnim predznacima dejstva u eksponentima, pa je dobijeni izraz malo komplikovaniji od jednačine (7.31).

Četvorodimenzionalni slučaj se ispostavlja neznatno komplikovanijim, što je i očekivano jer u četiri dimenzije gravitacija nije topološka teorija bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Konstrukcija BF sume po stanjima za slučaj četvorodimenzionalne mnogostrukosti je predstavljena u narednom odeljku.

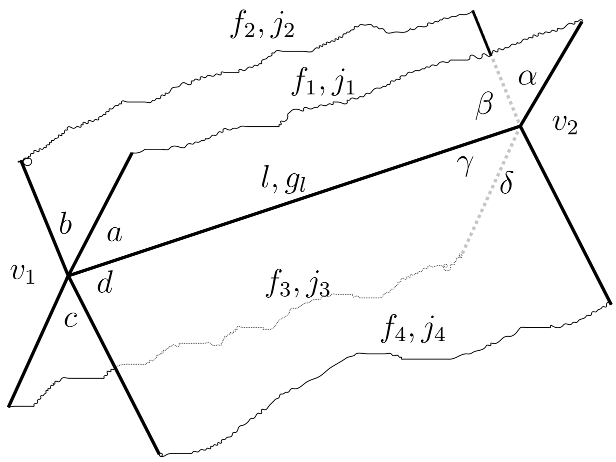
7.2.2 $d = 4$: Ouguri model

U slučaju četvorodimenzionalnog prostorvremena BF topološko dejstvo je zadato na isti način kao i u trodimenzionalnom slučaju,

$$S_{BF}[B,\omega] = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab}, \tag{7.32}$$

pr čemu su sada krivina $R_{ab} = \mathrm{d}\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b$ i Lagranžev množitelj B^{ab} 2-forme. Ponavljajući postupak iz odeljka 7.2.1 za BF dejstvo definisano za trodimenzionalnu prostorvremensku mnogostrukost, dolazimo do jednačine (7.17). Primenom Teoreme 20 za grupu $G = SO(4)$ dobijamo da suma po stanjima ima oblik (7.21), pri čemu indeks j_f sada označava ireducibilne reprezentacije grupe $SO(4)$.

Zatim, proizvod u zagradi sume po stanjima (7.17) se preuređuje tako da grupišemo reprezentacije elementa grupe g_l, pri čemu imamo u vidu da sada postoje četiri takve reprezentacije, tj. četiri broja j_f. Na Slici 7.3 je demonstrirano da u $4D$ postoje četiri stranice f koje dele ivicu l, iz razloga što ivici l dualne rešetke odgovara tetraedar, koji ima četiri trougla, kojima odgovaraju četiri stranice f.



Slika 7.3: Jedna ivica l dualne rešetke i stranice f_1, f_2, f_3 i f_4 kojima je zajednička.

Korišćenjem definicije intertvajnera za grupu $SO(4)$, može se dokazati sledeća teorema:

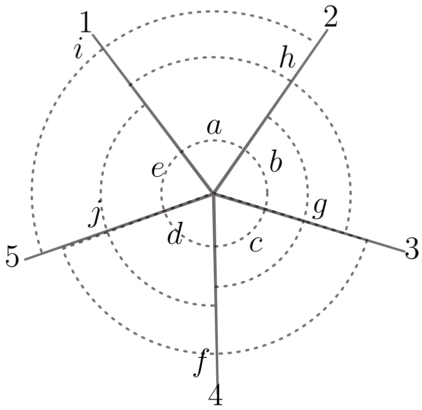
$$\int \mathcal{D}g_l D^{(j_1)a}{}_{\alpha}(g_l) D^{(j_2)b}{}_{\beta}(g_l) D^{(j_3)c}{}_{\gamma}(g_l) D^{(j_4)d}{}_{\delta}(g_l) = \sum_{I_l} i^{abcd}_{I_l} i^{I_l}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{7.33}$$

Primećujemo da za razliku od grupe $SU(2)$, koja ima samo jedan intertvajner $\{3j\}$ za dati skup reprezentacija, u slučaju grupe $SO(4)$ postoji više intertvajnera koji zadovoljavaju definicionu jednačinu (7.23). Ti intertvajneri se u jednačini (7.33) prebrojavaju nekim dodanim indeksom I_l.

Suma po stanjima koju dobijamo iz (7.21) odgovarajućim preuređivanjem i primenom jednačine (7.33) je:

$$\begin{aligned}
Z^{disc} &= \sum_{\{j_f\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \dim j_f \right) \mathrm{tr} \left[\prod_{l\in\Lambda_1^*} \left(\int \mathcal{D}g_l D^{(j_1)}{}^a{}_\alpha(g_l) D^{(j_2)}{}^b{}_\beta(g_l) D^{(j_3)}{}^c{}_\gamma(g_l) D^{(j_4)}{}^d{}_\delta(g_l) \right) \right] \\
&= \sum_{\{j_f\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \dim j_f \right) \mathrm{tr} \left[\prod_{l\in\Lambda_1^*} \sum_{I_l} i^{abcd}_{I_l} i^{I_l}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \\
&= \sum_{\{j_f\}} \sum_{\{I_l\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \dim j_f \right) \mathrm{tr} \left[\prod_{l\in\Lambda_1^*} i^{a_l b_l c_l d_l}_{I_l} i^{I_l}_{\alpha_l\beta_l\gamma_l\delta_l} \right] \\
&= \sum_{\{j_f\}} \sum_{\{I_l\}} \left(\prod_{f\in\Lambda_2^*} \dim j_f \right) \prod_{v\in\Lambda_0^*} \left(i^{efgb}_{I_l} i^{ehic}_{I_2} i^{fhja}_{I_3} i^{gjid}_{I_4} i^{abcd}_{I_5} \right).
\end{aligned} \tag{7.34}$$

U poslednjem koraku smo grupisali intertvajnere po zajedničkom verteksu kao što je prikazano na Slici 7.4. Jednom verteksu odgovara deset[13] stranica i pet ivica u dualnoj triangulaciji. Pet intertvajnera grupisanih u zagradi predstavljaju $\{15j\}_{SO(4)}$-simbol, funkciju petnaest brojeva $f(I_1, \cdots, I_5, j_1, \cdots, j_{10})$[14]. Konačno, dobijamo da suma po stanjima topološke BF teorije za



Slika 7.4: Pet ivica i deset stranica koje se sastaju u jednom verteksu dualne triangulacije $4D$ mnogostrukosti.

četvorodimenzionalnu prostorvremensku mnogostrukost ima oblik:

$$Z^{disc} = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{|\Lambda_2^*|}} \sum_{I_1} \cdots \sum_{I_{|\Lambda_1^*|}} \left(\prod_{f=1}^{|\Lambda_2^*|} \dim j_f \right) \left(\prod_{v=1}^{|\Lambda_0^*|} \{15j\}^v_{SO(4)} \right), \tag{7.35}$$

odnosno zapisano preko elemenata triangulacije:

$$Z^{disc} = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_{|\Lambda_2|}} \sum_{I_1} \cdots \sum_{I_{|\Lambda_3|}} \left(\prod_{\Delta=1}^{|\Lambda_2|} \dim j_\Delta \right) \left(\prod_{\sigma=1}^{|\Lambda_4|} \{15j\}^\sigma_{SO(4)} \right). \tag{7.36}$$

Dobijena suma po stanjima predstavlja *Ouguri model* [4].

[13] Verteks dualne triangulacije odgovara 4-simpleksu obične triangulacije $4D$ mnogostrukosti, pet ivica koje se sastaju u verteksu dualne triangulacije odgovaraju tetraedrima $\mathcal{T}(\mathcal{M}_4)$, deset stranica dualne triangulacije odgovaraju deset trouglova $\mathcal{T}(\mathcal{M}_4)$, itd.

[14] Intertvajneri oblika $i^{pqrs}_{I_l}$ nose informaciju o ivici l i o četiri stranice kojima je ona zajednička p, q, r i s, tj. o broju I_l koji nosi ivica i brojevima j_f koje nose stranice.

Za razliku od trodimenzionalnog slučaja gde je opšta teorija relativnosti teorija bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode, u četiri dimenzije BF teorija nije ekvivalentna opštoj teoriji relativnosti. Da bi smo dobili teoriju koja opisuje OTR, neophodna je modifikacija BF dejstva dodavanjem odgovarajućih veza, tj. formulacija Plebanski dejstva (4.74) na nivou klasične teorije, ili deformacija topološke sume po stanjima (7.36) u netopološku sumu po stanjima na nivou kvantne teorije. Deformacija sume po stanjima se postiže izborom drugačijih amplituda u modelu, procedurom opisanom u [9][10]. Ovaj postupak rezultuje *$EPRL/FK$ modelom spinske pene*, koji predstavlja jednu moguću kvantizaciju *Opšte teorije relativnosti*.

Kvantovanje BF teorije sa vezama i konstrukcija kvantne teorije gravitacije prevazilazi okvire naše diskusije, pa zainteresovanog čitaoca upućujemo na literaturu [9][10].

Glava 8

Formiranje topološke sume po stanjima: $2BF$ teorija

U ovom poglavlju fokusiraćemo se na drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene za $2BF$ teoriju. Demonstriraćemo kako se konstruiše suma po stanjima Z koja je nezavisna od triangulacije, na osnovu klasičnog $2BF$ dejstva za opštu striktnu 2-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje glatke d-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, za slučajeve $d \in \{3,4\}$. Za $d=3$, kontruisana suma po stanjima je upravo Jeterov model, dok se za $d=4$ poklapa sa Porterovom TKTP za $d=4$ i $n=2$.

Da bismo proverili da je konstruisana suma po stanjima topološka, analiziramo njeno ponašanje pri Pahnerovim potezima, lokalnim promenama triangulacije koje čuvaju topologiju, tako da su bilo koje dve triangulacije iste mnogostrukosti povezane konačnim brojem Pahnerovih poteza. U trodimenzionalnom slučaju postoji četiri Pahnerova poteza — potezi $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i njihovi inverzi, dok u 4 dimenzije postoji pet različitih Pahnerovih poteza — potezi $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i $5 \leftrightarrow 1$ i njihovi inverzi. Postavka analize ponašanja konstruisane sume po stanjima pri ovim Pahnerovim potezima predstavljena je u odeljku 8.3, dok su detalji proračuna dati u Dodatku E.1. Dobijeno je da suma po stanjima nepromenjena pri ovim transformacijama mnogostrukosti, što dokazuje da je *topološka invarijanta* mnogostrukosti. Kako je nezavisna od triangulacije, suma po stanjima je nepromenjena pri proizvoljnom usitnjavanju triangulacije i stoga definiše teoriju kontinuuma na glatkoj mnogostrukosti.

Pogledati rad Žirelija, Pfajfera i Popeskua za više informacija [13].

8.1 Gejdž invarijantni objekti

Dejstvo klasične BF teorije izabrano je tako da bude nezavisno od bilo kakve pozadinske metrike, tj. da zavisi samo od prostorvremenske mnogostrukosti. Klasične jednačine kretanja nameću uslov da je gejdž koneksija ravna, tj. na jeziku holonomija, da svaka nul-homotopna kriva odgovara identitetu gejdž grupe. U okviru viših gejdž teorija, konkretno 2-gejdž teorije i odgovarajuće $2BF$ teorije, ovaj uslov se generalizuje zahtevom da površinska holonomija granične 2-sfere svake 3-lopte bude trivijalna.

U odeljku 2.2 uveli smo niz operacija pomoću kojih na jeziku 2-gejdž teorije definišu kompozicije proizvoljnih puteva i površina, sve do proizvoljno velikih. U ovom odeljku ćemo koristiti ove kompozicije kako bismo konstruisali gejdž invarijantne veličine koje odgovaraju zatvorenim putevima i površinama. U Lemama 13 i 14, ovaj se postupak koristi za graničnu putanju trougla i graničnu površinu tetraedra, kao što je izvedeno u radu [13].

Lema 13 *Posmatrajmo trougao $(jk\ell)$. Ivice trougla $(jk)\,, j<k$ su obeležene grupnim elementima $g_{jk} \in G$, a trougao $(jk\ell)\,, j<k<\ell$ je obeležen elementom $h_{jk\ell} \in H$. Razmotrimo* *dijagram (8.1).*

$$
\begin{tikzcd}
l & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=60, "g_{jl}"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
l \arrow[r, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"] & l \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_{jkl})"] & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_{g_{kl}g_{jk}}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=60, "g_{kl}g_{jk}"] \\
 & & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
l & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=60, "\partial(h_{jkl})\, g_{kl}g_{jk}"] \\
 & {} &
\end{tikzcd} .
\tag{8.1}
$$

Kriva $\gamma_1 = g_{k\ell}g_{jk}$ *je izvor* 2*-morfizma, a kriva* $\gamma_2 = g_{j\ell}$ *je meta površinskog* 2*-morfizma* $\Sigma : \gamma_1 \to \gamma_2$ *obeleženog sa* $h_{jk\ell}$*,*

$$
g_{j\ell} = \partial(h_{jk\ell})g_{k\ell}g_{jk} \,. \tag{8.2}
$$

Lema 14 *Posmatrajmo tetraedar* $(jk\ell m)$*. Ivice* $(jk)\,, j<k$ *su obeležene grupnim elementima* $g_{jk} \in G$*, trouglovi* $(jk\ell)\,,\, j<k<\ell$ *grupnim elementima* $h_{jk\ell} \in H$*. Orijentisali smo trouglove* $(jk\ell)$ *tako da je kriva* $g_{k\ell}g_{jk}$ *izvor* 2*-morfizma, a kriva* $g_{j\ell}$ *meta, tj. zadovoljen je uslov* $g_{j\ell} = \partial(h_{jk\ell})g_{k\ell}g_{jk}$ *.*

Najpre, presečemo površinu tetraedra po granici (jm)*. To određuje redosled vertikalne kompozicije sastavnih površina. Moramo biti sigurni da su sve površine kompozibilne, tj. da imaju odgovarajuće referentne točke i ispravnu orijentaciju za vertikalnu kompoziciju.*

Analizirajmo prvo kompoziciju prikazanu na dijagramu (8.3). Prvo pomeramo krivu od $g_{k\ell}g_{jk}$ *do krive* $g_{j\ell}$*. U ovom stadijumu dobijeni rezultat nije vertikalno kompozibilan sa trouglom* $(j\ell m)$*, prvo mu moramo dodati* $g_{\ell m}$ *sa leve strane. Sada su ova dva morfizma vertikalno kompozibilna, a dobijeni* 2*-morfizam prevlači krivu do* g_{jm}*. Dobijeni* 2*-morhizam je:*

$$
\begin{tikzcd}
m & \ell \arrow[l, "g_{\ell m}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{j\ell m}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jk\ell}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{j\ell}"] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
= (g_{\ell m}g_{j\ell}, h_{j\ell m})\#_2\big(g_{\ell m}\#_1(g_{k\ell}g_{jk}, h_{jk\ell})\big) = \big(g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{j\ell m}(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\big) .
\tag{8.3}
$$

Razmotrimo dijagram (8.4). Prvo prevlačimo krivu $g_{\ell m}g_{k\ell}$ *do krive* g_{km}*. Da bi vertikalna kompozicija dobijenog rezultata sa trouglom* (jkm) *bila moguća, najpre mu dodamo krivu* g_{jk} *sa desne strane. Sada su dva morfizma vertikalno kompozibilna i dobijeni* 2*-morfizam prevlači krivu na* g_{jm}*. Dobijen je sledeći* 2*-morfizam:*

$$
\begin{tikzcd}
m & \ell \arrow[l, bend right, "g_{\ell m}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{k\ell m}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{km}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkm}"] & j \arrow[l, "g_{jk}"'] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
= (g_{km}g_{jk}, h_{jkm})\#_2\big((g_{\ell m}g_{k\ell}, h_{k\ell m})\#_1 g_{jk}\big) = (g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkm}h_{k\ell m}) .
\tag{8.4}
$$

Dve površine $\Sigma_1 : g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk} \to g_{jm}$ *i* $\Sigma_2 : g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk} \to g_{jm}$ *opisuju isti* 2*-morfizam, odnosno*

$$
(g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkm}h_{k\ell m}) = \big(g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{j\ell m}(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\big) \,, \tag{8.5}
$$

na osnovu čega dobijamo relaciju:

$$
h_{jkm}h_{k\ell m} = h_{j\ell m}(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell}) \,. \tag{8.6}
$$

8.2 Kvantizacija topološkog $2BF$ dejstva

U ovom odeljku predstavićemo kombinatorni opis konstrukcije sume po stanjima za $2BF$ teoriju formiranu za triangulaciju mnogostrukosti dimenzije $d = \{3, 4\}$.

Kvantovanje $2BF$ klasičnog dejstva, datog jednačinom (8) radi se na isti način kao i u slučaju BF teorija, uobičajenom heurističkom kvantizacionom procedurom spinske pene. Najpre, konfiguracioni integral topološke sume po stanjima dat je izrazom:

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha\, \mathcal{D}\beta\, \mathcal{D}B\, \mathcal{D}C \exp\left(i \int_{M_d} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} \right) . \tag{8.7}$$

Formalnom integracijom po Lagraževim množiteljima B i C dobijamo izraz:

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\alpha\, \mathcal{D}\beta\, \delta(\mathcal{F})\delta(\mathcal{G}) . \tag{8.8}$$

Slično kao i u običnoj gejdž teoriji 1-forma koneksije $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_d, \mathfrak{g})$ se diskretizuje bojenjem ivica triangulacije $\epsilon = (jk) \in \Lambda_1$ grupnim elementima $g_\epsilon \in G$, dok se 2-forma koneksije $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_d\,, \mathfrak{h})$ diskretizuje bojenjem trouglova $\Delta = (jk\ell) \in \Lambda_2$ elementima grupe $h_\Delta \in H$. Mere konfiguracionog integrala (8.7) diskretizujemo smenom:

$$\int \mathcal{D}\alpha \quad \mapsto \quad \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G \mathrm{d}g_{jk} \,, \tag{8.9}$$

$$\int \mathcal{D}\beta \quad \mapsto \quad \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H \mathrm{d}h_{jk\ell} \,, \tag{8.10}$$

gde dg_{jk} i $dh_{jk\ell}$ označavaju integraciju sa Harovom merom na grupama G i H. Uslov nestajanja lažne krivine zadaje se na svakom trouglu $(jkl) \in \Lambda_2$ dikretizacijom $\delta(\mathcal{F})$. Prilikom prelaza sa glatke mnogostrukosti na njenu triangulaciju, δ distribucija definiše se na skupu elemenata triangulacije,

$$\delta(\mathcal{F}) = \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G(g_{jk\ell}) \,, \tag{8.11}$$

gde je za svaki trougao $(jkl) \in \Lambda_2$ odgovarajuća δ-funkcija $\delta_G(g_{jkl})$ data izrazom (videti jednačinu (8.2) u Lemi 13):

$$\delta_G(g_{jk\ell}) = \delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\, g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big) . \tag{8.12}$$

Uslov da je površinska holonomija granične 2-sfere svake 3-lopte trivijalna $\delta(\mathcal{G})$, diskretizovan na elemente triagulacije mnogostrukosti postaje

$$\delta(\mathcal{G}) = \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H(h_{jk\ell m}) \,, \tag{8.13}$$

gde za svaki tetraedar $(jk\ell m) \in \Lambda_3$ važi:

$$\delta_H(h_{jk\ell m}) = \delta_H\big(h_{j\ell m}\, (g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell})\, h_{k\ell m}^{-1}\, h_{jkm}^{-1}\big) . \tag{8.14}$$

Izraz (8.14) je posledica jednačine (8.6) izvedene u Lemi 14.

Zamenom prethodno definisanih diskretizovanih mera (8.9) i (8.10), δ-funkcija (8.11) i (8.13) u jednačinu (8.8) dobija se suma po stanjima:

$$Z = \mathcal{N} \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G \mathrm{d}g_{jk} \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H \mathrm{d}h_{jk\ell} \Bigg(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_G\big(g_{jk\ell}\big)\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H\big(h_{jk\ell m}\big)\Bigg). \tag{8.15}$$

Zatim, zamenom izraza (8.12) i (8.14) u izraz (8.15), dobijamo eksplicitni izraz za sumu po stanjima date triangulacije mnogostrukosti $\mathcal{M}_d$. Odgovarajućim izborom konstante ispred integrala $\mathcal{N}$, dobijene nakon integracije po Lagranževim množiteljima B i C, ova suma postaje nezavisna od triangulacije, tj. invarijantna na Pahnerove poteze[1]. Upravo zahtevanjem ove invarijantnosti, za sve Pahnerova poteza, dobijamo odgovarajući izbor konstatne $\mathcal{N}$, dat definicijom 8.2.1.

Definicija 8.2.1 *Neka je $\mathcal{M}_d$ kompaktna i orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost za $d = \{3,4\}$ i neka je $(H \stackrel{\partial}{\to} G\,, \rhd\,)$ ukršten modul. Suma po stanjima topološke više gejdž teorije je definisana kao:*

$$
\begin{aligned}
Z \;=\; & |G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|}|H|^{|\Lambda_0|-|\Lambda_1|+|\Lambda_2|-|\Lambda_3|}\left(\prod_{(jk)\in\Lambda_1}\int_G \mathrm{d}g_{jk}\right)\left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2}\int_H \mathrm{d}h_{jk\ell}\right) \\
& \times\left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2}\delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\,g_{k\ell}\,g_{jk}\,g_{j\ell}^{-1}\big)\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3}\delta_H\big(h_{j\ell m}\,(g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell})\,h_{k\ell m}^{-1}\,h_{jkm}^{-1}\big)\right)
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

U prethodnoj definiciji integracija se vrši po elementima $g_{jk} \in G$ za svaku ivicu $(jk) \in \Lambda_1$ i elementima $h_{jk\ell} \in H$ za svaki trougao $(jk\ell) \in \Lambda_2$. Podintegralne δ-funkcije nameću sledeće uslove.

1. Za svaki trougao $(jk\ell) \in \Lambda_2$, obojen elementom grupe $h_{jk\ell}$, uslov $\partial(h_{jk\ell})\,g_{k\ell}\,g_{jk} = g_{j\ell}$ zahteva da svaki trougao $h_{jk\ell}$ ima odgovarajući izvor i metu (videti Lemu 13);

2. Za svaki tetraedar $(jk\ell m) \in \Lambda_3$ uslov da je površinska holonomija tetraedra trivijantna svodi se na uslov da je $h_{j\ell m}\,(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})h_{k\ell m}^{-1}h_{jkm}^{-1}$ jednako neutralnom elementu grupe H (videti Lemu 14).

Teorema 22 *Neka je $\mathcal{M}_d$ zatvorena i orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost za $d = \{3,4\}$ i $(H \stackrel{\partial}{\to} G\,, \rhd\,)$ uskršteni modul. Suma po stanjima (8.16) je invarijantna na Pahnerove poteze.*

8.3 Pahnerovi potezi

8.3.1 $d = 3$

U trodimenzionalnom slučaju, da bi se proverila invarijantnost sume po stanjima (8.16) dovoljno je pokazati da se ona ne menja pri četiri Pahnerova poteza, $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i njihovim inverzima. Postavka dokaza invarijantnosti sume po stanjima (8.16) na Pahnerove poteze data je u ovom odeljku, dok su detalji računa prikazani u Dodatku E.1 [13].

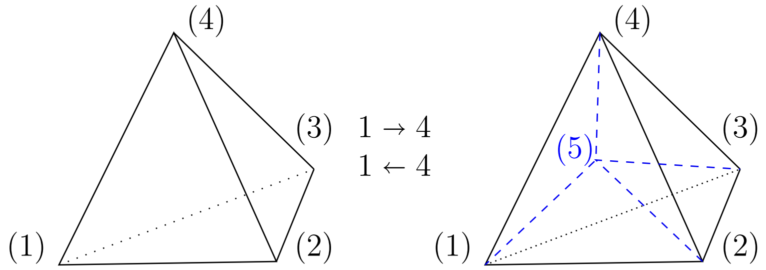
Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 4$

Obeležimo vertekse sa leve strane $1 \leftrightarrow 4$ Pahnerovog poteza sa (1234). Dodavanjem verteksa (5) sa desne strane Pahnerovog poteza dobijamo četiri tetraedra:

$$
M_3 = \{(2345),(1235),(1345),(1245)\}\,. \tag{8.17}
$$

[1]Po Pahnerovoj teoremi, da bismo dokazali da je suma po stanjima topološka invarijantna, tj, da je invarijantna na promenu triangulacije, dovoljno je pokazati invarijantnost na Pahnerove poteze, koje je definisao Udo Pahner 1991. godine [44]. U trodimenzionalnom prostoru jedini Pahnerovi potezi su $2 \to 3$, $2 \leftarrow 3$, $1 \to 4$ i $1 \leftarrow 4$.

Teorema 21 (Pahnerova teorema) *Za datu deo-po-deo glatku mnogostrukost $\mathcal{M}_D$ svaka triangulacija te mnogostrukosti $T_1(\mathcal{M}_D)$ povezana je sa nekom triangulacijom homeomorfne (topološki izomorfne) mnogostrukosti $T_2(\mathcal{M}_D)$ konačnim brojem Pahnerovih poteza.*



Sa desne strane su prisutni dodatni trouglovi,

$$M_2 = \{(125),(135),(145),(235),(245),(345)\}\,, \tag{8.18}$$

odnosno dodatne ivice:

$$M_1 = \{(15),(25),(35),(45)\}\,. \tag{8.19}$$

Sa leve strane imamo sumu po stanjima,

$$\mathcal{Z}^{1\leftrightarrow 4}_{\text{levo}} = |G|^{-2}|H|^{1}\delta_H(h_{1234})\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}, \tag{8.20}$$

dok sa desne strane imamo sumu po stanjima:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{1\leftrightarrow 4}_{\text{desno}} = \; & |G|^{-5}|H|^{1}\int_{G^4} \mathrm{d}g_{15}\mathrm{d}g_{25}\mathrm{d}g_{35}\mathrm{d}g_{45} \int_{H^6} \mathrm{d}h_{125}\mathrm{d}h_{135}\mathrm{d}h_{145}\mathrm{d}h_{235}\mathrm{d}h_{245}\mathrm{d}h_{345} \\ & \left(\prod_{(jk\ell)\in M_2}\delta_G(g_{jk\ell})\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3}\delta_H(h_{jk\ell m})\right)\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}.\end{aligned} \tag{8.21}$$

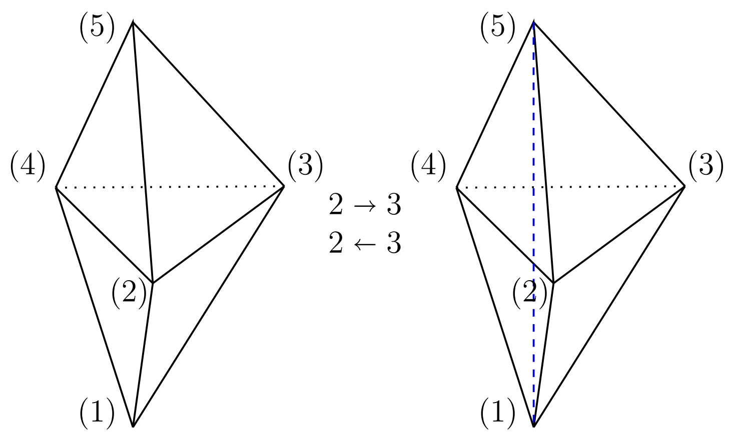
gde su M_2 i M_3 dati u izrazima (8.17) i (8.18). Broj k-simpleksa sa obe strane $1 \leftrightarrow 4$ poteza (pri čemu ne brojimo ostatak triangulacije) dat je u Tabeli 8.1.

	$\lvert\Lambda_0\rvert$	$\lvert\Lambda_1\rvert$	$\lvert\Lambda_2\rvert$	$\lvert\Lambda_3\rvert$
l.s.	4	6	4	1
d.s.	5	10	10	4

Tabela 8.1: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$ i tetraedra $|\Lambda_3|$ sa leve i desne strane $1 \leftrightarrow 4$ Pahnerovog poteza.

Dokaz invarijantnosti svodi se na dokaz da su izrazi (8.20) i (8.21) jednaki, pri čemu činilac $\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}$ označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

Pahnerov potez 2 ↔ 3



Obeležimo tetraedre na levoj strani poteza $M_3^{\text{levo}} = \{(1234), (2345)\}$, koji dele trougao $M_2^{\text{levo}} = \{(234)\}$, dok sa desne strane imamo tetraedre $M_3^{\text{desno}} = \{(1235), (1245), (1345)\}$, koji dele ivicu $M_1^{\text{desno}} = \{(15)\}$, a svaka dva od njih dele jedan od trouglova $M_2^{\text{desno}} = \{(125), (135), (145)\}$.

Sa leve strane $2 \leftrightarrow 3$ poteza imamo sumu po stanjima

$$\mathcal{Z}_{\text{levo}}^{2\leftrightarrow 3} = |G|^{-3}|H|^{1} \int_H \mathrm{d}h_{234} \delta_G(g_{234})\, \delta_H(h_{1234})\delta_H(h_{2345})\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}, \tag{8.22}$$

dok sa desne strane imamo sumu po stanjima:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{desno}}^{2\leftrightarrow 3} = \quad & |G|^{-4}|H|^{1} \int_G \mathrm{d}g_{15} \int_{H^3} \mathrm{d}h_{125}\mathrm{d}h_{135}\mathrm{d}h_{145} \\ & \delta_G(g_{125})\delta_G(g_{135})\delta_G(g_{145})\, \delta_H(h_{1235})\delta_H(h_{1245})\delta_H(h_{1345})\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}\,. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Broj k-simpleksa sa obe strane $2 \leftrightarrow 3$ poteza prikazana je u Tabeli 8.2.

	$\lvert\Lambda_0\rvert$	$\lvert\Lambda_1\rvert$	$\lvert\Lambda_2\rvert$	$\lvert\Lambda_3\rvert$
l.s.	5	9	7	2
d.s.	5	10	9	3

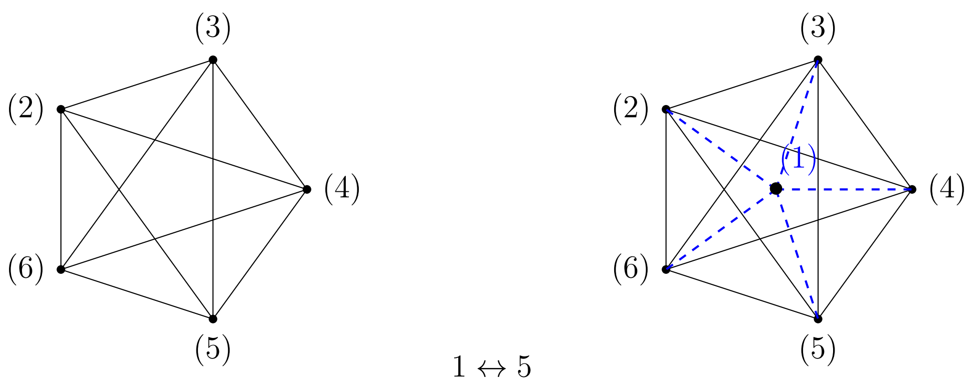
Tabela 8.2: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$ i tetraedra $|\Lambda_3|$ sa leve i desne strane $2 \leftrightarrow 3$ Pahnerovog poteza.

Dokaz invarijantnosti svodi se na dokaz da su izrazi (8.22) i (8.23) jednaki, pri čemu činilac $\mathcal{Z}_{\text{ostatak}}$ označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

8.3.2 $d = 4$

U četvorodimenzionalnom slučaju, da bi se proverila invarijantnost sume po stanjima (8.16) dovoljno je pokazati da se ona ne menja pri pet Pahnerovih poteza, $1 \leftrightarrow 5$, $2 \leftrightarrow 4$ i $3 \leftrightarrow 3$ Pahnerovim potezima i njihovim inverzima. Postavka dokaza invarijantnosti sume po stanjima (8.16) na Pahnerove poteze data je u ovom odeljku, dok su detalji računa prikazani u Dodatku E.1 [13].

Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 5$



$1 \leftrightarrow 5$

Obeležimo vertekse 4-simpleksa na levoj strani $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza sa (23456). Dodavanjem verteksa (1) sa desne strane Pahnerovog poteza dobijamo pet 4-simpleksa

$$M_4 = \{(13456), (12456), (12356), (12346), (12345)\}\,.$$

Sa desne strane su prisutni dodatni tetraedri

$$M_3 = \{(1234),(1235),(1236),(1245),(1246),(1256),(1345),(1346),(1356),(1456)\}\,,$$

dodatni trouglovi

$$(jk\ell) \in M_2 = \{(123),(124),(125),(126),(134),(135),(136),(145),(146),(156)\}\,,$$

dodatne ivice $(jk) \in M_1 = \{(12),(13),(14),(15),(16)\}$ i dodatni verteks $(j) \in M_0 = \{(1)\}$. Svi ostali simpleksi su prisutni sa obe strane poteza.

Invarijantnost sume po stanjima (8.16) na Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 5$ znači da je integral sa desne strane,

$$\begin{aligned} Z^{1\leftrightarrow 5}_{\text{desno}} = |G|^{-11}|H|^{-4} \int_{G^5} \prod_{(jk)\in M_1} \mathrm{d}g_{jk} \int_{H^{10}} \prod_{(jk\ell)\in M_2} \mathrm{d}h_{jk\ell} \\ \cdot \left(\prod_{(jk\ell)\in M_2} \delta_G(g_{jk\ell}) \right) \left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3} \delta_H(h_{jk\ell m}) \right) Z_{\text{ostatak}}\,, \end{aligned} \tag{8.24}$$

jednak sumi po stanjima prisutnoj na levoj strani,

$$Z^{1\leftrightarrow 5}_{\text{levo}} = |G|^{-5}|H|^{0} Z_{\text{ostatak}}\,. \tag{8.25}$$

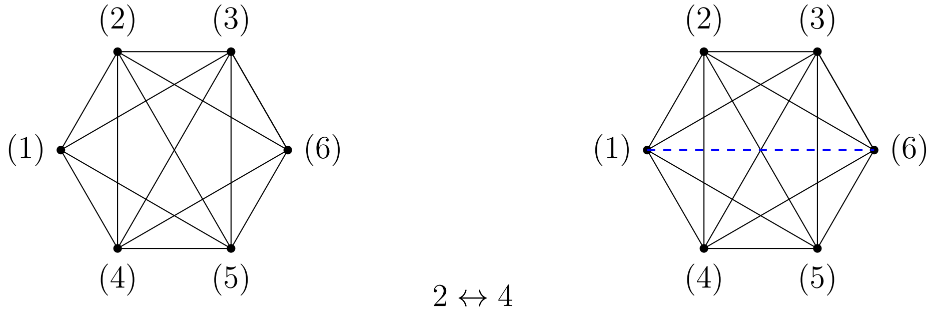
Faktore ispred integrala sume po stanjima, prisutne sa leve i desne strane poteza, izračunavamo na osnovu jednačine (8.16), odnosno koristimo $|G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|}$ i $|H|^{|\Lambda_0|-|\Lambda_1|+|\Lambda_2|-|\Lambda_3|}$, gde su $|\Lambda_0|$, $|\Lambda_1|$, $|\Lambda_2|$, $|\Lambda_3|$ redom brojevi verteksa, ivica, trouglova i tetraedra u triangulaciji. Na osnovu podataka prikazanih u Tabeli 8.3 sa desne strane se dobija faktor $|G|^{-11}|H|^{-4}$, dok je faktor sa leve strane jednak $|G|^{-5}|H|^{0}$.

	$\|\Lambda_0\|$	$\|\Lambda_1\|$	$\|\Lambda_2\|$	$\|\Lambda_3\|$	$\|\Lambda_4\|$
l.s.	5	10	10	5	1
d.s.	6	15	20	15	5

Tabela 8.3: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$, tetraedra $|\Lambda_3|$ i 4-simpleksa $|\Lambda_4|$ sa leve i desne strane $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza.

Dokaz invarijantnosti svodi se na dokaz da su izrazi (8.24) i (8.25) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

Pahnerov potez $2 \leftrightarrow 4$



Kako bi proverili invarijantnost sume po stanjima (8.16) pri $2 \leftrightarrow 4$ Pahnerovom potezu, poređajmo vertekse tako da na levoj strani poteza imamo dva 4-simpleksa

$$M_4^{\text{levo}} = \{(23456),(12345)\}$$

a na desnoj strani četiri 4-simpleksa

$$M_4^{\text{desno}} = \{(12346), (12356), (12456), (13456)\}\,.$$

Onda, na levoj strani imamo jedan tetraedar

$$M_3^{\text{levo}} = \{(2345)\}\,,$$

dok na desnoj strani imamo šest tetraedra

$$M_3^{\text{desno}} = \{(1236), (1246), (1256), (1346), (1356), (1456)\}\,.$$

Svi ostali tetraedri su prisutni na obe strane poteza. Takođe, na desnoj strani su prisutni trouglovi $M_2^{\text{desno}} = \{(126), (136), (146), (156)\}$ i jedna ivica $M_1^{\text{desno}} = \{(16)\}$, dok su svi preostali trouglovi i ivice prisutni sa obe strane poteza. Takođe, svi verteksi su prisutni sa obe strane poteza.

Na levoj strani poteza imamo integral,

$$Z_{\text{levo}}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-8}|H|^{-1}\delta_H(h_{2345})Z_{\text{ostatak}}\,, \tag{8.26}$$

dok je sa desne strane integral

$$\begin{aligned} Z_{\text{desno}}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-11}|H|^{-3} \int_G \mathrm{d}g_{16} \int_{H^4} \mathrm{d}h_{126}\mathrm{d}h_{136}\mathrm{d}h_{146}\mathrm{d}h_{156} \\ \left(\prod_{(jk\ell)\in M_2^{\text{desno}}} \delta_G(g_{jk\ell})\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3^{\text{desno}}} \delta_H(h_{jk\ell m})\right)Z_{\text{ostatak}}\,. \end{aligned} \tag{8.27}$$

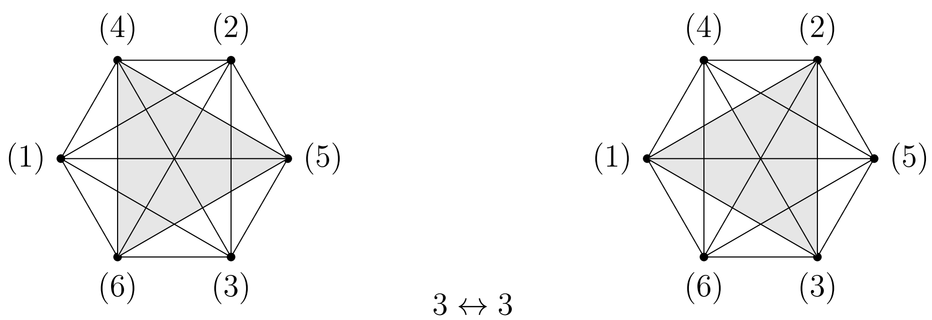
Prebrojavanjem k-simpleksa sa obe strane $2 \leftrightarrow 4$ poteza (vidi Tabelu 8.4) dobijamo koeficijente ispred integrala – $|G|^{-8}|H|^{-1}$ sa leve strane poteza i $|G|^{-11}|H|^{-3}$ sa desne strane poteza.

	$\lvert\Lambda_0\rvert$	$\lvert\Lambda_1\rvert$	$\lvert\Lambda_2\rvert$	$\lvert\Lambda_3\rvert$	$\lvert\Lambda_4\rvert$
l.s.	6	14	16	9	2
d.s.	6	15	20	14	4

Tabela 8.4: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$, tetraedra $|\Lambda_3|$ i 4-simpleksa $|\Lambda_4|$ sa obe strane $2 \leftrightarrow 4$ poteza.

Dokaz invarijantnosti svodi se na dokaz da su izrazi (8.26) i (8.27) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

Pahnerov potez 3 ↔ 3



Obeležimo vertekse tako da sa leve strane $3 \leftrightarrow 3$ Pahnerovog poteza, imamo tri 4-simpleksa

$$M_4^{\text{levo}} = \{(23456), (13456), (12456)\} ,$$

a sa desne strane imamo 4-simplekse

$$M_4^{\text{desno}} = \{(12356), (12346), (12345)\} .$$

Sa leve strane su prisutni tetraedri $M_3^{\text{levo}} = \{(1456), (2456), (3456)\}$, dok su sa desne strane prisutni $M_3^{\text{desno}} = \{(1234), (1235), (1236)\}$. Dve strane poteza dele šest tetraedara, dok se sa svake strane nalazi tri tetraedra koje dele dva 4-simpleksa. Dalje, sa leve strane imamo trougao $M_2^{\text{levo}} = \{(456)\}$, a sa desne strane poteza trougao $M_2^{\text{desno}} = \{(123)\}$. Svi ostali trouglovi, ivice i verteksi se pojavljuju sa obe strane poteza.

Dakle, na levoj strani poteza imamo integral,

$$Z_{\text{levo}}^{3\leftrightarrow 3} = \int_H \mathrm{d}h_{456} \delta_G(g_{456}) \delta_H(h_{3456}) \delta_H(h_{2456}) \delta_H(h_{1456}) Z_{\text{ostatak}} , \tag{8.28}$$

dok sa desne strane imamo integral:

$$Z_{\text{desno}}^{3\leftrightarrow 3} = \int_H \mathrm{d}h_{123} \delta_G(g_{123}) \delta_H(h_{1234}) \delta_H(h_{1235}) \delta_H(h_{1236}) Z_{\text{ostatak}} . \tag{8.29}$$

Dokaz invarijantnosti svodi se na dokaz da su izrazi (8.28) i (8.29) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

Glava 9

Formiranje topološke sume po stanjima: $3BF$ teorija

U ovom poglavlju fokusiraćemo se na drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene za $3BF$ teoriju. Analogno postupku iz prethodnog poglavlja u slučaju sume po stanjima za $2BF$ teoriju, demonstriraćemo kako se konstruiše suma po stanjima Z koja je nezavisna od triangulacije, na osnovu klasičnog $3BF$ dejstva za opštu semistriktnu 3-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje glatke 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, kso što je to urađeno u [27]. Moguće je formulisati $3BF$ teoriju samo u slučaju kada je dimenzija prostorvremenske mnogostrukosti $d \geqslant 4$, pa stoga ne razmatramo trodimenzinalni slučaj. Konstruisana suma po stanjima je generalizacija rada Žirelija, Pfajfera i Popeskua za $2BF$ sumu po stanjima predstavljenu u prethodnom poglavlju, tj. generalizacija Jeterovog modela, a poklapa sa Porterovom TKTP za $d = 4$ i $n = 3$.

Slično kao i u slučaju $2BF$ sume po stanjima, da bismo proverili da je konstruisana suma po stanjima topološka, analiziramo njeno ponašanje pri Pahnerovim potezima. Analiziramo samo četvorodimenzionalni slučaj, tj. invarijantnost pri Pahnerovim potezima $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i $5 \leftrightarrow 1$ i njihovim inverzima. Postavka analize ponašanja konstruisane sume po stanjima pri ovim Pahnerovim potezima predstavljena je u odeljku 9.3, dok su detalji proračuna dati u Dodatku E.2. Dobijeno je da suma po stanjima invarijantna na Pahnerove poteze, što dokazuje da je *topološka invarijanta* mnogostrukosti [27]. Zaključujemo da je suma po stanjima nepromenjena pri proizvoljnom usitnjavanju triangulacije i stoga definiše teoriju kontinuuma na glatkoj mnogostrukosti.

Međutim, da bi završili drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene, neophodne su generalizacije Peter-Vejl i Plānšarel teorema za slučajeve 2-grupe i 3-grupe, matematički rezultati koji za sada predstavljaju otvorene probleme. Naime, ove teoreme treba da obezbede dekompoziciju funkcija na 3-grupi u sumu po odgovarajućim ireducibilnim reprezentacijama 3-grupe. Na ovaj način se određuje spektar oznaka simpleksa triangulacije, tj. domen vrednosti polja koja žive na simpleksima triangulacije, kao što je to urađeno u slučaju BF sume po stanjima. Trenutni pokušaji privođenja drugog koraka kvantizacije uopštenih BF teorija u okviru viših gejdž teorija, se svode na pogađanje ireducibilnih reprezentacija 2-grupa, kao što je urađeno na primer u slučaju spinkub modela kvantne gravitacije [15], ili drugim tehnikama, videti na primer [45]–[47].

Svakako, ovaj rezultat otvara put ka trećem i finalnom koraku kovarijantne kvantizacione procedure i formulaciji kvantne teorije gravitacije i materije iz Standardnog Modela nametanjem odgovarajućih ograničenja na varijable modela modifikacijom amplituda sume po stanjima.

9.1 Gejdž invarijantni objekti

Uz prethodne uslove koji važe i u slučaju $2BF$ teorije, u $3BF$ teoriji jednačine kretanja nameću viši uslov ravnosti na 3-krivinu $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, pa se dodatno zahteva da zapreminska holonomija oko granične 3-sfere bilo koje 4-kugle bude trivijalna.

U odeljku 2.3 uveli smo niz operacija pomoću kojih na jeziku 3-gejdž teorije definišu kompozicije puteva, površina i zapremina. Ta pravila se mogu koristiti za izračunavanje kompozicija elementarnih puteva, površina i zapremina, sve do proizvoljno velikih. U ovom odeljku ćemo koristiti ove kompozicije kako bismo konstruisali gejdž invarijantne veličine koje odgovaraju zatvorenim putevima, površinama i zapreminama. U Lemama 13, 15 i 16, ovaj se postupak koristi za graničnu putanju trougla, graničnu površinu tetraedra i graničnu zapreminu 4-simpleksa. Rezultat Leme 13 je izveden za slučaj 2-grupa i ostaje nepromenjen u 3-gejdž teoriji, vidi [13]. Zahtev ravnosti granične površine tetraedra izveden u Lemi 14, uopštavamo za slučaj 3-grupa u Lemi 15. Jedan od glavnih rezultata je Lema 16 u kojoj smo izveli uslov ravnosti granične zapremine 4-simpleksa.

Lema 15 *Posmatrajmo tetraedar $(jk\ell m)$. Ivice $(jk)\,, j<k$ su obeležene grupnim elementima $g_{jk} \in G$, trouglovi $(jk\ell)\,, j<k<\ell$ grupnim elementima $h_{jk\ell} \in H$, a tetraedri mnogostrukosti $(jk\ell m)\,, j<k<\ell<m$ grupnim elementima $l_{jk\ell m} \in L$. Orijentisali smo trouglove $(jk\ell)$ tako da je kriva $g_{k\ell} g_{jk}$ izvor 2-morfizma, a kriva $g_{j\ell}$ meta, tj. zadovoljen je uslov $g_{j\ell} = \partial(h_{jk\ell}) g_{k\ell} g_{jk}$.*

Prvo presečemo površinu tetraedra po granici (jm). To određuje redosled vertikalne kompozicije sastavnih površina. Moramo biti sigurni da su sve površine kompozibilne, tj. da imaju odgovarajuće referentne tačke i ispravnu orijentaciju za vertikalnu kompoziciju.

Analizirajmo prvo kompoziciju prikazanu na dijagramu (9.1). Prvo pomeramo krivu od $g_{k\ell} g_{jk}$ do krive $g_{j\ell}$. U ovom stadijumu dobijeni rezultat nije vertikalno kompozibilan sa trouglom $(j\ell m)$, prvo mu moramo dodati $g_{\ell m}$ sa leve strane. Sada su ova dva morfizma vertikalno kompozibilna, a dobijeni 2-morfizam prevlači krivu do g_{jm}. Dobijeni 2-morphizam je:

$$\begin{tikzcd} m & \ell \arrow[l, "g_{\ell m}"'] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jk\ell}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{j\ell}"] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\ & \Downarrow h_{j\ell m} & {} & \end{tikzcd} \quad = (g_{\ell m} g_{j\ell}, h_{j\ell m}) \#_2 \big(g_{\ell m} \#_1 (g_{k\ell} g_{jk}, h_{jk\ell})\big) = \big(g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, h_{j\ell m}(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\big)\,. \tag{9.1}$$

Razmotrimo dijagram (9.2). Prvo prevlačimo krivu s $g_{\ell m} g_{k\ell}$ do krive g_{km}. Da bi vertikalna kompozicija dobijenog rezultata sa trouglom (jkm) bila moguća, najpre mu dodamo krivu g_{jk} sa desne strane. Sada su dva morfizma vertikalno kompozibilna i dobijeni 2-morfizam prevlači krivu na g_{jm}. Dobijen je sledeći 2-morfizam:

$$\begin{tikzcd} m & \ell \arrow[l, bend right, "g_{\ell m}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{k\ell m}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{km}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkm}"] & j \arrow[l, "g_{jk}"'] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\ & {} & {} & \end{tikzcd} \quad = (g_{km} g_{jk}, h_{jkm}) \#_2 \big((g_{\ell m} g_{k\ell}, h_{k\ell m}) \#_1 g_{jk}\big) = (g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, h_{jkm} h_{k\ell m})\,. \tag{9.2}$$

Dve površine $\Sigma_1 : g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk} \to g_{jm}$ i $\Sigma_2 : g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk} \to g_{jm}$ imaju isti izvor i metu. Prevlačenje povšine prikazane na dijagramu (9.1) do površine prikazane na dijagramu (9.1) dato je zapreminskim morfizmom $\mathcal{V} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ obeleženim sa grupnim elementom $l_{jk\ell m}$, tj.

$$(g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, h_{jkm} h_{k\ell m}) = \big(g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, \delta(l_{jk\ell m}) h_{j\ell m} (g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\big)\,, \tag{9.3}$$

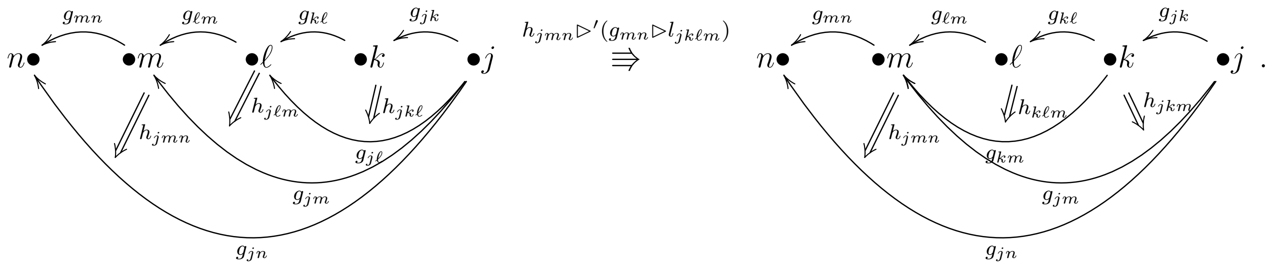
na osnovu čega dobijamo relaciju:

$$h_{jkm} h_{k\ell m} = \delta(l_{jk\ell m}) h_{j\ell m} (g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\,. \tag{9.4}$$

Lema 16 *Razmotrimo 4-simpleks, $(jk\ell mn)$. Ivice $(jk), j<k$, su obeležene elementima grupe $g_{jk}\in G$, trouglovi $(jk\ell), j<k<\ell$ su obeleženi elementima grupe $h_{jk\ell}\in H$, a tetraedri $(jk\ell m), j<k<\ell<m$ elemetima grupe $l_{jk\ell m}\in L$. Trouglovi $(jk\ell)$ su orijentisani tako da je izvor 2-morfizma kriva $g_{k\ell}g_{jk}$, a njegova meta kriva $g_{j\ell}$, tj. $g_{j\ell}=\partial(h_{jk\ell})g_{k\ell}g_{jk}$, dok su tetraedri $(jk\ell m)$ orijentisani tako da je izvor 3-morfizma površina $h_{j\ell m}(g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell})$ a meta površina $h_{jkm}h_{k\ell m}$, tj. $h_{jkm}h_{k\ell m}=\delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}(g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell})$.*

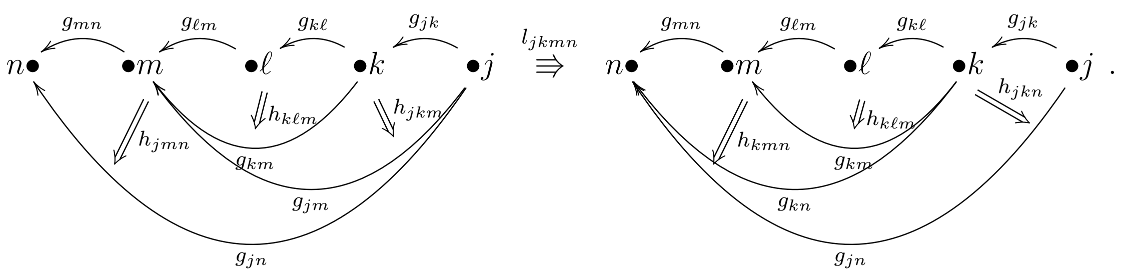
Najpre isecimo zapreminu 4-simpleksa duž površine $h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{j\ell m}g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell})$. To određuje redosled kompozicije 3-morfizama prema gore. Pritom se moramo pobrinuti da su sve zapremine kompozibilne, tj. da imaju odgovarajuće referentne površine i ispravnu orijentaciju kako bi njihove kompozicije bile definisane.

Prvo, razmotrimo dijagram (9.5). Površinu $h_{j\ell m}g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell}$ prevlačimo do površine $h_{jkm}h_{k\ell m}$ uz pomoć 3-morfizma $l_{jk\ell m}$. Da bi kompozicija dobijenog 3-morfizma i 2-morfizma h_{jmn} bila definisana moramo najpre 3-morfizmu dodati krivu g_{mn} sa leve strane. Dobijeni 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, g_{mn}\rhd(h_{j\ell m}g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell}), g_{mn}\rhd l_{jk\ell m})$ možemo vertikalno složiti sa 2-morfizmom $(g_{mn}g_{jm}, h_{jmn})$ sa donje strane, tako da je rezultujući 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{j\ell m}g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell}), h_{jmn}\rhd'(g_{mn}\rhd l_{jk\ell m}))$, čiji je izvor površina $h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{j\ell m}g_{\ell m}\rhd h_{jk\ell})$, a meta površina $h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{jkm}h_{k\ell m})$,



(9.5)

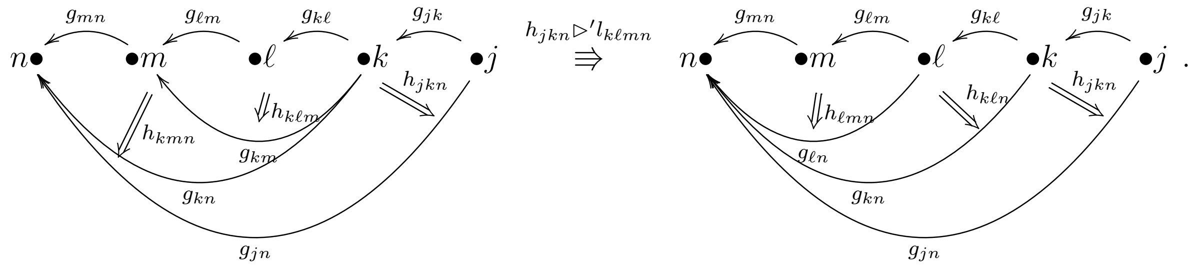
Sada ćemo prevući površinu do površine $h_{jkn}h_{kmn}g_{m\ell}\rhd h_{k\ell m}$, kao što je prikazano na dijagramu (9.6). Najpre, razmotrimo 3-morfizam $(g_{mn}g_{km}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn}\rhd h_{jkm}, l_{jkmn})$ čiji je izvor površina $h_{jmn}g_{mn}\rhd h_{jkm}$, a meta površina $h_{jkn}h_{kmn}$. Ovaj 3-morfizam možemo proširiti odozgo sa 2-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, g_{mn}\rhd h_{k\ell m})$, što rezultuje 3-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{jkm}h_{k\ell m}), l_{jkmn})$, čiji je izvor površina $h_{jmn}g_{mn}\rhd(h_{jkm}h_{k\ell m})$, a meta površina $h_{jkn}h_{kmn}g_{mn}\rhd h_{k\ell m}$,



(9.6)

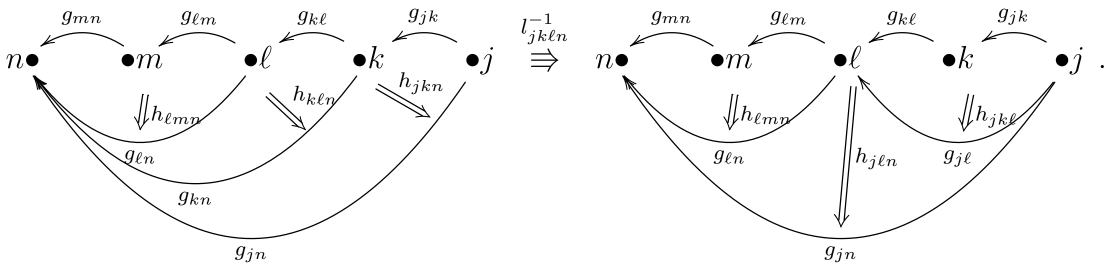
Sledeći korak je pomeranje površine od $h_{jkn}h_{kmn}g_{mn}\rhd h_{k\ell m}$ do površine $h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}$, dijagram (9.7). Prvo, proširimo the 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}, h_{kmn}g_{mn}\rhd h_{k\ell m}, l_{k\ell mn})$, čiji je izvod površina $h_{kmn}g_{mn}\rhd h_{k\ell m}$ i meta površina $h_{k\ell n}h_{\ell mn}$, sa krivom g_{jk} sa desne strane, što rezultuje 3-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{kmn}g_{mn}\rhd h_{k\ell m}, l_{k\ell mn})$. Zatim, dobijeni 3-morfizam proširimo sa 2-morfizmom $(g_{kn}g_{jk}, h_{jkn})$ odozdo, posle čega se dobija 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{kmn}g_{mn}\rhd$

$h_{k\ell m}, h_{jkn} \rhd' l_{k\ell mn})$,



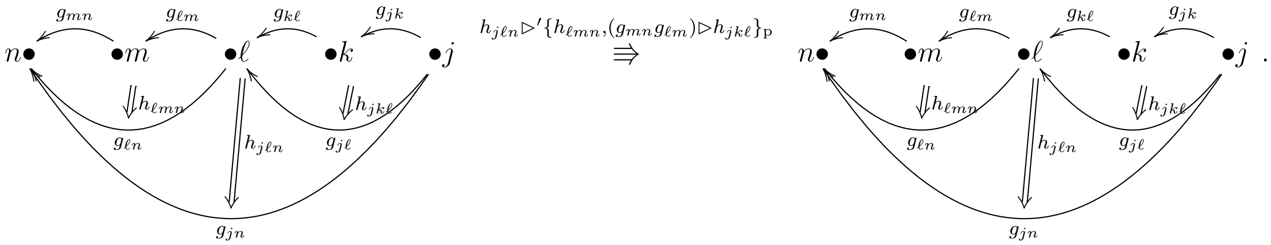
(9.7)

Pomeranje površine $h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}$ do površine $h_{j\ell n}g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}$ prikazano je na dijagramu (9.8), a 3-morfizam sa odgovarajućim izvorom i metom dobijen je proširenjem 3-morfizma $(g_{\ell n}g_{k\ell}g_{jk}\,, h_{jkn}h_{k\ell n}, l^{-1}_{jk\ell n})$ sa 2-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{\ell mn})$ sa gornje strane. Tako dobijeni 3-morfizam je $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}, l^{-1}_{jk\ell n})$,



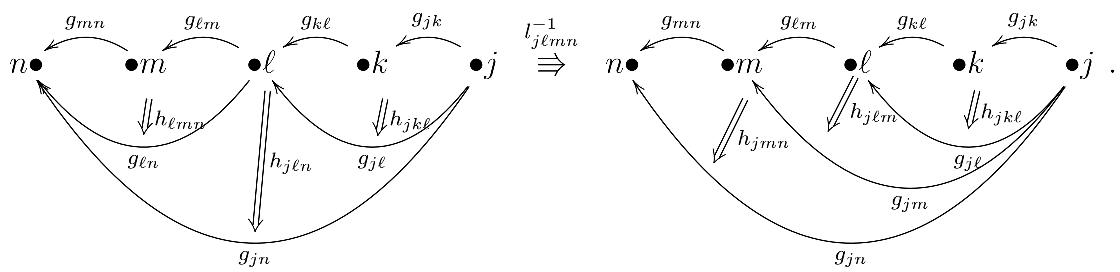
(9.8)

Zatim, želimo da mapiramo površinu $h_{j\ell n}g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}$ u površinu $h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}$, videti dijagram (9.9). To je postignutno inverznom razmenjujućom 2-morfizam kompozicijom, koja preslikava $g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}$ u površinu $h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}$, tj. 3-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}$, $g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}, \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{pf}})$. Zatim, dobijeni 3-morfizam proširujemo sa 2-morfizmom $(g_{\ell n}g_{j\ell}, h_{j\ell n})$ odozdo. Dobijeni 3-morfizam sa odgovarajućim izvorom i metom je $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk},\ h_{j\ell n}g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}, h_{j\ell n} \rhd' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{pf}})$,



(9.9)

Najzad, postupak završavamo konstrukcijom 3-morfizma koji preslikava površinu $h_{j\ell n}h_{\ell mn}$ $(g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}$ u početnu površinu $h_{jmn}g_{mn} \rhd (h_{j\ell m}g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})$. Prvo pomeramo površinu $h_{j\ell n}h_{\ell mn}$ u površinu $h_{jmn}g_{mn} \rhd h_{j\ell m}$ sa 3-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{j\ell}, h_{j\ell n}h_{\ell mn}, l^{-1}_{j\ell mn})$. Zatim, proširimo 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{j\ell}, h_{j\ell n}h_{\ell mn}, l^{-1}_{j\ell mn})$ sa 2-morfizmom $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell})$ odozgo. Tako dobijeni 3-morfizam $(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}, l^{-1}_{j\ell mn})$ prevlači površinu u površinu od koje smo krenuli, kao što je prikazano na dijagramu (9.10),



(9.10)

Sada formiramo kompoziciju 3-morfizama predstavljenih dijagramima (9.5)-(9.10) prema gore, vodeći računa o redosledu. Dobijeni 3-morfizam je:

$$
\begin{aligned}
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}, l_{j\ell mn}^{-1})\#_3 \\
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, g_{\ell n} \rhd h_{jk\ell}h_{\ell mn}, h_{j\ell n} \rhd' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}})\#_3 \\
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}, l_{jk\ell n}^{-1})\#_3 \\
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{kmn}g_{m\ell} \rhd h_{k\ell m}, h_{jkn} \rhd' l_{jkmn})\#_3 \\
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn} \rhd (h_{jkm}h_{k\ell m}), l_{jkmn})\#_3 \\
&(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn} \rhd (h_{j\ell m}g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell}), h_{jmn} \rhd' (g_{mn} \rhd l_{jk\ell m})) \\
&= (g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn} \rhd (h_{j\ell m}g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell}), l_{j\ell mn}^{-1}\, h_{j\ell n} \rhd' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{pf}} \\
&\qquad l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn} \rhd' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn} \rhd' (g_{mn} \rhd l_{jk\ell m}))\,.
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

Dobijeni 3-morfizam je jedinični 3-morfizam, odnosno njegov izvor i meta su površina $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = h_{jmn}g_{mn} \rhd (h_{j\ell m}g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})$, tj. važi identiet

$$
l_{j\ell mn}^{-1}\, h_{j\ell n} \rhd' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{pf}}\, l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn} \rhd' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn} \rhd' (g_{mn} \rhd l_{jk\ell m}) = e\,. \tag{9.12}
$$

9.2 Kvantizacija topološkog $3BF$ dejstva

U ovom odeljku predstavićemo kombinatorni opis konstrukcije $3BF$ sume po stanjima za bilo koju triangulaciju mnogostrukosti dimenzije $d = 4$. Model je definisan za bilo koju zatvorenu i orijentisanu kombinatornu mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ dimenzije $d = 4$. Ovaj model se podudara sa Porterovim TKTP [26] za $d = 4$ i $n = 3$.

Najpre ćemo demonstrirati kako se formira suma po stanjima koja odgovara klasičnom $3BF$ dejstvu (6.1) uobičajenim postupkom diskretizacije. Stoga razmatramo sumu po stanjima:

$$
Z = \int \mathcal{D}\alpha\, \mathcal{D}\beta\, \mathcal{D}\gamma\, \mathcal{D}B\, \mathcal{D}C\, \mathcal{D}D \exp\left(\int_{M_4} \langle B \wedge \mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H}\rangle_{\mathfrak{l}} \right). \tag{9.13}
$$

Formalna integracija po Lagranževim množiteljima B, C i D daje rezultat:

$$
Z = \int \mathcal{D}\alpha\, \mathcal{D}\beta\, \mathcal{D}\gamma\; \delta(\mathcal{F})\delta(\mathcal{G})\delta(\mathcal{H})\,. \tag{9.14}
$$

Slično kao i u običnoj gejdž teoriji, 1-forma koneksije $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$ je diskretizovana bojenjem ivica $\epsilon = (jk) \in \Lambda_1$ triangulacije grupnim elementima $g_\epsilon \in G$. Analogno, 2-forma koneksije $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{h})$ je reprezentovana bojenjem trouglova triangulacije $\Delta = (jk\ell) \in \Lambda_2$ elementima $h_\Delta \in H$, a 3-forma koneksije $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4\,, \mathfrak{l})$ je reprezentovana bojenjem tetraedara $\tau = (jk\ell m) \in \Lambda_3$ elementima grupe $l_\tau \in L$.

Meru sume po stanjima (9.13) diskretizujemo smenama

$$
\int \mathcal{D}\alpha \quad \mapsto \quad \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G \mathrm{d}g_{jk}\,, \tag{9.15}
$$

$$
\int \mathcal{D}\beta \quad \mapsto \quad \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H \mathrm{d}h_{jk\ell}, \tag{9.16}
$$

$$
\int \mathcal{D}\gamma \quad \mapsto \quad \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \int_L \mathrm{d}l_{jk\ell m}\,, \tag{9.17}
$$

gde dg_{jk}, $dh_{jk\ell}$ i $dl_{jk\ell m}$ redom označavaju integracije na grupama G, H i L.

Uslov da lažna krivina mora nestati, dat jednačinom (8.2) u Lemi 13, diskretizovan je na svakom trouglu $(jkl) \in \Lambda_2$ zamenom $\delta(F)$ sa

$$\delta_G(g_{jk\ell}) = \delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\, g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big)\,, \tag{9.18}$$

uslov o trivijalnosti 3-forme krivine $\delta(G)$ za svaki tetraedar $(jk\ell m) \in \Lambda_3$ na diskretizovanoj mnogostrukosti, dat jednačinom (9.4) u Lemi 15, pretvara se u uslov

$$\delta_H(h_{jk\ell m}) = \delta_H\big(\delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}\,(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\, h_{k\ell m}^{-1}\, h_{jkm}^{-1}\big)\,, \tag{9.19}$$

dok uslov o trivialnosti 4-forme krivine $\delta(H)$ za svaki 4-simpleks $(jk\ell mn) \in \Lambda_4$ postaje identitet (9.12) u Lemi 16:

$$\delta_L(l_{jk\ell mn}){=}\delta_L\big(l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn}{\rhd'}l_{k\ell mn})l_{jkmn}(h_{jmn}{\rhd'}(g_{mn}{\rhd}l_{jk\ell m}))h_{j\ell mn}^{-1}h_{j\ell n}{\rhd'}\{h_{\ell mn},(g_{mn}g_{\ell m}){\rhd}h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\big). \tag{9.20}$$

Na osnovu prethodnog, integral po putanjama se može napisati kao suma po stanjima u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} Z = \quad & \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G \mathrm{d}g_{jk} \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H \mathrm{d}h_{jk\ell} \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \int_L \mathrm{d}l_{jk\ell m} \\ & \Bigg(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G\big(g_{jk\ell}\big)\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H\big(h_{jk\ell m}\big)\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell mn)\in\Lambda_4} \delta_L\big(l_{jk\ell mn}\big)\Bigg). \end{aligned} \tag{9.21}$$

Zamenom jednačina (9.18), (9.19) i (9.20) u sumu po stanjima (9.21), dobijamo izraz proporcionalan sumi (9.22). Da bi suma data izrazom (9.21) bila nezavisna od triangulacije mnogostrukosti moramo je pomnožiti sa odgovarajućim faktorom koji zavisi od broja verteksa, ivica, trouglova, tetraedara i 4-simpleksa trangulacije, što rezultuje u sumi po stanjima u jednačini (9.22).

Definicija 9.2.1 *Neka je $\mathcal{M}_d$ kompaktna orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost, $d = 4$, i neka je $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \rhd\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ jedan 2-ukršteni modul. Suma po stanjima topološke 3-gejdž teorije je definisana sledećim izrazom:*

$$\begin{aligned} Z = \quad & |G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|}|H|^{|\Lambda_0|-|\Lambda_1|+|\Lambda_2|-|\Lambda_3|}\,|L|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|+|\Lambda_3|-|\Lambda_4|}\Bigg(\prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G \mathrm{d}g_{jk}\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H \mathrm{d}h_{jk\ell}\Bigg) \\ & \Bigg(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \int_L \mathrm{d}l_{jk\ell m}\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\, g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big)\Bigg)\Bigg(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H\big(\delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}\,(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})\, h_{k\ell m}^{-1}\, h_{jkm}^{-1}\big)\Bigg) \\ & \Bigg(\prod_{(jk\ell mn)\in\Lambda_4} \delta_L\big(l_{j\ell mn}^{-1}\, h_{j\ell n} \rhd' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \rhd h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\, l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn} \rhd' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn} \rhd' (g_{mn} \rhd l_{jk\ell m})\big)\Bigg). \end{aligned} \tag{9.22}$$

U prethodnom izrazu integralimo po elementima $g_{jk} \in G$ za svaku ivicu $(jk) \in \Lambda_1$, po elementima $h_{jk\ell} \in H$ za svaki trougao $(jk\ell) \in \Lambda_2$ i po elementima l_{jklm} za svaki tetraedar mnogostrukosti $(jk\ell m) \in \Lambda_3$, dok δ-distribucije u podintegralnom izrazu nameću sledeće uslove na ove vrednosti. Uslovi koje elementi trangulacije moraju da zadovoljavaju izvedeni su u Lemama 13, 15 i 16.

1. Uslov da svaki trougao $(jk\ell) \in \Lambda_2$ koji nosi oznaku $h_{jk\ell}$ ima odgovarajući izvor i metu je $\partial(h_{jk\ell})\, g_{k\ell}\, g_{jk} = g_{j\ell}$, kao što je prikazano u Lemi 13.

2. Zatim, uslov $h_{jkm}\, h_{k\ell m} = \delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}\,(g_{\ell m} \rhd h_{jk\ell})$ važi za svaki tetraedar $(jk\ell m) \in \Lambda_3$, tj. svaki tetraedar koji nosi oznaku $l_{jk\ell m}$ ima dobro definisan izvor i metu, vidi Lemu 15.

3. Najzad, zapreminska holonomija oko svakog 4-simpleksa $(jk\ell mn) \in \Lambda_4$ je trivijalna, tj. $l^{-1}_{j\ell mn}\, h_{j\ell n} \triangleright' \{h_{\ell mn}, (g_{mn} g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\, l^{-1}_{jk\ell n} (h_{jkn} \triangleright' l_{k\ell mn}) l_{jkmn} h_{jmn} \triangleright' (g_{mn} \triangleright l_{jk\ell m})$ je neutralni element grupe L za svaki 4-simpleks $(jk\ell mn) \in \Lambda_4$, kao što je dokazano u Lemi 16.

Teorema 23 *Neka je $\mathcal{M}_4$ zatvorena i orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost, $d = 4$ i $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ jedan 2-ukršteni modul. Suma po stanjima (9.22) je invarijantna na Pahnerove poteze.*

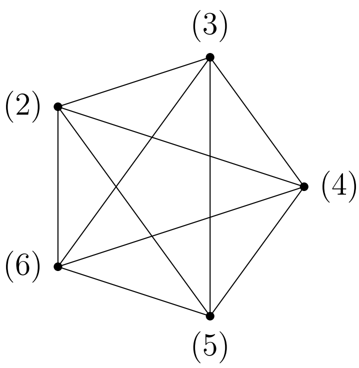
U Dodatku E skiciraćemo dokaz invarijantnosti sume po stanjima na Pahnerove poteze [44]. U sumi po stanjima (9.22), označavanje ivica elementima $g_{jk} \in G$, trouglova s elementima $h_{jk\ell} \in H$ i tetraedra s elementima $l_{jk\ell m} \in L$ naziva se *bojenje mnogostrukosti*.

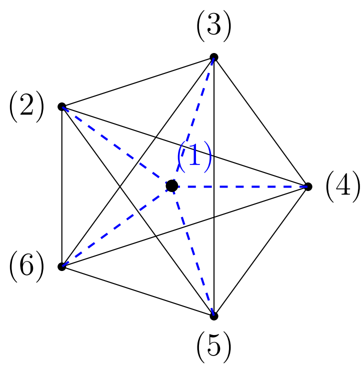
9.3 Pahnerovi potezi

9.3.1 $d = 4$

U četvorodimenzionalnom slučaju, da bi se proverila invarijantnost sume po stanjima (9.22) pri lokalnim promenama triangulacije četvorodimenzione mnogostrukosti dovoljno je pokazati da se ona ne menja pri pet Pahnerovih poteza, $1 \leftrightarrow 5$, $2 \leftrightarrow 4$ i $3 \leftrightarrow 3$ Pahnerovim potezima i njihovim inverzima. Postavka dokaza invarijantnosti sume po stanjima (9.22) na Pahnerove poteze data je u ovom odeljku, dok su detalji računa prikazani u Dodatku E.2.

Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 5$





$1 \leftrightarrow 5$

Budući da suma po stanjima (9.22) ne zavisi od načina na koji su verteksi triangulacije obeleženi, kao ni od njihovog redoleda, invarijantnost je dovoljno utvrditi samo u jednom slučaju. Obeležimo vertekse 4-simpleksa na levoj strani $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog pokreta sa (23456). Dodavanjem verteksa (1) sa desne strane Pahnerovog poteza dobijamo pet novih 4-simpleksa:

$$M_4 := \{(13456), (12456), (12356), (12346), (12345)\}\,.$$

Sa desne strane su prisutni dodatni tetraedri

$$M_3 := \{(1234), (1235), (1236), (1245), (1246), (1256), (1345), (1346), (1356), (1456)\}\,,$$

dodatni trouglovi

$$(jk\ell) \in M_2 := \{(123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156)\}\,,$$

dodatne ivice $(jk) \in M_1 := \{(12), (13), (14), (15), (16)\}$ i dodatni verteksi $(j) \in M_0 := \{(1)\}$. Svi ostali simpleksi su prisutni sa obe strane poteza.

Invarijantnost sume po stanjima (9.22) na Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 5$ znači da je integral sa desne strane,

$$\begin{aligned} Z_{\text{desno}}^{1\leftrightarrow 5} &= |G|^{-11}|H|^{-4}|L|^{-1} \int_{G^5} \prod_{(jk)\in M_1} \mathrm{d}g_{jk} \int_{H^{10}} \prod_{(jk\ell)\in M_2} \mathrm{d}h_{jk\ell} \int_{L^{10}} \prod_{(jklm)\in M_3} \mathrm{d}l_{jklm} \\ &\cdot \left(\prod_{(jk\ell)\in M_2} \delta_G(g_{jk\ell}) \right) \left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3} \delta_H(h_{jk\ell m}) \right) \left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4} \delta_L(l_{jk\ell mn}) \right) Z_{\text{ostatak}}\,, \end{aligned} \tag{9.23}$$

jednak δ-funkciji prisutnoj na levoj strani,

$$Z_{\text{levo}}^{1\leftrightarrow 5} = |G|^{-5}|H|^{0}|L|^{-1}\delta_L(l_{23456}) Z_{\text{ostatak}}\,. \tag{9.24}$$

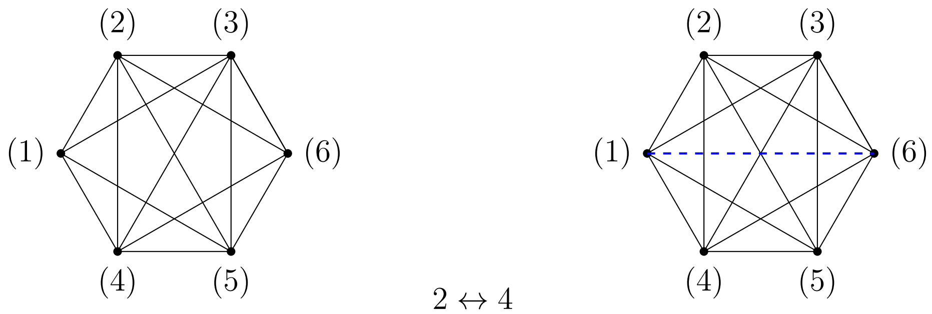
Faktore ispred integrala sume po stanjima, prisutne sa leve i desne strane pokreta, izračunavamo na osnovu jednačine (9.22), odnosno koristimo $|G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|}$, $|H|^{|\Lambda_0|-|\Lambda_1|+|\Lambda_2|-|\Lambda_3|}$ i $|L|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|+|\Lambda_3|-|\Lambda_4|}$, gde su $|\Lambda_0|$, $|\Lambda_1|$, $|\Lambda_2|$, $|\Lambda_3|$ i $|\Lambda_4|$ redom brojevi verteksa, ivica, trouglova, tetraedra i 4-simpleksa u triangulaciji. Na osnovu podataka prikazanih u tabeli 9.1 sa desne strane se dobija faktor $|G|^{-11}|H|^{-4}|L|^{-1}$, dok je faktor sa leve strane jednak $|G|^{-5}|H|^{0}|L|^{-1}$.

	$\lvert\Lambda_0\rvert$	$\lvert\Lambda_1\rvert$	$\lvert\Lambda_2\rvert$	$\lvert\Lambda_3\rvert$	$\lvert\Lambda_4\rvert$
l.s.	5	10	10	5	1
d.s.	6	15	20	15	5

Tabela 9.1: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$, tetraedra $|\Lambda_3|$ i 4-simpleksa $|\Lambda_4|$ sa leve i desne strane $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza.

Dokaz invarijantnosti sume po stanjima (9.22) pri $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovom potezu svodi se na dokaz da su izrazi (9.23) i (9.24) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza. Dokaz da je $Z_{\text{desno}}^{1\leftrightarrow 5} = Z_{\text{levo}}^{1\leftrightarrow 5}$ dat je u Dodatku E.

Pahnerov potez $2 \leftrightarrow 4$



Kako bi proverili invarijantnost sume po stanjima (9.22) pri $2 \leftrightarrow 4$ Pahnerovom potezu, poređajmo vertekse tako da na levoj strani poteza imamo dva 4-simpleksa

$$M_4^{\text{levo}} = \{(23456), (12345)\}$$

a na desnoj strani četiri 4-simpleksa

$$M_4^{\text{desno}} = \{(12346), (12356), (12456), (13456)\}\,.$$

Onda, na levoj strani imamo jedan tetraedar

$$M_3^{\text{levo}} = \{(2345)\}\,,$$

dok na desnoj strani imamo šest tetraedra

$$M_3^{\text{desno}} = \{(1236),(1246),(1256),(1346),(1356),(1456)\}\,.$$

Svi ostali tetraedri su prisutni na obe strane poteza. Takođe, na desnoj strani su prisutni trouglovi $M_2^{\text{desno}} = \{(126),(136),(146),(156)\}$ i jedna ivica $M_1^{\text{desno}} = \{(16)\}$, dok su svi preostali trouglovi i ivice prisutni sa obe strane poteza. Takođe, svi verteksi su prisutni sa obe strane poteza.

Dakle, koristeći izraz za definiciju sume po stanjima (9.22), na levoj strani poteza imamo integral,

$$Z_{\text{levo}}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-8}|H|^{-1}|L|^{-1}\int_L \mathrm{d}l_{2345}\delta_H(h_{2345})\left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4^{\text{levo}}}\delta_L(l_{jk\ell mn})\right)Z_{\text{ostatak}}\,, \tag{9.25}$$

dok je sa desne strane integral:

$$\begin{aligned} Z_{\text{desno}}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-11}|H|^{-3}|L|^{-1}\int_G \mathrm{d}g_{16}\int_{H^4}\mathrm{d}h_{126}\mathrm{d}h_{136}\mathrm{d}h_{146}\mathrm{d}h_{156}\int_L \mathrm{d}l_{1236}\mathrm{d}l_{1246}\mathrm{d}l_{1256}\mathrm{d}l_{1346}\mathrm{d}l_{1356}\mathrm{d}l_{1456} \\ \left(\prod_{(jk\ell)\in M_2^{\text{desno}}}\delta_G(g_{jk\ell})\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3^{\text{desno}}}\delta_H(h_{jk\ell m})\right)\left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4^{\text{desno}}}\delta_L(l_{jk\ell mn})\right)Z_{\text{ostatak}}\,. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Prebrojavanjem k-simpleksa sa obe strane $2\leftrightarrow 4$ poteza (vidi Tabelu 9.2) dobijamo koeficijente ispred integrala, $|G|^{-8}|H|^{-1}|L|^{-1}$ sa leve strane poteza i $|G|^{-11}|H|^{-3}|L|^{-1}$ sa desne strane poteza.

	$\|\Lambda_0\|$	$\|\Lambda_1\|$	$\|\Lambda_2\|$	$\|\Lambda_3\|$	$\|\Lambda_4\|$
l.s.	6	14	16	9	2
d.s.	6	15	20	14	4

Tabela 9.2: Broj verteksa $|\Lambda_0|$, ivica $|\Lambda_1|$, trouglova $|\Lambda_2|$, tetraedra $|\Lambda_3|$ i 4-simpleksa $|\Lambda_4|$ sa obe strane $2\leftrightarrow 4$ poteza.

Dokaz invarijantnosti sume po stanjima (9.22) pri $2\leftrightarrow 4$ Pahnerovom potezu svodi se na dokaz da su izrazi (9.25) i (9.26) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza. Dokaz da je $Z_{\text{desno}}^{2\leftrightarrow 4} = Z_{\text{levo}}^{2\leftrightarrow 4}$ dat je u Dodatku E.

Pahnerov potez $3\leftrightarrow 3$

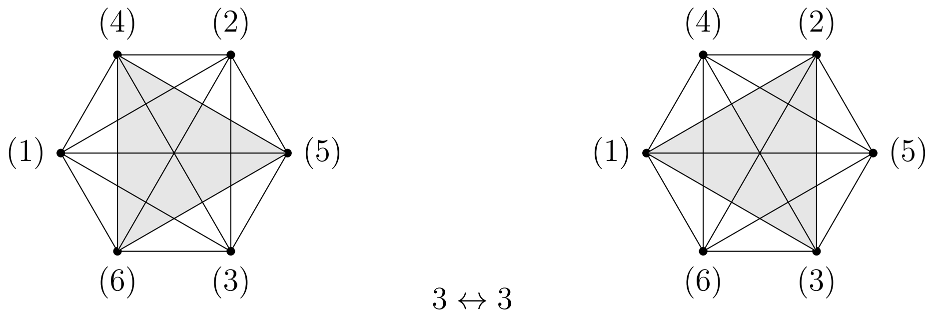
Obeležimo vertekse tako da sa leve strane $3\leftrightarrow 3$ Pahnerovog poteza, imamo tri 4-simpleksa

$$M_4^{\text{levo}} = \{(23456),(13456),(12456)\}\,,$$

a sa desne strane imamo 4-simplekse

$$M_4^{\text{desno}} = \{(12356),(12346),(12345)\}\,.$$

Sa leve strane su prisutni tetraedri $M_3^{\text{levo}} = \{(1456),(2456),(3456)\}$, dok su sa desne strane prisutni $M_3^{\text{desno}} = \{(1234),(1235),(1236)\}$. Dve strane poteza dele šest tetraedara, dok se sa



$3 \leftrightarrow 3$

svake strane nalazi tri tetraedra koje dele dva 4-simpleksa. Dalje, sa leve strane imamo trougao $M_2^{\text{levo}} = \{(456)\}$, a sa desne strane poteza trougao $M_2^{\text{desno}} = \{(123)\}$. Svi ostali trouglovi, ivice i verteksi se pojavljuju sa obe strane poteza.

Dakle, na levoj strani poteza imamo integral,

$$\begin{aligned} Z_{\text{levo}}^{3\leftrightarrow 3} = & \int_H \mathrm{d}h_{456} \int_{L^3} \mathrm{d}l_{1456}\mathrm{d}l_{2456}\mathrm{d}l_{3456}\delta_G(g_{456}) \\ & \delta_H(h_{3456})\delta_H(h_{2456})\delta_H(h_{1456})\delta_L(l_{23456})\delta_L(l_{13456})\delta_L(l_{12456})Z_{\text{ostatak}}\,, \end{aligned} \tag{9.27}$$

dok sa desne strane imamo integral:

$$\begin{aligned} Z_{\text{desno}}^{3\leftrightarrow 3} = & \int_H \mathrm{d}h_{123} \int_{L^3} \mathrm{d}l_{1234}\mathrm{d}l_{1235}\mathrm{d}l_{1236}\delta_G(g_{123}) \\ & \delta_H(h_{1234})\delta_H(h_{1235})\delta_H(h_{1236})\delta_L(l_{12356})\delta_L(l_{12346})\delta_L(l_{12345})Z_{\text{ostatak}}\,. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Dokaz invarijantnosti sume po stanjima (9.22) pri $3 \leftrightarrow 3$ Pahnerovom potezu svodi se na dokaz da su izrazi (9.27) i (9.28) jednaki, pri čemu činilac Z_{ostatak} označava deo sume koji ostaje nepromenjen po definiciji poteza.

Dobijamo da suma po stanjima definisana u (9.22) ostaje nepromenjena pri svih pet Pahnerovih poteza, te stoga zaključujemo da je suma po stanjima nezavisna od triangulacije 4-dimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{M}_4$ (pogledati Dodatak E za dokaz).

Glava 10

Zaključak

Rezime

U ovoj disertaciji smo se upoznali sa osnovama modela kvantne gravitacije i materije u okviru $2BF$, odnosno $3BF$ teorije. Najpre, u poglavlju 2 je prikazan kratak pregled više kategorijske generalizacije gejdž teorija - *viših gejdž teorija*, naime, 2-gejdž teorija kod kojih je simetrija teorije data nekom 2-grupom, odnosno ukrštenim modulom $(H \overset{\partial}{\to} G, \triangleright)$ i 3-gejdž teorija kod kojih je simetrija teorije data nekom 3-grupom, odnosno 2-ukrštenim modulom $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G, \triangleright, \{\_ , \_\}_{\rm pf})$. Takođe, uvedeni su neophodni matematički objekti za formiranje $3BF$ teorije — 3-koneksija (α, β, γ), gde su diferencijalne forme elementi algebri $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$, $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\gamma \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ i lažna 3-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, gde su $\mathcal{F} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$, $\mathcal{G} \in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\mathcal{H} \in \mathcal{A}^4(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$. Zatim, u poglavlju 3 je prikazan kratak pregled *Hamiltonove analize sistema sa vezama* sa definicijama kanonskog i totalnog Hamiltonijana, primarnih i sekundarnih veza, veza prve i druge klase, kao i načinom izračunavanja broja stepeni slobode u teoriji i *Kastelanijevom procedurom* za izračunavanje generatora gejdž simetrija.

Nakon toga, u poglavlju 4 je razmatrana BF teorija i urađena je kompletna Hamiltonova analiza za topološko BF dejstvo. Dobijeno je da, očekivano, BF dejstvo opisuje teoriju bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Kastelanijevom procedurom je izračunat generator gejdž simetrija u BF teoriji i izračunate su varijacije formi za sve varijable u teoriji i njihove konjugovane impulse. Na osnovu ovih rezultata, dobijena su dva tipa gejdž transformacija simetrija u BF teoriji — G-gejdž i M-gejdž transformacije, koje su već poznate u literaturi, kao i komutacione relacije ukupne grupe gejdž simetrija BF dejstva $\mathcal{G}_{BF} = G \ltimes \tilde{M}$. Ovde je G podgrupa ukupne grupe simetrija koju formiraju G-gejdž transformacije, a $\tilde{M}$ invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija koju formiraju M-gejdž transformacije. Varijacije formi koje odgovaraju difeomorfizmima prikazane su kao zbir varijacija formi varijabli pri gejdž transformacijama i varijacija formi pri HT transformacijama za konkretan izbor parametara, pa je time demonstrirano da je BF teorija invarijantna na difeomorfizme. Zatim, razmatrana su dva za fiziku relevantna modela koji poseduju lokalne propagirajuće stepene slobode, dobijena dodavanjem odgovarajućih članova, *veza*, u BF dejstvo. Prvi razmatrani primer takvog dejstva je *Jang-Milsova teorija* za $SU(N)$ grupu u prostoru Minkovskog, a drugi je *Plebanski model* za Opštu relativnost.

Prateći istu liniju izlaganja, u poglavlju 5 je razmatrana viša kategorijska generalizacija BF teorije — $2BF$ teorija, u literaturi poznata i kao $BFCG$ teorija. Sprovedena je kompletna Hamiltonova analiza za topološko $2BF$ dejstvo. Kao i u slučaju BF teorije, dobijeno je da je $2BF$ topološka teorija bez lokalnih propagirajućih stepeni slobode. Nakon izračunatog generatora i varijacija formi varijabli i njihovih konjugovanih impulsa, dobijene su konačne transformacije simetrija za $2BF$ dejstvo: G-gejdž, H-gejdž, M-gejdž i N-gejdž transformacije. Ukupna gejdž grupa simetrija dobijena je kao $\mathcal{G}_{2BF} = G \ltimes (\tilde{H} \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M}))$, gde su grupe G

i $\tilde{M}$ definisane kao i u slučaju BF teorije, $\tilde{N}$ je grupa N-gejdž transformacija, a grupa $\tilde{H}$ je grupa H-gejdž transformacija. Slično kao i slučaju BF teorije, dobijeni su konkretni izbori gejdž parametara i HT parametara koji daju difeomorfizam transformacije. Pokazano je kako Opštu relativnost možemo prikazati kao $2BF$ teoriju sa vezama za konkretan izbor 2-grupe simetrija. Na kraju, poslednji odeljak poglavlja 5 posvećen je diskusiji *Ajnštajn-Jang-Milsove teorije*, odnosno teoriji gravitacije i gejdž polja formulisanoj kao $2BF$ teorija sa vezama. Prednost ove formulacije Opšte relativosti u odnosu na formulaciju preko BF teorije leži u tome što struktura 2-grupe uvodi tetradna polja u topološko dejstvo, što otvara mogućnost kuplovanja materije sa gravitacijom na pravolinijski način. Ipak, polja materije ne mogu biti prirodno izražena u okviru algebarske strukture 2-grupe, tj. sektor materije u dejstvu ne može biti napisan kao zbir topološkog člana i veze. Kako bi to bilo postignuto, neophodan je još jedan korak više kategorijske generalizacije BF teorije — tzv. $3BF$ teorija.

Konačno, poslednje poglavlje u prvom delu disertacije, poglavlje 6, posvećeno je klasičnoj $3BF$ teoriji. Nakon Hamiltonove analize teorije i postupka analognog onom u slučaju BF i $2BF$ teorije, dobijeno je da je $3BF$ teorija invarijantna na pet vrsta gejdž transformacija — G-gejdž, H-gejdž, L-gejdž, M-gejdž i N-gejdž transformacije. Analiza transformacija simetrija, tj. izračunavanje komutatora generatora ovih transformacija, ukazala je na jednu bitnu razliku u odnosu na $2BF$ teoriju, a to je da u $3BF$-teoriji H-gejdž transformacije ne čine grupu. Dobijena je ukupna gejdž grupa simetrije $\mathcal{G}_{3BF} = G \ltimes (\tilde{H}_L \ltimes (\tilde{N} \times \tilde{M}))$, gde je $\tilde{H}_L$ grupa koju formiraju H-gejdž i L-gejdž transformacije, dok su ostale grupe definisane kao u slučaju $2BF$ teorije. Zatim su diskutovane $3BF$ teorije sa vezama koje opisuju modele sa netrivijalnom dinamikom, dobijene modifikacijom topološkog $3BF$ dejstva dodavanjem odgovarajućih veza. Razmatrane su teorije koje opisuju *Klajn-Gordonovo* i *Dirakovo polje* u zakrivljenom prostoru, formulisane kao $3BF$ dejstvo sa vezama. Radi kompletnosti, analizirano je i *Vajlovo* i *Majorana polje* u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom. Ovi rezultati su zatim primenjeni za konstrukciju $3BF$ dejstva sa vezama koje opisuje svu materiju prisutnu u Standardnom Modelu kuplovanu sa gravitacionim poljem. Na kraju ovog poglavlja, predstavljen je jednostavan model koji opisuje skalarnu elektrodinamiku kao $3BF$ teoriju sa vezama.

Drugi deo disertacije posvećen je kvantnoj teoriji. U poglavlju 7 razmatrana je konstrukcija topološke BF sume po stanjima u slučaju trodimenzionalne i četvorodimenzionalne mnogostrukosti uobičajenom kvantizacionom procedurom spinske pene. U trodimenzionalnom slučaju, dobijena suma po stanjima daje kvantnu teoriju $3D$ gravitacije — *Ponzano-Redže model*, što je posledica činjenice da na klasičnom nivou odgovarajuća teorija nema lokalne propagirajuće stepene slobode. Zatim je predstavljena konstrukcija BF topološke sume po stanjima u realnom slučaju četvorodimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti — tzv. *Ouguri model*. Međutim, kako u $4D$ teorija gravitacije nije topološka teorija, dobijena suma po stanjima ne predstavlja fizičku teoriju, a kvantna teorija gravitacije može se dobiti modifikacijom amplituda topološke sume po stanjima. Poslednji, treći korak kvantizacione procedure spinske pene, tj. nametanje veza na varijable prisutne u topološkom sektoru dejstva modifikacijom amplituda topološke sume po stanjima, izlazi iz okvira ove disertacije.

U poglavlju 8 sproveden je drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene za $2BF$ teoriju. Demonstrirano je kako se konstruiše suma po stanjima Z koja je nezavisna od triangulacije, na osnovu klasičnog $2BF$ dejstva za opštu striktnu 2-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje glatke d-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, za slučaje $d \in \{3, 4\}$. Za $d = 3$, kontruisana suma po stanjima je upravo Jeterov model, dok se za $d = 4$ poklapa sa Porterovom TKTP za $d = 4$ i $n = 2$. Analizirano je ponašanje konstruisane sume po stanjima pri Pahnerovim potezima, lokalnim promenama triangulacije koje čuvaju topologiju, tako da su bilo koje dve triangulacije iste mnogostrukosti povezane konačnim brojem Pahnerovih poteza. U trodimenzionalnom slučaju postoje četiri Pahnerova poteza — potezi $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i njihovi inverzi, dok u 4 dimenzije postoji pet različitih Pahnerovih poteza — potezi $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i

$5 \leftrightarrow 1$ i njihovi inverzi. Postavka analize ponašanja konstruisane sume po stanjima pri ovim Pahnerovim potezima predstavljena je u odeljku 8.3, dok su detalji računa dati u Dodatku E.1. Dobijeno je da suma po stanjima ostaje nepromenjena pri ovim transformacijama triangulacije, što dokazuje da je *topološka invarijanta* mnogostrukosti. Kako je nezavisna od triangulacije, suma po stanjima je invarijantna na proizvoljno usitnjavanje triangulacije i stoga definiše teoriju kontinuuma na glatkoj mnogostrukosti.

Konačno, u poslednjem poglavlju, poglavlju 9, fokusirali smo se na drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene za $3BF$ teoriju. Analogno postupku iz prethodnog poglavlja u slučaju sume po stanjima za $2BF$ teoriju, demonstrirano je kako se konstruiše suma po stanjima Z koja je nezavisna od triangulacije, na osnovu klasičnog $3BF$ dejstva za opštu semistriktnu 3-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti. Kako je moguće formulisati $3BF$ teoriju samo u slučaju kada je dimenzija prostorvremenske mnogostrukosti $d \geqslant 4$, razmatran je samo slučaj $d = 4$. Konstruisana suma po stanjima je generalizacija rada Žirelija, Pfajfera i Popeskua za $2BF$ sumu po stanjima predstavljenu u prethodnom poglavlju, tj. generalizacija Jeterovog modela, a poklapa sa Porterovom TKTP za $d = 4$ i $n = 3$. Slično kao i u slučaju $2BF$ sume po stanjima, kako bismo proverili da je konstruisana suma po stanjima topološka, analizirano je njeno ponašanje pri Pahnerovim potezima u slučaju četvorodimenzionalne mnogostrukosti, tj. invarijantnost pri potezima $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i $5 \leftrightarrow 1$ i njihovim inverzima. Analiza ponašanja konstruisane sume po stanjima pri Pahnerovim potezima predstavljena je u odeljku 9.3, sa detaljima u Dodatku E.2. Ponovo je dobijeno da je suma po stanjima invarijantna na Pahnerove poteze, tj. da je *topološka invarijanta* mnogostrukosti.

U dodacima su prikazani računski detalji koji prate osnovni tekst.

Diskusija i budući pravci istraživanja

Kategorijska generalizacija BF dejstva na $3BF$ dejstvo pružila je značajan uvid u sadržaj sektora materije. Pokazano je kako su polja materije u teoriji određena izborom gejdž grupe L, elementom 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_, \_\}_{\mathrm{pf}})$. Grupa L je potpuno nova struktura koja nije prisutna u Standardnom Modelu i u potpunosti proizilazi iz više kategorijske strukture teorije. Tako su formulisane gejdž grupe koje odgovaraju Klajn-Gordonovom, Dirakovom, Vajlovom i Majorana polju i konstruisana odgovarajuća $3BF$ dejstva koja opisuju dinamiku ovih polja kuplovanih sa gravitacijom na standardan način. Zatim, jednostavnim izborom grupe L kao direktnog proizvoda grupa koje odgovaraju pojedinačnim relevantnim poljima u Standardnom Modelu, tj. kao $L = \mathbb{R}^4(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G})$, dobijena je grupa koja opisuje materiju kompletnog Standardnog Modela i formulisana je teorija gravitacije i polja materije kao $3BF$ teorija sa vezama. Ovakav izbor 3-grupe je trivijalan, u smislu da je grupa L izabrana kao direktni proizvod, a Pajferovo podizanje i preslikavanja ∂ i δ kao trivijalna. Različitim izborom 3-grupe mogu se konstruisani različiti modeli gravitacije i materije, slično kao što je to rađeno u okviru *teorija velikog ujedinjenja*[1], gde su konstruisani razni modeli vektorskog polja različitim izborima Jang-Milsove gejdž grupe. Postavlja se pitanje da li postoji neki bolji izbor 3-grupe koji bi odgovarao teoriji gravitacije sa materijom, a koji bi pružio odgovor na neke od otvorenih pitanja Standardnog Modela. Mogućnost netrivijalnog ujedinjenja polja u teoriji je interesantan budući pravac istraživanja u kome leži najveći potencijal ovog pristupa.

U prvom delu teksta urađena je Hamiltonova analiza topološkog BF, $2BF$ i $3BF$ dejstva. Međutim, kao topološka dejstva, ona ne opisuju realistične fizičke teorije koje sadrže lokalne propagirajuće stepene slobode. Uvođenje fizičkih stepeni slobode postiže se nametanjem veza na topološko dejstvo. Formulisana $2BF$, odnosno $3BF$ dejstva sa vezama za netopološke teorije,

[1]eng. *Grand Unified Theory (GUT).*

konkretno $2BF$ dejstva sa vezama koja opisuju Jang-Milsovo polje i Ajnštajn-Kartanovu gravitaciju, kao i $3BF$ dejstva sa vezama koja opisuju Klajn-Gordonovo, Dirakovo, Vejlovo i Majorana polje kuplovana sa gravitacijom na standardni način napisana su u obliku sume topološkog člana i člana sa vezama. Prirodan sledeći korak ovog pravca istraživanja bila bi Hamiltonova analiza svih takvih $2BF$, odnosno $3BF$ modela gravitacije kuplovanih sa različitim vektorskim poljima i poljima materije i proučavanje njihovih simetrija.

Dobijena je grupa simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$ koja opisuje gejdž simetrije topološkog $3BF$ dejstva. Međutim, fizičke teorije opisane su modifikovanim $3BF$ dejstvima, dobijenim dodavanjem veza, čije grupe simetrija predstavljaju neku podgrupu ukupne grupe simetrija topološkog dejstva. Ovako eksplicitno narušena grupa simetrija, dalje se može spontano narušiti Higsovim mehanizmom, što predstavlja jedan od zanimljivih budućih pravaca istraživanja.

Jedan važan rezultat je veza između 2-ukrštenog modula i grupe simetrija $3BF$ dejstva, tzv. *dualnost*. Iz izračunatih komutacionih relacija Lijeve algebre grupe simetrije $\mathcal{G}_{3BF}$ vidi se da strukturne konstante zavise od izbora grupa G, H i L 2-ukrštenog modula ($L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G$, $\triangleright$, $\{\_\,,\ \_\}_{\mathrm{pf}}$), dejstva $\triangleright$ i simetričnog dela Pajferovog podizanja $\{\_\,,\ \_\}_{\mathrm{pf}}$. Međutim, grupa $\mathcal{G}_{3BF}$ ne zavisi od antisimetričnog dela Pajferovog podizanja, niti od homomorfizama ∂ i δ. Na osnovu ovog rezultata sledi da može postojati nekoliko različitih 2-ukrštenih modula *dualnih* istoj grupi simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$, odnosno ne postoji korespondencija jedan-na-jedan između 2-ukrštenog modula i grupe simetrija odgovarajućeg $3BF$ dejstva. Ovaj rezultat može imati praktičnu primenu u konstrukciji $3BF$ modela, gde bismo dakle prvo definisali izbor grupe $\mathcal{G}_{3BF}$ koji odgovara željenoj simetriji modela, a koji automatski fiksira izbor grupa G, H i L, dejstva $\triangleright$ i simetričnog dela Pajferovog podizanja, a zatim definisali preostale elemente 2-ukrštenog modula tako da su zadovoljene sve aksiome definicije 2-ukrštenog modula.

U drugom delu teze konstruisana je topološka suma po stanjima Z za opštu semistriktnu 3-grupu i $4D$ prostorvremensku mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ i dokazano je da je ona topološka invarijanta te mnogostrukosti. Konstruisana suma po stanjima predstavlja kombinatornu konstrukciju topološke kvantne teorije polja (TKTP) u smislu Atijinih aksioma, što se može eksplicitno proveriti. Dokaz da suma po stanjima zadovoljava Atijine aksiome prevazilazi okvire ove teze i ostavljen je za dalji rad.

Ipak, da bi uspešno završili drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene, neophodne su generalizacije Peter-Vejlove i Planšarelove teorema za slučajeve 2-grupe i 3-grupe, matematički rezultati koji za sada predstavljaju otvorene probleme. Naime, ove teoreme treba da obezbede dekompoziciju funkcija na 3-grupi u sumu po odgovarajućim ireducibilnim reprezentacijama 3-grupe. Na ovaj način se određuje spektar oznaka simpleksa triangulacije, tj. domen vrednosti polja koja žive na simpleksima triangulacije, kao što je to urađeno u slučaju BF sume po stanjima. Trenutni pokušaji privođenja kraju drugog koraka kvantizacije uopštenih BF teorija u okviru viših gejdž teorija se svode na pogađanje ireducibilnih reprezentacija 2-grupa, kao što je urađeno na primer u slučaju spinkub modela kvantne gravitacije.

Ovaj rezultat otvara put ka trećem i finalnom koraku kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene. Kako je cilj da opišemo realnu fizičku teoriju, tj. teoriju koja sadrži lokalne propagirajuće stepene slobode, potrebno je konstruisati netopološku sumu po stanjima koja opisuje teoriju sa netrivijalnom dinamikom. Poslednji, treći korak kvantizacione procedure spinske pene podrazumeva nametanje veza koje deformišu topološku teoriju u fizičku teoriju. Nastavak ovog istraživanja ima za cilj formulaciju sume po stanjima koja opisuje kvantnu teoriju gravitacije kuplovanu sa materijom. Izgradnju ovog modela ostavljamo za budući rad.

Ova lista nije kompletna, pa pored navedenih tema postoje i mnogobrojni drugi pravci istraživanja u okviru viših kategorijskih generalizacija BF teorija, kako u fizici tako i u matematici.

Dodatak A

Konstrukcija dejstva invarijantnog na gejdž transformacije

A.1 Konstrukcija $2BF$ dejstva

Simetrične bilinearne invarijantne forme za algebre $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}$ obeležavamo kao:

$$\langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = g_{ab} \,, \qquad \langle \tau_\alpha \,, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} = g_{\alpha\beta} \,. \tag{A.1}$$

Bilinearne forme imaju osobine:

- $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ je G-invarijantna:

$$\langle g\tau_\alpha g^{-1} \,, g\tau_\beta g^{-1} \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \tau_\alpha \,, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} \,, \quad \forall g \in G \,; \tag{A.2}$$

- $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ je G-invarijantna

$$\langle g \rhd t_a \,, g \rhd t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} \,, \quad \forall g \in G \,, \tag{A.3}$$

  a takođe i H-invarijantna:

$$\langle h t_a h^{-1} \,, h t_b h^{-1} \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle \partial(h) \rhd t_a \,, \partial(h) \rhd t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} \,, \quad \forall h \in H \,. \tag{A.4}$$

A.1.1 2-Gejdž transformacije 2-krivine

Grupe G i H ukrštenog modula $(H \xrightarrow{\partial} G, \rhd)$ generišu dva tipa 2-gejdž transformacija 2-koneksije, definisanih izrazima (2.47) i (2.48).

Teorema 24 *Kompozicija G-gejdž i H-gejdž transformacija dovodi do transformacije 2-koneksije:*

$$\begin{aligned} \alpha'' &= g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta) \,, \\ \beta'' &= g^{-1} \rhd \beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\rhd} \eta - \eta \wedge \eta \,, \end{aligned} \tag{A.5}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$ i $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ redom parametri G- i H-gejdž transformacija.

Dokaz. Pri G-gejdž transformacijama 2-koneksija (α, β) se transformiše po pravilu (2.47):

$$\begin{aligned} \alpha' &= g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g \,, \\ \beta' &= g^{-1} \rhd \beta \,. \end{aligned}$$

Daljom transformacijom 2-koneksije H-gejdž transformacijama po pravilu (2.48) dobija se:

$$\alpha'' = \alpha' + \partial(\eta) = g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\,,$$
$$\beta'' = \beta' + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \eta\wedge\eta = g^{-1}\triangleright\beta + \mathrm{d}\eta + \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big) \wedge^{\triangleright} \eta - \eta\wedge\eta\,.$$

Time smo dokazali Teoremu 24. ■

Na osnovu definicije (2.36) i transformacionih pravila za 2-koneksiju (2.47) i (2.48), dobijaju se transformacije 2-krivine $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ pri 2-gejdž transformacijama.

Teorema 25 *Pri G-gejdž transformacijama 2-krivina $(\mathcal{F},\mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F} \to g^{-1}\mathcal{F}g\,, \qquad \mathcal{G} \to g^{-1}\triangleright\mathcal{G}\,, \tag{A.6}$$

gde je $g:\mathcal{M}_4\to G$ parametar G–gejdž transformacija.

Dokaz. Primenom definicije 2-krivine, dobijamo da se pri G-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{F}$ transformiše kao

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}' &= \mathrm{d}\alpha' + \alpha'\wedge\alpha' - \partial\beta' \\
&= \mathrm{d}(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g) + (g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g) - \partial(g^{-1}\triangleright\beta) \\
&= \mathrm{d}g^{-1}\wedge\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}\alpha g - g^{-1}\alpha\wedge\mathrm{d}g + \mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g \\
&\quad + g^{-1}\alpha g\wedge g^{-1}\alpha g + g^{-1}\alpha g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g - g^{-1}\triangleright\partial(\beta) \\
&= \mathrm{d}g^{-1}\wedge\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}\alpha g + \mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g \\
&\quad + g^{-1}\alpha\wedge\alpha g - \mathrm{d}g^{-1}\wedge\alpha g - \mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g - g^{-1}\triangleright\partial(\beta) \\
&= g^{-1}\mathrm{d}\alpha g + g^{-1}\alpha\wedge\alpha g - g^{-1}\triangleright\partial(\beta) \\
&= g^{-1}\mathcal{F}g\,,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

gde smo koristili $g^{-1}dg = -dg^{-1}g$. Pri G-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{G}$ se transformiše na sledeći način

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}' &= \mathrm{d}\beta' + \alpha'\wedge^{\triangleright}\beta' \\
&= \mathrm{d}(g^{-1}\triangleright\beta) + (g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge^{\triangleright}(g^{-1}\triangleright\beta) \\
&= \mathrm{d}g^{-1}\wedge^{\triangleright}\beta + g^{-1}\triangleright\mathrm{d}\beta + (g^{-1}\alpha g)\wedge^{\triangleright}(g^{-1}\triangleright\beta) - \mathrm{d}g^{-1}\wedge^{\triangleright}\beta \\
&= g^{-1}\triangleright\mathrm{d}\beta + g^{-1}\triangleright(\alpha\wedge^{\triangleright}\beta) \\
&= g^{-1}\triangleright\mathcal{G}\,.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Time smo dokazali tvrđenje Teoreme 25. ■

Teorema 26 *Pri H-gejdž transformacijama 2-krivina se transformiše po zakonu transformacije*

$$\mathcal{F}\to\mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G}\to\mathcal{G} + \mathcal{F}\wedge^{\triangleright}\eta\,, \tag{A.9}$$

gde je $\eta\in\mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4,\mathfrak{h})$ parametar H-gejdž transformacija.

Dokaz. Primenom definicije 3-krivine, dobijamo da je krivina $\mathcal{F}$ invarijantna na H-gejdž transformacije

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'' &= \mathrm{d}\alpha'' + \alpha'' \wedge \alpha'' - \partial\beta'' \\
&= \mathrm{d}(\alpha + \partial\eta) + (\alpha + \partial\eta) \wedge (\alpha + \partial\eta) - \partial(\beta + \mathrm{d}\eta + (\alpha + \partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) \\
&= \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha + \alpha'' \wedge \partial\eta + \partial\eta \wedge \alpha'' - \partial\beta - \partial(\alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \\
&= \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta \\
&= \mathcal{F}\,,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

gde smo primenili identitete:

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}(\partial\eta) = \partial(\mathrm{d}\eta)\,, \\
\partial(\eta \wedge \eta) = \partial\eta \wedge \partial\eta\,, \\
\alpha'' \wedge \partial\eta + \partial\eta \wedge \alpha'' = \partial(\alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta)\,.
\end{gathered}$$

Pri H-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{G}$ se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'' &= \mathrm{d}\beta'' + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta'' \\
&= \mathrm{d}(\beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) + (\alpha + \partial\eta) \wedge^{\triangleright} (\beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) \\
&= \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \alpha'' \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta \wedge \eta + \eta \wedge \mathrm{d}\eta \\
&\quad + \alpha \wedge^{\triangleright} (\beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\beta + \mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) \\
&= \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \eta + \mathrm{d}(\partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta \wedge \eta + \eta \wedge \mathrm{d}\eta \\
&\quad + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta + (\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \eta + \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&\quad - \partial\beta \wedge^{\triangleright} \eta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&= \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \eta + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta + (\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \eta - \partial\beta \wedge^{\triangleright} \eta \\
&= \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge \eta\,.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Ovde smo koristili sledeće identitete:

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\eta \wedge \eta - \eta \wedge \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta\,, \\
\alpha \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) = (\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \eta\,, \\
\partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta = -\partial\beta \wedge^{\triangleright} \eta\,, \\
\alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) = \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta)\,, \\
\partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) = 0\,.
\end{gathered}$$

Time smo dokazali tvrđenje Teoreme 26. ■

Teorema 27 *Pri 2-gejdž transformacijama 2-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se transformiše na sledeći način:*

$$\begin{gathered}
\mathcal{F} \to g^{-1} \triangleright \mathcal{F}\,, \\
\mathcal{G} \to g^{-1} \triangleright \mathcal{G} + (g^{-1} \triangleright \mathcal{F}) \wedge^{\triangleright} \eta\,,
\end{gathered} \tag{A.12}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$ i $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ redom parametri G- i H-gejdž transformacija.

Dokaz. Uzatopnom transformacijom 2-krivine najpre G-gejdž transformacijom definisanom u Teoremi 25, a zatim H-gejdž transformacijom definisanom u Teoremi 26 dobijamo rezultat Teoreme 27. ■

A.1.2 2-Gejdž transformacije Lagranževih množitelja

Korišćenjem G-invarijntne simetrične nedegenerisane bilinearne forme u $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$, može se definisati bilinearno antisimetrično preslikavanje $\mathcal{T} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ na sledeći način [17]:

$$\langle \mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{h}_2), \underline{g} \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle \underline{h}_1, \underline{g} \rhd \underline{h}_2 \rangle_{\mathfrak{h}}, \qquad \forall \underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}, \quad \forall \underline{g} \in \mathfrak{g}. \tag{A.13}$$

U prethodnom izrazu podvučeni simboli obeležavaaju elemente algebri, a nepodvučeni elemente grupa, što je notacija koju podrazumevamo i u daljem tekstu.

Za svako $g \in G$ i svake $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ važi

$$\langle \underline{h}_1, g \rhd \underline{h}_2 \rangle_{\mathfrak{h}} = -\langle g \rhd \underline{h}_1, \underline{h}_2 \rangle_{\mathfrak{h}} = -\langle \underline{h}_2, g \rhd \underline{h}_1 \rangle_{\mathfrak{h}}.$$

Može se pokazati da za sve $g \in G$ i $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$, važi:

$$\mathcal{T}(g \rhd \underline{h}_1, g \rhd \underline{h}_2) = g\mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{h}_2)g^{-1}. \tag{A.14}$$

Pokažimo to. Za neko $\underline{g}_0 \in \mathfrak{g}$, primenom osobina G-invarijantnosti $\langle \_, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle \_, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\langle g^{-1}\mathcal{T}(g \rhd \underline{h}_1, g \rhd \underline{h}_2)g, \underline{g}_0 \rangle_{\mathfrak{g}} &= \langle \mathcal{T}(g \rhd \underline{h}_1, g \rhd \underline{h}_2), g\underline{g}_0 g^{-1} \rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= -\langle g \rhd \underline{h}_1, (g\underline{g}_0 g^{-1}) \rhd g \rhd \underline{h}_2 \rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= -\langle \underline{h}_1, \underline{g}_0 \rhd \underline{h}_2 \rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle \underline{g}_0, \mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{h}_2) \rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle \mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{h}_2), \underline{g}_0 \rangle_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

Zadovoljen je sledeći identitet:

$$\mathcal{T}(\underline{g}_0 \rhd \underline{h}_1, \underline{h}_2) + \mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{g}_0 \rhd \underline{h}_2) = [\underline{g}_0, \mathcal{T}(\underline{h}_1, \underline{h}_2)].$$

Nakon fiksiranja bazisa, možemo definisati koeficijent bilinearnog antisimetričnog preslikavanja $\mathcal{T} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ na sledeći način

$$\mathcal{T}(t_a, t_b) = \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} \tau_{\alpha}, \tag{A.15}$$

pa definiciju preslikavanja $\mathcal{T}$ možemo izraziti koristeći ovaj koeficijent:

$$\mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} g_{\alpha\beta} = - \rhd_{\alpha[b}{}^{c} g_{a]c}. \tag{A.16}$$

Bilinearno antisimetrično preslikavanje $\mathcal{T}$ dve diferencijalne forme elemenata algebre $\mathfrak{h}$, η i ω, definiše diferencijalnu formu element algebre $\mathfrak{g}$:

$$\omega \wedge^{\mathcal{T}} \eta = \omega^a \wedge \eta^b \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} \tau_{\alpha}.$$

Preslikavanje $\mathcal{T}$ igra ključnu ulogu u konstrukciji $2BF$ dejstva invarijantnog na 2-gejdž transformacije, tj. definiciji zakona transformacije Langranževih množitelja pri 2-gejdž tranformacijama.

Kako bi dejstvo (5.1) bilo gejdž invarijantno pri transformacijama krivina (2.47) i (2.48), Lagranževi množitelji $B \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ i $C \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}, \mathfrak{h})$ moraju se pri G-gejdž transformacijama transformisati na sledeći način

$$B \to B' = g^{-1}Bg, \qquad C \to C' = g^{-1} \rhd C, \tag{A.17}$$

a pri H-gejdž transformacijama

$$B \to B'' = B + C'' \wedge^{\mathcal{T}} \eta, \qquad C \to C'' = C, \tag{A.18}$$

gde je preslikavanje $\mathcal{T}$ definisano jednačinom (A.13).

A.2 Konstrukcija $3BF$ dejstva

Simetrične bilinearne invarijantne forme za algebre $\mathfrak{l}, \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}$ obeležavamo kao:

$$\langle T_A \,, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} = g_{AB} \,, \qquad \langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = g_{ab} \,, \qquad \langle \tau_\alpha \,, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} = g_{\alpha\beta} \,. \tag{A.19}$$

Bilinearne forme imaju osobine:

- $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ je G-invarijantna:

$$\langle g\tau_\alpha g^{-1} \,, g\tau_\beta g^{-1} \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \tau_\alpha \,, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} \,, \quad \forall g \in G \,; \tag{A.20}$$

- $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{h}}$ je G-invarijantna:

$$\langle g \rhd t_a \,, g \rhd t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} \,, \quad \forall g \in G \,, \tag{A.21}$$

  a kada je $(H \xrightarrow{\partial} G \,, \rhd)$ ukršteni modul, takođe i H-invarijantna:

$$\langle h t_a h^{-1} \,, h t_b h^{-1} \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle \partial(h) \rhd t_a \,, \partial(h) \rhd t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = \langle t_a \,, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} \,, \quad \forall h \in H \,; \tag{A.22}$$

- $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{l}}$ je G-invarijantna:

$$\langle g \rhd T_A \,, g \rhd T_B \rangle_{\mathfrak{l}} = \langle T_A \,, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} \,, \quad \forall g \in G \,, \tag{A.23}$$

  a u specijalnom slučaju kada je Pajferovo podizanje ili preslikavanje δ trivijalno takođe i H-invarijantna:

$$\langle h \rhd' T_A \,, h \rhd' T_B \rangle_{\mathfrak{l}} = \langle T_A - \{\delta(T_A),\, h\} \,, T_B - \{\delta(T_B),\, h\} \rangle_{\mathfrak{l}} = \langle T_A \,, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} \,, \quad \forall h \in H \,. \tag{A.24}$$

  Iz H-invarijantnosti $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{l}}$ i osobina ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \,, \rhd')$ sledi L-invarijantnost bilinearne forme:

$$\langle l T_A l^{-1} \,, l T_B l^{-1} \rangle_{\mathfrak{l}} = \langle \delta(l) \rhd' T_A \,, \delta(l) \rhd' T_B \rangle_{\mathfrak{l}} = \langle T_A \,, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} \,, \quad \forall l \in L \,. \tag{A.25}$$

A.2.1 3-Gejdž transformacije 3-krivine

Struktura 3-grupe, tj. 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_ , \_\}_{\mathrm{pf}})$, generiše tri tipa gejdž transformacija, G-, H- i L-gejdž transformacije 3-koneksije definisane izrazima (2.128), (2.129) i (2.130).

Teorema 28 *Kompozicija G-gejdž, H-gejdž i L-gejdž transformacija dovodi do transformacije 3-koneksije:*

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta) \,, \\
\tilde{\beta} &= g^{-1} \rhd \beta + \mathrm{d}\eta + \tilde{\alpha} \wedge^{\rhd} \eta - \eta \wedge \eta - \delta(\theta) \,, \\
\tilde{\gamma} &= g^{-1} \rhd \gamma - \mathrm{d}\theta - \tilde{\alpha} \wedge \theta - \tilde{\beta} \wedge^{\{,\}} \eta - \eta \wedge^{\{,\}} (g^{-1} \rhd \beta) + \eta \wedge^{\rhd'} \theta \,,
\end{aligned} \tag{A.26}$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$, $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ redom parametri G-, H- i L-gejdž transformacija.

Dokaz. Pri G-gejdž transformacijama 3-koneksija se transformiše po pravilu (2.128):

$$\begin{aligned}\alpha' &= g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g\,,\\ \beta' &= g^{-1}\rhd\beta\,,\\ \gamma' &= g^{-1}\rhd\gamma\,.\end{aligned}$$

Pri H-gejdž transformacijama transformiše se po pravilu (2.129):

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \alpha' + \partial(\eta) = g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\,,\\ \beta'' &= \beta' + \mathrm{d}\eta + \alpha''\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta = g^{-1}\rhd\beta + \mathrm{d}\eta + \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big)\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta\,,\\ \gamma'' &= \gamma' - \beta''\wedge^{\{,\}}\eta - \eta\wedge^{\{,\}}\beta'\\ &= g^{-1}\rhd\gamma - \big(g^{-1}\rhd\beta + \mathrm{d}\eta + \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big)\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta\big)\wedge^{\{,\}}\eta - \eta\wedge^{\{,\}}(g^{-1}\rhd\beta)\,.\end{aligned}$$

Pri L-gejdž transformacijama koneksija se transformiše po pravilu (2.130):

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \alpha'' = g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\,,\\ \tilde{\beta} &= \beta'' - \delta(\theta) = g^{-1}\rhd\beta + \mathrm{d}\eta + \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big)\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta - \delta(\theta)\\ &= g^{-1}\rhd\beta + \mathrm{d}\eta + \tilde{\alpha}\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta - \delta(\theta)\,,\\ \tilde{\gamma} &= \gamma'' - \mathrm{d}\theta - \tilde{\alpha}\wedge^{\rhd}\theta\\ &= g^{-1}\rhd\gamma - \big(g^{-1}\rhd\beta + \mathrm{d}\eta + \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big)\wedge^{\rhd}\eta - \eta\wedge\eta\big)\wedge^{\{,\}}\eta\\ &\quad - \eta\wedge^{\{,\}}(g^{-1}\rhd\beta) - \mathrm{d}\theta - \big(g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g + \partial(\eta)\big)\wedge^{\rhd}\theta\\ &= g^{-1}\rhd\gamma - \tilde{\beta}\wedge^{\{,\}}\eta - \eta\wedge^{\{,\}}(g^{-1}\rhd\beta) - \mathrm{d}\theta - \tilde{\alpha}\wedge^{\rhd}\theta - \eta\wedge^{\rhd'}\theta\,,\end{aligned}$$

gde smo koristili identitet $\delta(\theta)\wedge^{\{,\}}\eta = -\eta\wedge^{\rhd'}\theta$. ∎

Na osnovu definicije (2.118) i transformacionih pravila za 3-koneksiju, dobija se transformacija 3-krivine $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$ pri 3-gejdž transformacijama.

Teorema 29 *Pri G-gejdž transformacijama 3-krivina $(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F}\to\mathcal{F}' = g^{-1}\mathcal{F}g\,,\qquad \mathcal{G}\to\mathcal{G}' = g^{-1}\rhd\mathcal{G}\,,\qquad \mathcal{H}\to\mathcal{H}' = g^{-1}\rhd\mathcal{H}\,, \tag{A.27}$$

gde je $g:\mathcal{M}_4\to G$ parametar G-gejdž transformacija.

Dokaz.

Primenom definicije 3-krivine i transformacionog pravila 3-koneksije pri G-gejdž transformaacijama, dobijamo da se pri G-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{F}$ transformiše na isti način kao u slučaju $2BF$ teorije.

Pri G-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{G}$ se transformiše na sledeći način

$$\begin{aligned}\mathcal{G}' &= \mathrm{d}\beta' + \alpha'\wedge^{\rhd}\beta' - \delta(\gamma')\\ &= \mathrm{d}(g^{-1}\rhd\beta) + (g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g)\wedge^{\rhd}(g^{-1}\rhd\beta) - \delta(g^{-1}\rhd\gamma)\\ &= g^{-1}\rhd G - g^{-1}\rhd\delta(\gamma)\\ &= g^{-1}\rhd\mathcal{G}\,,\end{aligned} \tag{A.28}$$

gde smo treći red dobili na sličan način kao u slučaju $2BF$ teorije i primenom osobine preslikavanja δ. Pri G-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{H}$ se transformiše na sledeći način

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}' &= \mathrm{d}\gamma' + \alpha' \wedge^{\triangleright} \gamma' + \beta' \wedge^{\{,\}} \beta' \\
&= \mathrm{d}(g^{-1} \triangleright \gamma) + (g^{-1}\alpha g + g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge^{\triangleright} (g^{-1} \triangleright \gamma) + g^{-1} \triangleright \beta \wedge^{\{,\}} g^{-1} \triangleright \beta \\
&= \mathrm{d}g^{-1} \wedge^{\triangleright} \gamma + g^{-1} \triangleright \mathrm{d}\gamma + (g^{-1}\alpha g) \wedge^{\triangleright} (g^{-1} \triangleright \gamma) - \mathrm{d}g^{-1} \wedge^{\triangleright} \gamma + g^{-1} \triangleright \beta \wedge^{\{,\}} g^{-1} \triangleright \beta \\
&= g^{-1} \triangleright \gamma + g^{-1} \triangleright (\alpha \wedge \gamma) + g^{-1} \triangleright (\beta \wedge^{\{,\}} \beta) \\
&= g \triangleright \mathcal{H}\,,
\end{aligned} \tag{A.29}$$

gde smo u poslednjem redu iskoristili osobinu G-ekvivarijantnosti Pajferovog podizanja. Time smo dokazali tvrđenje Teoreme 29. ■

Teorema 30 *Pri H-gejdž transformacijama 3-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}'' = \mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' = \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \eta\,, \qquad \mathcal{H} \to \mathcal{H}'' = \mathcal{H} - \mathcal{G}'' \wedge^{\{,\}} \eta + \eta \wedge^{\{,\}} \mathcal{G}\,, \tag{A.30}$$

gde je $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ parametar H–gejdž transformacija.

Dokaz. Primenom definicije 3-krivine i transformacionog pravila 3-koneksije pri H-gejdž transformacijama, dobijamo da se krivina $\mathcal{F}$ transformiše na isti način kao u slučaju $2BF$ teorije. Pri H-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{G}$ se transformiše

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'' &= \mathrm{d}\beta'' + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta'' - \delta(\gamma'') \\
&= \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \eta + \mathrm{d}(\partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta \wedge \eta + \eta \wedge \mathrm{d}\eta \\
&\quad + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta + (\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \eta + \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&\quad + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&\quad - \delta(\gamma - (\beta + \mathrm{d}\eta + (\alpha + \partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \eta \wedge \eta) \wedge^{\{,\}} \eta - \eta \wedge^{\{,\}} \beta) \\
&= \underline{\mathrm{d}\beta} + \underline{\mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \eta} + \mathrm{d}(\partial\eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta \wedge \eta + \eta \wedge \mathrm{d}\eta \\
&\quad + \underline{\alpha \wedge^{\triangleright} \beta} + \underline{(\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \eta} + \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&\quad + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\eta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
&\quad - \underline{\delta(\gamma)} + \beta \wedge^{[,]} \eta - \underline{\partial\beta \wedge^{\triangleright} \eta} + \mathrm{d}\eta \wedge^{[,]} \eta - \partial(\mathrm{d}\eta) \wedge^{\triangleright} \eta + (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta - \partial(\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta \\
&\quad + (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta - \partial(\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta - (\eta \wedge \eta) \wedge^{[,]} \eta + \partial(\eta \wedge \eta) \wedge^{\triangleright} \eta \\
&\quad + \eta \wedge^{[,]} \beta - \partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta\,,
\end{aligned} \tag{A.31}$$

gde prepoznajući da podvučeni članovi daju $\mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \eta$ i skraćivanjem određenih članova dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}'' \;=\;& \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \eta \\
& + \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
& + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) - \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \\
& + (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta - \partial(\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta \\
& + (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta - \partial(\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta - (\eta \wedge \eta) \wedge^{[,]} \eta + \partial(\eta \wedge \eta) \wedge^{\triangleright} \eta \,.
\end{aligned} \tag{A.32}
$$

Primenili smo da je $\mathrm{d}\partial\eta = \partial \mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\eta \wedge^{[,]} \eta = \mathrm{d}\eta \wedge \eta - \eta \wedge \mathrm{d}\eta$ i $\beta \wedge^{[,]} \eta = -\eta \wedge^{[,]} \beta$ po definiciji. Zatim, koristeći identitete

$$
\begin{aligned}
(\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta &= \alpha \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \,, \\
(\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{[,]} \eta &= \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge \eta) \,, \\
(\eta \wedge \eta) \wedge^{[,]} \eta &= 0 \,,
\end{aligned}
$$

dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}'' \;=\;& \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \eta + \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \\
& - \partial(\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta - \partial(\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta + \partial(\eta \wedge \eta) \wedge^{\triangleright} \eta \,.
\end{aligned} \tag{A.33}
$$

Na kraju, koristeći da je

$$
\begin{aligned}
\partial(\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta &= \alpha \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \eta) \,, \\
\partial(\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\triangleright} \eta &= \partial(\eta \wedge \eta) \wedge^{\triangleright} \eta + \partial\eta \wedge^{\triangleright} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \eta) \,,
\end{aligned}
$$

konačno sledi:

$$
\mathcal{G}'' \;=\; \mathcal{G} + \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \eta \,. \tag{A.34}
$$

Najzad, primenom transformacionih pravila za 3-koneksiju dobijamo da je transformacija krivine $\mathcal{H}$ pri H-gejdž transformacijama

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}'' \;=\;& \mathrm{d}\gamma'' + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \gamma'' + \beta'' \wedge^{\{,\}} \beta'' \\
=\;& \mathrm{d}\gamma + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \gamma - \mathrm{d}(\beta'' \wedge^{\{,\}} \eta) - \mathrm{d}(\eta \wedge^{\{,\}} \beta) \\
& - \alpha'' \wedge^{\triangleright} (\beta'' \wedge^{\{,\}} \eta) - \alpha'' \wedge^{\triangleright} (\eta \wedge^{\{,\}} \beta) + \beta'' \wedge^{\{,\}} \beta'' \\
=\;& \mathrm{d}\gamma + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \gamma - \mathrm{d}\beta'' \wedge^{\{,\}} \eta - \beta'' \wedge^{\{,\}} \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta \wedge^{\{,\}} \beta + \eta \wedge^{\{,\}} \mathrm{d}\beta \\
& - (\alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta'') \wedge^{\{,\}} \eta - \beta'' \wedge^{\{,\}} (\alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) - (\alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + \eta \wedge^{\{,\}} (\alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta) \\
& + \beta'' \wedge^{\{,\}} \beta'' \\
=\;& \mathrm{d}\gamma + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \gamma - (\mathrm{d}\beta'' + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta'') \wedge^{\{,\}} \eta - \beta'' \wedge^{\{,\}} (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \\
& - (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + \eta \wedge^{\{,\}} (\mathrm{d}\beta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \beta) \\
& + \beta'' \wedge^{\{,\}} \beta'' \,,
\end{aligned} \tag{A.35}
$$

gde je:

$$\beta'' \wedge^{\{,\}} \beta'' = \beta \wedge^{\{,\}} \beta + (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \beta - (\eta \wedge \eta) \wedge^{\{,\}} \beta \\ + \beta'' \wedge^{\{,\}} (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) - \beta'' \wedge^{\{,\}} (\eta \wedge \eta)\,.$$

Dobijamo da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'' \;=\;& \mathcal{H} + \partial\eta \wedge^{\triangleright} \gamma - G'' \wedge^{\{,\}} \eta + \eta \wedge^{\{,\}} G + \eta \wedge^{\{,\}} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta) \\ & -\beta'' \wedge^{\{,\}} (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) - (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \beta \\ & -(\eta \wedge \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + \beta'' \wedge^{\{,\}} (\mathrm{d}\eta + \alpha'' \wedge^{\triangleright} \eta) - \beta'' \wedge^{\{,\}} (\eta \wedge \eta)\,. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Određeni članovi se skraćuju, a nakon primene identiteta

$$\beta'' \wedge^{\{,\}} (\eta \wedge \eta) = (\beta'' \wedge^{\langle,\rangle} \eta) \wedge^{\{,\}} \eta\,,$$

$$\begin{aligned} \partial\eta \wedge^{\triangleright} \gamma =& -\eta \wedge^{\{,\}} \delta\gamma + \delta\gamma \wedge^{\{,\}} \eta \\ =& -\eta \wedge^{\{,\}} \delta\gamma + \delta\gamma'' \wedge^{\{,\}} \eta + (\beta'' \wedge^{\langle,\rangle} \eta) \wedge^{\{,\}} \eta + (\eta \wedge^{\langle,\rangle} \beta) \wedge^{\{,\}} \eta\,, \end{aligned}$$

sledi:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'' \;=\;& \mathcal{H} - \mathcal{G}'' \wedge^{\{,\}} \eta + \eta \wedge^{\{,\}} \mathcal{G} \\ & +\eta \wedge^{\{,\}} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta) - (\eta \wedge \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + (\eta \wedge^{\langle,\rangle} \beta) \wedge^{\{,\}} \eta \\ =\;& \mathcal{H} - \mathcal{G}'' \wedge^{\{,\}} \eta + \eta \wedge^{\{,\}} \mathcal{G}\,. \end{aligned} \tag{A.37}$$

U poslednjem redu primenili smo identitet:

$$\eta \wedge^{\{,\}} (\partial\eta \wedge^{\triangleright} \beta) - (\eta \wedge \eta) \wedge^{\{,\}} \beta + (\eta \wedge^{\langle,\rangle} \beta) \wedge^{\{,\}} \eta = 0\,.$$

Time smo dokazali tvrđenje Teoreme 30. ■

Teorema 31 *Pri L-gejdž transformacijama 3-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način*

$$\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\,, \qquad \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}\,, \qquad \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \theta\,, \tag{A.38}$$

gde je $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ parametar L-gejdž transformacija.

Dokaz. Primenom definicije 3-krivine, dobijamo da je krivina $\mathcal{F}$ invarijantna na L-gejdž transformacije

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} \;=\;& \mathrm{d}\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha} - \partial\tilde{\beta} \\ =\;& \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial(\beta - \delta(\theta)) \\ =\;& \mathcal{F}\,, \end{aligned} \tag{A.39}$$

gde smo primenili identitet $\partial\delta = 0$. Pri L-gejdž transformacijama krivina $\mathcal{G}$ se transformiše na sledeći način

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} \;=\;& \mathrm{d}\tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \wedge^{\triangleright} \tilde{\beta} - \delta(\tilde{\gamma}) \\ =\;& \mathrm{d}(\beta - \delta(\theta)) + \alpha \wedge^{\triangleright} (\beta - \delta(\theta)) - \delta(\gamma - \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\triangleright} \theta) \\ =\;& \mathcal{G} - \mathrm{d}(\delta(\theta)) - \alpha \wedge^{\triangleright} \delta(\theta) + \delta(\mathrm{d}\theta) + \delta(\alpha \wedge^{\triangleright} \theta) \\ =\;& \mathcal{G}\,, \end{aligned} \tag{A.40}$$

gde smo koristili da je $\mathrm{d}(\delta\theta) = \delta(\mathrm{d}\theta)$. Najzad, transformacija krivine $\mathcal{H}$ pri L-gejdž transformacijama je:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}} &= \mathrm{d}\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \wedge^{\triangleright} \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \wedge^{\{,\}} \tilde{\beta} \\
&= \mathrm{d}(\gamma - \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\triangleright} \theta) + \alpha \wedge^{\triangleright} (\gamma - \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\triangleright} \theta) + (\beta - \delta(\theta)) \wedge^{\{,\}} (\beta - \delta(\theta)) \\
&= \mathcal{H} - \mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \theta + \alpha \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\triangleright} \mathrm{d}\theta - \alpha \wedge^{\triangleright} (\alpha \wedge^{\triangleright} \theta) \\
&\quad - \beta \wedge^{\{,\}} \delta(\theta) - \delta(\theta) \wedge^{\{,\}} \beta + \delta(\theta) \wedge^{\{,\}} \delta(\theta) \\
&= \mathcal{H} - \mathrm{d}\alpha \wedge^{\triangleright} \theta - (\alpha \wedge \alpha) \wedge^{\triangleright} \theta + \partial(\beta) \wedge^{\triangleright} \theta \\
&= \mathcal{H} - \mathcal{F} \wedge^{\triangleright} \theta \,,
\end{aligned}
\tag{A.41}
$$

gde smo primenili identitete:

$$
\delta(\theta) \wedge^{\{,\}} \delta(\theta) = 0 \,,
$$
$$
-\beta \wedge^{\{,\}} \delta(\theta) - \delta(\theta) \wedge^{\{,\}} \beta = \partial(\beta) \wedge^{\triangleright} \theta \,.
$$

Tvrđenje Teoreme 31 je dokazano. ■

Teorema 32 *Pri 3-gejdž transformacijama 3-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ se transformiše na sledeći način:*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F} \to g^{-1} \triangleright \mathcal{F} \,, \\
&\mathcal{G} \to g^{-1} \triangleright \mathcal{G} + (g^{-1} \triangleright \mathcal{F}) \wedge^{\triangleright} \eta \,, \\
&\mathcal{H} \to g^{-1} \triangleright \mathcal{H} - (g^{-1} \triangleright \mathcal{G} + (g^{-1} \triangleright \mathcal{F}) \wedge^{\triangleright} \eta) \wedge^{\{,\}} \eta - \eta^{\{,\}}(g^{-1} \triangleright \mathcal{G}) - (g^{-1} \triangleright \mathcal{F}) \wedge^{\triangleright} \theta \,,
\end{aligned}
\tag{A.42}
$$

gde su $g : \mathcal{M}_4 \to G$, $\eta \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ i $\theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ redom parametri G-, H- i L-gejdž transformacija.

Dokaz. Uzatopnom transformacijom 2-krivine najpre G-gejdž transformacijom definisanom u Teoremi 29, zatim H-gejdž transformacijom definisanom u Teoremi 30 i L-gejdž transformacijom definisanom u Teoremi 31 dobijamo rezultat Teoreme 32. ■

A.2.2 3-Gejdž transformacije Lagranževih množitelja

Bilinearno antisimetrično preslikavanje $\mathcal{T} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ se definiše na isti način kao u slučaju $2BF$ dejstva (A.13).

Da bi se definisalo $3BF$ gejdž invarijantno topološko dejstvo potrebno je definisati bilinearno antisimetrično preslikavanje $\mathcal{S} : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ na sledeći način:

$$
\langle \mathcal{S}(\underline{l}_1, \underline{l}_2), \underline{g} \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle \underline{l}_1, \underline{g} \triangleright \underline{l}_2 \rangle_{\mathfrak{l}} \,, \qquad \forall \underline{l}_1, \forall \underline{l}_2 \in \mathfrak{l} \,, \quad \forall \underline{g} \in \mathfrak{g} \,. \tag{A.43}
$$

Primetimo na osnovu simetričnosti i nedegenerisanosti bilinearne forme $\langle \_ \,, \_ \rangle_{\mathfrak{g}}$ važi:

$$
\langle \underline{l}_1, \underline{g} \triangleright \underline{l}_2 \rangle_{\mathfrak{l}} = -\langle \underline{g} \triangleright \underline{l}_1, \underline{l}_2 \rangle_{\mathfrak{l}} = -\langle \underline{l}_2, \underline{g} \triangleright \underline{l}_1 \rangle_{\mathfrak{l}} \,, \qquad \forall \underline{g} \in \mathfrak{g}, \quad \forall \underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l} \,.
$$

Takođe, za svako $g \in G$ i $\underline{l}_1, \underline{l}_2 \in \mathfrak{l}$ važi identitet:

$$
\mathcal{S}(g \triangleright \underline{l}_1, g \triangleright \underline{l}_2) = g \, \mathcal{S}(\underline{l}_1, \underline{l}_2) \, g^{-1} \,, \tag{A.44}
$$

što se lako može pokazati:

$$\begin{aligned}\langle \underline{g},\, g^{-1}\mathcal{S}(g\rhd \underline{l}_1\,, g\rhd \underline{l}_2)g\rangle_{\mathfrak{g}} &= \langle g\underline{g}g^{-1},\, \mathcal{S}(g\rhd \underline{l}_1,\, g\rhd \underline{l}_2)\rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= -\langle (g\,\underline{g}\,g^{-1})\rhd g\rhd \underline{l}_1,\, g\rhd \underline{l}_2\rangle_{\mathfrak{l}} \\ &= -\langle \underline{g}\rhd \underline{l}_1\,, \underline{l}_2\rangle_{\mathfrak{l}} = \langle \underline{g}\,, \mathcal{S}(\underline{l}_1,\, \underline{l}_2)\rangle_{\mathfrak{g}}\,,\end{aligned}$$

Ovde je korišćen identitet:

$$g\rhd(\underline{g}\rhd \underline{l}) = (g\,\underline{g}\,g^{-1})\rhd g\rhd \underline{l}\,.$$

Zadovoljen je sledeći identitet:

$$\mathcal{S}(\underline{g}\rhd \underline{l}_1,\, \underline{l}_2) + \mathcal{S}(\underline{l}_1,\, \underline{g}\rhd \underline{l}_2) = [\underline{g},\, \mathcal{S}(\underline{l}_1,\, \underline{l}_2)]\,.$$

Kada fiksiramo bazis, možemo definisati koeficijent bilinearnog antisimetričnog preslikavanja $\mathcal{S}:\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}\to\mathfrak{g}$,

$$\mathcal{S}(T_A, T_B) = \mathcal{S}_{AB}{}^{\alpha}\tau_{\alpha}\,, \tag{A.45}$$

pa definiciju preslikavanja $\mathcal{S}$ možemo izraziti koristeći ovaj koeficijent na sledeći način:

$$\mathcal{S}_{AB}{}^{\alpha}g_{\alpha\beta} = -\rhd_{\alpha[B}{}^{C}g_{A]C}\,. \tag{A.46}$$

Bilinearno antisimetrično preslikavanje $\mathcal{S}$ dve diferencijalne forme elemenata algebre $\mathfrak{l}$, η i ω, definiše diferencijalnu formu element algebre $\mathfrak{g}$:

$$\omega\wedge^{\mathcal{S}}\eta = \omega^A\wedge\eta^B\mathcal{S}_{AB}{}^{\alpha}\tau_{\alpha}\,.$$

Sada možemo definisati zakone transformacije Lagranževih množitelja pri L-gejdž transformacijama (A.58).

Transformacije Lagranževih množitelja pri H-gejdž transformacijama definišemo koristeći bilinearno preslikavanje $\mathcal{X}_1:\mathfrak{l}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ definisano sledećim identitetom

$$\langle\mathcal{X}_1(\underline{l},\, \underline{h}_1),\, \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}} = -\langle\underline{l},\, \{\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}}\,, \qquad \forall\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\in\mathfrak{h}\,, \quad \forall\underline{l}\in\mathfrak{l}\,, \tag{A.47}$$

i bilinearno preslikavanje $\mathcal{X}_2:\mathfrak{l}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ definisano pravilom:

$$\langle\mathcal{X}_2(\underline{l},\, \underline{h}_2),\, \underline{h}_1\rangle_{\mathfrak{h}} = -\langle\underline{l},\, \{\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}}\,, \qquad \forall\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\in\mathfrak{h}\,, \quad \forall\underline{l}\in\mathfrak{l}\,. \tag{A.48}$$

Fiksiranjem bazisa možemo definisati koeficijente bilinearnih preslikavanja $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$:

$$\mathcal{X}_1(T_A, t_a) = \mathcal{X}_{1Aa}{}^{b}\,t_b\,, \qquad \mathcal{X}_2(T_A, t_a) = \mathcal{X}_{2Aa}{}^{b}\,t_b\,. \tag{A.49}$$

Definicije preslikavanja $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ zapisane u bazisu postaju:

$$\mathcal{X}_{1Ab}{}^{c}g_{ac} = -X_{ba}{}^{B}g_{AB}\,, \qquad \mathcal{X}_{2Ab}{}^{c}g_{ac} = -X_{ab}{}^{B}g_{AB}\,. \tag{A.50}$$

Za dve diferencijalne forme, element algebre $\mathfrak{l}$ formu ω i element algebre $\mathfrak{h}$ formu η, definiše se diferencijalna forma element algebre $\mathfrak{h}$ na sledeći način:

$$\omega\wedge^{\mathcal{X}_1}\eta = \omega^A\wedge\eta^a\mathcal{X}_{1Aa}{}^{b}t_b\,, \qquad \omega\wedge^{\mathcal{X}_2}\eta = \omega^A\wedge\eta^a\mathcal{X}_{2Aa}{}^{b}t_b\,.$$

Za sve $g\in G$, $\underline{l}\in\mathfrak{l}$ i $\underline{h}\in\mathfrak{h}$, važi:

$$\mathcal{X}_1(g\rhd\underline{l},\, g^{-1}\rhd\underline{h}) = g\rhd\mathcal{X}_1(\underline{l},\, \underline{h})\,, \qquad \mathcal{X}_2(g\rhd\underline{l},\, g\rhd\underline{h}) = g^{-1}\rhd\mathcal{X}_2(\underline{l},\, \underline{h})\,,$$

što sledi na osnovu pravila da za svako $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$ i $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ važi:

$$\begin{aligned}
\langle \underline{h}_2,\, g^{-1} \rhd \mathcal{X}_1(g \rhd \underline{l},\, g \rhd \underline{h}_1)\rangle_{\mathfrak{h}} &= \langle g \rhd \underline{h}_2,\, \mathcal{X}_1(g \rhd \underline{l},\, g \rhd \underline{h}_1)\rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle g \rhd \underline{l},\, \{g \rhd \underline{h}_1,\, g \rhd \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}} \\
&= \langle g \rhd \underline{l},\, g \rhd \{\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}} \\
&= \langle \underline{l},\, \{\underline{h}_1,\, \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}} \\
&= \langle \underline{h}_2,\, \mathcal{X}_1(l,\, \underline{h}_1)\rangle_{\mathfrak{h}}\,,
\end{aligned}$$

i slično za $\mathcal{X}_2$.

Najzad, potrebno je definisati trilinearno preslikavanje $\mathcal{D} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ sledećim pravilom:

$$\langle \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l}),\, \underline{g}\rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle \underline{l},\, \{\underline{g} \rhd \underline{h}_1,\, \underline{h}_2\}\rangle_{\mathfrak{l}}\,, \qquad \forall \underline{h}_1,\, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}\,, \quad \forall \underline{l} \in \mathfrak{l}, \quad \forall \underline{g} \in \mathfrak{g}\,, \tag{A.51}$$

Koeficijenti trilinearnog preslikavanja se definišu kao:

$$\mathcal{D}(t_a,\, t_b,\, T_A) = \mathcal{D}_{abA}{}^{\alpha}\tau_\alpha\,, \tag{A.52}$$

pa iz definicije preslikavanja $\mathcal{D}$ sledi da ga možemo zapisati i preko koeficijenata:

$$\mathcal{D}_{abA}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = -\rhd_{\alpha a}{}^{c} X_{cb}{}^{B} g_{AB}\,. \tag{A.53}$$

Za dve diferencijalne forme, elemente algebre $\mathfrak{h}$, ω i η, i diferencijalnu formu ξ element algebre $\mathfrak{l}$, definiše se diferencijalna forma element algebre g:

$$\omega \wedge^{\mathcal{D}} \eta \wedge^{\mathcal{D}} \xi = \omega^a \wedge \eta^b \wedge \xi^A \mathcal{D}_{abA}{}^{\beta}\tau_\beta\,.$$

Važe relacije kompatibilsnosti između preslikavanja $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{D}$:

$$\langle \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l}),\, \underline{g}\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \mathcal{X}_1(\underline{l},\, \underline{g} \rhd \underline{h}_1),\, \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}}\,, \qquad \forall \underline{h}_1,\, \underline{h}_2 \in \mathfrak{h}\,, \quad \forall \underline{l} \in \mathfrak{l}, \quad \forall \underline{g} \in \mathfrak{g}\,. \tag{A.54}$$

Takođe, može se pokazati da za svako $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$, $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ i $g \in G$ važi:

$$\mathcal{D}(g \rhd \underline{h}_1,\, g \rhd \underline{h}_2,\, g \rhd \underline{l}) = g\,\mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l})\, g^{-1}\,, \tag{A.55}$$

što je posledica toga da za svako $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$, $\underline{l} \in \mathfrak{l}$, $\underline{g} \in \mathfrak{g}$ i $g \in G$ možemo pisati:

$$\begin{aligned}
\langle g^{-1}\mathcal{D}(g \rhd \underline{h}_1,\, g \rhd \underline{h}_2,\, g \rhd \underline{l})g,\, \underline{g}\rangle_{\mathfrak{g}} &= \langle \mathcal{D}(g \rhd \underline{h}_1,\, g \rhd \underline{h}_2,\, g \rhd \underline{l}),\, g\underline{g}g^{-1}\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle \mathcal{X}_1(g \rhd \underline{l},\, g\underline{g}g^{-1} \rhd g \rhd \underline{h}_1),\, g \rhd \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle \mathcal{X}_1(g \rhd \underline{l},\, g \rhd \underline{g} \rhd \underline{h}_1),\, g \rhd \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle g \rhd \mathcal{X}_1(\underline{l},\, \underline{g} \rhd \underline{h}_1),\, g \rhd \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle \mathcal{X}_1(\underline{l},\, \underline{g} \rhd \underline{h}_1),\, \underline{h}_2\rangle_{\mathfrak{h}} \\
&= \langle \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l})\,,\underline{g}\rangle_{\mathfrak{g}}\,,
\end{aligned}$$

gde su korišćene relacije (A.2.2) i relacije kompatibilnosti (A.54). Sledi da za sve $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2 \in \mathfrak{h}$, $\underline{l} \in \mathfrak{l}$ i $\underline{g} \in \mathfrak{g}$ važi sledeći identitet:

$$\mathcal{D}(\underline{g} \rhd \underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l}) + \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{g} \rhd \underline{h}_2,\, \underline{l}) + \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{g} \rhd \underline{l}) = [\underline{g},\, \mathcal{D}(\underline{h}_1,\, \underline{h}_2,\, \underline{l})]\,.$$

Ovim su definisana sva preslikavanja neophodna da se definišu zakoni transformacije Langranževih množitelja pri H-gejdž tranformacijama.

Kako bi dejstvo (6.1) bilo gejdž invarijantno pri transformacijama krivina (2.128), (2.129) i (2.130), Lagranževi množitelji B, C i D moraju se pri G-gejdž transformacijama transformisati na sledeći način

$$B \to g^{-1} B g \,, \qquad C \to g^{-1} \rhd C \,, \qquad D \to g^{-1} \rhd D \,, \tag{A.56}$$

pri H-gejdž transformacijama

$$B \to B + C' \wedge^{\mathcal{T}} \eta - \eta \wedge^{\mathcal{D}} \eta \wedge^{\mathcal{D}} D \,, \qquad C \to C + D \wedge^{\mathcal{X}_1} \eta + D \wedge^{\mathcal{X}_2} \eta \,, \qquad D \to D \,, \tag{A.57}$$

i najzad pri L-gejdž transformacijama na sledeći način:

$$B \to B - D \wedge^{\mathcal{S}} \theta \,, \qquad C \to C \,, \qquad D \to D \,. \tag{A.58}$$

Preslikavanja $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{S}$ definisana su jednačinama (A.13), (A.43), (A.47), (A.48) i (A.51).

Dodatak B

Jednačine kretanja za $3BF$ dejstvo sa vezama za Vajlovo i Majorana polje kuplovano sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom

Dejstvo za Vajlovo spinorsko polje kuplovano sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom dato je izrazom (6.151). Variranjem ovog dejstva redom po varijablama B_{ab}, λ^{ab}, γ_α, $\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}}$, λ_α, $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, ψ_α, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, e^a, β^a i ω^{ab} dobijaju se jednačine kretanja:

$$R^{ab} - \lambda^{ab} = 0\,,$$

$$B_{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}e^c \wedge e^d = 0\,,$$

$$\nabla\psi_\alpha + \lambda_\alpha = 0\,,$$

$$\nabla\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 0\,,$$

$$-\gamma_\alpha + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = 0\,,$$

$$-\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta = 0\,,$$

$$\nabla\gamma_\alpha - \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\lambda}_L{}^{\dot{\beta}} = 0\,,$$

$$\nabla\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} - \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\lambda_{L\beta} = 0\,,$$

$$\nabla\beta_a + \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc} \wedge e^d + \frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}e^b \wedge e^c \wedge (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta + \lambda^\alpha\sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}) - 8\pi i l_p^2\varepsilon_{abcd}e^b\beta^c\big(\psi^\alpha(\sigma^d)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\big) = 0\,,$$

$$\nabla e_a - 4\pi l_p^2\varepsilon_{abcd}e^b \wedge e^c \wedge (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta}\psi_\beta) = 0\,,$$

$$\nabla B_{ab} - e_{[a} \wedge \beta_{b]} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^{ab}{}_\alpha{}^\beta\psi_\beta - \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{ab\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} = 0\,.$$

U slučaju $3BF$ dejstva sa vezama koje odgovara teoriji Majorana spinorskog polja kuplovanog sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom, dodajemo maseni član (6.154) dejstvu (6.151). Variranjem ovako dobijenog dejstva redom po varijablama to B_{ab}, ψ^{ab}, γ^α, $\bar{\gamma}_{\dot{\alpha}}$, λ_α, $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, ψ_α, $\bar{\psi}_I^{\dot{\alpha}}$, e^a, β^a i ω_{ab}

dobijamo jednačine kretanja:

$$
\begin{aligned}
&R^{ab} - \lambda^{ab} = 0\,,\\
&B_{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}e^c \wedge e^d = 0\,,\\
&-\nabla\psi_\alpha + \lambda_\alpha = 0\,,\\
&-\nabla\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \lambda^{\dot\alpha} = 0\,,\\
&\gamma^\alpha - \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \bar{\psi}_{\dot\beta}(\bar\sigma^d)^{\dot\beta\alpha} = 0\,,\\
&\bar\gamma_{\dot\alpha} - \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \psi^{\beta}(\sigma^d)_{\beta\dot\alpha} = 0\,,\\
&\nabla\gamma^\alpha + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}\lambda^{\dot\beta} \wedge e^a \wedge e^b \wedge e^c (\sigma^d)^\alpha{}_{\dot\beta} - \frac{1}{6}\, m\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \psi^\alpha\\
&\qquad - 4i\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge \beta^c \bar\psi_{\dot\beta}(\bar\sigma^d)^{\dot\beta\alpha} = 0\,,\\
&\nabla\bar\gamma_{\dot\alpha} + \frac{i}{6}\varepsilon_{abcd}\lambda_\beta \wedge e^a \wedge e^b \wedge e^c (\bar\sigma^d)_{\dot\alpha}{}^\beta - \frac{1}{6} m\varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \psi_{\dot\alpha}\\
&\qquad - 4i\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge \beta^c \psi^\beta(\sigma^d)_{\beta\dot\alpha} = 0\,,\\
&\nabla\beta^a + \frac{1}{8\pi l_p^2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{bc} \wedge e^d + \frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\lambda_\alpha \wedge e^b \wedge e^c \bar\psi_{\dot\beta}(\bar\sigma^d)^{\dot\beta\alpha} + \frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\lambda^{\dot\alpha} \wedge e^b \wedge e^c \psi^\beta (\sigma^d)_{\beta\dot\alpha}\\
&\qquad - \frac{1}{3} m\varepsilon_{abcd}e^b \wedge e^c \wedge e^d(\psi^\alpha\psi_\alpha + \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}) - 8\pi i l_p^2 \varepsilon_{abcd}e^b\beta^c\big(\psi^\alpha(\sigma^d)_{\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}\big) = 0\,,\\
&\nabla e_a - 4i\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd}e^b \wedge e^c\big(\psi^\alpha(\sigma^d)_{\alpha\dot\beta}\bar\psi^{\dot\beta}\big) = 0\,,\\
&\nabla B_{ab} - e_{[a} \wedge \beta_{b]} - \frac{1}{2}\psi^\alpha(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta\gamma_\beta - \frac{1}{2}\bar\psi_{\dot\alpha}(\bar\sigma^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\bar\gamma^{\dot\beta} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dodatak C

Hamiltonova analiza skalarne elektrodinamike

U ovom poglavlju urađena je kompletna Hamiltonova analiza za dejstvo (6.174).

Pretpostavljajući da je prostorvremenska mnogostrukost globalno hiperbolička, $\mathcal{M}_4 = \mathbb{R} \times \Sigma_3$, Lagranžijan za dejstvo (6.174) ima oblik:

$$L_{3BF} = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \big(\frac{1}{4}\, B^{ab}{}_{\mu\nu}\, R^{cd}{}_{\rho\sigma}\, g_{ab,\, cd} + \frac{1}{4}\, B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!}\, e^a{}_\mu\, \mathcal{G}^b{}_{\nu\rho\sigma}\, g_{ab} + \frac{1}{4!}\, \phi^A \mathcal{H}^B{}_{\mu\nu\rho\sigma}\, g_{AB} \big) \,. \tag{C.1}$$

Kanonski impulsi varijabli $B^{ab}{}_{\mu\nu}$, $\omega^{ab}{}_\mu$, $B_{\mu\nu}$, A_μ, $e^a{}_\mu$, $\beta^a{}_{\mu\nu}$, ϕ^A and $\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$ su:

$$\begin{array}{lclcllclcl}
\pi(B)_{ab}{}^{\mu\nu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 B^{ab}{}_{\mu\nu}} & = & 0\,, & \pi(\omega)_{ab}{}^{\mu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 \omega^{ab}{}_{\mu}} & = & \epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{ab\nu\rho}\,, \\
\pi(B)^{\mu\nu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 B_{\mu\nu}} & = & 0\,, & \pi(A)^{\mu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 A_{\mu}} & = & \dfrac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}\,, \\
\pi(e)_{a}{}^{\mu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 e^{a}{}_{\mu}} & = & 0\,, & \pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu}} & = & -\epsilon^{0\mu\nu\rho} e_{a\rho}\,, \\
\pi(\phi)_{A} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 \phi^{A}} & = & 0\,, & \pi(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} & = & \dfrac{\delta L}{\delta \partial_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}} & = & \epsilon^{0\mu\nu\rho} \phi_{A}\,.
\end{array} \tag{C.2}$$

Primarne veze u teoriji su:

$$\begin{array}{lclcllclcl}
P(B)_{ab}{}^{\mu\nu} & \equiv & \pi(B)_{ab}{}^{\mu\nu} & \approx & 0\,, & P(\omega)_{ab}{}^{\mu} & \equiv & \pi(\omega)_{ab}{}^{\mu} - \epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{ab\nu\rho} & \approx & 0\,, \\
P(B)^{\mu\nu} & \equiv & \pi(B)^{\mu\nu} & \approx & 0\,, & P(A)^{\mu} & = & \pi(A)^{\mu} - \dfrac{1}{2}\epsilon^{0\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} & \approx & 0\,, \\
P(e)_{a}{}^{\mu} & \equiv & \pi(e)_{a}{}^{\mu} & \approx & 0\,, & P(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} & \equiv & \pi(\beta)_{a}{}^{\mu\nu} + \epsilon^{0\mu\nu\rho} e_{a\rho} & \approx & 0\,, \\
P(\phi)_{A} & \equiv & \pi(\phi)_{A} & \approx & 0\,, & P(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} & \equiv & \pi(\gamma)_{A}{}^{\mu\nu\rho} - \epsilon^{0\mu\nu\rho} \phi_{A} & \approx & 0\,.
\end{array} \tag{C.3}$$

Fundamentalne Poasonove zagrade definišemo na sledeći način:

$$
\begin{array}{rcl}
\{\, B^{ab}{}_{\mu\nu}(x)\,,\,\pi(B)_{cd}{}^{\rho\sigma}(y)\,\} & = & 4\delta^a{}_{[c}\delta^b{}_{d]}\delta^\rho{}_{[\mu}\delta^\sigma{}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \omega^{ab}{}_{\mu}(x)\,,\,\pi(\omega)_{cd}{}^{\nu}(y)\,\} & = & 2\delta^a{}_{[c}\delta^b{}_{d]}\delta^\nu{}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, B_{\mu\nu}(x)\,,\,\pi(B)^{\rho\sigma}(y)\,\} & = & 2\delta^\rho{}_{[\mu}\delta^\sigma{}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, A_{\mu}(x)\,,\,\pi(A)^{\nu}(y)\,\} & = & \delta^\nu{}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, e^{a}{}_{\mu}(x)\,,\,\pi(e)_b{}^{\nu}(y)\,\} & = & \delta^a{}_b\delta^\nu{}_{\mu}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \beta^{a}{}_{\mu\nu}(x)\,,\,\pi(\beta)_b{}^{\rho\sigma}(y)\,\} & = & 2\delta^a{}_b\,\delta^\rho{}_{[\mu}\delta^\sigma{}_{\nu]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \phi^{A}(x)\,,\,\pi(\phi)_B(y)\,\} & = & \delta^A{}_B\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}(x)\,,\,\pi(\gamma)_B{}^{\alpha\beta\gamma}(y)\,\} & = & 3!\delta^A{}_B\,\delta^\alpha{}_{[\mu}\delta^\beta{}_{\nu}\delta^\gamma{}_{\rho]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{array}
\tag{C.4}
$$

Koristeći fundamentalne Poasonove zagrade, nalazimo *algebru primarnih veza*,

$$
\begin{array}{rcl}
\{\, P(B)^{abjk}(x)\,,\,P(\omega)_{cd}{}^{i}(y)\,\} & = & 4\epsilon^{0ijk}\,\delta^a{}_{[c}\delta^b{}_{d]}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, P(B)^{jk}(x)\,,\,P(A)^{i}(y)\,\} & = & \epsilon^{0ijk}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, P(e)^{ak}\,,\,P(\beta)_b{}^{ij}(y)\,\} & = & -\epsilon^{0ijk}\,\delta^a{}_b(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\, P(\phi)^{A}(x)\,,\,P(\gamma)_B{}^{ijk}(y)\,\} & = & \epsilon^{0ijk}\,\delta^A{}_B\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{array}
\tag{C.5}
$$

dok su sve ostale Poasonove zagrade identički jednake nuli. Kanonski *on-shell* Hamiltonijan ima oblik:

$$
\begin{aligned}
H_c = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big[& \frac{1}{4}\pi(B)_{ab}{}^{\mu\nu}\,\partial_0 B^{ab}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\pi(\omega)_{ab}{}^{\mu}\,\partial_0\omega^{ab}{}_{\mu} + \frac{1}{2}\pi(B)^{\mu\nu}\,\partial_0 B_{\mu\nu} + \pi(A)^{\mu}\,\partial_0 A_\mu \\
& + \pi(e)_a{}^{\mu}\,\partial_0 e^a{}_\mu + \frac{1}{2}\pi(\beta)_a{}^{\mu\nu}\,\partial_0\beta^a{}_{\mu\nu} + \pi(\phi)_A\,\partial_0 D^A + \frac{1}{3!}\pi(\gamma)_A{}^{\mu\nu\rho}\,\partial_0\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\Big] - L\,.
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

Prepisivanjem (C.6) tako da su brzine pomnožene sa vezama prve klase, koje su *on-shell* jednake nuli, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
H_c \approx -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\epsilon^{0ijk}\Big[& \frac{1}{2}B_{ab0i}\,R^{ab}{}_{jk} + \frac{1}{2}B_{0i}F_{jk} + \frac{1}{6}e_{a0}\,\mathcal{G}^a{}_{ijk} + \beta^a{}_{0i}\nabla_j e_{ak} \\
& + \frac{1}{2}\omega^{ab}{}_0\Big(\nabla_i B_{ab\,jk} - e_{[a|i}\,\beta_{|b]jk}\Big) + \frac{1}{2}A_0\Big(\partial_i B_{jk} + \frac{1}{3}\,\phi_A\,\rhd_B{}^A\,\gamma^B{}_{ijk}\Big) + \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij}\nabla_k\phi_A\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Dodavanjem Lagranževog množitelja λ za svaku primarnu vezu dobijamo totalni *off-shell* Hamiltonijan:

$$
\begin{aligned}
H_T \;=\; H_c + \int_{\Sigma_3}\mathrm{d}^3\vec{x}\Big[& \tfrac{1}{4}\lambda(B)^{ab}{}_{\mu\nu}P(B)_{ab}{}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\lambda(\omega)^{ab}{}_{\mu}P(\omega)_{ab}{}^{\mu} + \tfrac{1}{2}\lambda(B)_{\mu\nu}P(B)^{\mu\nu} + \lambda(A)_\mu P(A)^\mu \\
& + \lambda(e)^a{}_\mu P(e)_a{}^\mu + \tfrac{1}{2}\lambda(\beta)^a{}_{\mu\nu}P(\beta)_a{}^{\mu\nu} + \lambda(\phi)^A P(\phi)_A + \tfrac{1}{3!}\lambda(\gamma)^A{}_{\mu\nu\rho}P(\gamma)_A{}^{\mu\nu\rho}\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

Uslov konzistentnosti primarnih veza (3.26) za primarne veze $P(B)_{ab}{}^{0i}$, $P(\omega)_{ab}{}^{0}$, $P(B)^{0i}$, $P(A)^0$, $P(e)_a{}^0$, $P(\beta)_a{}^{0i}$ i $P(\gamma)_A{}^{0ij}$,

$$\begin{array}{c} \dot{P}(B)_{ab}{}^{0i} \approx 0\,, \quad \dot{P}(\omega)_{ab}{}^{0} \approx 0\,, \quad \dot{P}(B)^{0i} \approx 0\,, \quad \dot{P}(A)^0 \approx 0\,, \\ \dot{P}(e)_a{}^0 \approx 0\,, \quad \dot{P}(\beta)_a{}^{0i} \approx 0\,, \quad \dot{P}(\gamma)_A{}^{0ij} \approx 0\,, \end{array} \tag{C.9}$$

dovodi do pojave *sekundarnih veza* $\mathcal{S}$ u teoriji,

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{S}(R)_{ab}{}^{i} & \equiv & \epsilon^{0ijk} R_{abjk} & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(\nabla B)_{ab} & \equiv & \epsilon^{0ijk}\big(\nabla_i B_{ab\,jk} - e_{[a|i}\,\beta_{|b]jk}\big) & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(F)^i & \equiv & \dfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk} F_{jk} & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(\nabla B) & \equiv & \dfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\big(\partial_i B_{jk} + \dfrac{1}{3}\,\phi_A \rhd_B{}^A \gamma^B{}_{ijk}\big) & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(\mathcal{G})_a & \equiv & \dfrac{1}{6}\epsilon^{0ijk}\mathcal{G}_{aijk} & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(\nabla e)_a{}^i & \equiv & \epsilon^{0ijk}\nabla_j e_{ak} & \approx \; 0\,, \\ \mathcal{S}(\nabla\phi)_A{}^{ij} & \equiv & \epsilon^{0ijk}\nabla_k \phi_A & \approx \; 0\,, \end{array} \tag{C.10}$$

dok u slučaju primarnih veza $P(B)_{ab}{}^{jk}$, $P(\omega)_{ab}{}^{k}$, $P(B)^{jk}$, $P(A)^k$, $P(e)_a{}^k$, $P(\beta)_a{}^{jk}$, $P(\phi)_A$ i $P(\gamma)_A{}^{ijk}$ uslovi konzistentnosti,

$$\begin{array}{c} \dot{P}(B)_{ab}{}^{jk} \approx 0\,, \quad \dot{P}(\omega)_{ab}{}^{k} \approx 0\,, \quad \dot{P}(B)^{jk} \approx 0\,, \quad \dot{P}(A)^k \approx 0\,, \\ \dot{P}(e)_a{}^k \approx 0\,, \quad \dot{P}(\beta)_a{}^{jk} \approx 0\,, \quad \dot{P}(\phi)_A \approx 0\,, \quad \dot{P}(\gamma)_A{}^{ijk} \approx 0\,, \end{array} \tag{C.11}$$

određuju Lagranževe množitelje:

$$\begin{array}{lcl} \lambda(\omega)_{ab}{}^i & \approx & \nabla^i\,\omega_{ab\,0}\,, \\ \lambda(B)_{ab}{}^{ij} & \approx & 2\nabla^{[i|}B_{ab}{}^{0|j]} + e_{[a|\,0}\beta_{|b]}{}^{ij} - 2e_{[a|}{}^{[i|}\beta_{|b]}{}^{0|j]} + 2\omega_{[a|}{}^c B_{|b]}{}^{c\,ij}\,, \\ \lambda(A)^i & \approx & \partial^i A_0\,, \\ \lambda(B)^{ij} & \approx & 2\partial^{[i|}\,B^{0|j]} + \gamma_A{}^{0ij} \rhd_B{}^A\,\phi^B\,, \\ \lambda(\beta)_a{}^{ij} & \approx & 2\nabla^{[i|}\,\beta_a{}^{0|j]} - \omega_{ab}{}^0\,\beta^{b\,ij}\,, \\ \lambda(e)_a{}^i & \approx & \nabla^i\,e_a{}^0 - \omega_a{}^{b\,0}\,e_b{}^i\,, \\ \lambda(\gamma)_A{}^{ijk} & \approx & -A^0 \rhd{}_A{}^B\,\gamma_B{}^{ijk} + \nabla^i\gamma_A{}^{0jk} - \nabla^j\gamma_A{}^{0ik} + \nabla^k\gamma_A{}^{0ij}\,. \\ \lambda(\phi)^A & \approx & A^0 \rhd{}^A{}_B\,\phi^B\,. \end{array} \tag{C.12}$$

Primetimo da Lagranževi množitelji

$$\lambda(B)^{ab}{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\omega)^{ab}{}_{0}\,, \qquad \lambda(B)_{0i}\,, \qquad \lambda(A)_0\,, \qquad \lambda(e)^a{}_0\,, \qquad \lambda(\beta)^a{}_{0i}\,, \qquad \lambda(\gamma)^A{}_{0ij} \tag{C.13}$$

ostaju neodređeni. Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza ne dovode do pojave novih veza u teoriji tj. može se pokazati da važi:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{S}}(R)^{abi} &= \{\mathcal{S}(R)^{abi}\,,\,H_T\} &&= \omega^{[a|}{}_{c0}\,\mathcal{S}(R)^{c|b]i}\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(\nabla B)_{ab} &= \{\mathcal{S}(\nabla B)_{ab}\,,\,H_T\} &&= \mathcal{S}(R)_{[a|c}{}^{k}\,B^{c}{}_{|b]0k} + \omega_{[a|}{}^{c}{}_{0}\mathcal{S}(\nabla B)_{|b]c} \\
& && \quad -\beta_{[a|0k}\,\mathcal{S}(\nabla e)_{|b]}{}^{k} + e_{[a|0}\,\mathcal{S}(\mathcal{G})_{|b]}\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(F)^{i} &= \{\mathcal{S}(F)^{i}\,,\,H_T\} &&= 0\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(\nabla B) &= \{\mathcal{S}(\nabla B),\,H_T\} &&= -\rhd_{B}{}^{A}\,\gamma^{B}{}_{0ij}\,\mathcal{S}(\nabla\phi)_{A}{}^{ij}\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(\mathcal{G})^{a} &= \{\mathcal{S}(\mathcal{G})^{a}\,,\,H_T\} &&= \beta_{b0k}\,\mathcal{S}(R)^{abk} - \omega^{ab}{}_{0}\,\mathcal{S}(\mathcal{G})_{b}\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(\nabla e)_{a}{}^{i} &= \{\mathcal{S}(\nabla e)_{a}{}^{i}\,,\,H_T\} &&= e^{b}{}_{0}\,\mathcal{S}(R)_{ab}{}^{i} - \omega_{a}{}^{b}{}_{0}\,\mathcal{S}(\nabla e)_{b}{}^{i}\,, \\
\dot{\mathcal{S}}(\nabla\phi)_{A}{}^{ij} &= \{\mathcal{S}(\nabla\phi)_{A}{}^{ij}\,,\,H_T\} &&= A_0\,\rhd{}_{A}{}^{B}\mathcal{S}(\nabla\phi)_{B}{}^{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

Totalni Hamiltonijan se može napisati u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
H_T = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\Bigg[& \frac{1}{2}\lambda(B)_{ab}{}^{0i}\,\Phi(B)^{ab}{}_{i} + \frac{1}{2}\lambda(\omega)_{ab}{}^{0}\,\Phi(\omega)^{ab} + \lambda(B)^{0i}\,\Phi(B)_{i} + \lambda(A)^{0}\,\Phi(A) \\
& + \lambda(e)_{a}{}^{0}\,\Phi(e)^{a} + \lambda(\beta)_{a}{}^{0i}\,\Phi(\beta)^{a}{}_{i} + \frac{1}{2}\lambda(\gamma)_{A}{}^{0ij}\Phi(\gamma)^{A}{}_{ij} \\
& - \frac{1}{2}B_{ab0i}\,\Phi(R)^{abi} - \frac{1}{2}\omega_{ab0}\,\Phi(\nabla B)^{ab} - B_{0i}\,\Phi(F)^{i} - A_0\,\Phi(\nabla B) \\
& - e_{a0}\,\Phi(\mathcal{G})^{a} - \beta_{a0i}\,\Phi(\nabla e)^{ai} - \frac{1}{2}\gamma_{A0ij}\,\Phi(\nabla\phi)^{Aij}\Bigg]\,,
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

gde su

$$\begin{array}{lcl}
\Phi(B)^{ab}{}_i & = & P(B)^{ab}{}_{0i}\,, \\
\Phi(\omega)^{ab} & = & P(\omega)^{ab}{}_0\,, \\
\Phi(B)_i & = & P(B)_{0i}\,, \\
\Phi(A) & = & P(A)_0\,, \\
\Phi(e)^a & = & P(e)^a{}_0\,, \\
\Phi(\beta)^a{}_i & = & P(\beta)^a{}_{0i}\,, \\
\Phi(\gamma)^A{}_{ij} & = & P(\gamma)^A{}_{0ij}\,, \\
\Phi(R)^{abi} & = & \mathcal{S}(R)^{abi} - \nabla_j P(B)^{ab\,ij}\,, \\
\Phi(\nabla B)^{ab} & = & \mathcal{S}(\nabla B)^{ab} + \nabla_i P(\omega)^{abi} + B^{[a|}{}_{c\,ij}\, P(B)^{c|b]\,ij} - 2e^{[a|}{}_i\, P(e)^{|b]\,i} - \beta^{[a|}{}_{ij}\, P(\beta)^{|b]\,ij}\,, \\
\Phi(F)^i & = & \mathcal{S}(F)^i - \partial_j P(B)^{ij}\,, \\
\Phi(\nabla B) & = & \mathcal{S}(\nabla B) + \partial_i P(A)^i + \dfrac{1}{3!}\,\gamma^A{}_{ijk}\,\rhd_A{}^B\, P(\gamma)_B{}^{ijk} - \phi_A\,\rhd_B{}^A\, P(\phi)^B \\
\Phi(\mathcal{G})^a & = & \mathcal{S}(\mathcal{G})^a + \nabla_i P(e)^{a\,i} - \dfrac{1}{4}\,\beta_{b\,ij}\, P(B)^{ab\,ij}\,, \\
\Phi(\nabla e)^{a\,i} & = & \mathcal{S}(\nabla e)^{a\,i} - \nabla_j P(\beta)^{a\,ij} + \dfrac{1}{2}\, e_{b\,j}\, P(B)^{ab\,ij} \\
\Phi(\nabla\phi)^{A\,ij} & = & \mathcal{S}(\nabla\phi)^{A\,ij} + \nabla_k P(\gamma)^{A\,ijk} - \rhd_B{}^A\, \phi^B\, P(B)^{ij}\,,
\end{array} \tag{C.16}$$

veze prve klase, dok su *veze druge klase*:

$$\begin{array}{llll}
\chi(B)_{ab}{}^{jk} = P(B)_{ab}{}^{jk}\,, & \chi(B)^{jk} = P(B)^{jk}\,, & \chi(e)_a{}^i = P(e)_a{}^i\,, & \chi(\phi)_A = P(\phi)_A\,, \\
\chi(\omega)_{ab}{}^i = P(\omega)_{ab}{}^i\,, & \chi(A)^i = P(A)^i\,, & \chi(\beta)_a{}^{ij} = P(\beta)_a{}^{ij}\,, & \chi(\gamma)_A{}^{ijk} = P(\gamma)_A{}^{ijk}\,.
\end{array} \tag{C.17}$$

Poasonova algebra veza prve klase je:

$$\begin{array}{lcl}
\{\,\Phi(\mathcal{G})^a(x)\,,\,\Phi(\nabla e)_b{}^i(y)\,\} & = & -\,\Phi(R)^a{}_b{}^i(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^a(x)\,,\,\Phi(\nabla B)_{bc}(y)\,\} & = & 2\delta^a{}_{[b|}\,\Phi(\mathcal{G})_{|c]}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,\Phi(\nabla e)^a{}_i(x)\,,\,\Phi(\nabla B)_{bc}(y)\,\} & = & 2\delta^a{}_{[b|}\Phi(\nabla e)_{|c]i}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,\Phi(R)^{abi}(x)\,,\,\Phi(\nabla B)_{cd}(y)\,\} & = & -4\delta^{[a|}{}_{[c}\,\Phi(R)^{|b]}{}_{d]}{}^i(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ab}(x)\,,\,\Phi(\nabla B)_{cd}(y)\,\} & = & -4\delta^{[a|}{}_{[c|}\,\Phi(\nabla B)^{|b]}{}_{|d]}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,\Phi(\nabla B)(x)\,,\,\Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij}(y)\,\} & = & -2\rhd^B{}_A\;\Phi(\nabla\phi)_B{}^{ij}(x)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{array} \tag{C.18}$$

Poasonova algebra veza prve klase i veza druge klase je:

$$
\begin{aligned}
\{\,\Phi(R)^{abi}(x)\,,\,\chi(\omega)_{cd}{}^{j}(y)\,\} &= 4\,\delta^{[a|}{}_{[c|}\,\chi(B)^{|b|}{}_{|d]}{}^{ij}(x)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^{a}(x)\,,\,\chi(\omega)_{cd}{}^{i}(y)\,\} &= 2\,\delta^{a}{}_{[c|}\,\chi(e)_{|d]}{}^{i}(x)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\mathcal{G})^{a}(x)\,,\,\chi(\beta)_{c}{}^{jk}(y)\,\} &= -\frac{1}{2}\,\chi(B)^{a}{}_{c}{}^{jk}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla e)^{ai}(x)\,,\,\chi(\omega)_{cd}{}^{j}(y)\,\} &= -2\,\delta^{a}{}_{[c|}\,\chi(\beta)_{|d]}{}^{ij}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla e)^{ai}(x)\,,\,\chi(e)_{b}{}^{j}(y)\,\} &= \frac{1}{2}\,\chi(B)^{a}{}_{b}{}^{ij}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ab}(x)\,,\,\chi(\omega)_{cd}{}^{i}(y)\,\} &= 4\,\delta^{[a|}{}_{[c|}\,\chi(\omega)_{|d]}{}^{|b]i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)(x)\,,\,\chi(A)^{i}(y)\,\} &= 2\,\chi(A)^{i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ab}(x)\,,\,\chi(\beta)_{c}{}^{jk}(y)\,\} &= -2\delta^{[a|}{}_{c}\,\chi(\beta)^{|b]jk}\,\delta^{(3)}(x-y)\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)(x)\,,\,\chi(\gamma)_{A}{}^{ijk}(y)\,\} &= \rhd_{A}{}^{B}\,\chi(\gamma)_{B}{}^{ijk}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ab}(x)\,,\,\chi(B)_{cd}{}^{jk}(y)\,\} &= 4\,\delta^{[a|}{}_{[c}\,\chi(B)_{d]}{}^{|b]jk}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.\\
\{\,\Phi(\nabla B)^{ab}(x)\,,\,\chi(e)_{a}{}^{i}(y)\,\} &= -2\delta^{[a|}{}_{c}\,\chi(e)^{|b]i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.\\
\{\,\Phi(\nabla B)(x)\,,\,\chi(\phi)_{A}(y)\,\} &= -\rhd^{B}{}_{A}\,\chi(\phi)_{B}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla\phi)^{Aij}(x)\,,\,\chi(A)^{k}\,\} &= -\rhd_{B}{}^{A}\,\chi(\gamma)^{Bijk}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,\Phi(\nabla\phi)^{Aij}(x)\,,\,\chi(\phi)_{B}\,\} &= -\rhd_{B}{}^{A}\,\chi(B)^{ij}(x)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

Poasonova zagrada veza druge klase je izračunata u (C.5).

C.1 Bijankijevi identiteti

Kako bi se izračunao broj stepeni slobode u teoriji, potrebno je koristiti *Bijankijeve identitete* (BI), kao i dodatne, *generalizovane Bijankijeve identitete* (GBI) koji predstavljaju analog običnim BI za dodatna polja prisutna u teoriji.

Konkretno, u teoriji postoje BI za 1-forme polja ω^{ab} i e^a, kao i GBI za 1-formu A. Odgovarajuća 2-forma krivine za koneksiju ω,

$$
R^{ab} = \mathrm{d}\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\wedge\omega^{cb}\,, \qquad T^{a} = \mathrm{d}e^{a} + \omega^{a}{}_{b}\wedge e^{b}\,, \qquad F = \mathrm{d}A\,, \tag{C.20}
$$

zadovoljava identitetete:

$$
\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\nabla_{\mu}R^{ab}{}_{\nu\rho} = 0\,, \tag{C.21}
$$

$$
\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\nabla_{\mu}T^{a}{}_{\nu\rho} - R^{ab}{}_{\mu\nu}\,e_{b\rho}\right) = 0\,, \tag{C.22}
$$

$$
\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\nabla_{\mu}F_{\nu\rho} = 0\,. \tag{C.23}
$$

Birajući slobodan indeks da bude vremenska koordinata $\lambda = 0$, ovi identiteti, kao vremenski nezavisni delovi Bijankijevih identiteta, postaju *"off-shell"* ograničenja u smislu Hamiltonove analize. Sa druge strane, odabirom slobodnog indeksa da bude prostorna koordinata, dobijaju se vremenski zavisni delovi Bjankijevih identiteta, koji ne nameću nikakva ograničenja, već mogu biti izvedeni kao posledica Hamiltonovih jednačina kretanja.

Pored toga, u teoriji postoje GBI asocirani 2-formama polja B^{ab}, B i β^a. Odgovarajuće 3-forme krivina su:

$$S^{ab} = \mathrm{d}B^{ab} + 2\omega^{[a|}{}_c \wedge B^{c|b]}\,, \qquad P = \mathrm{d}B\,, \qquad G^a = \mathrm{d}\beta^a + \omega^a{}_b \wedge \beta^b\,. \tag{C.24}$$

Diferenciranjem ovih izraza dobijaju se sledeći GBI:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\frac{1}{3}\nabla_\lambda S^{ab}{}_{\mu\nu\rho} - R^{[a|c}{}_{\lambda\mu}\, B_c{}^{|b]}{}_{\nu\rho}\right) = 0\,, \tag{C.25}$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\partial_\lambda P_{\mu\nu\rho} = 0\,, \tag{C.26}$$

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\frac{2}{3}\nabla_\lambda G^a{}_{\mu\nu\rho} - R^{ab}{}_{\lambda\mu}\,\beta_{b\,\nu\rho}\right) = 0\,. \tag{C.27}$$

Međutim, u četvorodimenzionalnom prostorvremenu, svaki od ovih identiteta je jedna jednačina, bez slobodnih prostorvremenskih indeksa, pa stoga obavezno sadrže vremenske izvode polja. Sledi da ovi identiteti ne nameću nikakva off-shell ograničenja na kanonske promenljive.

Konačno, postoji GBI za 0-formu ϕ. Odgovarajuća 1-forma krivine je,

$$Q^A = \mathrm{d}\phi^A + \rhd_B{}^A\, A \wedge \phi^B\,, \tag{C.28}$$

tako da je GBI:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\left(\nabla_\nu Q^A{}_\rho - \frac{1}{2}\rhd_B{}^A\, F_{\nu\rho}\phi^B\right) = 0. \tag{C.29}$$

Ovaj GBI čini 12 jednačina, koje se dobijaju za šest izbora antisimetrizovanog para prostorvremenskih indeksa $\lambda\mu$ i dva izbora slobodnog grupnog indeksa A. Međutim, ovih 12 identiteta nisu nezavisni, što vidimo diferenciranjem jednačine (C.29), pri čemu se dobija osam jednačina

$$\rhd_B{}^A\,\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\nabla_\mu\, F_{\nu\rho}\,\phi^B = 0\,, \tag{C.30}$$

koje su automatski zadovoljene primenom GBI (C.23). Sledi da su u teoriji samo četiri nezavisna identiteta (C.29). Fiksiranjem indeksa $\lambda = 0$, dobijamo vremenski nezavisne komponente jednačina (C.29) i (C.30),

$$\epsilon^{0ijk}\left(\nabla_j Q^A{}_k - \frac{1}{2}\rhd_B{}^A\, F_{jk}\phi^B\right) = 0\,, \tag{C.31}$$

$$\rhd_B{}^A\,\epsilon^{0ijk}\,\partial_i\, F_{jk}\,\phi^B = 0\,. \tag{C.32}$$

Analizom slobodnih indeksa ovih jednačina vidimo da od šest jednačina (C.31), zbog dve jednačine (C.32), preostaju četiri nezavisna GBI relevantna za Hamiltonovu analizu.

C.2 Broj stepeni slobode

U ovom odeljku ćemo pokazati da iz strukture veza u teoriji sledi da ne postoje lokalni stepeni slobode (DOF) u topološkom sektoru $3BF$ teorije skalarne elektrodinamike. U opštem slučaju, broj lokalnih stepeni slobode neke teorije dat je jednačinom (3.41).

U našem slučaju, inicijalan broj polja u teoriji N određujemo prebrojavanjem komponenti polja prikazanih u Tabeli C.1, na osnovu čega dobijamo da je $N = 120$. Zatim, broj nezavisnih

$\omega^{ab}{}_\mu$	A_μ	$\beta^a{}_{\mu\nu}$	$\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$	$B^{ab}{}_{\mu\nu}$	$B_{\mu\nu}$	$e^a{}_\mu$	ϕ^A
24	4	24	8	36	6	16	2

Tabela C.1: Broj inicijalnih polja u $3BF$ teoriji skalarne elektrodinamike.

komponenti veza druge klase $S = 70$ prikazan je u Tabeli C.2.

$\chi(B)_{ab}{}^{jk}$	$\chi(B)^{jk}$	$\chi(e)_a{}^i$	$\chi(\phi)_A$	$\chi(\omega)_{ab}{}^i$	$\chi(A)^i$	$\chi(\beta)_a{}^{ij}$	$\chi(\gamma)_A{}^{ijk}$
18	3	12	2	18	3	12	2

Tabela C.2: Veze druge klase u $3BF$ teoriji skalarne elektrodinamike.

Veze prve klase nisu nezavisne zbog prisustva BI i GBI u teoriji. Diferenciranjem veze $\Phi(R)^{abi}$ dobijamo:

$$\nabla_i \Phi(R)^{abi} = \varepsilon^{0ijk} \nabla_i R^{ab}{}_{jk} + \frac{1}{2} R^{c[a|}{}_{ij} P(B)_c{}^{|b]ij} \,. \tag{C.33}$$

Prvi član na desnoj strani izraza je jednak nuli off-shell, $\epsilon^{ijk} \nabla_i R^{ab}{}_{jk} = 0$, kao $\lambda = 0$ komponenta Bijankijevog identiteta(C.21). Drugi član je takođe nula off-shell, kao proizvod dve veze,

$$R^{c[a|}{}_{ij} \, P(B)_c{}^{|b]ij} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} \mathcal{S}(R)^{c[a|k} \, P(B)_c{}^{|b]ij} = 0 \,. \tag{C.34}$$

Iz prethodnog sledi da imamo off-shell identitet

$$\nabla_i \Phi(R)^{abi} = 0 \,, \tag{C.35}$$

tj. postoji dvanaest nezavisnih komponenti $\Phi(R)^{abi}$. Slično, diferenciranjem veze $\Phi(F)^i$, dobijamo

$$\nabla_i \Phi(F)^i = \varepsilon^{0ijk} \, \nabla_i F_{jk} + \frac{1}{2} \, F_{ij} \, P(B)^{ij} \,. \tag{C.36}$$

Prvi član na desnoj strani izraza je jednak nuli $\epsilon^{ijk} \nabla_i F_{jk} = 0$, kao $\lambda = 0$ komponenta GBI (C.21). Za drugi član opet dobijamo da je jednak nuli kao proizvod dve veze,

$$F_{ij} \, P(B)^{ij} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} \, \mathcal{S}(F)^k \, P(B)^{ij} = 0 \,. \tag{C.37}$$

Sledi da je zadovoljen off-shell identitet

$$\nabla_i \Phi(F)^i = 0 \,, \tag{C.38}$$

tj. postoji samo dve nezavisne komponente veze $\Phi(F)^i$. Slično, možemo pokazati da je:

$$\nabla_i \Phi(\nabla e)_a{}^i - \frac{1}{2} \, \Phi(R)_{ab}{}^i \, e^b{}_i + \frac{1}{4} \epsilon^{0ijk} \mathcal{S}(R)_{abk} \, P(\beta)^b{}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} \left(\nabla_i T_{ajk} - R_{ab\,ij} \, e^b{}_k \right) \,. \tag{C.39}$$

Desna strana izraza (C.39) je $\lambda = 0$ komponenta BI (C.22), tako da jednačina (C.39) postaje:

$$\nabla_i \Phi(\nabla e)_a{}^i - \frac{1}{2}\,\Phi(R)_{ab}{}^i\, e^b{}_i = 0\,. \tag{C.40}$$

U prethodnoj relaciji smo iskoristili da je treći član na levoj strani izraza (C.39) jednak nuli kao proizvod dve veze. Iz jednačine (C.40) sledi da četiri komponente veza $\Phi(\nabla e)_a{}^i$ i $\Phi(R)_{ab}{}^i$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju preostalih. Konačno, može se pokazati da važi relacija

$$\begin{aligned}\nabla_i \Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij} &- \frac{1}{2}\epsilon_{0ikl} \rhd_A\, \mathcal{S}(F)^l\, \chi(\gamma)_B{}^{ijk} + \rhd^B{}_A\, \phi_B\, \Phi(F)^j \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon_{0ilm} \rhd^B{}_A\, P(B)^{ij}\, \mathcal{S}(\nabla\phi)_B{}^{lm} = \epsilon^{0ijk}\left(\nabla_i Q_{Ak} + \frac{1}{2}\rhd^B{}_A\, F_{ik}\, \phi_B\right)\,,\end{aligned} \tag{C.41}$$

iz koje sledi:

$$\nabla_i \Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij} + \rhd^B{}_A\, \phi_B\, \Phi(F)^j = 0\,. \tag{C.42}$$

Desna strana izraza (C.41) je $\lambda = 0$ komponenta GBI (C.29), a članovi koji su proizvod dve veze su nula off-shell. Na osnovu identiteta (C.42) sledi da se šest komponenti veza prve klase $\Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij}$ i $\Phi(F)^j$ mogu prikazati kao neka linearna kombinacija ostalih. Međutim, u prethodnom odeljku smo analizom Bijankijevih identiteta zaključili da su samo četiri od ovih šesti identiteta linearno nezavisni, pa sledi da preostaju četiri identiteta (C.42).

Uzimajući u obzir dobijene identitete (C.35), (C.38), (C.40) i (C.42), konačno možemo da izračunamo ukupan broj nezavisnih veza prve klase. Iz Tabele C.3 vidimo da ukupan broj komponenti veza prve klase $F^* = 100$. Identiteti (C.35), (C.38), (C.40) i (C.42) smanjuju broj nezavisnih komponenti ovih veza, što je eksplicitno naznačeno u tabeli. Dakle, umanjujući ovaj broj za šest identiteta (C.35), identitet (C.38), četiri identiteta (C.40) i četiri identiteta (C.42), dobijamo da je broj nezavisnih komponenti veza prve klase $F = 85$.

$\Phi(B)_{ab}{}^i$	$\Phi(B)^i$	$\Phi(e)_a$	$\Phi(\omega)_{ab}$	$\Phi(A)$	$\Phi(\beta)_a{}^i$	$\Phi(\gamma)_A{}^{ij}$	$\Phi(R)_{ab}{}^i$	$\Phi(F)^i$	$\Phi(\mathcal{G})_a$	$\Phi(\nabla e)_a{}^i$	$\Phi(\nabla B)_{ab}$	$\Phi(\nabla B)$	$\Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij}$
18	3	4	6	1	12	6	$18-6$	$3-1$	4	$12-4$	6	1	$6-4$

Tabela C.3: Veze prve klase u $3BF$ teoriji skalarne elektrodinamike.

Stoga, zamenom svih dobijenih rezultata u jednačini (3.41), dobijamo

$$n = 120 - 85 - \frac{70}{2} = 0, \tag{C.43}$$

tj. da $3BF$ teorija data dejstvom (6.174) ne poseduje lokalne propagirajuće stepene slobode.

C.3 Generator gejdž simetrije

Na osnovu rezultata Hamiltonove analize dejstva (6.174), možemo da izračunamo generator gejdž simetrije i varijacije formi varijabli u $3BF$ topološkoj teoriji skalarne elektrodinamike. Rezultati prikazani u ovom odeljku su generalizacija računa u [48] za generator i varijacije formi varijabli u $2BF$ topološkom dejstvu za Poenkareovu 2-grupu, a specijalan slučaj rezultata za $3BF$ teoriju za generalnu semistriktnu 2-grupu datih u Glavi 6.

Kastelanijevom procedurom dobijamo generator:

$$
\begin{aligned}
G \; = \; \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \Bigg(& \frac{1}{2}(\nabla_0\epsilon^{ab}{}_i)\Phi(B)_{ab}{}^i - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}{}_i\Phi(R)_{ab}{}^i + \frac{1}{2}(\nabla_0\epsilon^{ab})\Phi(\omega)_{ab} - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\Phi(\nabla B)_{ab} \\
& + (\partial_0\epsilon_i)\Phi(B)^i - \epsilon_i\Phi(F)^i + (\partial_0\epsilon)\Phi(A) - \epsilon\Phi(\nabla B) \\
& + (\nabla_0\epsilon^a)\Phi(e)_a - \epsilon^a\Phi(\mathcal{G})_a + (\nabla_0\epsilon^a{}_i)\Phi(\beta)_a{}^i - \epsilon^a{}_i\Phi(\nabla e)_a{}^i \\
& + \frac{1}{2}(\nabla_0\epsilon^A{}_{ij})\Phi(\gamma)_A{}^{ij} - \frac{1}{2}\epsilon^A{}_{ij}\Phi(\nabla\phi)_A{}^{ij} \\
& + \epsilon^{ab}\left(\beta_{[a|0i}P(\beta)_{|b]}{}^i + e_{[a|0}P(e)_{|b]} + B_{[a|c0i}P(B)^c{}_{|b]}{}^i\right) - \epsilon\,\gamma_{A0ij} \rhd_B{}^A P(\gamma)^{Bij} \\
& + \epsilon^a\beta_{b0i}P(B)^{abi} + \epsilon^a{}_i\, e_{b0}P(B)_a{}^{bi} \Bigg) \,,
\end{aligned}
\tag{C.44}
$$

gde su $\epsilon^{ab}{}_i$, ϵ^{ab}, ϵ_i, ϵ, ϵ^a, $\epsilon^a{}_i$ i $\epsilon^A{}_{ij}$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

Dalje, možemo izračunati varijacije formi varijabli i konjugovanih impulsa varijabli u teoriji:

$$
\begin{aligned}
\delta_0\omega^{ab}{}_0 &= \nabla_0\epsilon^{ab}\,, & \delta_0\pi(\omega)_{ab}{}^0 &= -2\epsilon_{[a|}{}^c{}_i\pi(B)_{c|b]}{}^{0i} - 2\epsilon_{[a|}{}^c\pi(\omega)_{c|b]}{}^0\,, \\
& & &\quad +2\epsilon_{[a|}\pi(e)_{|b]}{}^0 + 2\epsilon_{[a|i}\pi(\beta)_{|b]}{}^{0i}\,, \\
\delta_0\omega^{ab}{}_i &= \nabla_i\epsilon^{ab}\,, & \delta_0\pi(\omega)_{ab}{}^i &= -2\epsilon_{[a|}{}^c{}_j\,\pi(B)_{c|b]}{}^{ij} - 2\epsilon_{[a|}{}^c{}_i\,\pi(\omega)_{|b]c}{}^i \\
& & &\quad +2\epsilon_{[a|}\,\pi(e)_{|b]i} + 2\epsilon_{[a|j}\pi(\beta)_{|b]}{}^{ij} \\
& & &\quad +2\epsilon^{0ijk}\,\nabla_{[j|}\epsilon_{ab|k]} + \epsilon^{0ijk}\epsilon_{[a|}\beta_{|b]jk}\,, \\
\delta_0 B^{ab}{}_{0i} &= \nabla_0\epsilon^{ab}{}_i + \epsilon^{[a|}{}_i e^{|b]}{}_0 & \delta_0\pi(B)_{ab}{}^{0i} &= 2\epsilon_{[a|c}\,\pi(B)_{|b]}{}^{ci}\,, \\
&\quad +2\epsilon^{[a|c}B^{|b]}{}_{c0i} + \epsilon^{[a|}\beta^{|b]}{}_{0i}\,, & & \\
\delta_0 B^{ab}{}_{ij} &= 2\nabla_{[i|}\epsilon^{ab}{}_{|j]} + 2\epsilon^{[a|c}B^{|b]}{}_{cij} & \delta_0\pi(B)_{ab}{}^{ij} &= 2\epsilon_{[a|c}\,\pi(B)_{|b]}{}^{cij}\,, \\
&\quad +2\epsilon^{[a|}{}_{[i}e^{|b]}{}_{j]} + \epsilon^{[a|}\beta^{|b]}{}_{ij}\,, & & \\
\delta_0 A_0 &= \partial_0\epsilon\,, & \delta_0\pi(A)^0 &= -\frac{1}{2}\epsilon^A{}_{ij} \rhd^B{}_A\,\pi(\gamma)_B{}^{0ij}\,, \\
\delta_0 A_i &= \partial_i\epsilon\,, & \delta_0\pi(A)^i &= \epsilon^{0ijk}\partial_j\epsilon_k - \frac{1}{2}\epsilon^A{}_{jk} \rhd^B{}_A\,\pi(\gamma)_B{}^{ijk}\,, \\
\delta_0 B_{0i} &= \partial_0\epsilon_i\,, & \delta_0\pi(B)^{0i} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{C.45}
$$

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta_0 B_{ij} & = & 2\,\partial_{[i|}\epsilon_{|j]} + \epsilon^A{}_{ij}\,\rhd^B{}_A\,\phi_B\,, & \delta_0\pi(B)^{ij} & = & -\epsilon^{0ijk}\partial_k\epsilon\,,\\
\delta_0\beta^a{}_{0i} & = & \nabla_0\epsilon^a{}_i - \epsilon^{ab}\beta_{b0i}\,, & \delta_0\pi(\beta)_a{}^{0i} & = & -\epsilon_{ab}\pi(\beta)^{b0i} + \dfrac{1}{2}\epsilon^b\pi(B)_{ab}{}^{0i}\,,\\
\delta_0\beta^a{}_{ij} & = & 2\nabla_{[i|}\epsilon^a{}_{|j]} - \epsilon^{ab}\,\beta_{bij}\,, & \delta_0\pi(\beta)_a{}^{ij} & = & -\epsilon_{ab}\,\pi(\beta)^{bij} + \dfrac{1}{2}\epsilon^b\,\pi(B)_{ab}{}^{ij}\\
 & & & & & -\epsilon^{0ijk}\,\nabla_k\epsilon^a\,,\\
\delta_0 e^a{}_0 & = & \nabla_0\epsilon^a - \epsilon^{ab}\,e_{b0}\,, & \delta_0\pi(e)_a{}^0 & = & -\epsilon_{ab}\,\pi(e)^{b0} + \dfrac{1}{2}\epsilon^b{}_i\,\pi(B)_{ab}{}^{0i}\,,\\
\delta_0 e^a{}_i & = & \nabla_i\epsilon^a - \epsilon^{ab}\,e_{bi}\,, & \delta_0\pi(e)_a{}^i & = & -\epsilon_{ab}\,\pi(e)^{bi} + \epsilon^{0ijk}\Big(\nabla_{[j|}\epsilon_{a|k]} + \epsilon_{ab}\beta^{bjk}\Big)\\
 & & & & & +\dfrac{1}{2}\epsilon^b{}_j\,\pi(B)_{ab}{}^{ij}\,,\\
\delta_0\gamma^A{}_{0ij} & = & \nabla_0\epsilon^A{}_{ij} - \epsilon\,\gamma^B{}_{0ij}\,\rhd^A{}_B\,, & \delta_0\pi(\gamma)_A{}^{0ij} & = & \epsilon\,\rhd^B{}_A\,\pi(\gamma)_B{}^{0ij}\,,\\
\delta_0\gamma^A{}_{ijk} & = & -\,\epsilon\,\gamma^B{}_{ijk}\,\rhd_B{}^A + \nabla_i\epsilon^A{}_{jk} & \delta_0\pi(\gamma)_A{}^{ijk} & = & \epsilon\,\rhd_A{}^B\left(\pi(\gamma)_B{}^{ijk} + \epsilon^{0ijk}\,\phi_B\right)\,,\\
 & & -\nabla_j\epsilon^A{}_{ik} + \nabla_k\epsilon^A{}_{ij}\,, & & & \\
\delta_0\phi^A & = & \epsilon\,\phi^B\,\rhd^A{}_B\,, & \delta_0\pi(\phi)_A & = & -\epsilon\,\rhd^B{}_A\,\pi(\phi)_B + \dfrac{1}{3!}\,\epsilon\,\epsilon^{0ijk}\,\rhd^B{}_A\,\gamma_{Bijk}\\
 & & & & & -\dfrac{1}{2}\rhd_{A\ B}\,\epsilon^B{}_{ij}\,\pi(B)^{ij} - \dfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\,\nabla_i\epsilon^A{}_{jk}\,,
\end{array}
\tag{C.46}
$$

Dodatak D

Ukupna grupa gejdž simetrija

D.1 Gejdž transformacije u *BF* topološkoj teoriji

Generator gejdž transformacija u BF teoriji je

$$G = \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x} \Big((\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})\, (\tilde{G}_1)_{\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}\, (\tilde{G}_0)_{\alpha} + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i)\, (\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i\, (\tilde{M}_0)_{\alpha}{}^i \Big) \,, \tag{D.1}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
(\tilde{G}_1)_{\alpha} &= -\Phi(\alpha)_{\alpha} \,, \\
(\tilde{G}_0)_{\alpha} &= -\big(f_{\alpha\gamma}{}^{\beta} B_{\beta 0 i} \Phi(B)^{\gamma i} + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^{a} \Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^{a} \Phi(\beta)^{b0i} - \Phi(\nabla B)_{\alpha} \big) \,, \\
(\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^i &= -\Phi(B)_{\alpha}{}^i \,, \\
(\tilde{M}_0)_{\alpha}{}^i &= \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i \,,
\end{aligned} \tag{D.2}$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$ i $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

D.1.1 Gejdž grupa simetrije prostora *BF* dejstva

Algebra koju čine generatori grupe simetrija $(M_0)_{\alpha}{}^i$, $(M_1)_{\alpha}{}^i$, $(G_0)_{\alpha}$ i $(G_1)_{\alpha}$ definisani u Dodatku D.1 je:

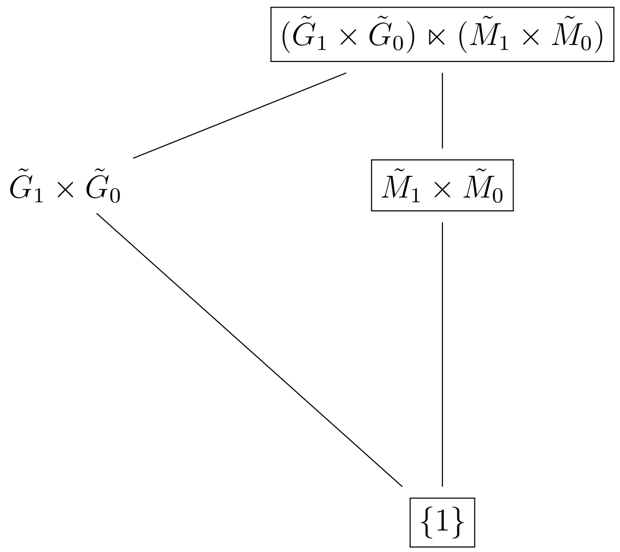
$$\begin{aligned}
\{(\tilde{G}_0)_{\alpha}(\vec{x})\,, (\tilde{G}_0)_{\beta}(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} (\tilde{G}_0)_{\gamma}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \,, \\
\{(\tilde{G}_0)_{\alpha}(\vec{x})\,, (\tilde{M}_0)_{\beta}{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} (\tilde{M}_0)_{\gamma}{}^i\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \,, \\
\{(\tilde{G}_0)_{\alpha}(\vec{x})\,, (\tilde{M}_1)_{\beta}{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} (\tilde{M}_1)_{\gamma}{}^i\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \,,
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Na osnovu ovih komutacionih relacija zaključujemo da je gejdž grupa simetrije ima sledeću strukturu. Najpre, generatori $(\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^i$ i $(\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^i$ formiraju algebru $\mathfrak{a}_1$,

$$\mathfrak{a}_1 = \mathrm{span}\{(\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^i\} \oplus \mathrm{span}\{(\tilde{M}_0)_{\alpha}{}^i\} \,,$$

koja generiše podgrupu $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$ ukupne grupe simetrije $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$. Osim toga, podgrupa $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$ je invarijantna podgrupa grupe $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$. Može se primetiti da $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0$ takođe čini podgrupu ukupne grupe simetrije. Sada se ove dve podgrupe, od kojih je jedna invarijantna podruga, a druga ne, mogu pomnožiti semidirektnim proizvodom, pri čemu dobijamo da je ukupna grupa simetrije $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3} = (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0) \ltimes (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0) \,.$$



Slika D.1: Grupa simetrije $\mathcal{G}_{\Sigma_3}$ u faznom prostoru. Invarijantne grupe su uokvirene.

D.1.2 Konstrukcija generatora simetrija $\boldsymbol{BF}$ teorije

Kada zamenimo generatore (D.2) u jednačinu (D.1), dobijamo generator gejdž simetrija u BF teoriji sledećeg oblika

$$G \;=\; -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big((\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i)\Phi(B)_{\alpha}{}^i - \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})\Phi(\alpha)_{\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}\big(f_{\alpha\gamma}{}^{\beta} B_{\beta 0 i}\Phi(B)^{\gamma i} - \Phi(\nabla B)_{\alpha}\big)\Big)\,, \tag{D.4}$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$ i $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

Generator gejdž transformacija u BF topološkoj teoriji (4.31) dobijamo *Kastelanijevom procedurom* (3.53) pri čemu su za svaki par generatora G_0 i G_1 zadovoljene relacije (3.55).

Pretpostavimo najpre da generator ima oblik:

$$G = \int \dot{\epsilon}^{\alpha}{}_i (G_1)_{\alpha}{}^i + \epsilon^{\alpha}{}_i (G_0)_{\alpha}{}^i + \dot{\epsilon}^{\alpha}(G_1)_{\alpha} + \epsilon^{\alpha}(G_0)_{\alpha}\,. \tag{D.5}$$

Izborom $(G_1)_{\alpha}{}^i = C_{PFC}$ i $(G_1)_{\alpha} = C_{PFC}$, gde je C_{PFC} oznaka za neku primarnu vezu prve klase, prirodan izbor je:

$$(G_1)_{\alpha}{}^i = \Phi(B)_{\alpha}{}^i\,, \qquad (G_1)_{\alpha} = \Phi(\alpha)_{\alpha}\,. \tag{D.6}$$

Ostaje da se utvrde dva generatora G_0. Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i$ daje

$$\begin{aligned} &(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \{\Phi(B)_{\alpha}{}^i, H_T\} = (C_{PFC})_{\alpha}{}^i\,, \\ &(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i = (C_{PFC})_{\alpha}{}^i\,, \end{aligned} \tag{D.7}$$

gde je $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = (C_{PFC})_{\alpha}{}^i + \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i$. Zatim, iz Kastelanijevog trećeg uslova sledi

$$\begin{aligned} &\{(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i, H_T\} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,, \\ &\{(C_{PFC})_{\alpha}{}^i + \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i, H_T\} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,, \\ &\{(C_{PFC})_{\alpha}{}^i, H_T\} - f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^{\beta}{}_0 \Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,, \end{aligned} \tag{D.8}$$

što daje jednačinu

$$(C_{PFC})_{\alpha}{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^{\beta}{}_0 \Phi(B)^{\gamma i}\,.$$

Iz toga sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^\beta{}_0\Phi(B)^{\gamma i} + \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\,. \tag{D.9}$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}$ daje

$$\begin{aligned}
&(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \{\Phi(\alpha)_\alpha\,, H_T\} = (C_{PFC})_\alpha\,,\\
&(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \Phi(\nabla B)_\alpha = (C_{PFC})_\alpha\,,
\end{aligned} \tag{D.10}$$

tj. dobija se da je $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} = (C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha$. Nakon toga, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\
&\{(C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\
&\{(C_{PFC})_\alpha\,, H_T\} + B_{\beta 0 i}f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\nabla B)_\gamma = (C_{PFC1})_\alpha\,,
\end{aligned} \tag{D.11}$$

tj.

$$(C_{PFC})_\alpha = -B_{\beta 0 i}f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\alpha)_\gamma\,.$$

Sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} = -B_{\beta 0 i}f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\alpha)_\gamma + \Phi(\nabla B)_\alpha\,. \tag{D.12}$$

U ovom trenutku, korisno je rezimirati rezultate i uvesti novu notaciju:

$$\begin{aligned}
\dot\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i &= -\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i\Phi(B)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i\Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\\
&= \nabla_0\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(\tilde M_1)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(\tilde M_0)_\alpha{}^i\,.
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Primetimo da se vremenski izvod parametra kombinuje sa nekim drugim članovima u kovarijantni izvod u vremenskom pravcu.

Za drugi deo ukupnog generatora dobijamo:

$$\begin{aligned}
\dot\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} &= -\dot\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\big(B_{\beta 0 i}f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\alpha)_\gamma - \Phi(\nabla B)_\alpha\big)\\
&= -\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\big(B_{\beta 0 i}f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} - \Phi(\nabla B)_\alpha\big)\\
&= \nabla_0\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(\tilde G_1)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(\tilde G_0)_\alpha\,.
\end{aligned} \tag{D.14}$$

D.2 Gejdž transformacije u $2BF$ topološkoj teoriji

Generator gejdž transformacija u $2BF$ teoriji je

$$
\begin{aligned}
G \;=\; \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big(& (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})\,(\tilde{G}_1)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}\,(\tilde{G}_0)_\alpha + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i)\,(\tilde{H}_1)_a{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i\,(\tilde{H}_0)_a{}^i \\
& + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i)\,(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i\,(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a})\,(\tilde{N}_1)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}(\tilde{N}_0)_a \Big)\,,
\end{aligned}
\tag{D.15}
$$

gde je:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{G}_1)_\alpha &= -\Phi(\alpha)_\alpha\,, \\
(\tilde{G}_0)_\alpha &= -\big(f_{\alpha\gamma}{}^{\beta} B_{\beta 0 i} \Phi(B)^{\gamma i} + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^{a} \Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^{a} \Phi(\beta)^{b0i} - \Phi(\nabla B)_\alpha\big)\,, \\
(\tilde{H}_1)_a{}^i &= -\Phi(\beta)_a{}^i\,, \\
(\tilde{H}_0)_a{}^i &= C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,, \\
(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i &= -\Phi(B)_\alpha{}^i\,, \\
(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i &= \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\,, \\
(\tilde{N}_1)_a &= -\Phi(C)_a\,, \\
(\tilde{N}_0)_a &= \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^{b} \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\,,
\end{aligned}
\tag{D.16}
$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

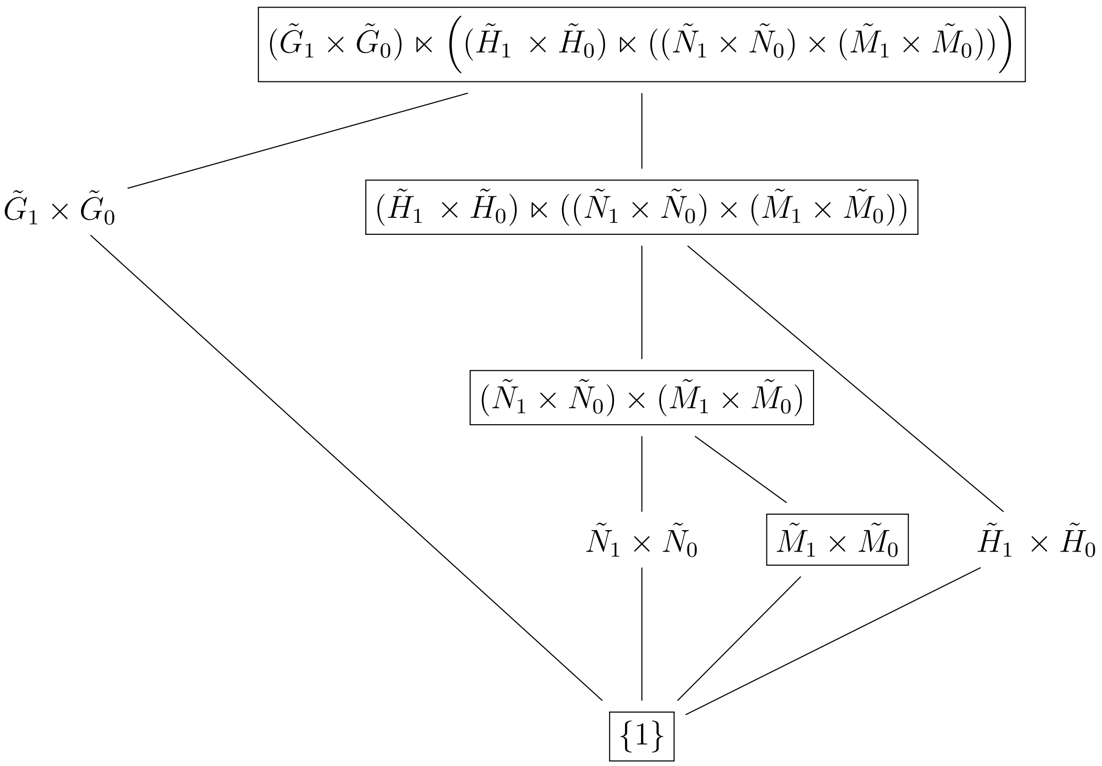
D.2.1 Gejdž grupa simetrije $2BF$ dejstva

Algebra koju čine generatori grupe simetrija $(M_0)_\alpha{}^i$, $(M_1)_\alpha{}^i$, $(G_0)_\alpha$, $(G_1)_\alpha$, $(H_0)_a{}^i$, $(H_1)_a{}^i$, $(N_0)_a$ i $(N_1)_a$ definisani u prethodnom delu D.2 je:

$$
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{G}_0)_\beta(\vec{y})\} = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(\tilde{G}_0)_\gamma\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\tag{D.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_0)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_1)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{(\tilde{H}_0)_a(\vec{x})\,,(\tilde{N}_1)^{bi}(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_1)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned}
\tag{D.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{M}_0)_\beta{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(\tilde{M}_0)_\gamma{}^i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{M}_1)_\beta{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(\tilde{M}_1)_\gamma{}^i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\,(\tilde{H}_1)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\,(\tilde{H}_0)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{N}_1)_a(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\,(\tilde{N}_1)_b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{N}_0)_a(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}\,(\tilde{N}_0)_b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned}
\tag{D.19}
$$



Slika D.2: Grupa simetrije $\mathcal{G}_{\Sigma_3}$ u faznom prostoru. Invarijantne grupe su okvirene.

Grupa gejdž simetrije ima sledeću strukturu. Prvo, grupe $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$, $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0$ i $\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0$ sa odgovarajućim algebrama $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ i $\mathfrak{a}_3$, gde je

$$\begin{gathered}\mathfrak{a}_1 = \mathrm{span}\{(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i\} \oplus \mathrm{span}\{(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i\}\,, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathrm{span}\{(\tilde{N}_1)_a\} \oplus \mathrm{span}\{(\tilde{N}_0)_a\}\,, \\ \mathfrak{a}_3 = \mathrm{span}\{(\tilde{H}_1)_a{}^i\} \oplus \mathrm{span}\{(\tilde{H}_0)_a{}^i\}\end{gathered} \tag{D.20}$$

su podgrupe ukupne grupe simetrije $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$. Pritom, podgrupa $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$ je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrije. Grupe $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0$ i $\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0$ nisu invarijantne podgrupe ukupne grupe simetrije, što vidimo na osnovu Poasonovih zagrada $\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,, (\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$ i $\{(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{x})\,, (\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$ koje su jednake nekim linearnim kombinacijama generatora grupa $\tilde{M}_1$, tj. $\tilde{M}_0$. Može se formirati direktan proizvod $(\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0) \times (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0)$, kako generatori ovih grupa međusobno komutiraju, a dobijena grupa je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija.

Dobijenu grupu možemo pomnožiti sa grupom $\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0$, pri čemu je $(\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0) \times (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0)$ invarijantna, a $\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0$ ne, koristeći semidirektan proizvod, čime se dobija invarijantna podgrupa $(\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0) \ltimes ((N_1 \times N_0) \times (M_1 \times M_0))$, kojoj odgovara algebra $\mathfrak{a}_4$:

$$\mathfrak{a}_4 = \mathrm{span}\{(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i, (\tilde{M}_1)_\alpha{}^i, (\tilde{H}_0)_a{}^i, (\tilde{H}_1)_a{}^i, (\tilde{N}_0)_a, (\tilde{N}_1)_a\}\,.$$

Na kraju, dobijenu grupu možemo pomnožiti sa grupom $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0$ koristeći semidirektan proizvod, pri čemu dobijamo ukupnu grupu simetrija $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$ koja je jednaka:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3} = (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0) \ltimes \Big((\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_0) \ltimes \Big((\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0) \times (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0)\Big)\Big)\,.$$

Kompletna struktura ukupne grupe simetrija prikazana je na Slici D.2. Ovde su invarijantne podgrupe ukupne grupe simetrija uokvirene.

D.2.2 Konstrukcija generatora simetrija $2BF$ teorije

Kada zamenimo generatore (D.16) u jednačinu (D.15), dobijamo generator gejdž simetrija u $2BF$ teoriji sledećeg oblika

$$
\begin{aligned}
G \;=\; -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big(& (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i)\Phi(B)_{\alpha}{}^i - \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})\Phi(\alpha)_{\alpha} \\
& + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}\big(f_{\alpha\gamma}{}^{\beta}B_{\beta 0i}\Phi(B)^{\gamma i} + C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(\beta)^{b0i} - \Phi(\nabla B)_{\alpha}\big) \\
& + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a})\Phi(C)_a - \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}\left(\beta_{b0i}\rhd_{\alpha a}{}^{b}\Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\right) \\
& + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i)\Phi(\beta)_a{}^i - \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i\left(C_{b0}\rhd_{\alpha a}{}^{b}\Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\right)\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{D.21}
$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

Generator gejdž transformacija simetrije (D.15) u $2BF$ teoriji (5.1), dobija se Kastelanijevom procedurom. Pretpostavimo, najpre, da generator ima strukturu:

$$
\begin{aligned}
G \;=\; \int_{\Sigma_3}\mathrm{d}^3\,\vec{x}\,\Big(& \dot{\epsilon}_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i(G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}(G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} \\
& + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i(G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{n}}{}^{a}(G_1)_{\mathfrak{n}a} + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}(G_0)_{\mathfrak{n}a}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{D.22}
$$

Prvi korak Kastelanijeve procedure predstavlja nametanje uslova

$$
(G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = C_{PFC}\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} = C_{PFC}\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i = C_{PFC}\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{n}a} = C_{PFC}\,,
\tag{D.23}
$$

prirodnim izborom:

$$
(G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = -\Phi(B)_{\alpha}{}^i\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} = -\Phi(\alpha)_{\alpha}\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i = -\Phi(C)_{\alpha}{}^i\,,\quad (G_1)_{\mathfrak{n}a} = -\Phi(\beta)_a\,.
\tag{D.24}
$$

Ostaje da se utvrdi kako glase četiri generatora G_0.

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i$ daje

$$
\begin{aligned}
(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \{\Phi(B)_{\alpha}{}^i\,, H_T\} &= (C_{PFC})_{\alpha}{}^i\,, \\
(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i &= (C_{PFC})_{\alpha}{}^i\,,
\end{aligned}
\tag{D.25}
$$

gde je $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = (C_{PFC})_{\alpha}{}^i + \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i$. Zatim, iz Kastelanijevog trećeg uslova sledi

$$
\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,, \\
&\{(C_{PFC})_{\alpha}{}^i + \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,, \\
&\{(C_{PFC})_{\alpha}{}^i\,, H_T\} - f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^{\beta}{}_0\Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} = (C_{PFC1})_{\alpha}{}^i\,,
\end{aligned}
\tag{D.26}
$$

što daje jednačinu

$$
(C_{PFC})_{\alpha}{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^{\beta}{}_0\Phi(B)^{\gamma i}\,.
$$

Iz toga sledi da je generator:

$$
(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^{\beta}{}_0\Phi(B)^{\gamma i} + \Phi(\mathcal{F})_{\alpha}{}^i\,.
\tag{D.27}
$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}$ daje

$$
\begin{aligned}
(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \{\Phi(\alpha)_{\alpha}\,, H_T\} &= (C_{PFC})_{\alpha}\,, \\
(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \Phi(\nabla B)_{\alpha} &= (C_{PFC})_{\alpha}\,,
\end{aligned}
\tag{D.28}
$$

tj. dobija se da je $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} = (C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha$. Nakon toga, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$
\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\
&\{(C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\
&\{(C_{PFC})_\alpha\,, H_T\} + B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi(\nabla B)_\gamma + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\mathcal{G})^b + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\nabla C)^{bi} = (C_{PFC1})_\alpha\,,
\end{aligned}
\tag{D.29}
$$

tj.

$$
(C_{PFC})_\alpha = -B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi(\alpha)_\gamma - C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b - \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)^{bi}\,.
$$

Sledi da je generator:

$$
(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} \;=\; -B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi(\alpha)_\gamma - C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b - \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)^{bi} + \Phi(\nabla B)_\alpha\,.
\tag{D.30}
$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{n}a}$ daje

$$
\begin{aligned}
&(G_0)_{\mathfrak{n}a} - \{\Phi(C)_a\,, H_T\} = (C_{PFC})_a\,,\\
&(G_0)_{\mathfrak{n}a} - \Phi(\mathcal{G})_a = (C_{PFC})_a\,,
\end{aligned}
\tag{D.31}
$$

gde je $(G_0)_{\mathfrak{n}a} = (C_{PFC})_a + \Phi(\mathcal{G})_a$.

Zatim, iz trećeg Kastelanijevog uslova dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{n}a}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a\,,\\
&\{(C_{PFC})_a + \Phi(\mathcal{G})_a\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a\,,\\
&\{(C_{PFC})_a, H_T\} + \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{G})_b - \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} = (C_{PFC1})_a\,,
\end{aligned}
\tag{D.32}
$$

što daje:

$$
(C_{PFC})_a = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(C)_b + \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i}\,.
$$

Iz toga sledi da je generator:

$$
(G_0)_{\mathfrak{n}a} = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(C)_b + \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\,.
$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i$ daje

$$
\begin{aligned}
&(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i - \{\Phi(\beta)_a{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC})_a{}^i\,,\\
&(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i - \Phi(\nabla C)_a{}^i = (C_{PFC})_a{}^i\,,
\end{aligned}
\tag{D.33}
$$

tj. dobija se $(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i = (C_{PFC})_a{}^i + \Phi(\nabla C)_a{}^i$. Nakon toga, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$
\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,\\
&\{(C_{PFC})_a{}^i + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,\\
&\{(C_{PFC})_a{}^i, H_T\} + \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\nabla C)_b{}^i - C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,
\end{aligned}
$$

što daje rezultat:

$$(C_{PFC})_a{}^i = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\beta)_b{}^i + C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i}\,.$$

Iz toga sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\beta)_b{}^i + C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,.$$

U ovom trenutku, korisno je rezimirati rezultate i uvesti novu notaciju:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i \Phi(B)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (\tilde{M}_1)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (\tilde{M}_0)_\alpha{}^i\,. \end{aligned} \tag{D.34}$$

Primetimo da se vremenski izvod parametra kombinuje sa nekim drugim članovima u kovarijantni izvod u vremenskom pravcu.

Za drugi deo ukupnog generatora dobijamo:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} &= -\dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \big(B_{\beta 0 i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi(\alpha)_\gamma \\ &\quad + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)_b{}^i - \Phi(\nabla B)_\alpha \big) \\ &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \big(B_{\beta 0 i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} \\ &\quad + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)_b{}^i - \Phi(\nabla B)_\alpha \big) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (\tilde{G}_1)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (\tilde{G}_0)_\alpha\,. \end{aligned} \tag{D.35}$$

Osim toga, sledi:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i \Phi(\beta)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i \big(C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\nabla C)_a{}^i \big) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (\tilde{H}_1)_a{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (\tilde{H}_0)_a{}^i\,, \end{aligned} \tag{D.36}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{n}}{}^a (G_1)_{\mathfrak{n}a} + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (G_0)_{\mathfrak{n}a} &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \Phi(C)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\tilde{N}_1)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\tilde{N}_0)_a\,. \end{aligned} \tag{D.37}$$

D.2.3 Izračunavanje algebre simetrija 2BF dejstva

Da bi se dobila struktura grupe simetrija $2BF$ dejstva, kao što je predstavljeno u podsekciji 5.1.2, moramo najpre izračunati komutatore između generatora G-, H-, M- i N-gejdž simetrija. Ovaj proces je opisan u odeljku 5.1.2, dok su detalji izračunavanja dati u ovom odeljku.

Komutator $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}]$

Sada ćemo izračunati komutator generatora H-gejdž transformacija, tj. jednačinu (5.51). Nakon transformacije promenljivih pri H-gejdž transformacijama za parametar $\epsilon_{\mathfrak{h}1}$ dobija se

$$\alpha' = \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}1} \,, \tag{D.38}$$

$$\beta' = \beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}1} \,, \tag{D.39}$$

$$B' = B - C \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}1} \,, \tag{D.40}$$

$$C' = C \,, \tag{D.41}$$

Zatim, daljom transformacijom varijabli H-gejdž transformacijama sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{h}2}$ dobija se:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}2} \,, \\ \beta'' &= \beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}1} - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}2}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{h}2} - \epsilon_{\mathfrak{h}2} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}2} \,, \\ B'' &= B - C \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}1} - C \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}2} \\ C'' &= C \,, \end{aligned} \tag{D.42}$$

Vidimo da za promenljive $\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$, $B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ i $C^{a}{}_{\mu}$ dobijamo da transformacije komutiraju:

$$\begin{aligned} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} \alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} \alpha^{\alpha}{}_{\mu} \,, \\ e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} B^{\alpha}{}_{\mu\nu} \,, \\ e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} C^{a}{}_{\mu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} C^{a}{}_{\mu} \,, \end{aligned} \tag{D.43}$$

Za preostale promenljivu $\beta^{a}{}_{\mu\nu}$ razlika jednačine (D.42) i analogne jednačine gde $\epsilon_{\mathfrak{h}1} \leftrightarrow \epsilon_{\mathfrak{h}2}$ je:

$$\begin{aligned} \left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}\right) \frac{1}{2} \beta^{a}{}_{\mu\nu} &= \partial_{b}{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^{b}{}_{[\mu|} \epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^{c}{}_{|\nu]} \rhd {}_{\alpha c}{}^{a} - \partial_{b}{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^{b}{}_{[\mu|} \epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^{c}{}_{|\nu]} \rhd {}_{\alpha c}{}^{a} \\ &= 0 \,. \end{aligned} \tag{D.44}$$

Uzimajući u obzir rezultate (D.43) i (D.44) zaključujemo da H-gejdž transformacije komutiraju:

$$e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} = 0 \,. \tag{D.45}$$

Komutator $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}]$

Izračunajmo komutator između generatora H-gejdž i N-gejdž transformacija, tj. izvedimo jednačinu (5.62). Ovo se radi izračunavanjem izraza

$$\left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} - e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}\right) A \,, \tag{D.46}$$

za sve varijable A prisutne u teoriji. Primećujemo da je za varijable $\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$, $\beta^{a}{}_{\mu\nu}$ i $C^{a}{}_{\mu}$ dobijeno da transformacije komutiraju:

$$\begin{aligned} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} \alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} \alpha^{\alpha}{}_{\mu} \,, \\ e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} \beta^{a}{}_{\mu\nu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} \beta^{a}{}_{\mu\nu} \,, \\ e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} C^{a}{}_{\mu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H} C^{a}{}_{\mu} \,. \end{aligned} \tag{D.47}$$

Preostala varijabla $B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ se pri H-gejdž transformacijama transformiše na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
B' &= B - C \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} \,, \\
C' &= C \,.
\end{aligned}
\tag{D.48}
$$

Daljom transformacijom varijable N-gejdž transformacijom:

$$
\begin{aligned}
B'' &= B' - \beta' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} \\
&= B - C \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \Big(\beta - \overset{\{\alpha^{\alpha} - \partial_a{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}\}}{\nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}\Big) \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} \,, \\
C'' &= C' - \overset{\{\alpha^{\alpha} - \partial_a{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}\}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{n}} \\
&= C - \overset{\{\alpha^{\alpha} - \partial_a{}^{\alpha} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}\}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{n}} \,.
\end{aligned}
\tag{D.49}
$$

Zatim, izmenimo redosled transformacija. Najpre, transformacija varijabli pri N-gejdž transformacijama je

$$
\begin{aligned}
B^{\cdot} &= B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} \,, \\
C^{\cdot} &= C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}} \,,
\end{aligned}
\tag{D.50}
$$

dok dalja H-gejdž transformacija daje:

$$
\begin{aligned}
B^{\cdot\cdot} &= B^{\cdot} - C^{\cdot} \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} \\
&= B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} - (C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}) \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} \,, \\
C^{\cdot\cdot} &= C^{\cdot} \\
&= C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}} \,.
\end{aligned}
\tag{D.51}
$$

Razlika jednačina (D.49) i (D.51) je:

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) B^{\alpha} &= \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{b} \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} - \nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{b} \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} + \partial_a{}^{\beta} \rhd_{\beta c}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{c} \wedge \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{d} \mathcal{T}_{bd}{}^{\alpha} - \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{b} f_{ab}{}^{c} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{d} \mathcal{T}_{cd}{}^{\alpha} \,, \\
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) C^{c} &= -\partial_a{}^{\beta} \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a} \rhd_{\beta b}{}^{c} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{b} \,,
\end{aligned}
\tag{D.52}
$$

Primenom definicija preslikavanja $\mathcal{T}$ prethodne jednačine se svode na

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) B^{\alpha} &= \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{b} \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} - \nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a} \wedge \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{b} \mathcal{T}_{ab}{}^{\alpha} = \nabla (\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}})^{\alpha} \,, \\
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) C^{c} &= \partial^{c}{}_{\alpha} (\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}})^{\alpha} \,,
\end{aligned}
\tag{D.53}
$$

Upoređivanjem jednačina (D.47) i (D.53) sa jednačinom (6.58) dobijamo konačan rezultat za komutator

$$
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) = -(\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \cdot M \,. \tag{D.54}
$$

D.3 Gejdž transformacije u $3BF$ topološkoj teoriji

Generator gejdž transformacija u $3BF$ teoriji je:

$$
\begin{aligned}
G \;=\; \int_{\Sigma_3} d^3\vec{x}\Big(& (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})\,(\tilde{G}_1)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}\,(\tilde{G}_0)_\alpha + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i)\,(\tilde{H}_1)_a{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i\,(\tilde{H}_0)_a{}^i \\
& + \frac{1}{2}(\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij})\,(\tilde{L}_1)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij}\,(\tilde{L}_0)_A{}^{ij} \\
& + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i)\,(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i\,(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a})\,(\tilde{N}_1)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}(\tilde{N}_0)_a\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{D.55}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
(\tilde{G}_1)_\alpha &= -\Phi(\alpha)_\alpha\,,\\
(\tilde{G}_0)_\alpha &= -\big(f_{\alpha\gamma}{}^{\beta}B_{\beta 0i}\Phi(B)^{\gamma i} + C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i}\rhd_{\alpha b}{}^{a}\Phi(\beta)^{b0i}\\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{A}{}_{0ij}\rhd_{\alpha A}{}^{B}\Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla B)_\alpha\big)\,,\\
(\tilde{H}_1)_a{}^i &= -\Phi(\beta)_a{}^i\,,\\
(\tilde{H}_0)_a{}^i &= C_{b0}\rhd_{\alpha a}{}^{b}\Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^{b}{}_{0j}X_{(ab)}{}^{A}\Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,,\\
(\tilde{L}_1)_a{}^{ij} &= \Phi(\gamma)_A{}^{ij}\,,\\
(\tilde{L}_0)_a{}^{ij} &= -\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}\,,\\
(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i &= -\Phi(B)_\alpha{}^i\,,\\
(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i &= \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\,,\\
(\tilde{N}_1)_a &= -\Phi(C)_a\,,\\
(\tilde{N}_0)_a &= \beta_{b0i}\rhd_{\alpha a}{}^{b}\Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\,,
\end{aligned}
\tag{D.56}
$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_i$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij}$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_i$, i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

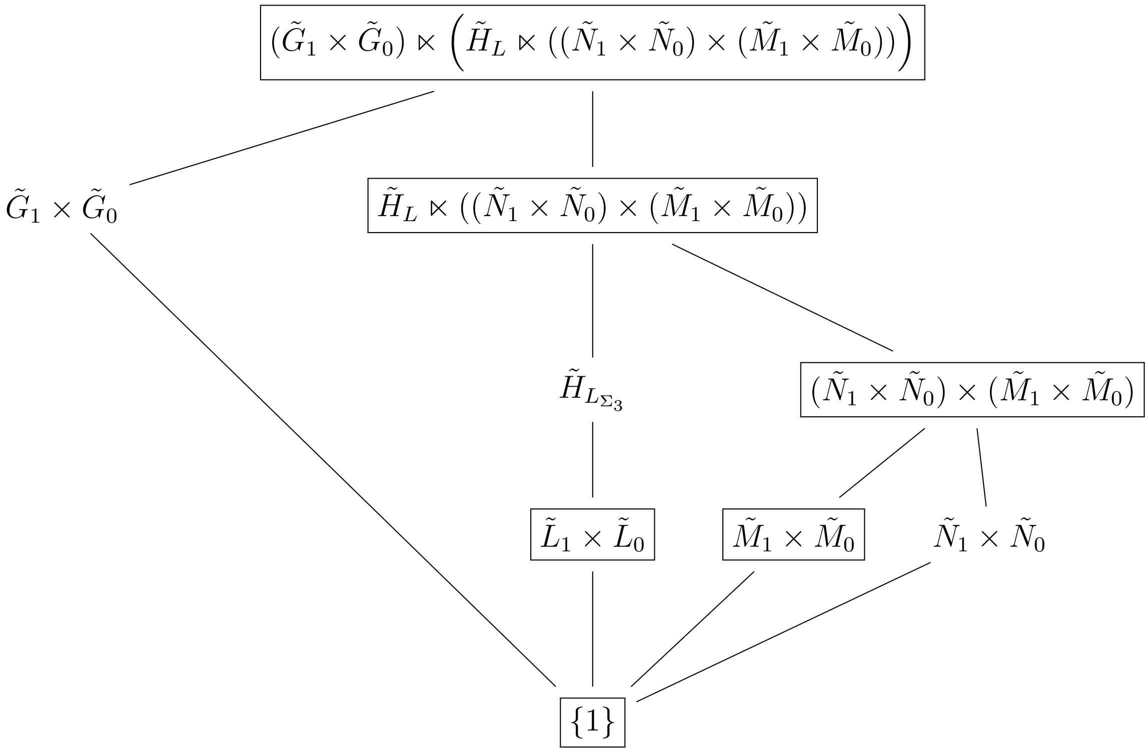
D.3.1 Gejdž grupa simetrije $3BF$ dejstva

Algebra koju čine generatori grupe simetrija $(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i$, $(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i$, $(\tilde{G}_0)_\alpha$, $(\tilde{G}_1)_\alpha$, $(\tilde{H}_0)_a{}^i$, $(\tilde{H}_1)_a{}^i$, $(\tilde{N}_0)_a$, $(\tilde{N}_1)_a$, $(\tilde{L}_0)_A{}^{ij}$ i $(\tilde{L}_1)_A{}^{ij}$ definisani u Dodatku D.3 je:

$$
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{G}_0)_\beta(\vec{y})\} = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(\tilde{G}_0)_\gamma\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\tag{D.57}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{H}_0)_b{}^j(\vec{y})\} &= 2X_{(ab)}{}^{A}(\tilde{L}_0)_A{}^{ij}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{H}_1)_b{}^j(\vec{y})\} &= 2X_{(ab)}{}^{A}(\tilde{L}_1)_A{}^{ij}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned}
\tag{D.58}
$$

$$
\begin{aligned}
\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_0)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_1)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{(\tilde{H}_0)_a(\vec{x})\,,(\tilde{N}_1)^{bi}(\vec{y})\} &= \rhd_{\alpha a}{}^{b}(\tilde{M}_1)^{\alpha i}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,
\end{aligned}
\tag{D.59}
$$



Slika D.3: Grupa simetrije $\mathcal{G}_{\Sigma_3}$ u faznom prostoru. Invarijantne grupe su okvirene.

$$
\begin{aligned}
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{M}_0)_\beta{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma(\tilde{M}_0)_\gamma{}^i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,(\tilde{M}_1)_\beta{}^i(\vec{y})\} &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma(\tilde{M}_1)_\gamma{}^i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\,(\tilde{H}_1)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\,(\tilde{H}_0)_b{}^i(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{N}_1)_a(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\,(\tilde{N}_1)_b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{N}_0)_a(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha a}{}^b\,(\tilde{N}_0)_b(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,,\\
\{\,(\tilde{G}_0)_\alpha(\vec{x})\,,\,(\tilde{L}_0)_A{}^{ij}(\vec{y})\,\} &= \rhd_{\alpha A}{}^B(\tilde{L}_0)_B{}^{ij}(\vec{x})\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.
\end{aligned}
\tag{D.60}
$$

Grupa gejdž simetrije ima sledeću strukturu. Prvo, grupe $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$, $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0$ i $\tilde{L}_1 \times \tilde{L}_0$ sa odgovarajućim algebrama $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ i $\mathfrak{a}_3$, gde je

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{a}_1 = \operatorname{span}\{(\tilde{M}_1)_\alpha{}^i\} \oplus \operatorname{span}\{(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i\}\,, \quad \mathfrak{a}_2 = \operatorname{span}\{(\tilde{N}_1)_a\} \oplus \operatorname{span}\{(\tilde{N}_0)_a\}\,,\\
\mathfrak{a}_3 = \operatorname{span}\{(\tilde{L}_1)_A{}^{ij}\} \oplus \operatorname{span}\{(\tilde{L}_0)_A{}^{ij}\}\,,
\end{gathered}
\tag{D.61}
$$

su podgrupe ukupne grupe simetrije $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$. Pored toga, podgrupe $\tilde{L}_1 \times \tilde{L}_0$ i $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$ su invarijantne podgrupe ukupne grupe simetrije. Grupa $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0$ nije invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrije, što vidimo na osnovu Poasonovih zagrada $\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$ i $\{(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$ koje su jednake nekim linearnim kombinacijama generatora $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0$. Može se formirati direktan proizvod $(\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0) \times (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0)$, kako generatori ovih grupa međusobno komutiraju, a dobijena grupa je invarijantna podgrupa ukupne grupe simetrija.

Zatim, razmotrimo podgrupu $\tilde{H}_{L_{\Sigma_3}}$ određenu algebrom definisanu generatorima $(\tilde{L}_1)_A{}^{ij}$, $(\tilde{L}_0)_A{}^{ij}$, $(\tilde{H}_1)_a{}^i$ i $(\tilde{H}_0)_a{}^i$. Ova grupa nije invarijantna pogrupa ukupne grupe simetrija, zbog

Poasonovih zagrada $\{(\tilde{H}_0)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$ i $\{(\tilde{H}_1)_a{}^i(\vec{x})\,,(\tilde{N}_0)^b(\vec{y})\}$, iz istog razloga kao i pre. Sada se mogu pomnožiti ove dve podgrupe, od kojih je jedna invarijantna, a druga ne, koristeći semidirektan proizvod, čime se dobija invarijantna podgrupa $H_L \ltimes ((N_1 \times N_0) \times (M_1 \times M_0))$, kojoj odgovara algebra $\mathfrak{a}_4$:

$$\mathfrak{a}_4 = \operatorname{span}\{(\tilde{M}_0)_\alpha{}^i, (\tilde{M}_1)_\alpha{}^i, (\tilde{H}_0)_a{}^i, (\tilde{H}_1)_a{}^i, (\tilde{N}_0)_a, (\tilde{N}_1)_a, (\tilde{L}_0)_A{}^{ij}, (\tilde{L}_1)_A{}^{ij}\}\,.$$

Na kraju, prateći istu liniju rezonovanja, razmatranjem grupe $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0$ dobijamo ukupnu grupu simetrija $\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3}$ koja je jednaka:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\Sigma_3} = (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_0) \ltimes \Big(\tilde{H}_L \ltimes ((\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_0) \times (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_0))\Big)\,.$$

Kompletna struktura ukupne grupe simetrija prikazana je na Slici D.3. Ovde su invarijantne podgrupe ukupne grupe simetrija uokvirene.

D.3.2 Konstrukcija generatora simetrija 3BF teorije

Kada zamenimo generatore (D.56) u jednačinu (6.30), dobijamo generator gejdž simetrija u 3BF teoriji sledećeg oblika

$$\begin{aligned} G \;=\; -\int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Bigg(& (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i)\Phi(B)_\alpha{}^i - \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i\Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha)\Phi(\alpha)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha\big(f_{\alpha\gamma}{}^\beta B_{\beta 0i}\Phi(B)^{\gamma i} \\ & + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(C)^{b0} + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(\beta)^{b0i} - \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij} \rhd_{\alpha A}{}^B\Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla B)_\alpha\big) \\ & + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a)\Phi(C)_a - \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a\left(\beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b\Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\right) \\ & + (\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i)\Phi(\beta)_a{}^i - \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i\left(C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b\Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^b{}_{0j}X_{(ab)}{}^A\Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\right) \\ & - \frac{1}{2}(\nabla_0\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij})\Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij}\Phi(\nabla D)_A{}^{ij}\Bigg)\,, \end{aligned} \tag{D.62}$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij}$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a$ nezavisni parametri gejdž transformacija.

Generator gejdž transformacija simetrije (D.55) u 3BF teoriji (6.1), dobija se Kastelanijevom procedurom, pri čemu su za svaki par generatora G_0 i G_1 zadovoljene relacije

$$G_1 = C_{PFC}\,, \tag{D.63}$$
$$G_0 + \{G_1, H_T\} = C_{PFC}\,, \tag{D.64}$$
$$\{G_0, H_T\} = C_{PFC}\,, \tag{D.65}$$

gde C_{PFC} predstavlja neku vezu prve klase. Pretpostavimo, najpre, da generator ima strukturu:

$$\begin{aligned} G \;=\; \int_{\Sigma_3}\mathrm{d}^3\vec{x}\,\Big(& \dot{\epsilon}_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} \\ & + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i(G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \dot{\epsilon}_{\mathfrak{n}}{}^a(G_1)_{\mathfrak{n}a} + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a(G_0)_{\mathfrak{n}a} \\ & + \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij}(G_1)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij}(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij}\Big)\,. \end{aligned} \tag{D.66}$$

Prvi korak Kastelanijeve procedure predstavlja nametanje uslova

$$\begin{gathered} (G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = C_{PFC}\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} = C_{PFC}\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i = C_{PFC}\,, \\ (G_1)_{\mathfrak{n}a} = C_{PFC}\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} = C_{PFC}\,, \end{gathered} \tag{D.67}$$

prirodnim izborom:

$$\begin{gathered} (G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = -\Phi(B)_\alpha{}^i\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} = -\Phi(\alpha)_\alpha\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i = -\Phi(C)_\alpha{}^i\,, \\ (G_1)_{\mathfrak{n}a} = -\Phi(\beta)_a\,, \quad (G_1)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} = \Phi(\gamma)_A{}^{ij}\,. \end{gathered} \tag{D.68}$$

Ostaje da se utvrdi pet generatora G_0.

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i$ daje

$$\begin{aligned}(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \{\Phi(B)_\alpha{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC})_\alpha{}^i\,,\\ (G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i - \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i = (C_{PFC})_\alpha{}^i\,,\end{aligned} \tag{D.69}$$

gde je $(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = (C_{PFC})_\alpha{}^i + \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i$. Zatim, iz Kastelanijevog trećeg uslova sledi

$$\begin{aligned}&\{(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha{}^i\,,\\ &\{(C_{PFC})_\alpha{}^i + \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha{}^i\,,\\ &\{(C_{PFC})_\alpha{}^i\,, H_T\} - f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^\beta{}_0\Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} = (C_{PFC1})_\alpha{}^i\,,\end{aligned} \tag{D.70}$$

što daje jednačinu

$$(C_{PFC})_\alpha{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^\beta{}_0\Phi(B)^{\gamma i}\,.$$

Iz toga sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i = f_{\beta\gamma\alpha}\alpha^\beta{}_0\Phi(B)^{\gamma i} + \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i\,. \tag{D.71}$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}$ daje

$$\begin{aligned}(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \{\Phi(\alpha)_\alpha\,, H_T\} = (C_{PFC})_\alpha\,,\\ (G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} - \Phi(\nabla B)_\alpha = (C_{PFC})_\alpha\,,\end{aligned} \tag{D.72}$$

tj. dobija se da je $(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} = (C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha$. Nakon toga, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$\begin{aligned}&\{(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\ &\{(C_{PFC})_\alpha + \Phi(\nabla B)_\alpha\,, H_T\} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\\ &\{(C_{PFC})_\alpha\,, H_T\} + B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(\mathcal{F})^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\nabla B)_\gamma\\ &+C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(\mathcal{G})^b + \beta_{a0i}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(\nabla C)^{bi} - \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij}\rhd_{\alpha A}{}^B\Phi(\nabla D)_B{}^{ij} = (C_{PFC1})_\alpha\,,\end{aligned} \tag{D.73}$$

tj.

$$(C_{PFC})_\alpha = -B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\alpha)_\gamma - C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(C)^b - \beta_{a0i}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(\beta)^{bi} + \tfrac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij}\rhd_{\alpha A}{}^B\Phi(\gamma)_B{}^{ij}\,.$$

Sledi da je generator:

$$\begin{aligned}(G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} \;=\; &-B_{\beta 0i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta\Phi(B)^{\gamma i} + \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma\Phi(\alpha)_\gamma - C_{a0}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(C)^b\\ &-\beta_{a0i}\rhd_{\alpha b}{}^a\Phi(\beta)^{bi} + \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij}\rhd_{\alpha A}{}^B\Phi(\gamma)_B{}^{ij} + \Phi(\nabla B)_\alpha\,.\end{aligned} \tag{D.74}$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{n}a}$ daje

$$\begin{aligned}(G_0)_{\mathfrak{n}a} - \{\Phi(C)_a\,, H_T\} = (C_{PFC})_a\,,\\ (G_0)_{\mathfrak{n}a} - \Phi(\mathcal{G})_a = (C_{PFC})_a\,,\end{aligned} \tag{D.75}$$

gde je $(G_0)_{\mathfrak{n}a} = (C_{PFC})_a + \Phi(\mathcal{G})_a$.

Zatim, iz trećeg Kastelanijevog uslova dobijamo

$$\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{n}a}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a\,,\\
&\{(C_{PFC})_a + \Phi(\mathcal{G})_a\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a\,,\\
&\{(C_{PFC})_a, H_T\} + \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{G})_b - \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} = (C_{PFC1})_a\,,
\end{aligned} \tag{D.76}$$

što daje

$$(C_{PFC})_a = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(C)_b + \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i}\,.$$

Iz toga sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{n}a} = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(C)_b + \beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a\,.$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i$ daje

$$\begin{aligned}
&(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i - \{\Phi(\beta)_a{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC})_a{}^i\,,\\
&(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i - \Phi(\nabla C)_a{}^i = (C_{PFC})_a{}^i\,,
\end{aligned} \tag{D.77}$$

tj. dobija se $(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i = (C_{PFC})_a{}^i + \Phi(\nabla C)_a{}^i$. Nakon toga, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,\\
&\{(C_{PFC})_a{}^i + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,, H_T\} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,\\
&\{(C_{PFC})_a{}^i, H_T\} + \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\nabla C)_b{}^i - C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\mathcal{F})^{\alpha i} + 2\beta^b{}_{0j} X_{(ab)}{}^A \Phi(\nabla D)_A{}^{ij} = (C_{PFC1})_a{}^i\,,
\end{aligned}$$

što daje rezultat:

$$(C_{PFC})_a{}^i = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\beta)_b{}^i + C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^b{}_{0j} X_{(ab)}{}^A \Phi(\gamma)_A{}^{ij}\,.$$

Iz toga sledi da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i = -\alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(\beta)_b{}^i + C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^b{}_{0j} X_{(ab)}{}^A \Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \Phi(\nabla C)_a{}^i\,.$$

Kastelanijev drugi uslov za generator $(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij}$ daje:

$$\begin{aligned}
&(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} + \{\Phi(\gamma)_A{}^{ij}\,, H_T\} = (C_{PFC})_A{}^{ij}\,,\\
&(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} + \Phi(\nabla D)_A{}^{ij} = (C_{PFC})_A{}^{ij}\,,
\end{aligned} \tag{D.78}$$

tj. dobijamo $(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} = (C_{PFC})_A{}^{ij} - \Phi(\nabla D)_A{}^{ij}$. Zatim, iz trećeg Kastelanijevog uslova sledi

$$\begin{aligned}
&\{(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij}\,, H_T\} = (C_{PFC1})_A{}^{ij}\,,\\
&\{(C_{PFC})_A{}^{ij} - \Phi(\nabla D)_A{}^{ij}, H_T\} = (C_{PFC1})_A{}^{ij}\,,\\
&\{(C_{PFC})_A{}^{ij}\,, H_T\} - \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\nabla D)_B{}^{ij} = (C_{PFC1})_A{}^{ij}\,,
\end{aligned} \tag{D.79}$$

što daje rezultat

$$(C_{PFC})_A{}^{ij} = \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} \,.$$

Dobija se da je generator:

$$(G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} = \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla D)_A{}^{ij} \,. \tag{D.80}$$

U ovom trenutku, korisno je rezimirati rezultate i uvesti novu notaciju:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (G_1)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (G_0)_{\mathfrak{m}\alpha}{}^i &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i \Phi(B)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i \Phi(\mathcal{F})_\alpha{}^i \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (\tilde{M}_1)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^\alpha{}_i (\tilde{M}_0)_\alpha{}^i \,. \end{aligned} \tag{D.81}$$

Primetimo da se vremenski izvod parametra kombinuje sa nekim drugim članovima u kovarijantni izvod u vremenskom pravcu.

Za drugi deo ukupnog generatora dobijamo:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (G_1)_{\mathfrak{g}\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (G_0)_{\mathfrak{g}\alpha} &= -\dot{\epsilon}_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \big(B_{\beta 0 i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} - \alpha^\beta{}_0 f_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi(\alpha)_\gamma \\ &\quad + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)_b{}^i - \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij} \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla B)_\alpha \big) \\ &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \Phi(\alpha)_\alpha - \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha \big(B_{\beta 0 i} f_{\alpha\gamma}{}^\beta \Phi(B)^{\gamma i} \\ &\quad + C_{a0} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(C)^b + \beta_{a0i} \rhd_{\alpha b}{}^a \Phi(\beta)_b{}^i - \frac{1}{2}\gamma^A{}_{0ij} \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} - \Phi(\nabla B)_\alpha \big) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (\tilde{G}_1)_\alpha + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^\alpha (\tilde{G}_0)_\alpha \,. \end{aligned} \tag{D.82}$$

Osim toga, sledi:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (G_1)_{\mathfrak{h}a}{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (G_0)_{\mathfrak{h}a}{}^i &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i \Phi(\beta)_\alpha{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i \big(C_{b0} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} - 2\beta^b{}_{0j} X_{(ab)}{}^A \Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \Phi(\nabla C)_a{}^i \big) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (\tilde{H}_1)_a{}^i + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a{}_i (\tilde{H}_0)_a{}^i \,, \end{aligned} \tag{D.83}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\mathfrak{n}}{}^a (G_1)_{\mathfrak{n}a} + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (G_0)_{\mathfrak{n}a} &= -\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \Phi(C)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\beta_{b0i} \rhd_{\alpha a}{}^b \Phi(B)^{\alpha i} + \Phi(\mathcal{G})_a) \\ &= \nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\tilde{N}_1)_a + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a (\tilde{N}_0)_a \,. \end{aligned} \tag{D.84}$$

Na kraju, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} (G_1)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} (G_0)_{\mathfrak{l}A}{}^{ij} &= \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} \Phi(\gamma)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} \alpha^\alpha{}_0 \rhd_{\alpha A}{}^B \Phi(\gamma)_B{}^{ij} \\ &\quad - \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} \Phi(\nabla D)_A{}^{ij} \\ &= \frac{1}{2}\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} \Phi(\gamma)_A{}^{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} \Phi(\nabla D)_A{}^{ij} \\ &= \frac{1}{2}\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} (\tilde{L}_1)_A{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{ij} (\tilde{L}_0)_A{}^{ij} \,. \end{aligned} \tag{D.85}$$

D.3.3 Izračunavanje algebre simetrija 3BF dejstva

Da bi se dobila struktura grupe simetrija $3BF$ dejstva, kao što je predstavljeno u podsekciji 6.1.2, moramo najpre izračunati komutatore između generatora G-, H-, L-, M- i N-gejdž simetrija. Ovaj proces je opisan u odeljku 6.1.2, dok su detalji izračunavanja dati u ovom odeljku.

Komutator $[H, H]$

Sada ćemo izračunati komutator generatora H-gejdž transformacija, tj. jednačinu (6.49). Nakon transformacije promenljivih pri H-gejdž transformacijama za parametar $\epsilon_{\mathfrak{h}1}$ dobija se

$$\alpha' = \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}\,, \tag{D.86}$$

$$\beta' = \beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\,, \tag{D.87}$$

$$\gamma' = \gamma + \{\beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}, \epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf} + \{\epsilon_{\mathfrak{h}1}, \beta\}_{\rm pf}\,, \tag{D.88}$$

$$B' = B - (C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}1})\wedge^{\mathcal{T}}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge^{\mathcal{D}}\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge^{\mathcal{D}} D\,, \tag{D.89}$$

$$C' = C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}1}\,, \tag{D.90}$$

$$D' = D\,. \tag{D.91}$$

Zatim, daljom transformacijom varijabli H-gejdž transformacijama sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{h}2}$ dobija se:

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}2}\,,\\
\beta'' &= \beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}2}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}2} - \epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\,,\\
\gamma'' &= \gamma + \{\beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}, \epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf} + \{\epsilon_{\mathfrak{h}1}, \beta\}_{\rm pf}\\
&\quad + \{\beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}2}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}2} - \epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}, \epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\rm pf}\\
&\quad + \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}, \beta - \overset{\alpha-\partial\epsilon_{\mathfrak{h}1}}{\nabla}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf}\,,\\
B'' &= B - (C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}1})\wedge^{\mathcal{T}}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - \epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge^{\mathcal{D}}\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge^{\mathcal{D}} D\\
&\quad - (C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}2} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}2})\wedge^{\mathcal{T}}\epsilon_{\mathfrak{h}2} - \epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge^{\mathcal{D}}\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge^{\mathcal{D}} D\,,\\
C'' &= C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}1} - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}2} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}2}\,,\\
D'' &= D\,.
\end{aligned} \tag{D.92}$$

Vidimo da za promenljive $\alpha^\alpha{}_\mu$, $C^a{}_\mu$ i D^A dobijamo da transformacije komutiraju:

$$\begin{aligned}
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}\alpha^\alpha{}_\mu &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}\alpha^\alpha{}_\mu\,,\\
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}C^a{}_\mu &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}C^a{}_\mu\,,\\
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}D^A &= e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}D^A\,.
\end{aligned} \tag{D.93}$$

Za preostale promenljive, $\beta^a{}_{\mu\nu}$, $\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$ i $B^\alpha{}_{\mu\nu}$, razlika jednačine (D.3.3) i analogne jednačine gde $\epsilon_{\mathfrak{h}1} \leftrightarrow \epsilon_{\mathfrak{h}2}$ je:

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}\right)\frac{1}{2}\beta^a{}_{\mu\nu} &= \partial_b{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^b{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^c{}_{|\nu]} \rhd{}_{\alpha c}{}^a - \partial_b{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^b{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^c{}_{|\nu]} \rhd{}_{\alpha c}{}^a \\
&= 2\delta_A{}^a\, X_{(bc)}{}^A \epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^b{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^c{}_{|\nu]} \\
&= \delta_A{}^a(\{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\rm pf} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf})^A{}_{\mu\nu}\,, \\
\left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}\right)\frac{1}{3!}\gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &= 2(\partial_{[\mu}\epsilon_{\mathfrak{h}_1}{}^a{}_\nu)\epsilon_{\mathfrak{h}_2}{}^b{}_{\rho]}X_{(ab)}{}^A + 2\epsilon_{\mathfrak{h}_1}{}^a{}_{[\nu}(\partial_\mu\epsilon_{\mathfrak{h}_2}{}^b{}_{\rho]})X_{(ab)}{}^A \\
&\quad +2\alpha^\alpha{}_{[\mu}\epsilon_{\mathfrak{h}_1}{}^a{}_\nu\epsilon_{\mathfrak{h}_2}{}^b{}_{\rho]}X_{(ab)}{}^B \rhd_{\alpha B}{}^A \\
&= \nabla_{[\mu}(\{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\rm pf} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf})^A{}_{\nu\rho]}\,, \\
\left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}\right)\frac{1}{2}B^\alpha{}_{\mu\nu} &= D^A\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^a{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^b{}_{|\nu]}(X_{1Aa}{}^c + X_{2Aa}{}^c)\mathcal{T}_{cb}{}^\alpha \\
&\quad -D^A\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^b{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^a{}_{|\nu]}(X_{1Ab}{}^c + X_{2Ab}{}^c)\mathcal{T}_{ca}{}^\alpha \\
&= -2D_A\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^a{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^b{}_{|\nu]}(X_{(ac)}{}^A \rhd_{\alpha b}{}^c + X_{(bc)}{}^A \rhd_{\alpha a}{}^c) \\
&= -2D_A\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^a{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^b{}_{|\nu]}X_{(ab)}{}^B \rhd_{\alpha B}{}^A \\
&= (D \wedge^{\mathcal{S}} (\{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\rm pf} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf})^\alpha{}_{\mu\nu}\,.
\end{aligned}
\tag{D.94}
$$

Upoređivanjem jednačina (D.93) i (D.94) sa jednačinama (6.45), zaključujemo da je komutator dve H-gejdž transformacije L-gejdž transformacija sa parametrom $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^A{}_{\mu\nu} = 4\epsilon_{\mathfrak{h}1}{}^a{}_{[\mu|}\epsilon_{\mathfrak{h}2}{}^b{}_{|\nu]}X_{(ac)}{}^A$:

$$
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H} - e^{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\cdot H} = 2\left(\{\epsilon_{\mathfrak{h}1}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}2}\}_{\rm pf} - \{\epsilon_{\mathfrak{h}2}\wedge\epsilon_{\mathfrak{h}1}\}_{\rm pf}\right)\cdot \hat{L}\,. \tag{D.95}
$$

Komutator $[\boldsymbol{H},\boldsymbol{N}]$

Izračunajmo komutator između generatora H-gejdž i N-gejdž transformacija, tj. izvedimo jednačinu (6.81). Ovo se radi izračunavanjem izraza

$$
\left(e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N} - e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}\right)A\,, \tag{D.96}
$$

za sve varijable A prisutne u teoriji. Primećujemo da je za varijable $\alpha^\alpha{}_\mu$, $\beta^a{}_{\mu\nu}$, $\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}$ i D^A dobijeno da transformacije komutiraju:

$$
\begin{aligned}
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}\alpha^\alpha{}_\mu &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}\alpha^\alpha{}_\mu\,, \\
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}\beta^a{}_{\mu\nu} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}\beta^a{}_{\mu\nu}\,, \\
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}\gamma^A{}_{\mu\nu\rho} &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}\gamma^A{}_{\mu\nu\rho}\,, \\
e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}D^A &= e^{\epsilon_{\mathfrak{n}}\cdot N}e^{\epsilon_{\mathfrak{h}}\cdot H}D^A\,.
\end{aligned}
\tag{D.97}
$$

Preostale varijable $B^\alpha{}_{\mu\nu}$ i $C^a{}_\mu$ se pri H-gejdž transformacijama transformišu na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
B' &= B - (C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}})\wedge^{\mathcal{T}}\epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}}\wedge^{\mathcal{D}}\epsilon_{\mathfrak{h}}\wedge^{\mathcal{D}} D\,, \\
C' &= C - D\wedge^{\mathcal{X}_1}\epsilon_{\mathfrak{h}} - D\wedge^{\mathcal{X}_2}\epsilon_{\mathfrak{h}}\,.
\end{aligned}
\tag{D.98}
$$

Daljom transformacijom ovih varijabla N-gejdž transformacijama:

$$
\begin{aligned}
B'' &= B' - \beta' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} \\
&= B - (C - D \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} D - (\beta - \overset{\{\alpha^\alpha - \partial_a{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a\}}{\nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}) \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\
C'' &= C' - \overset{\{\alpha^\alpha - \partial_a{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a\}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{n}} \\
&= C - D \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \overset{\{\alpha^\alpha - \partial_a{}^\alpha \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a\}}{\nabla} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,.
\end{aligned}
\tag{D.99}
$$

Zatim, izmenimo redosled transformacija. Najpre, transformacija varijabli pri N-gejdž transformacijama je

$$
\begin{aligned}
B^{\cdot} &= B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\
C^{\cdot} &= C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}\,,
\end{aligned}
\tag{D.100}
$$

dok dalja H-gejdž transformacija daje:

$$
\begin{aligned}
B^{\cdot\cdot} &= B^{\cdot} - (C^{\cdot} - D^{\cdot} \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D^{\cdot} \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} D^{\cdot} \\
&= B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}} - (C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}} - (D + \delta \epsilon_{\mathfrak{n}}) \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - (D + \delta \epsilon_{\mathfrak{n}}) \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \wedge^{\tau} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} (D + \delta \epsilon_{\mathfrak{n}})\,, \\
C^{\cdot\cdot} &= C^{\cdot} - D^{\cdot} \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D^{\cdot} \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}} \\
&= C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}} - (D + \delta \epsilon_{\mathfrak{n}}) \wedge^{\chi_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - (D + \delta \epsilon_{\mathfrak{n}}) \wedge^{\chi_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}\,.
\end{aligned}
\tag{D.101}
$$

Razlika jednačina (D.99) i (D.101) je:

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) B^\alpha \quad &= \quad \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b \mathcal{T}_{ab}{}^\alpha + \delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^d X_{1Ab}{}^c \mathcal{T}_{cd}{}^\alpha \\
&\quad + \delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^d X_{2Ab}{}^c \mathcal{T}_{cd}{}^\alpha - \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b \delta_A{}^c \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^c D_{Aab}{}^\alpha\,, \\
&\quad \nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^b \mathcal{T}_{ab}{}^\alpha + \partial_a{}^\beta \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \rhd_{\beta c}{}^b \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^c \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^d \mathcal{T}_{bd}{}^\alpha - \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b f_{ab}{}^c \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^d \mathcal{T}_{cd}{}^\alpha\,, \\
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) C^c \quad &= \quad -(\delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}^a) \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b X_{1Ab}{}^c - (\delta^A{}_a \epsilon_{\mathfrak{n}}^a) \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b X_{2Ab}{}^c - \partial_a{}^\beta \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \rhd_{\beta b}{}^c \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^b\,,
\end{aligned}
\tag{D.102}
$$

Primenom definicija preslikavanja $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, χ_1 i χ_2 prethodne jednačine se svode na

$$
\begin{aligned}
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) B^\alpha &= \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^b \mathcal{T}_{ab}{}^\alpha - \nabla \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^a \wedge \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^b \mathcal{T}_{ab}{}^\alpha = \nabla (\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}})^\alpha\,, \\
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) C^c &= \partial^c{}_\alpha (\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}})^\alpha\,,
\end{aligned}
\tag{D.103}
$$

Upoređivanjem jednačina (D.97) i (D.103) sa jednačinom (6.58) dobijamo konačan rezultat za komutator

$$
\big(\mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} - \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{n}} \cdot N} \mathrm{e}^{\epsilon_{\mathfrak{h}} \cdot H}\big) = -(\epsilon_{\mathfrak{n}} \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}}) \cdot M\,. \tag{D.104}
$$

Dodatak E

Invarijantnost sume po stanjima na Pahnerove poteze

E.1 Invarijantnost $2BF$ sume po stanjima na Pahnerove poteze

E.1.1 $n = 3$

Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 4$

Leva strana Pahnerovog poteza $1 \leftrightarrow 4$ data je izrazom (8.20) i ne može se pojednostaviti:

$$l.s. = \delta_H\big(h_{134}\, g_{34} \rhd h_{123}\, h_{234}^{-1}\, h_{124}^{-1}\big)\,. \tag{E.1}$$

Analizirajmo čemu je jednaka *desna strana poteza* $1 \leftrightarrow 4$ data izrazom (8.21). Integralimo g_{15} koristeći $\delta_G(g_{125})$, g_{25} koristeći $\delta_G(g_{235})$ i g_{35} koristeći $\delta_G(g_{345})$:

$$\begin{aligned} g_{15} &= \partial(h_{125})\, g_{25}\, g_{12}\,, \\ g_{25} &= \partial(h_{235})\, g_{35}\, g_{23}\,, \\ g_{35} &= \partial(h_{345})\, g_{45}\, g_{34}\,. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Zatim, integralimo h_{135} koristeći $\delta_H(h_{1345})$, h_{125} koristeći $\delta_H(h_{1245})$ i h_{235} koristeći $\delta_H(h_{2345})$:

$$\begin{aligned} h_{135} &= h_{145}\, (g_{45} \rhd h_{134})\, h_{345}^{-1}\,, \\ h_{125} &= h_{145}\, (g_{45} \rhd h_{124})\, h_{245}^{-1}\,, \\ h_{235} &= h_{245}\, (g_{45} \rhd h_{234})\, h_{345}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{E.3}$$

Preostale δ-funkcije na grupi G svode se na $\delta_G(e)^3$. Pokažimo to. Korišćenjem jednačina (E.3) i identiteta (8.2) za trougao (234):

$$\begin{aligned} \delta_G(g_{245}) &= \delta_G\big(\partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\, g_{25}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\, g_{23}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, \partial(h_{235})^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\, g_{23}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, \partial(h_{345})\, g_{45} \rhd \partial(h_{234})^{-1}\, \partial(h_{245})^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(g_{45}\, g_{24}\, g_{23}^{-1}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, \partial(h_{345})^{-1}\, \partial(h_{345})\, g_{45}\, g_{34}\, g_{23}\, g_{24}^{-1}\, g_{45}^{-1}\big) \\ &= \delta_G(e)\,. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Zatim, za preostale dve δ-funkcije na grupi G dobijamo da su ekvivalentne prvoj, pa sledi

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{135}) &= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{13}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45} \triangleright \partial(h_{134})\, \partial(h_{345})^{-1}\, \partial(h_{345})\, g_{45}\, g_{34}\, g_{13}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{125})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, \partial(h_{134}) g_{45}^{-1}\, g_{45}\, g_{34}\, g_{13}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45} \triangleright \partial(h_{124})^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{45}\, g_{14}\, g_{13}^{-1}\, g_{34}^{-1}\, g_{34}\, g_{13}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\, g_{12}\, g_{14}^{-1}\, g_{45}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{245}\big) \\
&= \delta_G(e)\,,
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{145}) &= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1} \partial(h_{125})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45} \triangleright \partial(h_{124})^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{45}\, g_{14}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45} \partial(h_{124})^{-1}\, g_{45}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{14}\, g_{12}^{-1}\, g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\, g_{12}\, g_{14}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{25}^{-1}\, \partial(h_{245})\, g_{45}\, g_{24}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{245}\big) \\
&= \delta_G(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.6}
$$

Koristili smo jednačine (E.2) i (E.3), kao i identitet (8.2) za trouglove (134) i (124). Zatim, analiziranjem $\delta_H(h_{1235})$ dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1235}) &= \delta_H\big(h_{135}\, (g_{35} \triangleright h_{123})\, h_{235}^{-1}\, h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{145}\, (g_{45} \triangleright h_{134})\, h_{345}^{-1}\, (g_{35} \triangleright h_{123})\, h_{235}^{-1}\, h_{245}\, g_{45} \triangleright h_{124}^{-1} h_{145}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \triangleright h_{134}\, h_{345}^{-1}\, (g_{35} \triangleright h_{123})\, (h_{245}\, (g_{45} \triangleright h_{234})\, h_{345}^{-1})^{-1}\, h_{245}\, g_{45} \triangleright h_{124}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \triangleright h_{134}\, h_{345}^{-1}\, (g_{35} \triangleright h_{123})\, h_{345}\, g_{45} \triangleright h_{234}^{-1}\, g_{45} \triangleright h_{124}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \triangleright h_{134}\, (\partial(h_{345})^{-1} g_{35}) \triangleright h_{123}\, g_{45} \triangleright h_{234}^{-1}\, g_{45} \triangleright h_{124}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \triangleright h_{134}\, (g_{45} g_{34}) \triangleright h_{123}\, g_{45} \triangleright h_{234}^{-1}\, g_{45} \triangleright h_{124}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{134}\, g_{34} \triangleright h_{123}\, h_{234}^{-1}\, h_{124}^{-1}\big)\,.
\end{aligned}
\tag{E.7}
$$

Zaključujemo dakle da je *desna strana poteza*:

$$
d.s. = \delta_G(e)^3\, \delta_H\big(h_{134}\, g_{34} \triangleright h_{123}\, h_{234}^{-1}\, h_{124}^{-1}\big)\,. \tag{E.8}
$$

Konstante ispred integrala su $|G|^{-2}|H|$ sa leve strane poteza, odnosno $|G|^{-5}|H|$ sa desne strane poteza, što kompenzuje razliku u faktorima $|G|$ u izrazima (E.1) i (E.8). Zaključujemo da je suma po stanjima (8.16) invarijantna na $1 \leftrightarrow 4$ Pahnerov potez.

Pahnerov potez 2 ↔ 3

Sa *leve strane* $2 \leftrightarrow 3$ Pahnerovog poteza imamo integral:

$$\int \mathrm{d}h_{234}\, \delta_G(h_{234})\, \delta_H(h_{1234})\, \delta_H(h_{2345})\,. \tag{E.9}$$

Najpre, integralimo h_{234} koristeći $\delta_H(h_{2345})$. Dobijamo da je

$$h_{234} = g_{45}^{-1} \rhd h_{245}^{-1}\, g_{45}^{-1} \rhd h_{235}\, g_{45}^{-1} \rhd h_{345}\,, \tag{E.10}$$

pa, zamenjujući ovaj rezultat u izraz za preostalu δ-funkciju na grupi G i korišćenjem identiteta (8.2) za trouglove (245), (235) i (345), sledi:

$$\begin{aligned} \delta_G(g_{234}) &= \delta_G\big(\partial(h_{234})\, g_{34}\, g_{23}\, g_{24}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(g_{45}^{-1} \rhd (\partial(h_{245})^{-1}\, \partial(h_{235})\, \partial(h_{345}))\, g_{34}\, g_{23}\, g_{24}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(g_{45}^{-1}\, g_{45}\, g_{24}\, g_{25}\, g_{25}^{-1}\, g_{23}^{-1}\, g_{35}^{-1}\; g_{35}^{-1}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, g_{45}\, g_{34}\, g_{23}\, g_{24}^{-1}\big) \\ &= \delta_G(e)\,. \end{aligned} \tag{E.11}$$

Preostala δ-funkcija na grupi H je:

$$\begin{aligned} \delta_H(h_{1234}) &= \delta_H\big(h_{134}\, (g_{34} \rhd h_{123})\, h_{234}^{-1}\, h_{124}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{134}\, (g_{34} \rhd h_{123})\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{345}^{-1}\, h_{235}^{-1}\, h_{245})\, h_{124}^{-1}\big)\,. \end{aligned} \tag{E.12}$$

Zaključujemo da je *leva strana poteza* jednaka:

$$l.s. = |G|\, \delta_H\big(h_{134}\, (g_{34} \rhd h_{123})\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{345}^{-1}\, h_{235}^{-1}\, h_{245})\, h_{124}^{-1}\big)\,. \tag{E.13}$$

Sa *desne strane* Pahnerovog poteza imamo integral:

$$\int \mathrm{d}g_{15}\, \mathrm{d}h_{125}\, \mathrm{d}h_{135}\, \mathrm{d}h_{145}\, \delta_G(g_{125})\delta_G(g_{135})\delta_G(g_{145})\delta_H(h_{1235})\delta_H(h_{1245})\delta_H(h_{1345})\,. \tag{E.14}$$

Najpre, integralimo g_{15} koristeći $\delta_G(g_{135})$,

$$g_{15} = \partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{13}\,, \tag{E.15}$$

a zatim h_{125} koristeći $\delta_H(h_{1235})$ i h_{135} koristeći $\delta_H(h_{1345})$:

$$\begin{aligned} h_{125} &= h_{135}\, (g_{35} \rhd h_{123})\, h_{235}^{-1}\,, \\ h_{135} &= h_{145}\, (g_{45} \rhd h_{134})\, h_{345}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{E.16}$$

Koristeći ove rezultate u izrazima za preostale dve δ-funkcije na grupi G dobijamo da se svode na $\delta_G(e)^2$:

$$\begin{aligned}
\delta_G(g_{125}) &= \delta_G\big(\partial(h_{125})\, g_{25}\, g_{12}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35} \rhd \partial(h_{123})\, \partial(h_{235})^{-1}\, g_{25}\, g_{12}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, \partial(h_{135})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{35} \rhd \partial(h_{123})\, \partial(h_{235})^{-1}\, g_{25}\, g_{12}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{35}\, g_{13}\, g_{12}^{-1}\, g_{23}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, g_{35}\, g_{23}\, g_{25}^{-1}\, g_{25}\, g_{12}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\big) \\
&= \delta_G(e)\,,
\end{aligned} \tag{E.17}$$

$$\begin{aligned}
\delta_G(g_{145}) &= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, \partial(h_{135})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, \partial(h_{345})\, g_{45} \rhd \partial(h_{134})^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(g_{45}\, g_{14}\, g_{13}^{-1}\, g_{35}^{-1}\, g_{35}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, g_{45}\, g_{34}\, g_{13}\, g_{14}^{-1}\, g_{45}^{-1}\big) \\
&= \delta_G(e)\,.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Preostala δ-funkcija na grupi H je:

$$\begin{aligned}
\delta_H(h_{1245}) &= \delta_H\big(h_{145}\,(g_{45} \rhd h_{124})\, h_{245}^{-1}\, h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{145}\,(g_{45} \rhd h_{124})\, h_{245}^{-1}\, h_{235}\, g_{35} \rhd h_{123}^{-1}\, h_{135}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{145}\, g_{45} \rhd h_{124}\, h_{245}^{-1}\, h_{235}\, g_{35} \rhd h_{123}^{-1}\, h_{345}\, g_{45} \rhd h_{134}^{-1}\, h_{145}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \rhd h_{124}\, h_{245}^{-1}\, h_{235}\, g_{35} \rhd h_{123}^{-1}\, h_{345}\, g_{45} \rhd h_{134}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \rhd h_{124}\, h_{245}^{-1}\, h_{235}\;\, h_{345}\,(\partial(h_{345})^{-1} g_{35}) \rhd h_{123}^{-1}\, g_{45} \rhd h_{134}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{45} \rhd h_{124}\, h_{245}^{-1}\, h_{235}\;\, h_{345}\,(g_{45} g_{34}) \rhd h_{123}^{-1}\, g_{45} \rhd h_{134}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{124}\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{245}^{-1}\, h_{235}\, h_{345})\, g_{34} \rhd h_{123}^{-1}\, h_{134}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{134}\,(g_{34} \rhd h_{123})\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{345}^{-1}\, h_{235}^{-1}\, h_{245})\, h_{124}^{-1}\big)\,.
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Vidimo da su izrazi (E.12) i (E.19) jednaki. Preostala integracija po elementu h_{145} je trivijalna, pa je *desna strana poteza*:

$$\begin{aligned}
d.s. &= \delta_G(e)^2\, \delta_H\big(h_{134}\,(g_{34} \rhd h_{123})\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{345}^{-1}\, h_{235}^{-1}\, h_{245})\, h_{124}^{-1}\big) \\
&= |G|^2\, \delta_H\big(h_{134}\,(g_{34} \rhd h_{123})\, g_{45}^{-1} \rhd (h_{345}^{-1}\, h_{235}^{-1}\, h_{245})\, h_{124}^{-1}\big)\,.
\end{aligned} \tag{E.20}$$

Razlika u faktorima $|G|$ u izrazima (E.13) i (E.20) kompenzovana je konstantama ispred integrala – faktorom $|G|^{-4}|H|^1$ sa desne strane i faktorom $|G|^{-3}|H|^1$ sa leve strane poteza. Zaključujemo da je suma (8.16) invarijantna na $2 \leftrightarrow 3$ Pahnerov potez.

E.1.2 $n = 4$

Pahnerov potez $1 \leftrightarrow 5$

Leva strana Pahnerovog poteza $1 \leftrightarrow 5$ data je izrazom (8.25) i ne može se pojednostaviti. Ispitajmo čemu je jednaka *desna strana poteza*, data jednačinom (8.24). Najpre integralimo po varijabli g_{12} iskoristivši pritom δ-funkciju $\delta_G(g_{123})$, zatim varijabli g_{13} koristeći $\delta_G(g_{134})$, g_{14} koristeći $\delta_G(g_{145})$ i varijabli g_{15} koristeći $\delta_G(g_{156})$:

$$\begin{aligned} g_{12} = &\ g_{23}^{-1}\,\partial(h_{123})^{-1}\,g_{13}\,, \\ g_{13} = &\ g_{34}^{-1}\,\partial(h_{134})^{-1}\,g_{14}\,, \\ g_{14} = &\ g_{45}^{-1}\,\partial(h_{145})^{-1}\,g_{15}\,, \\ g_{15} = &\ g_{56}^{-1}\,\partial(h_{156})^{-1}\,g_{16}\,. \end{aligned} \tag{E.21}$$

Zatim, integralimo varijablu h_{123} koristeći $\delta_H(h_{1234})$, h_{124} koristeći $\delta_H(h_{1245})$, h_{125} koristeći $\delta_H(h_{1256})$, h_{134} koristeći $\delta_H(h_{1345})$, h_{135} koristeći $\delta_H(h_{1356})$ i h_{145} koristeći $\delta_H(h_{1456})$:

$$\begin{aligned} h_{123} = &\ g_{34}^{-1} \triangleright h_{134}^{-1}\,g_{34}^{-1} \triangleright h_{124}\,g_{34}^{-1} \triangleright h_{234}\,, \\ h_{124} = &\ g_{45}^{-1} \triangleright h_{145}^{-1}\,g_{45}^{-1} \triangleright h_{125}\,g_{45}^{-1} \triangleright h_{245}\,, \\ h_{125} = &\ g_{56}^{-1} \triangleright h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{126}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{256}\,, \\ h_{134} = &\ g_{45}^{-1} \triangleright h_{145}^{-1}\,g_{45}^{-1} \triangleright h_{135}\,g_{45}^{-1} \triangleright h_{345}\,, \\ h_{135} = &\ g_{56}^{-1} \triangleright h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{136}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{356}\,, \\ h_{145} = &\ g_{56}^{-1} \triangleright h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{146}\,g_{56}^{-1} \triangleright h_{456}\,. \end{aligned} \tag{E.22}$$

Nakon ovih integracija šest δ-funkcija na grupi G prisutnih sa desne strane poteza svode se na $\delta_G(e)^6$. Dobijamo:

$$\delta_G(g_{124}) = \delta_G(g_{125}) = \delta_G(g_{126}) = \delta_G(g_{135}) = \delta_G(g_{136}) = \delta_G(g_{146}) = \delta_G(e)\,.$$

Detalji računa su isti kao i u slučaju $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza za $3BF$ sumu po stanjima i dati su u narednom odeljku. Pokažimo da se sada preostale δ-funkcije na grupi H svedu na $\delta_H(e)^4$. Najpre, pravolinijskim računom dobijamo za $\delta_H(h_{1235})$:

$$\begin{aligned} \delta_H(h_{1235}) &= \delta_H\big(h_{135}\,(g_{35} \triangleright h_{123})\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{135}\,(g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright (h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{135}\,(g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright \big((g_{45}^{-1} \triangleright (h_{345}^{-1}\,h_{135}^{-1}\,h_{145}\,h_{145}^{-1}\,h_{125}\,h_{245})h_{234}\big)\ h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{135}\,h_{345}h_{345}^{-1}\,h_{135}^{-1}\,h_{125}\,h_{245}h_{345}^{-1}(g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright h_{234}\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{245}h_{345}^{-1}(g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright h_{234}\,h_{235}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{245}h_{345}^{-1}\,h_{345}\,(\partial(h_{345})^{-1}g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright h_{234}\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1}\big) \\ &= \delta_H\big(h_{245}\,g_{45} \triangleright h_{234}\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1}\big) \\ &= \delta_H(e)\,. \end{aligned} \tag{E.23}$$

U prethodnom smo koristili identitet $g_{45} = \partial(h_{345})^{-1}g_{35}g_{34}^{-1}$ za trougao (345), kao i izraz $h_{245}\,g_{45} \triangleright h_{234}\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1} = e$ za tetraedar (2345). Analognim postupkom za vrednost δ-funkcije

$\delta_H(h_{1236})$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta_H(h_{1236}) &= \delta_H\big(h_{136}\,(g_{36}\rhd h_{123})\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\,h_{346}^{-1}\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,g_{46}\rhd(h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{346}^{-1}\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,g_{46}\rhd(h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,g_{46}\rhd h_{234}^{-1}\,h_{246}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,(g_{46}g_{45}^{-1})\rhd(h_{345}^{-1}\,h_{135}^{-1}\,h_{125}\,h_{245})\,h_{246}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,(g_{46}g_{45}^{-1})\rhd(h_{345}^{-1}\,g_{56}^{-1}\rhd(h_{356}^{-1}\,h_{136}^{-1}\,h_{126}\,h_{256})h_{245})\,h_{246}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,(g_{46}g_{45}^{-1})\rhd h_{345}^{-1}\,h_{456}\,h_{356}^{-1}\,h_{136}^{-1}\,h_{126}\,h_{256}\,g_{56}\rhd h_{245}\,h_{456}^{-1}\,h_{246}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}\,h_{456}\,g_{56}\rhd h_{345}^{-1}\,h_{356}^{-1}\,h_{136}^{-1}\,h_{126}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{136}^{-1}\,h_{126}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Koristili smo identitet (8.6) za tetraedre (2456) i (3456), kao i identitet (8.2) za trougao (456).

Sličnim postupkom dobijamo da su δ-funkcije $\delta_H(h_{1246})=\delta_H(h_{1346})=\delta_H(e)$. Dobijamo da je *desna strana* poteza jednaka:

$$d.s. = \delta_G(e)^6\delta_H(e)^4 = |G|^6|H|^4\,. \tag{E.25}$$

Faktori u izrazu (E.25) kompenzovani su konstantama ispred integrala – faktorom $|G|^{-11}|H|^{-4}$ sa desne strane i faktorom $|G|^{-5}|H|^0$ sa leve strane poteza. Zaključujemo da je suma (8.16) invarijantna na $1\leftrightarrow 5$ Pahnerov potez.

Pahnerov potez $2\leftrightarrow 4$

Leva strana poteza jednaka je δ-funkciji

$$\delta_H(h_{2345}) = h_{235}\,h_{345}\,(g_{45}\rhd h_{234}^{-1})\,h_{245}^{-1}\,. \tag{E.26}$$

Da bismo videli čemu je jednaka leva strana poteza, koristićemo Lemu 17.

Lema 17 *Neka je za dati 4-simplex $(jk\ell mn)$ zadovoljen identitet (8.6) za četiri tetraedra $(k\ell mn)$, $(j\ell mn)$, $(jkmn)$ i $(jk\ell n)$ i identitet (8.2) za sve trouglove na njihovoj granici, sledi da je identitet (8.6) takođe zadovoljen za peti tetraedar $(jk\ell m)$.*

Na osnovu ovog opšteg rezultata, možemo pokazati da se leva strana poteza svodi na

$$\delta_H(h_{2345}) = \delta_H(e) = |H|\,. \tag{E.27}$$

Ispitajmo sada čemu je jednaka *desna strana poteza*, tj. integral (8.27):

$$\int dg_{16}\int dh_{126}dh_{136}dh_{146}dh_{156}\delta_G(g_{126})\delta_G(g_{136})\delta_G(g_{146})\delta_G(g_{156})\delta_H(h_{1236})\delta_H(h_{1246})\delta_H(h_{1256})\delta_H(h_{1346})\delta_H(h_{1356})\delta_H(h_{1456}). \tag{E.28}$$

Prvo integralimo g_{16} koristeći $\delta_G(g_{126})$,

$$g_{16} = \partial(h_{126})\,g_{26}\,g_{12}\,. \tag{E.29}$$

Zatim, integralimo h_{126} koristeći $\delta_H(h_{1236})$, h_{136} koristeći $\delta_H(h_{1346})$ i h_{146} koristeći $\delta_H(h_{1456})$, na osnovu čega dobijamo

$$
\begin{aligned}
h_{126} = &\quad h_{136}\,(g_{36} \triangleright h_{123})\,h_{236}^{-1}\,,\\
h_{136} = &\quad h_{146}\,(g_{46} \triangleright h_{134})\,h_{346}^{-1}\,,\\
h_{146} = &\quad h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{145})\,h_{456}^{-1}\,.
\end{aligned}
\tag{E.30}
$$

Preostale tri δ-funkcije na grupi G svode se na $\delta_G(e)^3$, tj. pokazuje se da je $\delta_G(g_{136}) = \delta_G(g_{146}) = \delta_G(g_{156}) = \delta_G(e)$. Dokaz je isti kao u slučaju $3BF$, za detalje pogledati sledeći odeljak.

Preostale tri δ-funkcija na grupi H svode se na $\delta_H(e)^3$, sličnim postupkom kao i u slučaju $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza, tj. dobijamo $\delta_H(h_{1356}) = \delta_H(h_{1246}) = \delta_H(h_{1256}) = \delta_H(e)$. Najpre, pokažimo da je $\delta_H(h_{1356}) = \delta_H(e)$:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1356}) &= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{135})\,h_{356}^{-1}\,h_{136}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{135})\,h_{356}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{146}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{56} \triangleright h_{135}\,h_{356}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{456}\,g_{56} \triangleright h_{145}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{56} \triangleright (g_{45} \triangleright h_{134}h_{345})\,h_{356}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{456}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{134}\,h_{456}\,g_{56} \triangleright h_{345}\,h_{356}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{456}\,g_{56} \triangleright h_{345}\,h_{356}^{-1}\,h_{346}\big)\\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.31}
$$

Zatim, δ-funkcija $\delta_H(h_{1246})$ je:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1246}) &= \delta_H\big(h_{146}\,(g_{46} \triangleright h_{124})\,h_{246}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(h_{146}\,(g_{46} \triangleright h_{124})\,h_{246}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{146}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{124}\,h_{246}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{124}\,(\partial(h_{246})^{-1}\,\partial(h_{236})\,g_{36}) \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{246}^{-1}\,h_{236}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{124}\,(g_{46}g_{24}g_{23}^{-1}) \triangleright h_{123}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{234}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\big)\\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{124}\,g_{46} \triangleright h_{234}\,(g_{46}g_{34}) \triangleright h_{123}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\big)\\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.32}
$$

Preostala δ-funkcija $\delta_H(h_{1256})$ je jednaka:

$$\begin{aligned}
\delta_H(h_{1256}) &= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{125})\,h_{256}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{125})\,h_{256}^{-1}\,(h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{136}^{-1})\big) \\
&= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{125})\,h_{256}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{146}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{156}\,(g_{56} \triangleright h_{125})\,h_{256}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{456}g_{56} \triangleright h_{145}^{-1}h_{156}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{56} \triangleright h_{125}\,h_{256}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{456}g_{56} \triangleright h_{145}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{256}^{-1}\,h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,h_{456}g_{56} \triangleright (g_{45} \triangleright h_{124}h_{245}^{-1})\big) \\
&= \delta_H\big(h_{236}\,g_{36} \triangleright h_{123}^{-1}\,h_{346}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{124}\,h_{246}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{236}\,h_{346}\,(g_{46}g_{34}^{-1}) \triangleright h_{123}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{124}\,h_{246}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(g_{46} \triangleright h_{234}\,(g_{46}g_{34}^{-1}) \triangleright h_{123}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{134}^{-1}\,g_{46} \triangleright h_{124}\big) \\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned} \tag{E.33}$$

Preostala integracija – po elementu h_{156} grupe H je trivijalna, odnosno *desna strana* se konačno svodi na:

$$d.s. = \delta_G(e)^3\,\delta_H(e)^3 = |G|^3\,|H|^3\,. \tag{E.34}$$

Konstante ispred integrala su $|G|^{-8}|H|^{-1}$ sa leve strane poteza, odnosno $|G|^{-11}|H|^{-3}$ sa desne strane poteza, što kompenzuje razliku i izrazima (E.27) i (E.34), na osnovu čega zaključujemo da je suma po stanjima (8.16) invarijantna na $2 \leftrightarrow 4$ Pahnerov potez.

Pahnerov potez 3 ↔ 3

Analizirajmo najpre desnu stranu poteza, tj. integral:

$$\int_H dh_{123}\delta_G(g_{123})\,\delta_H(h_{1234})\delta_H(h_{1235})\delta_H(h_{1236})\,. \tag{E.35}$$

Integralimo h_{123} koristeći $\delta_H(h_{1234})$ i dobijamo:

$$h_{123} = g_{34}^{-1} \triangleright h_{134}^{-1}\,g_{34}^{-1} \triangleright h_{124}\,g_{34}^{-1} \triangleright h_{234}. \tag{E.36}$$

Može se pokazati da je preostala δ-funkcija na grupi G, δ-funkcija $\delta_G(g_{123}) = \delta_G(e)$, videti dokaz invarijantnosti $3BF$ sume po stanjima na $3 \leftrightarrow 3$ Paherov potez.

Za δ-funkciju $\delta_H(h_{1235})$, primenom identiteta (8.2) za trougao (345) i identiteta (8.6) za tetraedre (1345), (1245) i (2345) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1235}) &= \delta_H\big(h_{135}\,(g_{35} \triangleright h_{123})\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{135}\,(g_{35}g_{34}^{-1}) \triangleright (h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{135}\,h_{345}g_{45} \triangleright (h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{145}\,g_{45} \triangleright (h_{124}\,h_{234})\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1}\,h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{245}\,g_{45} \triangleright h_{234}\,h_{345}^{-1}\,h_{235}^{-1}\big) \\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.37}
$$

Za δ-funkciju $\delta_H(h_{1236})$, primenom identiteta (8.2) za trougao (346) i identiteta (8.6) za tetraedre (1346), (1246) i (2346) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1236}) &= \delta_H\big(h_{136}\,(g_{36} \triangleright h_{123})\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{136}\,(g_{36}g_{34}^{-1}) \triangleright (h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{136}\,h_{346}g_{46} \triangleright (h_{134}^{-1}\,h_{124}\,h_{234})\,h_{346}^{-1}\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{146}\,g_{46} \triangleright (h_{124}\,h_{234})\,h_{346}^{-1}\,h_{236}^{-1}\,h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\big(h_{246}\,g_{46} \triangleright h_{234}\,h_{346}^{-1}\,h_{236}^{-1}\big) \\
&= \delta_H(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.38}
$$

Zaključujemo da se izraz sa desne strane Pahnerovog poteza svodi na

$$
d.s. = \delta_G(e)\delta_H(e)^2 = |G|\,|H|^2\,. \tag{E.39}
$$

Analizirajmo sada *levu stranu poteza*, tj. integral:

$$
\int_H dh_{456}\delta_G(g_{456})\,\delta_H(h_{3456})\delta_H(h_{2456})\delta_H(h_{1456})\,. \tag{E.40}
$$

Integralimo h_{456} koristeći δ-funkciju $\delta_H(h_{3456})$. Zamenjujući svuda dobijeni izraz za h_{456} dobijamo da se δ-funkcija $\delta_G(g_{456})$, primenom identiteta (8.2) za trouglove (346), (356) i (345), svodi na:

$$
\delta_G(g_{456}) = \delta_G\big(e\big)\,. \tag{E.41}
$$

Sličnim postupkom kao i sa desne strane poteza, dobijamo da su δ-funkcije $\delta_H(h_{1456})$ i $\delta_H(h_{2456})$ jednake $\delta_H(e)^2$. Konačno dobijamo da je leva strana poteza jednaka:

$$
l.s. = \delta_G(e)\delta_H(e)^2 = |G|\,|H|^2\,. \tag{E.42}
$$

Broj k-simpleksa sa obe strane $3 \leftrightarrow 3$ poteza je isti za sve k, tj. koeficijenti ispred integrala su jednaki u ovom slučaju i prema tome nisu od značaja.

E.2 Invarijantnost $3BF$ sume po stanjima na Pahnerove poteze

U ovom dodatku prikazan je dokaz da je suma po stanjima (9.22) nezavisna od triangulacije mnogostrukosti, tj. invarijantna na Pahnerove poteze.

E.2.1 $n = 4$

Pahnerov potez 1 $\leftrightarrow$ 5

Koristeći identitet (2.90) δ-funkcija na *levoj strani poteza* $\delta_L(l_{23456})$ je:

$$\delta_L(l_{23456}) = \delta_L\big(l_{2346}{}^{-1}(h_{236} \rhd' l_{3456})l_{2356}h_{256} \rhd' (g_{56} \rhd l_{2345})l_{2456}{}^{-1}h_{246} \rhd' \{h_{456},(g_{56}g_{45}) \rhd h_{234}\}_{\mathrm{pf}}\big). \tag{E.43}$$

Ispitajmo čemu je jednaka *desna strana poteza*, data jednačinom (9.23) posle integracije. Najpre integralimo po varijabli g_{12} iskoristivši pritom δ-funkciju $\delta_G(g_{123})$, zatim varijabli g_{13} koristeći $\delta_G(g_{134})$, g_{14} koristeći $\delta_G(g_{145})$ i varijabli g_{15} koristeći $\delta_G(g_{156})$:

$$\begin{aligned} g_{12} =&\ g_{23}^{-1}\,\partial(h_{123})^{-1}\,g_{13}\,, \\ g_{13} =&\ g_{34}^{-1}\,\partial(h_{134})^{-1}\,g_{14}\,, \\ g_{14} =&\ g_{45}^{-1}\,\partial(h_{145})^{-1}\,g_{15}\,, \\ g_{15} =&\ g_{56}^{-1}\,\partial(h_{156})^{-1}\,g_{16}\,. \end{aligned} \tag{E.44}$$

Zatim, integralimo varijablu h_{123} koristeći $\delta_H(h_{1234})$, h_{124} koristeći $\delta_H(h_{1245})$, h_{125} koristeći $\delta_H(h_{1256})$, h_{134} koristeći $\delta_H(h_{1345})$, h_{135} koristeći $\delta_H(h_{1356})$ i h_{145} koristeći $\delta_H(h_{1456})$:

$$\begin{aligned} h_{123} =&\ g_{34}^{-1} \rhd h_{134}^{-1}\,g_{34}^{-1} \rhd \delta(l_{1234})^{-1}\,g_{34}^{-1} \rhd h_{124}\,g_{34}^{-1} \rhd h_{234}\,, \\ h_{124} =&\ g_{45}^{-1} \rhd h_{145}^{-1}\,g_{45}^{-1} \rhd \delta(l_{1245})^{-1}\,g_{45}^{-1} \rhd h_{125}\,g_{45}^{-1} \rhd h_{245}\,, \\ h_{125} =&\ g_{56}^{-1} \rhd h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd \delta(l_{1256})^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{126}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{256}\,, \\ h_{134} =&\ g_{45}^{-1} \rhd h_{145}^{-1}\,g_{45}^{-1} \rhd \delta(l_{1345})^{-1}\,g_{45}^{-1} \rhd h_{135}\,g_{45}^{-1} \rhd h_{345}\,, \\ h_{135} =&\ g_{56}^{-1} \rhd h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd \delta(l_{1356})^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{136}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{356}\,, \\ h_{145} =&\ g_{56}^{-1} \rhd h_{156}^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd \delta(l_{1456})^{-1}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{146}\,g_{56}^{-1} \rhd h_{456}\,. \end{aligned} \tag{E.45}$$

Nakon ovih integracija šest δ-funkcija na grupi G prisutnih sa desne strane poteza svode se na $\delta_G(e)^6$. Skicirajmo dokaz. Najpre,

$$\begin{aligned} \delta_G(g_{124}) &= \delta_G\big(\partial(h_{124})g_{24}g_{12}g_{14}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{124})g_{24}g_{23}^{-1}\partial(h_{123})^{-1}g_{13}g_{14}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{124})g_{24}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}\partial(h_{124})^{-1}\partial(h_{134})g_{34}g_{13}g_{14}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{124})g_{24}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}(g_{34}g_{23}^{-1}g_{24}^{-1})\partial(h_{124})^{-1}e\big) \\ &= \delta_G(e). \end{aligned} \tag{E.46}$$

Zatim, dobijamo

$$\begin{aligned} \delta_G(g_{125}) &= \delta_G\big(\partial(h_{125})g_{25}g_{12}g_{15}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{125})g_{25}g_{23}^{-1}\partial(h_{123})^{-1}g_{13}g_{15}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{125})g_{25}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}\partial(h_{124})^{-1}\partial(h_{134})g_{34}g_{13}g_{15}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{125})g_{25}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}g_{45}^{-1}(\partial(h_{245})^{-1}\partial(h_{125})^{-1}\partial(h_{145}))g_{45}g_{14}g_{15}^{-1}\big) \\ &= \delta_G\big(\partial(h_{125})g_{25}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}(g_{34}g_{23}^{-1}g_{24}^{-1})g_{45}^{-1}(g_{45}g_{24}^{-1}g_{25}^{-1})\partial(h_{125})^{-1}e\big) \\ &= \delta_G(e). \end{aligned} \tag{E.47}$$

Slično,

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{126}) &= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{12}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{23}^{-1}\partial(h_{123})^{-1}g_{13}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}\partial(h_{124})^{-1}\partial(h_{134})g_{34}g_{13}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}g_{45}^{-1}\partial(h_{245})^{-1}\partial(h_{125})^{-1}\partial(h_{145})g_{45}\partial(h_{134})g_{34}g_{13}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}\partial(h_{234})^{-1}g_{45}^{-1}\partial(h_{245})^{-1}g_{56}^{-1}\partial(h_{256})^{-1}\partial(h_{126})^{-1}\partial(h_{156})g_{56} \\
&\quad \partial(h_{145})g_{45}g_{14}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{126})g_{26}g_{23}^{-1}g_{34}^{-1}(g_{34}g_{23}^{-1}g_{24}^{-1})g_{45}^{-1}(g_{45}g_{24}^{-1}g_{25}^{-1})g_{56}^{-1}(g_{56}g_{25}^{-1}g_{26}^{-1})\partial(h_{126})^{-1} \\
&\quad (g_{16}g_{15}^{-1}g_{56}^{-1})g_{56}g_{15}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G(e).
\end{aligned}
\tag{E.48}
$$

Za $\delta_G(g_{135})$ dobijamo takođe

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{135}) &= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{13}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{34}^{-1}\, \partial(h_{134})^{-1}\, g_{14}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, \partial(h_{345})^{-1}\partial(h_{135})^{-1}\partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{14}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, \partial(h_{345})^{-1}\partial(h_{135})^{-1}\, \partial(h_{145})\, g_{45}\, g_{45}^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\, g_{15}\, g_{15}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{135})\, g_{35}\, g_{34}^{-1}\, g_{45}^{-1}\, (g_{45}\, g_{34}^{-1}\, g_{35}^{-1})\partial(h_{135})^{-1}\big) \\
&= \delta_G(e)\,,
\end{aligned}
\tag{E.49}
$$

kao i za $\delta_G(g_{136})$:

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{136}) &= \delta_G\big(\partial(h_{136})g_{36}g_{13}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{136})g_{36}g_{34}^{-1}\partial(h_{134})^{-1}g_{14}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{136})g_{36}g_{34}^{-1}g_{45}^{-1}\partial(h_{345})^{-1}\partial(h_{135})^{-1}\partial(h_{145})g_{45}g_{14}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{136})g_{36}g_{34}^{-1}g_{45}^{-1}\partial(h_{345})^{-1}g_{56}^{-1}\partial(h_{356})^{-1}\partial(h_{136})^{-1}\partial(h_{156})g_{56}\partial(h_{145})g_{45}g_{14}g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{136})g_{36}g_{34}^{-1}g_{45}^{-1}(g_{45}g_{34}^{-1}g_{35}^{-1})g_{56}^{-1}(g_{56}g_{35}^{-1}g_{36}^{-1})\partial(h_{136})^{-1}e\big) \\
&= \delta_H(e).
\end{aligned}
\tag{E.50}
$$

Najzad, preostala δ-funkcija $\delta_G(g_{146})$ na grupi G postaje

$$
\begin{aligned}
\delta_G(g_{146}) &= \delta_G\big(\partial(h_{146})\, g_{46}\, g_{14}\, g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{146})\, g_{46}\, (g_{45}^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\, g_{15})\, g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{146})\, g_{46}\, g_{45}^{-1}\, \partial(h_{145})^{-1}\, (g_{56}^{-1}\, \partial(h_{156})^{-1}\, g_{16})\, g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G\big(\partial(h_{146})\, g_{46}\, g_{45}^{-1}\, g_{56}^{-1}\partial(h_{456})^{-1}\partial(h_{146})^{-1}\partial(h_{156})g_{56}\, (g_{56}^{-1}\, \partial(h_{156})^{-1}\, g_{16})\, g_{16}^{-1}\big) \\
&= \delta_G(e)\,.
\end{aligned}
\tag{E.51}
$$

Zatim, integralimo l_{1235} koristeći $\delta_L(l_{12345})$, l_{1236} koristeći $\delta_L(l_{12346})$, l_{1246} koristeći $\delta_L(l_{12456})$ i l_{1346} koristeći $\delta_L(l_{13456})$,

$$
l_{1235} = (h_{125} \rhd' l_{2345}) l_{1245} h_{145} \rhd' (g_{45} \rhd l_{1234}) l_{1345}^{-1}\, h_{135} \rhd' \{h_{345}, (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{E.52}
$$

$$
l_{1236} = (h_{126} \rhd' l_{2346}) l_{1246} h_{146} \rhd' (g_{46} \rhd l_{1234}) l_{1346}^{-1}\, h_{136} \rhd' \{h_{346}, (g_{46}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{E.53}
$$

$$
l_{1246} = (h_{126} \rhd' l_{2456}) l_{1256} h_{156} \rhd' (g_{56} \rhd l_{1245}) {l_{1456}}^{-1}\, h_{146} \rhd' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \rhd h_{124}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{E.54}
$$

$$
l_{1346} = (h_{136} \rhd' l_{3456}) l_{1356} h_{156} \rhd' (g_{56} \rhd l_{1345}) {l_{1456}}^{-1}\, h_{146} \rhd' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \rhd h_{134}\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{E.55}
$$

Pokažimo da se sada preostale δ-funkcije na grupi H svedu na $\delta_H(e)^4$. Najpre, pravolinijskim računom dobijamo za $\delta_H(h_{1235})$:

$$
\begin{aligned}
\delta_H(h_{1235}) &= \delta_H\big(\delta(l_{1235}) h_{135} (g_{35} \rhd h_{123}) h_{235}^{-1} h_{125}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\Big(\delta\big((h_{125} \rhd' l_{2345}) l_{1245} h_{145} \rhd' (g_{45} \rhd l_{1234}) l_{1345}^{-1} h_{135} \rhd' \{h_{345}, (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\big) h_{135} \\
&\quad (g_{35} \rhd h_{123}) h_{235}^{-1} h_{125}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H\Big(\big(h_{125}\delta(l_{2345}) h_{125}^{-1} \delta(l_{1245}) h_{145} (g_{45} \rhd \delta(l_{1234})) h_{145}^{-1} \delta(l_{1345})^{-1} h_{135} \delta(\{h_{345}, (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}) h_{135}^{-1}\big) \\
&\quad h_{135} (g_{35} \rhd h_{123}) h_{235}^{-1} h_{125}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H\Big(h_{235} h_{345} (g_{45} \rhd h_{234}^{-1}) h_{245}^{-1} h_{125}^{-1} h_{125} h_{245} (g_{45} \rhd h_{124}^{-1}) h_{145}^{-1} h_{145} (g_{45} \rhd (h_{124} h_{234} (g_{34} \rhd h_{123}^{-1}) h_{134}^{-1})) \\
&\quad h_{145}^{-1} (h_{145} (g_{45} \rhd h_{134}) h_{345}^{-1} h_{135}^{-1}) h_{135} \delta(\{h_{345}, (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}) h_{135}^{-1} h_{135} (g_{35} \rhd h_{123}) h_{235}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H(h_{345}\big((g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}^{-1}\big) h_{345}^{-1} \delta(\{h_{345}, (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}) (g_{35} \rhd h_{123}).
\end{aligned}
\tag{E.56}
$$

Iskoristivši identitet

$$
\delta\{h_1\,, h_2\}_{\mathrm{pf}} (\partial(h_1) \rhd h_2) h_1 h_2^{-1} h_1^{-1} = e\,, \tag{E.57}
$$

i jednačinu $g_{35} = \partial(h_{345}) g_{45} g_{34}$, pri čemu za elemente h_1 i h_2 biramo $h_1 = h_{345}$ i $h_2 = (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}$, dobijamo

$$
\delta_H(h_{1235}) = \delta_H(e). \tag{E.58}
$$

Analognim postupkom za vrednost δ-funkcije $\delta_H(h_{1236})$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta_H(h_{1236}) &= \delta_H\big(\delta(l_{1236})h_{136}(g_{36}\triangleright h_{123})h_{236}^{-1}h_{126}^{-1}\big) \\
&= \delta_H\Big(\delta\big((h_{126}\triangleright' l_{2346})l_{1246}h_{146}\triangleright'(g_{46}\triangleright l_{1236}l_{1346}^{-1}h_{136}\triangleright'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\big)h_{136}(g_{36}\triangleright h_{123})h_{236}^{-1}h_{126}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H\Big(\big(h_{126}\delta(l_{2346})h_{126}^{-1}\delta(l_{1246})h_{146}(g_{46}\triangleright\delta(l_{1234}))h_{146}^{-1}\delta(l_{1346})^{-1}h_{136}\delta(\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}})h_{136}^{-1}\big) \\
&\quad h_{136}(g_{36}\triangleright h_{123})h_{236}^{-1}h_{126}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H\Big(h_{236}h_{346}(g_{46}\triangleright h_{234}^{-1})h_{246}^{-1}h_{126}^{-1}h_{126}h_{246}(g_{46}\triangleright h_{124}^{-1})h_{146}^{-1}h_{146}(g_{46}\triangleright(h_{124}h_{234}(g_{34}\triangleright h_{123}^{-1})h_{134}^{-1})) \\
&\quad h_{146}^{-1}(h_{146}(g_{46}\triangleright h_{134})h_{346}^{-1}h_{136}^{-1})h_{136}\delta(\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}})h_{136}^{-1}h_{136}(g_{36}\triangleright h_{123})h_{236}^{-1}\Big) \\
&= \delta_H(h_{346}\big((g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}^{-1}\big)h_{346}^{-1}\delta(\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}})(g_{36}\triangleright h_{123}).
\end{aligned} \tag{E.59}$$

Koristeći jednačinu $g_{36} = \partial(h_{346})g_{46}g_{34}$, i identitet (2.6) gde su $h_1 = h_{346}$ i $h_2 = (g_{46}g_{34}) \triangleright h_{123}$, dobijamo:

$$\delta_H(h_{1236}) = \delta_H(e)\,. \tag{E.60}$$

Sličnim postupkom dobijamo da su δ-funkcije $\delta_H(h_{1246}) = \delta_H(h_{1346}) = \delta_H(e)$. Preostala δ-funkcija na grupi L je $\delta_L(l_{12356})$,

$$\delta_L(l_{12356}) = \delta_L\big({l_{1236}}^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2356})l_{1256}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1235}){l_{1356}}^{-1}h_{136}\triangleright'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\big). \tag{E.61}$$

Koristeći jednačine (E.52), (E.53), (E.54) i (E.55), dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) &= \delta_L\Big(h_{136}\triangleright'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}(h_{136}\triangleright' l_{3456})l_{1356}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345}){l_{1456}}^{-1} \\
&\quad h_{146}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}h_{146}\triangleright'(g_{46}\triangleright l_{1234})^{-1}h_{146}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}l_{1456} \\
&\quad h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1}l_{1256}^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2456})^{-1}(h_{126}\triangleright' {l_{2346}}^{-1})(h_{126}\triangleright' l_{2356})l_{1256} \\
&\quad h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright((h_{125}\triangleright' l_{2345})l_{1245}h_{145}\triangleright'(g_{45}\triangleright l_{1234})l_{1345}^{-1}h_{135}\triangleright'\{h_{345},(g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}})) \\
&\quad {l_{1356}}^{-1}h_{136}\triangleright'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\Big).
\end{aligned} \tag{E.62}$$

Koristeći identitet (2.62) δ-funkcija $\delta_L(l_{12356})$ se svede na:

$$\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) &= \delta_L\Big((h_{136}\triangleright' l_{3456})l_{1356}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345}){l_{1456}}^{-1} \\
&\quad h_{146}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}h_{146}\triangleright'(g_{46}\triangleright l_{1234})^{-1}h_{146}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}l_{1456} \\
&\quad \delta(h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1})\triangleright'\Big(\big(\delta(l_{1256})^{-1}h_{126}\big)\triangleright'\big(l_{2456}^{-1}l_{2346}^{-1}l_{2356}\big)h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright(h_{125}\triangleright' l_{2345}))\Big) \\
&\quad h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright(h_{145}\triangleright'(g_{45}\triangleright l_{1234})l_{1345}^{-1})){l_{1356}}^{-1}(h_{136}h_{346})\triangleright'\{h_{346}^{-1}h_{356}g_{56}\triangleright h_{345},(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\Big).
\end{aligned} \tag{E.63}$$

Posle komutacije elemenata, δ-funkcija se svodi na

$$\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) &= \delta_L\Big((h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright\delta(l_{1245})^{-1})\delta(l_{1256})^{-1}h_{126})\triangleright'\big(l_{2456}^{-1}l_{2346}^{-1}l_{2356}h_{256}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345})\big) \\
&\quad h_{156}\triangleright'\big(g_{56}\triangleright(h_{145}\triangleright'(g_{45}\triangleright l_{1234})l_{1345}^{-1})\big){l_{1356}}^{-1}(h_{136}h_{346})\triangleright'\{h_{346}^{-1}h_{356}g_{56}\triangleright h_{345},(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
&\quad h_{136}\triangleright' l_{3456}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\triangleright'\big(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}\big) \\
&\quad (\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\triangleright'\big((g_{46}\triangleright l_{1234})^{-1}\big)(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}\Big).
\end{aligned} \tag{E.64}$$

Tetraedar (3456) je deo podintegralne funkcije sa obe strane poteza, pa možemo koristiti identitet (9.19) za $\delta_H(h_{3456})$, odnosno jednakost $h_{346}^{-1}h_{356}g_{56} \rhd h_{345} = h_{346}^{-1} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}h_{456}$. Zatim, primenom identiteta (2.62) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\{h_{346}^{-1}h_{356}g_{56} \rhd h_{345}, (g_{56}g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} &= \{h_{346}^{-1} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}h_{456}, (g_{56}g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
&= \big(h_{346}^{-1} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}\big) \rhd' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
&\quad \{h_{346}^{-1} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}, (g_{46}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
&= h_{346}^{-1} \rhd' l_{3456}^{-1}\{h_{456}, (g_{56}g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
&\quad \big((g_{46}g_{34}) \rhd h_{123}h_{346}^{-1}\big) \rhd' l_{3456}\,,
\end{aligned}
\tag{E.65}
$$

gde smo u zadnjem redu iskoristili definiciju dejstva $\rhd'$ grupe H na grupu L. Zamenom jednakosti (E.65) u jednačinu (E.64) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\Big((h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1245})^{-1})\delta(l_{1256})^{-1}h_{126}\delta(l_{2456})^{-1})\rhd'\Big(l_{2346}^{-1}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345})l_{2456}^{-1}\Big) \\
& h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd(h_{145}\rhd'(g_{45}\rhd l_{1234})))(h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1345})^{-1})\delta(l_{1356})^{-1}h_{136}\delta(l_{3456})^{-1}h_{346})\rhd' \\
& \big(\{h_{456},(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}((g_{46}g_{34})\rhd h_{123})\rhd' l_{3456}\big)(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\big(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\mathrm{pf}}\big) \\
& (\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\big((g_{46}\rhd l_{1234})^{-1}\big)(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}\Big).
\end{aligned}
\tag{E.66}
$$

Komutiranjem elementa l_{3456} na kraj izraza, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\big((h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1245})^{-1})\delta(l_{1256})^{-1}h_{126}\delta(l_{2456})^{-1})\rhd'\big(l_{2346}^{-1}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345})l_{2456}^{-1}\big) \\
& h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd(h_{145}\rhd'(g_{45}\rhd l_{1234})))(h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1345})^{-1})\delta(l_{1356})^{-1}h_{136}\delta(l_{3456})^{-1}h_{346})\rhd' \\
& \big(\{h_{456},(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\big)(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\big(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\mathrm{pf}}\big) \\
& (\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\big((g_{46}\rhd l_{1234})^{-1}\big)(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1} \\
& (h_{156}g_{56}\rhd h_{145}h_{246}g_{46}\rhd h_{234}h_{346}^{-1})\rhd' l_{3456}\big)\big).
\end{aligned}
\tag{E.67}
$$

Delovanjem na ceo argument δ-funkcije sa $(h_{156} \rhd' (g_{56} \rhd \delta(l_{1245})^{-1})\delta(l_{1256})^{-1}h_{126}\delta(l_{2456})^{-1})^{-1} \rhd'$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\big(l_{2346}^{-1}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345})l_{2456}^{-1}\big(h_{246}h_{456}(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}^{-1}\big)\rhd' \\
& \Big((g_{56}g_{45})\rhd l_{1234}\big((g_{56}g_{45})\rhd h_{134}h_{456}^{-1}\big)\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \\
& h_{456}^{-1}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\mathrm{pf}}h_{456}^{-1}\rhd g_{46}\rhd l_{1234}^{-1}\big(h_{456}^{-1}g_{46}\rhd h_{124}\big)\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}^{-1}\}_{\mathrm{pf}}\Big) \\
& (h_{246}g_{46}\rhd h_{234}h_{346}^{-1})\rhd' l_{3456}.
\end{aligned}
\tag{E.68}
$$

Nakon što iskoristimo identitet (2.63) za $\{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \rhd (h_{134}g_{34} \rhd h_{123})\}_{\mathrm{pf}}$, tj. jednakost

$$
\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd(h_{134}g_{34}\rhd h_{123})\}_{\mathrm{pf}} = \{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\mathrm{pf}}(g_{46}\rhd h_{134})\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}},
\tag{E.69}
$$

izraz se svodi na:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12356}) \;&=\; \delta_L\big(l^{-1}_{2346}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345})l^{-1}_{2456}\\ &\quad h_{246}\rhd'\Big(\big(h_{456}(g_{56}g_{45})\rhd h^{-1}_{124}\big)\rhd'\Big((g_{56}g_{45})\rhd l_{1234}h^{-1}_{456}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd(h_{134}g_{34}\rhd h_{123})\}_{\mathrm{pf}}\\ &\quad h^{-1}_{456}\rhd g_{46}\rhd l^{-1}_{1234}\Big)\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h^{-1}_{124}\}_{\mathrm{pf}}\Big)(h_{246}g_{46}\rhd h_{234}h^{-1}_{346})\rhd' l_{3456}.\end{aligned} \tag{E.70}$$

Zatim, primenom identiteta (2.63) na član $\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd(h^{-1}_{124}\delta(l_{1234})h_{134}g_{34}\rhd h_{123})\}_{\mathrm{pf}}$ vidimo da se članovi sa l_{1234} ponište, tj. dobijamo izraz,

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12356}) \;&=\; \delta_L\big(l^{-1}_{2346}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345})l^{-1}_{2456}\\ &\quad h_{246}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd(h^{-1}_{124}\delta(l_{1234})h_{134}g_{34}\rhd h_{123})\}_{\mathrm{pf}}(h_{246}g_{46}\rhd h_{234}h^{-1}_{346})\rhd' l_{3456}\\ &=\; \delta_L\big({l_{2346}}^{-1}l_{2356}h_{256}\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345}){l_{2456}}^{-1}h_{246}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{234}\}_{\mathrm{pf}}(\delta(l_{2346})^{-1}h_{236})\rhd' l_{3456})\big)\\ &=\; \delta_L(l_{23456}).\end{aligned} \tag{E.71}$$

Zaključujemo da se preostala δ-funkcija $\delta_L(l_{12356})$ sa desne strane poteza svodi na delta funkciju $\delta_L(l_{23456})$ sa leve strane poteza. Integracije po elementima l_{1234}, l_{1245}, l_{1256}, l_{1345}, l_{1356} i l_{1456} su trivijalne i konačan izraz sa integral sa desne strane je:

$$d.s. = \delta_G(e)^6\delta_H(e)^4\delta_L(l_{23456}) = |G|^6|H|^4\delta_L(l_{23456})\,. \tag{E.72}$$

Razlika u faktorima u izrazima (E.43) i (E.72) kompenzovana je konstantama ispred integrala – faktorom $|G|^{-11}|H|^{-4}|L|^{-1}$ sa desne strane i faktorom $|G|^{-5}|H|^{0}|L|^{-1}$ sa leve strane. Zaključujemo da je suma (9.22) invarijantna na $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerov potez.

Pahnerov potez $2 \leftrightarrow 4$

Najpre analizirajmo *levu stranu poteza*, izraz

$$\int_L dl_{2345}\delta_H(h_{2345})\delta_L(l_{23456})\delta_L(l_{12345})\,. \tag{E.73}$$

Prvo integralimo l_{2345} koristeći δ-funkciju $\delta_L(l_{12345})$,

$$l_{2345} = {h_{125}}^{-1}\rhd'\left(l_{1235}h_{135}\rhd'\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}^{-1}_{\mathrm{pf}}l_{1345}h_{145}\rhd'(g_{45}\rhd l_{1234})^{-1}l^{-1}_{1245}\right). \tag{E.74}$$

Preostala δ-funkcija na grupi H $\delta_H(h_{2345})$ sada postaje,

$$\begin{aligned}\delta_H(h_{2345}) \;&=\; \delta_H\big(\delta(l_{2345})h_{245}(g_{45}\rhd h_{234})h^{-1}_{345}h^{-1}_{235}\big)\\ &=\; \delta_H\Big({h_{125}}^{-1}\delta(l_{1235})h_{135}\delta(\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}^{-1}_{\mathrm{pf}})h^{-1}_{135}\delta(l_{1345})h_{145}(g_{45}\rhd\delta(l_{1234}))^{-1}h^{-1}_{145}\\ &\quad \delta(l_{1245})^{-1}h_{125}h_{245}(g_{45}\rhd h_{234})h^{-1}_{345}h^{-1}_{235}\big).\end{aligned} \tag{E.75}$$

Primenom identiteta (9.19) za tetraedre (1235), (1345), (1234) i (1245) izraz (E.75) se svodi na:

$$\begin{aligned}\delta_H(h_{2345}) \;&=\; \delta_H\Big({h_{125}}^{-1}h_{125}h_{235}(g_{35}\rhd h^{-1}_{123})h^{-1}_{135}h_{135}\delta(\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}^{-1}_{\mathrm{pf}})h^{-1}_{135}h_{135}h_{345}(g_{45}\rhd h^{-1}_{134})\\ &\quad h^{-1}_{145}h_{145}g_{45}\rhd(h_{134}(g_{34}\rhd h_{123})h^{-1}_{234}h^{-1}_{124})h^{-1}_{145}h_{145}(g_{45}\rhd h_{124})h^{-1}_{245}h^{-1}_{125}h_{125}h_{245}(g_{45}\rhd h_{234})h^{-1}_{345}h^{-1}_{235}\big)\\ &=\; \delta_H\Big((g_{35}\rhd h^{-1}_{123})\delta(\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}^{-1}_{\mathrm{pf}})h_{345}(g_{45}g_{34})\rhd h_{123})h^{-1}_{345}\big).\end{aligned} \tag{E.76}$$

Zatim, primenom identiteta (2.6) za $h_1 = h_{345}$ i $h_2 = (g_{45}g_{34}) \triangleright h_{123}$ i identiteta $g_{35} = \partial(h_{345})g_{45}g_{34}$ dobijamo:

$$\delta_H(h_{2345}) = \delta_H(e)\,. \tag{E.77}$$

Preostala δ-funkcija na grupi L $\delta_L(l_{23456})$ je

$$\delta_L(l_{23456}) = \delta_L\big({l_{2346}}^{-1}(h_{236}\triangleright' l_{3456})l_{2356}h_{256}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345}){l_{2456}}^{-1}h_{246}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}\big)\,. \tag{E.78}$$

Primenom jednačine (E.75) dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{23456}) \;=\; & \delta_L\Big({l_{2346}}^{-1}(h_{236}\triangleright' l_{3456})l_{2356}h_{256}\triangleright'\Big(g_{56}\triangleright\big({h_{125}}^{-1}\triangleright'\big(l_{1235}h_{135}\triangleright'\{h_{345},(g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}^{-1} \\ & l_{1345}h_{145}\triangleright'(g_{45}\triangleright l_{1234})^{-1}l_{1245}^{-1}\big)\big)\Big){l_{2456}}^{-1}h_{246}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}\Big)\,.\end{aligned} \tag{E.79}$$

Komutiranjem elemenata dobijamo izraz:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{23456}) \;=\; & \delta_L\Big({l_{2456}}^{-1}{l_{2346}}^{-1}l_{2356}(h_{256}g_{56}\triangleright {h_{125}}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1235}\big(h_{256}g_{56}\triangleright {h_{125}}^{-1}g_{56}\triangleright h_{135}\big)\triangleright' \\ & \Big((g_{35}\triangleright h_{123}h_{356}^{-1})\triangleright' l_{3456})\{g_{56}\triangleright h_{345},(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}(g_{56}\triangleright h_{345}(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{123}h_{234}^{-1})h_{456}^{-1})\triangleright' \\ & \{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}\Big)(h_{256}g_{56}\triangleright {h_{125}}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1345} \\ & (h_{256}g_{56}\triangleright {h_{125}}^{-1}g_{56}\triangleright h_{145})\triangleright'((g_{56}g_{45})\triangleright l_{1234})^{-1}(h_{256}g_{56}\triangleright {h_{125}}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1245}^{-1}\Big)\,.\end{aligned} \tag{E.80}$$

Naposletku, leva strana poteza je:

$$l.s. = \delta_H(e)\delta_L(l_{23456}) = |H|\delta_L(l_{23456})\,. \tag{E.81}$$

Ispitajmo sada čemu je jednaka *desna strana poteza*, tj. integral (9.26). Prvo integralimo g_{16} koristeći $\delta_G(g_{126})$,

$$g_{16} = \partial(h_{126})\, g_{26}\, g_{12}\,. \tag{E.82}$$

Zatim, integralimo h_{126} koristeći $\delta_H(h_{1236})$, h_{136} koristeći $\delta_H(h_{1346})$ i h_{146} koristeći $\delta_H(h_{1456})$, na osnovu čega dobijamo

$$\begin{aligned} h_{126} &= \delta(l_{1236})h_{136}\,(g_{36}\triangleright h_{123})\,h_{236}^{-1}\,, \\ h_{136} &= \delta(l_{1346})h_{146}\,(g_{46}\triangleright h_{134})\,h_{346}^{-1}\,, \\ h_{146} &= \delta(l_{1456})h_{156}\,(g_{56}\triangleright h_{145})\,h_{456}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{E.83}$$

Preostale tri δ-funkcije na grupi G svode se na $\delta_G(e)^3$. Lako možemo pokazati da δ-funkcija $\delta_G(g_{136})$,

$$\delta_G(g_{136}) = \delta_G\big(\partial(h_{136})\, g_{36}\, g_{13}\, g_{16}^{-1}\big)\,, \tag{E.84}$$

posle zamene jednačine (E.82) postaje:

$$\delta_G(g_{136}) = \delta_G\big(\partial(h_{136})\, g_{36}\, g_{13}\, g_{12}^{-1}g_{26}^{-1}\partial(h_{126})^{-1}\big)\,. \tag{E.85}$$

Koristeći identitet (E.83) za elemente h_{126}, h_{136} i h_{146} i činjenicu da je $\partial(\delta l) = 0$ za svaki element $l \in L$, a nakon primene identiteta (9.18) za trouglove (156), (145), (456) (134), (346), (236) i (123), δ-funkcija $\delta_G(g_{136})$ postaje $\delta_G(e)$. Slično se pokazuje da važi $\delta_G(g_{146}) = \delta_G(g_{156}) = \delta_G(e)$. Zatim, integralimo l_{1236} koristeći $\delta_L(l_{12346})$ i dobijamo

$$l_{1236} = (h_{126}\triangleright' l_{2346})l_{1246}h_{146}\triangleright'(g_{46}\triangleright l_{1234})l_{1346}^{-1}\,h_{136}\triangleright'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{E.86}$$

l_{1246} koristeći $\delta_L(l_{12456})$,

$$l_{1246} = (h_{126} \rhd' l_{2456}) l_{1256} h_{156} \rhd' (g_{56} \rhd l_{1245}) l_{1456}{}^{-1}\, h_{146} \rhd' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \rhd h_{124}\}_{\rm pf}\,, \tag{E.87}$$

i l_{1346} koristeći $\delta_L(l_{13456})$,

$$l_{1346} = (h_{136} \rhd' l_{3456}) l_{1356} h_{156} \rhd' (g_{56} \rhd l_{1345}) l_{1456}{}^{-1}\, h_{146} \rhd' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \rhd h_{134}\}_{\rm pf}\,. \tag{E.88}$$

Preostale δ-funkcije na grupi H svode se na $\delta_H(e)^3$, sličnim postupkom kao i u slučaju $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza, tj. dobijamo $\delta_H(h_{1256}) = \delta_H(h_{1356}) = \delta_H(h_{1456}) = \delta_H(e)$. Preostala δ-funkcija na grupi L, funkcija $\delta_L(l_{12356})$ glasi:

$$\delta_L(l_{12356}) = \delta_L\Big(l_{1236}{}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2356}) l_{1256} h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1235}) l_{1356}{}^{-1} h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\rm pf}\Big). \tag{E.89}$$

Nakon zamene jednačina (E.86), (E.87) i (E.88), dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) &= \delta_L\Big(h_{136}\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\rm pf}{}^{-1} l_{1346} h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})^{-1} l_{1246}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})^{-1} \\
&\quad (h_{126}\rhd' l_{2356}) l_{1256} h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1235}) l_{1356}{}^{-1} h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\rm pf}\Big) \\
&= \delta_L\Big((h_{126}\rhd' l_{2456})^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2356})(h_{256}g_{56}\rhd h_{125}{}^{-1})\rhd' l_{1235} \\
&\quad \delta(l_{1256})\rhd'\Big(\delta(l_{1356})^{-1}\rhd'\big(h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\rm pf}(h_{136}h_{346})\rhd'\{h_{346}^{-1},g_{36}\rhd h_{123}\}_{\rm pf} \\
&\quad (h_{136}\rhd' l_{3456})\big) h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1345}) l_{1456}{}^{-1} h_{146}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\rm pf} h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})^{-1} \\
&\quad h_{146}\rhd'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}\}_{\rm pf}^{-1} l_{1456} h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1245})^{-1}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{E.90}$$

Komutiranjem elemenata kako bi se redosled elemenata slagao sa redosledom na levoj strani poteza, tj. sa δ-funkcijom (E.80), i primenom identiteta (2.62), tj.

$$\{h_{346}^{-1}h_{356}, (g_{56}g_{35}) \rhd h_{123}\}_{\rm pf} = h_{346}^{-1} \rhd' \{h_{356}, (g_{56}g_{35}) \rhd h_{123}\}_{\rm pf}\{h_{346}^{-1}, g_{36} \rhd h_{123}\}_{\rm pf}\,, \tag{E.91}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}
\delta_L(l_{12356}) &= \delta_L\Big((h_{126}\rhd' l_{2456})^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2356})(h_{126}h_{256}g_{56}\rhd h_{125}{}^{-1})\rhd' l_{1235} \\
&\quad \delta(l_{1256})\rhd'\Big(\delta(l_{1356})^{-1}\rhd'\big((h_{136}h_{346})\rhd'\{h_{346}^{-1}h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\rm pf}(h_{136}\rhd' l_{3456})\big) \\
&\quad h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1345})(\delta(l_{1456})^{-1}h_{146})\rhd'\big(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{134}\}_{\rm pf}(g_{46}\rhd l_{1234})^{-1} \\
&\quad \{h_{456},(g_{56}g_{45})\rhd h_{124}\}_{\rm pf}^{-1}\big) h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1245})^{-1}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{E.92}$$

Ponovnom primenom identita (2.62),

$$\begin{aligned}
&(h_{136}h_{346}) \rhd' \{h_{346}^{-1}h_{356}, (g_{56}g_{35}) \rhd h_{123}\}_{\rm pf}(h_{136} \rhd' l_{3456}) = \\
&(h_{136}h_{346}) \rhd' \{h_{346}^{-1} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}h_{456}g_{56} \rhd h_{345}^{-1}, (g_{56}g_{35}) \rhd h_{123}\}_{\rm pf}(h_{136} \rhd' l_{3456}) = \\
&(h_{136} \rhd' \delta(l_{3456})^{-1}h_{136}h_{346}) \rhd' \big(\{h_{456}g_{56} \rhd h_{345}^{-1}, (g_{56}g_{35}) \rhd h_{123}\}_{\rm pf}((g_{46}g_{34}) \rhd h_{123}h_{346}^{-1}) \rhd' l_{3456}^{-1}\big)\,,
\end{aligned} \tag{E.93}$$

i zamenom ovog izraza u (E.92) dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\Big((h_{126}\triangleright' l_{2456})^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2346})^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2356})(h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright' l_{1235}\\ & \delta(l_{1256})\triangleright'\Big((\delta(l_{1356})^{-1}h_{136}\triangleright'\delta(l_{3456})^{-1}h_{136}h_{346})\triangleright'\\ & (\{h_{456}g_{56}\triangleright h_{345}^{-1},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}((g_{46}g_{34})\triangleright h_{123}h_{346}^{-1})\triangleright' l_{3456}))\\ & (h_{156}g_{56}\triangleright h_{135}g_{56}\triangleright(h_{345}g_{45}\triangleright h_{134}^{-1})h_{456}^{-1})\triangleright'(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}(g_{46}\triangleright l_{1234})^{-1}\\ & \{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1})\Big)(h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright'(h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1})\Big).\end{aligned} \tag{E.94}$$

Komutiranjem elementa l_{3456} i $\{h_{456}g_{56}\triangleright h_{345},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}$, a zatim korišćenjem identiteta (2.62), dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\Big((h_{126}\triangleright' l_{2456})^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2346})^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2356})(h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright' l_{1235}\\ & (h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1}h_{135}(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}g_{56}\triangleright h_{356}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{3456}\\ & (h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}^{-1}g_{56}\triangleright h_{135}g_{56}\triangleright h_{345})\triangleright'\Big(\{g_{56}\triangleright h_{345}^{-1},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\\ & h_{456}^{-1}\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}((g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}^{-1}h_{456}^{-1})\triangleright'(\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}(g_{46}\triangleright l_{1234})^{-1}\\ & \{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}^{-1})\Big)(h_{126}h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright'(h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1})\Big).\end{aligned} \tag{E.95}$$

Nakon sličnih transformacija kao i u slučaju $1 \leftrightarrow 5$ Pahnerovog poteza, komutiranjem elemenata l_{1234} kako bi poredak elemenata bio isti kao u (E.80), a zatim delovanjem na ceo izraz sa h_{126}^{-1}, dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12356}) \;=\; & \delta_L\Big(l_{2456}{}^{-1}l_{2346}{}^{-1}l_{2356}(h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1235}(h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1}g_{56}\triangleright h_{135})\triangleright'\\ & \Big((g_{35}\triangleright h_{123}h_{356}^{-1})\triangleright' l_{3456})\{g_{56}\triangleright h_{345},(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}(g_{56}\triangleright h_{345}(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{123}h_{234}^{-1})h_{456}^{-1})\triangleright'\\ & \{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}\Big)(h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1345}\\ & (h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1}g_{56}\triangleright h_{145})\triangleright'((g_{56}g_{45})\triangleright l_{1234})^{-1}(h_{256}g_{56}\triangleright h_{125}{}^{-1})\triangleright' g_{56}\triangleright l_{1245}^{-1}\Big).\end{aligned} \tag{E.96}$$

Ovaj izraz identičan je izrazu u jednačini (E.80). Preostale integracije – po elementu h_{156} grupe H i tri elementa grupe L, l_{1246}, l_{1256} i l_{1356}, su trivijalne, odnosno desna strana se konačno svodi na:

$$d.s. = \delta_G(e)^3\,\delta_H(e)^3\,\delta_L(l_{12356}) = |G|^3\,|H|^3\,\delta_L(l_{12356})\,. \tag{E.97}$$

Konstante ispred integrala su $|G|^{-8}|H|^{-1}|L|^{-1}$ sa leve strane poteza, odnosno $|G|^{-11}|H|^{-3}|L|^{-1}$ sa desne strane poteza, što kompenzuje razliku i izrazima (E.81) i (E.97), na osnovu čega zaključujemo da je suma po stanjima (9.22) invarijantna na $2 \leftrightarrow 4$ Pahnerov potez.

Pahnerov potez $3 \leftrightarrow 3$

Razmotrimo najpre desnu stranu poteza. Prvo integralimo l_{1235} koristeći $\delta_L(l_{12345})$

$$l_{1235} = (h_{125}\triangleright' l_{2345})l_{1245}h_{145}\triangleright'(g_{45}\triangleright l_{1234})l_{1345}{}^{-1}\,h_{135}\triangleright'\{h_{345},(g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}} \tag{E.98}$$

i l_{1236} koristeći $\delta_L(l_{12356})$,

$$l_{1236} = (h_{126}\triangleright' l_{2356})l_{1256}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1235})l_{1356}{}^{-1}h'_{136}\triangleright\{h_{356},(g_{56}g_{35})\triangleright h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\,. \tag{E.99}$$

Zatim, integralimo h_{123} koristeći $\delta_H(l_{1234})$ i dobijamo:

$$h_{123} = g_{34}^{-1} \rhd h_{134}^{-1}\, g_{34}^{-1} \rhd \delta(l_{1234})^{-1}\, g_{34}^{-1} \rhd h_{124}\, g_{34}^{-1} \rhd h_{234}. \tag{E.100}$$

Preostala δ-funkcija na grupi G, δ-funkcija $\delta_G(g_{123})$, nakon primene jednačine (E.100) postaje,

$$\delta_G(g_{123}) = \delta_G\big(g_{34}^{-1} \rhd \partial(h_{134})^{-1}\, g_{34}^{-1} \rhd \partial(\delta(l_{1234}))^{-1}\, g_{34}^{-1} \rhd \partial(h_{124})\, g_{34}^{-1} \rhd \partial(h_{234})\, g_{23}\, g_{12}\, g_{13}^{-1}\big)\,, \tag{E.101}$$

odnosno nakon primene identiteta $\partial\delta = 0$:

$$\delta_G(g_{123}) = \delta_G\big(\partial(h_{134})^{-1}\, \partial(h_{124})\, \partial(h_{234})\, g_{34}^{-1} g_{23}\, g_{12}\, g_{13}^{-1} g_{34}\big)\,. \tag{E.102}$$

Zatim, primenom identiteta (9.18) na trouglove (134), (124) i (234), dobijamo:

$$\delta_G(g_{123}) = \delta_G\big(e\big)\,. \tag{E.103}$$

Za δ-funkciju $\delta_H(h_{1235})$, nakon primene jednačine (E.98) dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_H(h_{1235}) \;=\; & \delta_H\Big((h_{125}\delta(l_{2345})h_{125}^{-1})\delta(l_{1245})(h_{145}(g_{45}\rhd\delta(l_{1234}))h_{145}^{-1})\delta(l_{1345})^{-1}h_{135}\rhd'\{h_{345},g_{35}\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}h_{135}\\ & ((g_{35}g_{34}{}^{-1})\rhd(h_{134}^{-1}\delta(l_{1234})^{-1}h_{124}h_{234}))h_{235}^{-1}h_{125}^{-1}\Big).\end{aligned} \tag{E.104}$$

Zatim, koristeći uslove (9.20) za δ-funkcije $\delta_L(h_{2345})$, $\delta_L(h_{1245})$ i$\delta_L(h_{1345})$, prisutne sa obe strane poteza,

$$\begin{aligned}\delta(l_{2345}) &= h_{235}\, h_{345}\, (g_{45} \rhd h_{234}^{-1})\, h_{245}^{-1}\,,\\ \delta(l_{1245}) &= h_{125}\, h_{245}\, (g_{45} \rhd h_{124}^{-1})\, h_{145}^{-1}\,,\\ \delta(l_{1345})^{-1} &= h_{145}\, (g_{45} \rhd h_{134})\, h_{345}^{-1}\, h_{135}^{-1}\,,\end{aligned} \tag{E.105}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_H(h_{1235}) \;=\; & \delta_H\Big(h_{125}h_{235}h_{345}(g_{45}\rhd h_{234}^{-1})h_{245}^{-1}h_{125}^{-1}h_{125}h_{245}(g_{45}\rhd h_{124}^{-1})h_{145}^{-1}h_{145}(g_{45}\rhd\delta(l_{1234}))h_{145}^{-1}\\ & h_{145}(g_{45}\rhd h_{134})h_{345}^{-1}h_{135}^{-1}h_{135}\rhd\delta(\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}})\\ & h_{135}((g_{35}g_{34}{}^{-1})\rhd(h_{134}^{-1}\delta(l_{1234})^{-1}h_{124}h_{234}))h_{235}^{-1}h_{125}^{-1}\Big)\\ =\; & \delta_H\Big(h_{345}(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}^{-1}h_{345}^{-1}\delta(\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}})(g_{35}\rhd h_{123})\Big).\end{aligned} \tag{E.106}$$

Primenom identiteta (2.6) za $h_1 = h_{345}$ i $h_2 = (g_{45}g_{34}) \rhd h_{123}$ i jednakosti $g_{35} = \partial(h_{345})g_{45}g_{34}$, dobijamo:

$$\delta_H(h_{1235}) = \delta_H(e). \tag{E.107}$$

Sličnim postupkom dobija se $\delta_H(h_{1236}) = \delta_H(e)$. Preostala δ-funkcija $\delta_H(l_{12346})$ je:

$$\delta_L(l_{12346}) = \delta_L\big(l_{1236}{}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})l_{1346}{}^{-1}h_{136}\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\mathrm{pf}}\big). \tag{E.108}$$

Zamenom izraza (E.99), a zatim izraza (E.98), dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12346}) &= \delta_L\big(h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}l_{1356}h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1235})^{-1}l_{1256}^{-1}h_{126}\rhd' l_{2356}^{-1}\\ &\quad (h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})l_{1346}{}^{-1}h_{136}\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}\big)\\ &= \delta_L\big(h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}l_{1356}\\ &\quad h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd((h_{125}\rhd' l_{2345})l_{1245}h_{145}\rhd'(g_{45}\rhd l_{1234})l_{1345}{}^{-1}h_{135}\rhd'\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}))^{-1}\\ &\quad l_{1256}^{-1}h_{126}\rhd' l_{2356}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})l_{1346}{}^{-1}h_{136}\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}\big).\end{aligned} \tag{E.109}$$

Komutiranjem elemenata, tj. korišćenjem Pajferovog identiteta za ukršteni modul $(L\xrightarrow{\delta}H,\rhd')$, dobijamo

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12346}) &= \delta_L\big(h_{136}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad (\delta(l_{1356})h_{156}g_{56}\rhd h_{135})\rhd' g_{56}\rhd\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}l_{1356}h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1345})\\ &\quad (h_{156}g_{56}\rhd h_{145})\rhd'((g_{56}g_{45})\rhd l_{1234})^{-1}h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1245})^{-1}(h_{156}g_{56}\rhd h_{125})\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345}^{-1})l_{1256}^{-1}\\ &\quad h_{126}\rhd' l_{2356}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})l_{1346}{}^{-1}h_{136}\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}\big)\\ &= \delta_L\big((\delta(l_{1346})^{-1}h_{136})\rhd'\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}(\delta(l_{1346})^{-1}h_{136})\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad ((\delta(l_{1346})^{-1}\delta(l_{1356})h_{156}g_{56}\rhd h_{135})\rhd' g_{56}\rhd\{h_{345},(g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad (\delta(l_{1346})^{-1}\delta(l_{1356})h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1345}))h_{156}g_{56}\rhd h_{145})\rhd'((g_{56}g_{45})\rhd l_{1234})^{-1}l_{1346}^{-1}l_{1356}h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1345})\\ &\quad h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1245})^{-1}(h_{156}g_{56}\rhd h_{125})\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345}^{-1})l_{1256}^{-1}h_{126}\rhd' l_{2356}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})\big).\end{aligned} \tag{E.110}$$

Primenom identiteta (2.65), tj. da je

$$\{h_{346},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}} = h_{346}\rhd'\{h_{346}^{-1},g_{36}\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\,, \tag{E.111}$$

a zatim varijante identiteta (2.62), tj. da je

$$\{h_1h_2h_3,h_4\}_{\text{pf}}^{-1} = \{h_1,\partial(h_2h_3)\rhd h_4\}_{\text{pf}}^{-1}h_1\rhd'\{h_2,\partial(h_2)\rhd h_4\}_{\text{pf}}^{-1}(h_1h_2)\rhd'\{h_3,h_4\}_{\text{pf}}^{-1}\,, \tag{E.112}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\rhd h_{345}),(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1} &= \{h_{346}^{-1},(g_{46}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}h_{346}^{-1}\rhd'\{h_{356},(g_{56}g_{35})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad (h_{346}^{-1}h_{356})\rhd'\{g_{56}\rhd h_{345},(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}.\end{aligned} \tag{E.113}$$

Primenom ove jednakosti u izrazu (E.110) dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12346}) &= \delta_L\big((h_{146}g_{46}\rhd h_{134})\rhd'\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\rhd h_{345}),(g_{56}g_{45}g_{34})\rhd h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad (\delta(l_{1346})^{-1}\delta(l_{1356})h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd\delta(l_{1345}))h_{156}g_{56}\rhd h_{145})\rhd'((g_{56}g_{45})\rhd l_{1234})^{-1}l_{1346}^{-1}l_{1356}h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1345})\\ &\quad h_{156}\rhd'(g_{56}\rhd l_{1245})^{-1}(h_{156}g_{56}\rhd h_{125})\rhd'(g_{56}\rhd l_{2345}^{-1})l_{1256}^{-1}h_{126}\rhd' l_{2356}^{-1}(h_{126}\rhd' l_{2346})l_{1246}h_{146}\rhd'(g_{46}\rhd l_{1234})\big).\end{aligned} \tag{E.114}$$

Primenom (E.100) i identiteta (2.63), dobijamo da važi jednakost,

$$\begin{aligned}\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1} &= \{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright((h_{134}^{-1}\triangleright'\delta(l_{1234})^{-1})h_{134}^{-1}h_{124}h_{234}\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &= (g_{46}\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright'\delta(l_{1234})^{-1}))\triangleright'\\ &\quad \{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad \{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright'\delta(l_{1234})^{-1})\}_{\text{pf}}^{-1}.\end{aligned} \tag{E.115}$$

Odnosno, kada raspišemo član

$$\begin{aligned}\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright'\delta(l_{1234})^{-1})\}_{\text{pf}}^{-1} &= (g_{46}\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright' l_{1234}^{-1}))\\ &\quad (h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}))\triangleright'((g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright' l_{1234})).\end{aligned} \tag{E.116}$$

izraz (E.115) je jednak:

$$\begin{aligned}\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45}g_{34})\triangleright h_{123}\}_{\text{pf}}^{-1} &= g_{46}\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright'\delta(l_{1234})^{-1})\\ &\quad \{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\text{pf}}^{-1}\\ &\quad (h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}))\triangleright'((g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}\triangleright' l_{1234})).\end{aligned} \tag{E.117}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (E.114) dobijamo da se članovi sa l_{1234} pokrate, pa sledi da je $\delta_L(l_{12346})$:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12346}) &= \delta_L\big((h_{146}g_{46}\triangleright h_{134})\triangleright'\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\text{pf}}^{-1}l_{1346}^{-1}l_{1356}\\ &\quad h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1}(h_{156}g_{56}\triangleright h_{125})\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345}^{-1})l_{1256}^{-1}h_{126}\triangleright' l_{2356}^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2346})l_{1246}\big).\end{aligned} \tag{E.118}$$

Iz ovog izraza primećujemo da je integracija po l_{1234} trivijana, pa za izraz sa desne strane Pahnerovog poteza konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}d.s. &= \delta_G(e)\delta_H(e)^2\delta_L\big(h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})^{-1}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright(h_{125}\triangleright' l_{2345}))^{-1}l_{1256}^{-1}h_{126}\triangleright' l_{2356}^{-1}(h_{126}\triangleright' l_{2346})\\ &\quad l_{1246}(h_{146}g_{46}\triangleright h_{134})\triangleright'\{h_{346}^{-1}h_{356}(g_{56}\triangleright h_{345}),(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\text{pf}}^{-1}l_{1346}^{-1}l_{1356}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345}).\end{aligned} \tag{E.119}$$

Analizirajmo sada levu stranu poteza, tj. integral:

$$\int_H dh_{456}\int_{L^3} dl_{1456}dl_{2456}dl_{3456}\delta_G(g_{456})\,\delta_H(h_{3456})\delta_H(h_{2456})\delta_H(h_{1456})\delta_L(l_{23456})\delta_L(l_{13456})\delta_L(l_{12456})\,. \tag{E.120}$$

Najpre, integralimo l_{1456} koristeći δ-funkciju $\delta_L(l_{13456})$ i dobijamo:

$$l_{1456} = h_{146}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}l_{1346}{}^{-1}(h_{136}\triangleright' l_{3456})l_{1356}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})\,. \tag{E.121}$$

Zatim, integralimo l_{2456}, koristeći $\delta_L(l_{23456})$,

$$l_{2456} = h_{246}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}l_{2346}{}^{-1}(h_{236}\triangleright' l_{3456})l_{2356}h_{256}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345})\,, \tag{E.122}$$

i h_{456} koristeći $\delta_H(h_{3456})$:

$$h_{456} = h_{346}^{-1}\,\delta(l_{3456})h_{356}\,(g_{56}\triangleright h_{345})\,. \tag{E.123}$$

Koristeći jednačinu (E.123), dobijamo da se δ-funkcija $\delta_G(g_{456})$,

$$\delta_G(g_{456}) = \delta_G\big(\partial(h_{346})^{-1}\,\partial(h_{356})\,g_{56} \triangleright \partial(h_{345})\,g_{56}\,g_{45}\,g_{46}^{-1}\big)\,, \tag{E.124}$$

primenom identiteta (9.18) za trouglove (346), (356) i (345), svodi na:

$$\delta_G(g_{456}) = \delta_G\big(e\big)\,. \tag{E.125}$$

Sličnim postupkom kao i sa desne strane poteza, dobijamo da su δ-funkcije $\delta_H(h_{1456})$ i $\delta_H(h_{2456})$, primenom jednačina (E.121) i (E.122), jednake $\delta_H(e)^2$. Preostala $\delta_L(l_{12456})$ je jednaka

$$\delta_L(l_{12456}) = \delta_L\big(l_{1246}{}^{-1}(h_{126} \triangleright' l_{2456})l_{1256}h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1245})l_{1456}{}^{-1}\,h_{146} \triangleright \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}\big). \tag{E.126}$$

Zamenom jednačina (E.121) i (E.122) u izraz za δ-funkciju $\delta_L(l_{12456})$ dobijamo,

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12456}) \;=\;& \delta_L\big(l_{1246}{}^{-1}(h_{126}\triangleright'(h_{246}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}l_{2346}{}^{-1}(h_{236}\triangleright' l_{3456})l_{2356}h_{256}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345})))\\ & l_{1256}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})^{-1}l_{1356}^{-1}(h_{136}\triangleright' l_{3456})^{-1}l_{1346}h_{146}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}\\ & h_{146}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}\big),\end{aligned} \tag{E.127}$$

odnosno posle komutacije elemenata:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12456}) \;=\;& \delta_L\big((\delta(l_{1246})^{-1}h_{126}h_{246})\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{234}\}_{\mathrm{pf}}(\delta(l_{1246})^{-1}h_{126}\triangleright\delta(l_{2346})^{-1}h_{126}h_{236})\triangleright' l_{3456}\\ & l_{1246}^{-1}h_{126}\triangleright' l_{2346}{}^{-1}h_{126}\triangleright' l_{2356}(h_{126}h_{256})\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{2345}))\\ & l_{1256}h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1245})h_{156}\triangleright'(g_{56}\triangleright l_{1345})^{-1}l_{1356}^{-1}l_{1346}(\delta(l_{1346})^{-1}h_{136})\triangleright' l_{3456}{}^{-1}\\ & h_{146}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}h_{146}\triangleright\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}\big).\end{aligned} \tag{E.128}$$

Primenom identiteta (2.68) za inverz Pajferovog podizanja $\{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \triangleright h_{134}\}_{\mathrm{pf}}^{-1}$, a zatim identiteta (2.63) za tri elementa, tj.

$$\{h_1, h_2h_3h_4\}_{\mathrm{pf}} = \{h_1, h_2\}_{\mathrm{pf}}(\partial(h_1) \triangleright h_2) \triangleright' \{h_1, h_3\}_{\mathrm{pf}}(\partial(h_1) \triangleright (h_2h_3)) \triangleright' \{h_1, h_4\}_{\mathrm{pf}}\,, \tag{E.129}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\mathrm{pf}} \;=\;& \{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{134}^{-1}\}_{\mathrm{pf}}(g_{46}\triangleright h_{134}^{-1})\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}\\ & (g_{46}\triangleright(h_{134}^{-1}h_{124}))\triangleright'\{h_{456},(g_{56}g_{45})\triangleright h_{124}\}_{\mathrm{pf}}.\end{aligned} \tag{E.130}$$

Ovaj identitet zatim možemo primeniti u jednačini (E.128), iz čega sledi jednakost:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12456}) \;=\;& \delta_L\big((\delta(l_{1246})^{-1}h_{126} \triangleright \delta(l_{2346})^{-1}h_{126}h_{236}) \triangleright' l_{3456}\\ & l_{1246}^{-1}h_{126} \triangleright' l_{2346}{}^{-1}h_{126} \triangleright' l_{2356}(h_{126}h_{256}) \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{2345})\,)\\ & l_{1256}h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1245})h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1345})^{-1}l_{1356}^{-1}l_{1346}(\delta(l_{1346})^{-1}h_{136}) \triangleright' l_{3456}{}^{-1}\\ & (h_{146}g_{46} \triangleright h_{134}) \triangleright' \{h_{456}, (g_{56}g_{45}) \triangleright (h_{134}^{-1}h_{124}h_{234})\}_{\mathrm{pf}}\big)\,.\end{aligned} \tag{E.131}$$

Primenom jednačine (E.123) i identiteta (2.62), sličnim postupkom kao i kod desne strane poteza dobijamo da članovi sa l_{3456} pokrate, tj. δ-funkcija $\delta_L(l_{12456})$ glasi:

$$\begin{aligned}\delta_L(l_{12456}) \quad = \quad & \delta_L\big(l_{1246}^{-1} h_{126} \triangleright' l_{2346}{}^{-1} h_{126} \triangleright' l_{2356} (h_{126} h_{256}) \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{2345})) l_{1256} h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1245}) \\ & h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1345})^{-1} l_{1356}^{-1} l_{1346} (h_{146} g_{46} \triangleright h_{134}) \triangleright' \{h_{456}, (g_{56} g_{45}) \triangleright (h_{134}^{-1} h_{124} h_{234})\}_{\mathrm{pf}}\big).\end{aligned} \tag{E.132}$$

Zaključujemo da je integral po l_{3456} trivijalan, pa konačno dobijamo da je leva strana poteza jednaka:

$$\begin{aligned} l.s. \quad = \quad & \delta_G(e) \delta_H(e)^2 \delta_L\big(h_{126} \triangleright' l_{2346} l_{1246} (h_{146} g_{46} \triangleright h_{134}) \triangleright' \{h_{456}, (g_{56} g_{45}) \triangleright (h_{134}^{-1} h_{124} h_{234})\}_{\mathrm{pf}}^{-1} l_{1346}^{-1} \\ & l_{1356} h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1345}) h_{156} \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{1245})^{-1} (h_{156} g_{56} \triangleright h_{125}) \triangleright' (g_{56} \triangleright l_{2345})^{-1} l_{1256}^{-1} h_{126} \triangleright' l_{2356}^{-1}\big).\end{aligned} \tag{E.133}$$

Izrazi (E.119) i (E.126) su identični, na osnovu čega zaključujemo da je suma po stanjima (9.2.1) invarijantna na $3 \leftrightarrow 3$ Pahnerov potez. Broj k-simpleksa sa obe strane $3 \leftrightarrow 3$ poteza je isti za sve k, tj. koeficijenti ispred integrala su jednaki u ovom slučaju i prema tome nisu od značaja.

Bibliography

[1] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.

[2] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant loop quantum gravity: An elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. Cambridge University Press, Dec. 2015, pp. 1–254.

[3] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.

[4] A. Ashtekar and J. Pullin, *Loop quantum gravity: the first 30 years*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.

[5] G. E. Ponzano and T. Regge, "*Semiclassical limit of Racah coefficients*," *Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics*, 1968.

[6] J. W. Barrett and L. Crane, "*Relativistic spin networks and quantum gravity*," *J. Math. Phys.*, vol. 39, pp. 3296–3302, 1998. arXiv: gr-qc/9709028 [gr-qc].

[7] ——, "*A Lorentzian signature model for quantum general relativity*," *Class. Quant. Grav.*, vol. 17, pp. 3101–3118, 2000. arXiv: gr-qc/9904025 [gr-qc].

[8] H. Ooguri, "*Topological lattice models in four-dimensions*," *Mod. Phys. Lett.*, vol. A7, pp. 2799–2810, 1992. arXiv: hep-th/9205090 [hep-th].

[9] J. Engle, E. Livine, R. Pereira, and C. Rovelli, "*LQG vertex with finite Immirzi parameter*," *Nucl. Phys.*, vol. B799, pp. 136–149, 2008. arXiv: 0711.0146 [gr-qc].

[10] L. Freidel and K. Krasnov, "*A new spin foam model for 4d gravity*," *Class. Quant. Grav.*, vol. 25, p. 125 018, 2008. arXiv: 0708.1595 [gr-qc].

[11] E. Bianchi, M. Han, C. Rovelli, W. Wieland, E. Magliaro, and C. Perini, "*Spinfoam fermions*," *Class. Quant. Grav.*, vol. 30, p. 235 023, 2013. arXiv: 1012.4719 [gr-qc].

[12] J. C. Baez and J. Huerta, "*An invitation to higher gauge theory*," *Gen. Rel. Grav.*, vol. 43, pp. 2335–2392, 2011. arXiv: 1003.4485 [hep-th].

[13] F. Girelli, H. Pfeiffer, and E. M. Popescu, "*Topological higher gauge theory: From BF to BFCG theory*," *J. Math. Phys.*, vol. 49, no. 3, p. 032 503, Mar. 2008. arXiv: 0708.3051 [hep-th].

[14] J. F. Martins and A. Miković, "*Lie crossed modules and gauge-invariant actions for 2-BF theories*," 2010. arXiv: 1006.0903 [hep-th].

[15] A. Miković and M. Vojinović, "*Poincaré 2-group and quantum gravity*," *Class. Quant. Grav.*, vol. 29, p. 165 003, 2012. arXiv: 1110.4694 [gr-qc].

[16] T. Radenković and M. Vojinović, "*Higher gauge theories based on 3-groups*," *J. High Energy Phys.*, vol. 2019, no. 10, p. 222, Oct. 2019. arXiv: 1904.07566 [hep-th].

[17] J. F. Martins and R. Picken, "*The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module*," *Differ. Geom. Appl.*, vol. 29, no. 2, pp. 179–206, Mar. 2011. arXiv: 0907.2566 [math].

[18] W. Wang, "*On 3-gauge transformations, 3-curvatures, and Gray-categories*," *J. Math. Phys.*, vol. 55, no. 4, p. 043 506, Apr. 2014. arXiv: 1311.3796v2 [math-ph].

[19] T. Radenković and M. Vojinović, "Gauge symmetry of the 3BF theory for a generic semistrict Lie three-group," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 39, no. 13, 135009, p. 135 009, Jul. 2022. DOI: 10.1088/1361-6382/ac6b78. arXiv: 2101.04049 [hep-th].

[20] A. Miković, M. A. Oliveira, and M. Vojinović, "*Hamiltonian analysis of the BFCG theory for a generic Lie 2-group*," Oct. 2016. arXiv: 1610.09621 [math-ph].

[21] ——, "*Hamiltonian analysis of the BFCG formulation of general relativity*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 36, no. 1, p. 015 005, Dec. 2018. arXiv: 1807.06354 [gr-qc].

[22] ——, "*Hamiltonian analysis of the BFCG theory for the Poincaré 2-group*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 33, no. 6, p. 065 007, Feb. 2016. arXiv: 1508.05635 [gr-qc].

[23] A. Miković and M. A. Oliveira, "*Canonical formulation of Poincaré BFCG theory and its quantization*," *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 47, no. 5, p. 58, 2015. arXiv: 1409.3751 [gr-qc].

[24] T. Radenković and M. Vojinović, "*Hamiltonian Analysis for the Scalar Electrodynamics as 3BF Theory*," *Symmetry*, vol. 12, no. 4, p. 620, 2020. arXiv: 2004.06901 [hep-th].

[25] T. Regge, "*General relativity without coordinates*," *Nuovo Cimento*, vol. 19, pp. 558–571, 1961.

[26] T. Porter, "*Interpretations of Yetter's notation of G-coloring: Simplical fibre bundles and non-Abelian cohomology*," *J. Knot Theory Ramif.*, vol. 05, pp. 687–720, 1996.

[27] T. Radenković and M. Vojinović, "Topological invariant of 4-manifolds based on a 3-group," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2022, no. 7, 105, p. 105, Jul. 2022. arXiv: 2201.02572 [hep-th].

[28] J. C. Baez and J. Huerta, "*An invitation to higher gauge theory*," *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 43, no. 9, pp. 2335–2392, Sep. 2011. arXiv: 1003.4485 [hep-th].

[29] J. Faria Martins and A. Miković, "*Lie crossed modules and gauge-invariant actions for 2-BF theories*," *arXiv e-prints*, Jun. 2010. arXiv: 1006.0903 [hep-th].

[30] D. Conduché, "*Modules croisés généralisés de longueur 2*," *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 34, no. 2, pp. 155–178, 1984.

[31] P. A. M. Dirac, "*Generalized hamiltonian dynamics*," *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, vol. 246, no. 1246, pp. 326–332, Aug. 1958.

[32] J. F. Plebanski, "*On the separation of Einsteinian substructures*," *J. Math. Phys.*, vol. 18, no. 12, pp. 2511–2520, 1977.

[33] S. W. MacDowell and F. Mansouri, "*Unified geometric theory of gravity and supergravity*," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, pp. 739–742, 14 Apr. 1977.

[34] M. Celada, D. González, and M. Montesinos, "*BF gravity*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 33, no. 21, p. 213 001, Oct. 2016. arXiv: 1610.02020 [gr-qc].

[35] C. Rovelli, "Zakopane lectures on loop gravity," 2011. arXiv: 1102.3660 [gr-qc].

[36] G. T. Horowitz, "*Exactly soluble diffeomorphism invariant theories*," *Commun.*, vol. 125, no. 3, pp. 417–437, Sep. 1989.

[37] M. Vojinović, "*Causal dynamical triangulations in the spincube model of quantum gravity*," *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 2, p. 24 058, 2016. arXiv: 1506.06839 [gr-qc].

[38] A. Miković and M. Vojinović, "*Categorical generalization of spinfoam models*," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 532, no. 1, p. 12 020, 2014. arXiv: 1512.06252 [gr-qc].

[39] L. Crane and M. D. Sheppeard, "*2-categorical Poincaré representations and state sum applications*," Jun. 2003. arXiv: math/0306440 [math].

[40] C. Saemann and M. Wolf, "*Six-Dimensional Superconformal Field Theories from Principal 3-Bundles over Twistor Space*," *Lett. Math. Phys.*, vol. 104, no. 9, pp. 1147–1188, May 2014. arXiv: 1305.4870 [hep-th].

[41] K. A. Meissner, "*Black-hole entropy in loop quantum gravity*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 21, no. 22, p. 5245, 2004.

[42] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, "*Quantum geometry and black hole entropy*," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 5, pp. 904–907, Feb. 1998. arXiv: gr-qc/9710007 [gr-qc].

[43] C. Rovelli and M. Smerlak, "*In quantum gravity, summing is refining*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 29, no. 5, 055004, p. 055 004, Mar. 2012. arXiv: 1010.5437 [gr-qc].

[44] U. Pachner, "*P.L. Homeomorphic Manifolds are Equivalent by Elementary Shellings*," *Eur. J. Comb.*, vol. 12, no. 2, pp. 129–145, 1991.

[45] S. K. Asante, B. Dittrich, F. Girelli, A. Riello, and P. Tsimiklis, "*Quantum geometry from higher gauge theory*," *Class. Quantum Gravity*, vol. 37, no. 20, 205001, p. 205 001, Oct. 2020. arXiv: 1908.05970 [gr-qc].

[46] A. Baratin and L. Freidel, "*A 2-categorical state sum model*," *J. Math. Phys.*, vol. 56, no. 1, 011705, p. 011 705, Jan. 2015. arXiv: 1409.3526 [math.QA].

[47] F. Girelli, M. Laudonio, and P. Tsimiklis, "*Polyhedron phase space using 2-groups: kappa-Poincaré as a Poisson 2-group*," May 2021. arXiv: 2105.10616 [hep-th].

[48] M. A. Oliveira, *The BFCG theory and canonical quantization of gravity*, 2018. arXiv: 1801.04818 [gr-qc].

Biografija

Tijana Radenković rođena je 21.3.1992. u Beogradu, gde je završila osnovnu školu "Miloš Crnjanski" i Matematičku gimnaziju 2011. godine. Upisala je Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu 2011. godine, smer teorijska i eksperimentalna fizika, gde je diplomirala 30.9.2016. sa prosečnom ocenom 9,33. Godine 2016. upisuje master akademske studije na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, koje završava 27.9.2017. odbranivši master tezu naslovljenu

"Kvantna gravitacija na deo po deo ravnim mnogostrukostima",

sa prosečnom ocenom 9,33. Master teza je fokusirana na pregled poznatih rezultata u teoriji spin-kub modela. Spin-kub model je poznat model kvantne gravitacije koji je generalizacija modela spinske pene u kontekstu 2-kategorija. Međutim, u literaturi je nedostajao pregledan rad koji bi omogućio lakše upoznavanje sa ovim modelom i osnovama neophodne matematike na kojoj se on zasniva. U Tijaninom master radu urađen je pregled Redže računa i 2-grupa u teoriji kategorija, a zatim je pokazano formiranje sume po stanjima u okviru Ponzano-Redže topološkog modela $3D$ gravitavije i Ouguri modela, topološkog sektora $4D$ gravitacije, zasnovanih na BF dejstvu. Pokazano je da je opšta relativnost ekvivalentna $BFCG$ dejstvu sa vezom i da je možemo posmatrati kao gradijentnu teoriju za Poenkareovu 2-grupu. Procedura kvantizacije za topološki deo teorije, tj. $BFCG$ dejstvo sprovedena je na sličan način kao u slučaju BF dejstva. Pokazano je da je problem prisutan u modelu spinske pene rešen njegovom kategorijskom generalizacijom: fundamentalne promenljive sada boje 3-kompleks dualne rešetke i dužine ivica u triangulaciji postaju osnovni stepeni slobode teorije. Teza je nagrađena od strane fonda "prof. Ljubomir Ćirković" kao najbolja master tezu odbranjena na Fizičkom fakultetu školske 2017/2018 godine.

Godine 2017. započinje doktorske studije na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogardu, na studijskom programu *Polja, čestice i gravitacija.* Prosečna ocena je 9,5. Istraživanje na doktorskim studijama radi pod mentorstvom dr. Marka Vojinovića. Od aprila 2018. Tijana je zaposlena na Institutu za fiziku u Beogradu kao istraživač pripravnik. Tijana se u svom naučnom radu tokom doktorskih studija bavi problemima kvantne gravitacije i njenog ujedinjenja sa ostalim fundamentalnim poljima. Naime, formalizam 2-grupa, odnosno 3-grupa predstavlja odličnu platformu za ujedinjenje svih interakcija.

Od 2011. do 2019. Tijana je radila honorarno pri programima Fizika i TEH u Istraživačkoj stanici Petnica, gde je pomagala u organizaciji seminara, laboratorijskih vežbi tokom seminara i držala predavanja. Pored dugogodišnjeg učestvovanju u radu istraživačke stanice, Tijana je iskustvo u predavanju stekla i školske 2016/2017 kada je bila zaposlena kao nastavnica fizike u X Beogradskoj gimnaziji, i školske 2019/2020 kada je predavala akustiku u muzičkim školama "Stanković", "Vatroslav Lisinski" i "Josip Slavenski".